Seminar Computeralgebra SS 2021 – Themen

Die ersten drei Vorträge haben das Buch *Steps in Commutative Algebra* von R. Y. Sharp als Primärquelle. Sie bauen aufeinander auf und sollten in der vorgegebenen Reihenfolge gehalten werden. Analoges gilt auch für die Themen 4–6. Alle anderen Vorträge (7–14) können in beliebiger Reihenfolge stattfinden.

1. Primideale und maximale Ideale (Vertiefung zu diesen bekannten Begriffen)

2. Primärzerlegung (Verallg. der PFZ vom HIB zum bel. Noeth. Ring, schreibe ein radikales Ideal als endl. Schnitt von Primidealen bzw. ein bel. Ideal als endl. Schnitt von Primäridealen (=passende Verallg. von Primidealen))

3. Lokalisierung (Bruchrechnen für Fortgeschrittene, bekanntes Bsp: Übergang von einem Int.bereich zu seinem Quot.kp., hier deutlich allgemeiner, sehr nützliches Werkzeug für die Alg. Geom.)

4. Starke Version des HNS

   Einführung in die elementare Algebraische Geometrie (Korrespondenz zwischen affinen Varietäten und radikalen Idealen) und eine nützliche Verallgemeinerung der HNS-Version aus der Computeralgebra. Primärquelle ist das Buch *Ideals, Varieties, and Algorithms* von Cox, Little, O'Shea.

5. Krull-Dimension

   In der Computeralgebra haben wir über null-dimensionale Ideale gesprochen. Das zugrunde liegende Dimensionskonzept ist nicht die aus LA1 bekannte Dimension eines Vektorraums, sondern die Krull-Dimension eines komm. Rings. Das ist der zentrale Dimensionsbegriff der Algebraischen Geometrie und entspricht (für $d = 0, 1, 2, 3$) unserem anschaulichen Dimensionskonzept. Quellen: *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry* von Kunz. Zerz: Skript Commutative Algebra.

6. Ganze Ringerweiterungen: Verallgemeinerung der algebraischen Körpererweiterungen. Sei R ein Teilring von S. Man nennt S ganz über R, wenn jedes $s \in S$ Nullstelle eines normierten Polynoms mit Koeff. in R ist. Analog gibt es Verallgemeinerungen von endl. KE, algebr. Abschluss etc. Anwendungen in der Theorie der Krull-Dimension. Quellen: Atiyah, MacDonald: *Introduction to Commutative Algebra*, S. 59–64. Zerz: Skript Algebraische Systemtheorie.

7. Gröbnerbasen für Moduln
8. Gröbnerbasen über Koeffizientenringen

   Die beiden GB-Vorträge sind zwei voneinander unabhängige Verallgemeinerungen der GB-Theorie aus der Computeralgebra: einmal von Koeffizientenkörpern zu (gewissen) Koeffizientenringen, und einmal von Idealen (also Untermoduln von $R := K[x_1, \ldots, x_n]$) zu Untermoduln von R^m. (Damit kann man dann auch LGS über R lösen, die aus mehr als einer Gleichung bestehen.) Primärquelle ist das Buch *An Introduction to Gröbner Bases* von Adams und Loustaunau.

9. Resultanten, Diskriminanten, Symmetrische Polynome

   Resultanten wurden in der Computeralgebra besprochen. Diskriminanten sind für quadratische Polynome schon aus der Schule bekannt. Das Polynom $f = ax^2+bx+c \in K[x]$ hat die Diskriminante $d := b^2-4ac$. Dieser Ausdruck unterscheidet etwa für $K = \mathbb{R}$, ob die Anzahl der reellen NS gleich 0, 1 oder 2 ist. Im Allgemeinen sind Diskriminanten spezielle Resultanten von f und seiner formalen Ableitung f'. Symmetrische Polynome sind solche, die sich bei einer Permutation der Variablen nicht ändern, etwa $x_1 + \ldots + x_n$ oder $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. Primärquelle ist das *Lehrbuch der Algebra* von Fischer.

10. Primitivwurzeln (1–2 Vorträge): Sei $n \in \mathbb{N}$. Ist die Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_n$ zyklisch? In Computeralgebra gesehen: Für $n = p \in \mathbb{P}$ lautet die Antwort ja, denn $\mathbb{Z}_p$ ist ein Körper und die Einheitengruppe eines endl. Kp. ist zyklisch. Wie sieht es für bel. n aus? Quellen: Remmert, Ullrich: *Elem. Zahlentheorie*, S. 223–235. Zerz: Skript Elem. Zahlentheorie.

11. bis 14. Funktoren (3 Vorträge): Zu jeder algebraischen Struktur (Gruppe, Ring, Modul etc.) gibt es ein zugehöriges Konzept strukturerhaltender Abbildungen. Der Begriff der Kategorie abstrahiert diese Idee: Man betrachtet Objekte und Morphismen (z.B. Gruppen mit Gruppenhomomorphismen). Strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien heißen Funktoren. Beispiel aus LA1: Kategorie $\mathcal{C}$ der K-VR mit K-linearen Abbildungen, Funktor $\mathrm{Hom}_K(\cdot, K) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ ordnet jedem VR V den dualen VR V^* zu und jeder linearen Abbildung f die duale Abbildung f^*.

    (a) Kovarianter Hom-Funktor
    (b) Kontravarianter Hom-Funktor
    (c) Tensorprodukt

    Quellen: Lam: *Lectures in Modules and Rings*, Abschnitte Projective Modules, Injective Modules, Flat Modules (sehr umfassend, quasi Nachschlagewerk). Zerz: Skript Commutative Algebra.