

Algorithmen zur Berechnung der Reinheitsfiltrierung eines Moduls und Anwendungen

von
Christian Schilli

Masterarbeit im Fach Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im Juni 2012

Erstgutachterin: Prof. Dr. Eva Zerz
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Julia Hartmann

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Die mathematische Ausgangslage	5
2.1	Basisbegriffe aus der Modul-Theorie	5
2.2	Die Weyl-Algebra	8
2.3	Homologische Algebra	10
2.4	Extensionsmoduln	17
3	Dimensionen von Ringen und Moduln	23
3.1	Projektive Dimension	23
3.1.1	Algorithmus: projektive Dimension	27
3.2	Allgemeines über Filtrierungen	31
3.3	Gelfand-Kirillov Dimension	34
4	Cohen-Macaulay und Auslander-reguläre Ringe	38
5	Reinheitsfiltrierung	43
5.1	Reine Moduln und Reinheitsfiltrierung	43
5.2	Berechnung der Reinheitsfiltrierung	48
5.2.1	Algorithmus: Reinheitsfiltrierung, Erzeuger	56
5.2.2	Algorithmus: Reinheitsfiltrierung, endliche Präsentierungen	58
6	Implementierung	61
7	Beispielrechnungen	64
7.1	Kommutative Beispiele	64
7.2	Legendre-Polynome	66
7.3	Hypergeometrische Funktionen	67

§ 1 Einleitung

Bei der Untersuchung von Differential- und Differenzengleichungen spielt die Modultheorie eine wichtige Rolle. Eine große Klasse solcher Gleichungen können wir in der Form $\ker_{\mathcal{F}}(R \cdot)$ schreiben, wobei $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$ eine Matrix ist, deren Einträge aus einem Ring \mathcal{D} stammen, und \mathcal{F} den Funktionen- oder Lösungsraum der gegebenen Differentialgleichung darstellt. Bernard Malgrange hat einen wichtigen Grundstein zur Untersuchung der Lösungen gelegt, indem er die Isomorphie

$$\ker_{\mathcal{F}}(R \cdot) \cong \text{hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{F})$$

bewiesen hat, mit $M = \text{coker}(\cdot R) = \mathcal{D}^{1 \times p} / \mathcal{D}^{1 \times q} R$. Deshalb werden wir in der vorliegenden Arbeit unser Augenmerk auf den Modul M richten.

Die Filtrierungen von Moduln, wie sie in [MR01] beschrieben werden, soll dabei eine erste Ausgangslage sein. Hierzu wird eine absteigende Kette von Untergruppen $\{(M_i, +)\}$ von M konstruiert, welche gewisse Voraussetzungen erfüllen sollen. Die Reinheitsfiltrierung, welche in der Arbeit [Qua11] von Alban Quadrat eingeführt wird, hat dabei besonders schöne Eigenschaften und hilft dabei, die Struktur der gesuchten Lösungsmenge besser analysieren zu können. Zunächst sind die M_i sogar Untermoduln des gegebenen Moduls M und da sie absteigend geordnet sind, können wir die Faktormoduln M_i/M_{i+1} bilden, die die Eigenschaft besitzen, dass sie i -rein sind. Der Begriff der Reinheit eines Moduls M beruht auf der sogenannten Gradzahl $j_{\mathcal{D}}(M)$, welche als kleinstes i definiert ist, für das der Exaktheitsdefekt $\text{ext}^i(M, \mathcal{D})$ ungleich 0 ist. Ist M nun $j_{\mathcal{D}}(M)$ -rein, so gilt für alle Untermoduln $0 \neq N \subseteq M$ ebenfalls $j_{\mathcal{D}}(N) = j_{\mathcal{D}}(M)$. Die Reinheit eines Moduls ist somit eine Abschwächung des Begriffs der Einfachheit, bei dem es keine echten Untermoduln geben kann, außer dem Nullmodul. Die letzte Eigenschaft ist algorithmisch allerdings schwer nachweisbar, wobei Reinheit einen besseren Zugang liefern kann.

Wir wollen einen groben Überblick über die einzelnen Kapitel dieser Arbeit geben. Der nach der Einleitung folgende Abschnitt beschäftigt sich größtenteils damit, eine mathematische Grundlage zu schaffen und die Objekte zu definieren, welche wir in den folgenden Kapiteln benötigen werden. Standardbegriffe aus der Modultheorie werden erläutert, bereits wohlbekannte Sätze und Aussagen getroffen und einige Werkzeuge bereitgestellt, welche wir in späteren Abschnitten verwenden werden.

Kapitel 3 beschäftigt sich daraufhin mit verschiedenen Dimensionsbegriffen. Wir betrachten zunächst projektive Auflösungen von Moduln und definieren die projektive Dimension eines Moduls (kurz: $\text{lpd}(M)$ bzw. $\text{rpd}(M)$), als die kleinste Länge solcher Auflösungen. Darauf basierend werden wir dann auch die globale projektive Dimension eines Ringes einführen, bezeichnet als $\text{gld}(\mathcal{D})$. Weiter geben wir ein Verfahren an, mit dem

man diese Dimension und eine zugehörige projektive Auflösung berechnen kann. Eine solche Auflösung wird dann Ausgangslage zur Berechnung der Reinheitsfiltrierung sein. Weiter führen wir die Gelfand-Kirillov Dimension eines Moduls ein, welche wir mit $\text{GKdim}(M)$ abkürzen. Diese löst in gewisser Weise die bekannte Krull-Dimension ab, welche im Falle eines nicht-kommutativen Ringes sehr schwer zu handhaben ist.

Um sicher zu stellen, dass die Reinheitsfiltrierung auch tatsächlich mit den hier dargestellten Methoden berechenbar ist, brauchen wir einige wichtige Voraussetzungen an den Ring \mathcal{D} . Besitzt dieser die sogenannte Auslander-Eigenschaft, d.h. $j_{\mathcal{D}}(N) \geq i$, für alle Untermoduln $N \subseteq \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$ und alle \mathcal{D} -Moduln M , so nennen wir einen Ring Auslander-regulär. In solchen Arten von Ringen sind die hier vorgestellten Verfahren zur Bestimmung von Reinheitsfiltrierungen durchführbar. Die kommutativen Polynomringe $K[x_1, \dots, x_n]$ sowie die n -te Weyl Algebra $A_n(K)$ für einen Körper K , erfüllen die gewünschte Bedingung, so dass wir in diesen Fällen keine Probleme bekommen werden. Gilt für beliebige \mathcal{D} -Moduln M die zusätzliche Bedingung $j_{\mathcal{D}}(M) + \text{GKdim}(M) = \text{GKdim}(\mathcal{D})$ so nennen wir den Ring einen Cohen-Macaulay Ring. Damit lassen sich für reine Moduln und deren Untermoduln sogar weitere Aussagen über deren GK-Dimensionen treffen.

In Kapitel 5 gehen wir dann letztendlich auf die Reinheitsfiltrierung ein. Wir geben eine genaue Definition von Reinheit, charakterisieren diese Eigenschaft auf verschiedene Weisen und beschreiben die Idee, welche hinter dem Verfahren zur Berechnung der Reinheitsfiltrierung steckt. Am Ende dieses Abschnittes geben wir dazu einen expliziten Algorithmus an.

Die vorgestellten Algorithmen wurden für das Computeralgebrasystem SINGULAR implementiert und sind in der Bibliothek PURITYFILTRATION.LIB enthalten. In Kapitel 5 werden Hinweise zu Bedienung und Funktionsweise der einzelnen Prozeduren gegeben. Explizite Beispielrechnungen folgen im abschließenden Kapitel dieser Arbeit.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen meinen Dank aussprechen. Mein Betreuer Viktor Levandovskyy hat mir die Möglichkeit gegeben, dieses interessante Thema zu bearbeiten und war mir dabei stets mit unterstützenden Ratschlägen, Ideen und Diskussionen zur Hilfe, sei es bei mathematischen oder computertechnischen Problemen. Ein großes Dankeschön für diese tolle Unterstützung. Weiterhin danke ich auch meinem Büronachbarn Daniel Andres, der mir mit seinen hilfreichen Tipps zur Programmierung und Erstellung von Latex-Dokumenten einiges an Recherchezeit erspart hat.

Besonderen Dank gebührt natürlich auch meinen beiden Prüferinnen Prof. Dr. Eva Zerz und Prof. Dr. Julia Hartmann, dass sie mir die Chance gegeben haben, diese Arbeit zu

erstellen und ihre Zeit in das Lesen, Korrigieren und Bewerten dieser Master-These gesteckt haben. Nicht zu vergessen ist dann auch Alban Quadrat, der mir durch seine Werke einen leichten Einstieg in die Thematik geebnet und bei seinen Besuchen in Aachen einige kleine, aber wichtige Hinweise mit auf den Weg gegeben hat.

§ 2 Die mathematische Ausgangslage

— *Basisbegriffe aus der Modul-Theorie* —

Zu Beginn wollen wir einen mathematischen Rahmen schaffen, in welchem wir uns mit Reinheitsfiltrierungen beschäftigen können. Wenn nicht anders angegeben, bezeichne \mathcal{D} stets einen beliebigen Noetherschen Ring mit 1. Weiter sei \mathcal{F} ein Links- \mathcal{D} -Modul und $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$. Unser Hauptuntersuchungsobjekt wird im Folgenden die abelsche Gruppe

$$\ker_{\mathcal{F}}(R \cdot) = \{\lambda \in \mathcal{F}^p \mid R\lambda = 0\}$$

sein. Wir definieren den (Links-)Modul

$$M := \text{coker}_{\mathcal{D}}(\cdot R) := \mathcal{D}^{1 \times p} / \mathcal{D}^{1 \times q} R$$

und weiter

$$\text{hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{F}) = \{\phi : M \rightarrow \mathcal{F} \mid \phi \text{ ist } \mathcal{D}\text{-Modul-Homomorphismus}\},$$

die Menge aller \mathcal{D} -linearen Abbildungen von M nach \mathcal{F} . Wir erhalten dann folgenden Zusammenhang zwischen den oben definierten Objekten:

(2.1) Satz (Malgrange-Isomorphismus)

Mit den obigen Bezeichnungen gilt die Beziehung

$$\ker_{\mathcal{F}}(R \cdot) \cong \text{hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{F}). \quad \diamond$$

Beweis

[Mal64] □

Es folgen einige Basisdefinitionen aus der Modul-Theorie:

(2.2) Definition

Es sei \mathcal{D} ein Ring und M ein Links- \mathcal{D} -Modul.

1. M heißt endlich erzeugt, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und $m_i \in M$ für $i = 1, \dots, n$ gibt, so dass $M = \mathcal{D}\langle m_1, \dots, m_n \rangle$.
2. M heißt endlich präsentiert, falls $M \cong \mathcal{D}^{1 \times p} / \mathcal{D}^{1 \times q} R$ für eine Matrix $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$ gilt.
3. M heißt frei, falls M eine Basis besitzt, d.h. M besitzt ein \mathcal{D} -linear unabhängiges Erzeugendensystem. Ist dieses endlich, so gibt es $r \in \mathbb{N}_0$ mit $M \cong \mathcal{D}^{1 \times r}$.

4. M heißt projektiv, falls es einen Links- \mathcal{D} -Modul N und einen freien Modul F gibt, so dass $M \oplus N \cong F$.
5. Es sei $m \in M$. Gibt es einen Nicht-Null-Teiler $d \in \mathcal{D}$, so dass $dm = 0$, so nennen wir m Torsionselement und definieren die Menge

$$t(M) := \{m \in M \mid m \text{ ist Torsionselement}\}$$

aller Torsionselemente von M . Ist $t(M) = 0$, so heißt M torsionsfrei und im Falle $t(M) = M$ sagen wir M ist torsion.

6. Ist M torsion, so macht es Sinn die Menge $\text{ann}(M) = \{r \in \mathcal{D} \mid rm = 0 \text{ für alle } m \in M\}$ zu betrachten, genannt Annihilator von M . ◇

(2.3) Bemerkung

Aus den obigen Definitionen folgt:

$$M \text{ frei} \implies M \text{ projektiv} \implies M \text{ torsionsfrei}.$$

Die erste Folgerung ist direkt aus der Definition klar (setze $F = M$ und $N = 0$). Sei nun M projektiv und $x \in M \subseteq F$, $r \in \mathcal{D}$ Nicht-Null-Teiler mit $rx = 0$. Sei I eine Indexmenge und $m_i \in M$, so dass $\{m_i \mid i \in I\}$ Basis von F ist. Wir erhalten eine Darstellung $x = \sum_{i \in I} r_i m_i$, mit $r_i \in \mathcal{D}$, so dass nur endlich viele dieser r_i ungleich 0 sind. Dann ist $0 = rx = r \sum_{i \in I} r_i m_i = \sum_{i \in I} r r_i m_i$ und wegen der Unabhängigkeit der m_i folgt $r r_i = 0$. Da r ein Nicht-Null-Teiler ist muss $r_i = 0$ für alle $i \in I$ gelten und somit $x = 0$.

Außerdem ist jeder endlich präsentierte Modul auch endlich erzeugt, denn die Standardbasis $\{e_i \mid i = 1, \dots, q\}$ von $\mathcal{D}^{1 \times p}$ wird durch Restklassenbildung zu einem Erzeugendensystem $\{[e_i] \mid i = 1, \dots, q\}$ in $\mathcal{D}^{1 \times p} / \mathcal{D}^{1 \times q} \mathcal{R}$. ◇

(2.4) Bemerkung

Ist M ein \mathcal{D} -Modul, so gibt es stets einen freien Modul F und ein $\pi : F \rightarrow M$, welches surjektiv ist: Es sei $\{m_i \mid i \in I\}$ ein Erzeugendensystem von M für eine Indexmenge I . Definiere $F = \{f : I \rightarrow \mathcal{D} \mid \text{es gibt nur endlich viele } i \in I \text{ mit } f(i) \neq 0\}$. Wir zeigen, dass

dieses F frei ist mit Basis $B = \{f_i \mid i \in I\}$, wobei $f_i(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = i \\ 0 & \text{für } x \neq i. \end{cases}$

Nehmen wir an, es sei $0 = \sum_{i \in I} a_i f_i$ für eine endliche Linearkombination von Elementen aus B . Dann gilt für ein beliebiges $j \in I$:

$$0 = \sum_{i \in I} a_i f_i(j) = a_j f_j(j) + \sum_{i \in I \setminus \{j\}} a_i f_i(j) = a_j,$$

d.h. alle a_j sind Null, was die lineare Unabhängigkeit von B zeigt. Außerdem ist B Erzeugendensystem von F : Zu beliebigem $f \in F$ gibt es für alle $j \in I$ ein $a_j \in \mathcal{D}$ mit $f(j) = a_j$ und nur endlich viele dieser a_j sind ungleich 0. Seien j_1, \dots, j_n die Indizes mit $f(j_i) = a_{j_i} \neq 0$. Dann ist $f = \sum_{i=1}^n a_{j_i} f_{j_i}(x) \in \langle B \rangle$, d.h. B Erzeugendensystem und damit insgesamt Basis von F . Setzen wir nun $\pi : F \rightarrow M$, $f_i \mapsto m_i$, so erfüllt π die gewünschten Bedingungen. \diamond

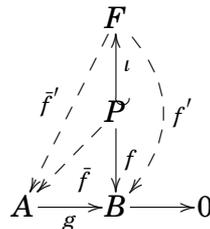
(2.5) Lemma

Es seien A, B und P \mathcal{D} -Moduln. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. P ist projektiv.
2. Zu allen Homomorphismen $f : P \rightarrow B$ und $g : A \rightarrow B$ mit g surjektiv existiert ein $\tilde{f} : P \rightarrow A$, so dass $g \circ \tilde{f} = f$ gilt. \diamond

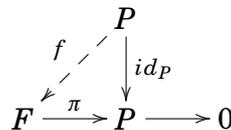
Beweis

\Rightarrow : Sei $f : P \rightarrow B$ und $g : A \rightarrow B$ surjektiv gegeben und F, Q so, dass $F = P \oplus Q$ gilt, wobei F frei ist. Weiter sei ι die Einbettung von P in F . Zu $m = x + y \in F, x \in P, y \in Q$ definiere $f' : F \rightarrow B, m \mapsto f(x)$. Wir konstruieren nun ein $\tilde{f}' : F \rightarrow A$ mit $g \circ \tilde{f}' = f'$ und setzen $\tilde{f} = \tilde{f}' \circ \iota$. Dann gilt $g \circ \tilde{f} = g \circ \tilde{f}' \circ \iota = f' \circ \iota = f$ wie gewünscht.



Sei $\{m_i, i \in I\}$ für eine Indexmenge I eine Basis von F . Da g surjektiv gibt es $a_i \in A$ mit $f'(m_i) = g(a_i)$ und wir definieren $\tilde{f}'(m_i) = a_i$. Damit gilt $(g \circ \tilde{f}')(m_i) = g(a_i) = f'(m_i)$ für alle $i \in I$, also $g \circ \tilde{f}' = f'$, da $\{m_i\}$ Basis von F .

\Leftarrow : Nach Bemerkung (2.4) gibt es einen freien Modul F und $\pi : F \rightarrow P$ surjektiv. Betrachte das Diagramm



Nach Voraussetzung gibt es $f : P \rightarrow F$ mit $\pi \circ f = id_P$. Dieses f muss insbesondere injektiv sein, wodurch wir $\text{im}(f) \cong P$ erhalten. Wir zeigen nun $F = \text{im}(f) \oplus \text{ker}(\pi)$, woraus die Behauptung folgt. Schreibe $x \in F$ als $x = f(\pi(x)) + x - f(\pi(x))$. Dann ist $f(\pi(x)) \in \text{im}(f)$ und $\pi(x - f(\pi(x))) = \pi(x) - \pi(f(\pi(x))) = \pi(x) - \pi(x) = 0$, also $x - f(\pi(x)) \in \text{ker}(\pi)$. Außerdem ist die Summe direkt, denn zu $y \in \text{im}(f) \cap \text{ker}(\pi)$ gibt es $x \in P$ mit $f(x) = y$ und es gilt $x = id_P(x) = \pi(f(x)) = \pi(y) = 0$, somit auch $y = f(x) = 0$. \square

— Die Weyl-Algebra —

In dieser Arbeit wollen wir uns nicht ausschließlich mit Ringen, sondern auch mit K -Algebren beschäftigen, bzw. spezieller mit der sogenannten Weyl-Algebra. Dazu nutzen wir die folgende Definition:

(2.6) Definition

Es sei K ein Körper und A ein K -Vektorraum mit einer zusätzlichen Verknüpfung $\cdot : A \times A \rightarrow A$, welche die Bedingungen

1. $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
3. $(ax) \cdot (by) = (ab)(x \cdot y)$

für alle $x, y, z \in A$ und $a, b \in K$ erfüllt. Dann bezeichnen wir A als Algebra über K bzw. als K -Algebra. Gilt zusätzlich

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \text{ mit } x, y, z \in A \text{ beliebig,}$$

so nennen wir A assoziativ. ◇

(2.7) Beispiel

Wir wollen die sogenannte Weyl-Algebra einführen: Für eine beliebige endliche Menge $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sei

$$\langle A \rangle = \{r_1 r_2 \cdots r_l \mid r_i \in A, l \in \mathbb{N}_0\}.$$

Die Elemente aus A nennen wir Unbestimmte und die aus $\langle A \rangle$ Monome in den Unbestimmten aus A . Weiter sei für einen Körper K die Menge

$$K\langle A \rangle := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i m_i \mid m_i \in \langle A \rangle, m \in \mathbb{N}_0, a_i \in K \right\}$$

der Ring aller endlichen Linearkombinationen von Monomen in $\langle A \rangle$ mit Koeffizienten in K , wobei die Multiplikation durch

$$a m_1 \cdot b m_2 = a b m_1 m_2, \text{ für } a, b \in K, m_1, m_2 \in \langle A \rangle$$

definiert sei. Damit wird $K\langle A \rangle$ zusätzlich zu einer assoziativen K -Algebra. Diese wird auch als freie Algebra in $|A| = n$ Unbestimmten bezeichnet.

Wir wollen uns nun mit einem speziellen Beispiel für A beschäftigen. Betrachte die

Variablenmenge $M_n = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$. Dann ist die n -te Weyl Algebra über einem Körper K definiert als

$$A_n(K) := K\langle M_n \rangle / I,$$

mit dem Ideal (genannt Relationen von $A_n(K)$)

$$I := K\langle x_i x_j - x_j x_i, y_i y_j - y_j y_i, y_i x_j - x_j y_i - \delta_{i,j} \mid 1 \leq i \leq j \leq n \rangle,$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta bezeichnet. \diamond

(2.8) Bemerkung

Wir wollen den Grund untersuchen, warum die Weyl-Algebra so wichtig bei der Betrachtung von Differentialgleichungen ist. Es sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $f \in \text{Abb}(\mathbb{R}^n, K)$ eine beliebige differenzierbare Funktion in den (stetigen) n Variablen x_1, \dots, x_n . Ferner bezeichne \hat{x}_i den Operator, der f mit der Variablen x_i multipliziert, d.h. $\hat{x}_i \cdot f = x_i f$. Weiter sei δ_{x_i} der Differentialoperator der i -ten Variable, also $\delta_{x_i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Dann gilt nach der Produktregel von Ableitungen:

$$\delta_{x_j} \cdot \hat{x}_i \cdot f = \delta_{x_j} \cdot x_i f = \delta_{i,j} f + x_i \delta_{x_j} f = (\delta_{i,j} + \hat{x}_i \cdot \delta_{x_j}) \cdot f,$$

d.h. die beiden Operatoren erfüllen (nach Umbenennung der Variablen) genau die Relationen, welche in der Definition der Weyl-Algebra gefordert sind. \diamond

(2.9) Beispiel

Wir können aber auch $f \in \text{Abb}(\mathbb{Z}^m, K)$ als Abbildung von diskreten Variablen n_1, \dots, n_m betrachten. Dann definieren wir für $i = 1, \dots, m$ die Shiftoperatoren σ_{n_i} durch

$$\sigma_{n_i} \cdot f(n_1, \dots, n_m) = f(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i + 1, n_{i+1}, \dots, n_m).$$

Damit gilt die Beziehung

$$\sigma_{n_i} \cdot \hat{n}_j \cdot f = \sigma_{n_i} \cdot n_j f = (n_j + \delta_{i,j}) \sigma_{n_i} f = (\hat{n}_j \cdot \sigma_{n_i} + \delta_{i,j} \sigma_{n_i}) \cdot f.$$

Wir definieren dann die m -te Shift-Algebra $S_m(K)$ über einem Körper K wie folgt: Setze $M_m = \{n_1, \dots, n_m, \sigma_{n_1}, \dots, \sigma_{n_m}\}$ und $S_m(K) := K\langle M_m \rangle / I$, mit

$$I = K\langle n_i n_j - n_j n_i, \sigma_{n_i} \sigma_{n_j} - \sigma_{n_j} \sigma_{n_i}, \sigma_{n_i} n_j - n_j \sigma_{n_i} - \delta_{i,j} \sigma_{n_i} \mid 1 \leq i \leq j \leq m \rangle, \quad \diamond$$

wobei I den oben gefundenen Relationen entspricht.

— Homologische Algebra —

In diesem Teil wollen wir einige Grundbegriffe aus der homologischen Algebra zusammenfassen. Diese ist das Hauptwerkzeug, welches wir in späteren Kapiteln benötigen, um die Reinheitsfiltrierung eines Moduls zu berechnen.

(2.10) Definition

1. Eine Folge von (Links- bzw. Rechts-) \mathcal{D} -Moduln M_i und zugehörigen (Links- bzw. Rechts-) \mathcal{D} -Modul-Homomorphismen $\phi_i : M_i \rightarrow M_{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}_0$ stellen wir in der Form

$$\cdots \xrightarrow{\phi_{i+2}} M_{i+1} \xrightarrow{\phi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\phi_i} M_{i-1} \xrightarrow{\phi_{i-1}} \cdots$$

dar und nennen dieses Gebilde eine Sequenz von \mathcal{D} -Moduln.

2. Eine Sequenz heißt Komplex, falls für alle $i \in \mathbb{N}_0$ die Beziehung $\text{im}(\phi_{i+1}) \subseteq \ker(\phi_i)$ erfüllt ist.
3. Der Exaktheitsdefekt an der Stelle i wird durch

$$H_i = \ker(\phi_i) / \text{im}(\phi_{i+1})$$

definiert.

4. Ein Komplex ist exakt an der Stelle $i \in \mathbb{N}_0$, falls $\text{im}(\phi_{i+1}) = \ker(\phi_i)$ ist (was gleichbedeutend zu $H_i = 0$ ist). Gilt dies für alle i , so nennen wir die Sequenz exakt.
5. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$$

mit M, N und P Links- \mathcal{D} -Moduln, f und g \mathcal{D} -linear, wird kurze exakte Sequenz genannt. \diamond

(2.11) Beispiel

Ist M ein \mathcal{D} -Modul, so ist für jeden Untermodul N von M durch

$$0 \rightarrow N \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\pi} M/N \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz gegeben. Hierbei bezeichnet ι die Einbettung von N in M und $\pi : M \rightarrow M/N$ die kanonische Surjektion. \diamond

(2.12) Definition

Es sei M ein Links- \mathcal{D} -Modul, N ein Rechts- \mathcal{D} -Modul.

1. Eine exakte Sequenz der Form

$$\dots \xrightarrow{R_2} \mathcal{D}^{1 \times p_1} \xrightarrow{R_1} \mathcal{D}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

wird freie Linksauflösung von M genannt. Hierbei soll $\pi \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{1 \times p_0}, M)$ sein und R_i \mathcal{D} -Matrizen, mit

$$\begin{aligned} R_i : \mathcal{D}^{1 \times p_i} &\rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_{i-1}} \\ \lambda &\mapsto \lambda R_i. \end{aligned}$$

Gibt es eine endliche freie Linksauflösung

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_n} \xrightarrow{R_n} \dots \xrightarrow{R_2} \mathcal{D}^{1 \times p_1} \xrightarrow{R_1} \mathcal{D}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

von M , so bezeichnet n die Länge der freien Linksauflösung von M .

2. Eine exakte Sequenz der Form

$$0 \leftarrow N \xleftarrow{\kappa} \mathcal{D}^{p_0} \xleftarrow{S_1} \mathcal{D}^{p_1} \xleftarrow{S_2} \dots$$

wird freie Rechtsauflösung von M genannt. Hierbei soll $\kappa \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{p_0}, N)$ sein und S_i \mathcal{D} -Matrizen, mit

$$\begin{aligned} S_i : \mathcal{D}^{p_i} &\rightarrow \mathcal{D}^{p_{i-1}} \\ \lambda &\mapsto S_i \lambda. \end{aligned}$$

Gibt es eine endliche freie Rechtsauflösung

$$0 \leftarrow N \xleftarrow{\kappa} \mathcal{D}^{p_0} \xleftarrow{S_1} \mathcal{D}^{p_1} \xleftarrow{S_2} \dots \xleftarrow{S_n} \mathcal{D}^{p_n} \leftarrow 0$$

von M , so bezeichnet n die Länge der freien Rechtsauflösung von M .

3. Eine exakte Sequenz der Form

$$\dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

wobei P_i projektiv, $d_i \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(P_i, P_{i-1})$ für $i \in \mathbb{N}$ und $\pi \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(P_0, M)$, wird projektive Auflösung von M genannt. Gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $P_m = 0$ für alle $m > n$, dann heißt das kleinste solcher n Länge der projektiven Auflösung von M . \diamond

(2.13) Bemerkung

Es sei \mathcal{D} Noethersch und M ein endlich erzeugter Links- \mathcal{D} -Modul. Dann lässt sich stets eine freie Auflösung von M konstruieren: Nach Bemerkung (2.4) existiert ein freier und endlich erzeugter Modul F_0 und $\pi_0 : F_0 \rightarrow M$ surjektiv. Dann ist

$$0 \rightarrow \ker(\pi_0) \rightarrow F_0 \xrightarrow{\pi_0} M \rightarrow 0$$

exakt. Es gibt nun wiederum einen endlich erzeugten, freien Modul F_1 und eine surjektive Abbildung $\pi_1 : F_1 \rightarrow \ker(\pi_0)$, so dass

$$F_1 \xrightarrow{\pi_1} \ker(\pi_0) \rightarrow 0$$

exakt ist. Zusammenfügen dieser beiden Sequenzen, liefert die exakte Sequenz

$$F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Diese Prozedur wird jetzt mit $\ker(\pi_1)$ fortgesetzt und wir erhalten sukzessive eine freie Auflösung von M . Diese wird im Allgemeinen allerdings nicht endlich sein. \diamond

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Untersuchung von exakten Sequenzen ist der sogenannte kontravariante Hom-Funktor.

(2.14) Definition

Es sei N ein Links- \mathcal{D} -Modul. Dann ist der Funktor $F := \text{hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, N)$ wie folgt definiert:

1) Ist M ein weiterer Links- \mathcal{D} -Modul, so ist

$$FM := \text{hom}_{\mathcal{D}}(M, N) = \{\phi : M \rightarrow N \mid \phi \text{ ist } \mathcal{D}\text{-Modul-Homomorphismus}\}.$$

2) Ist $f : M_1 \rightarrow M_2$ ein Links- \mathcal{D} -Modul-Homomorphismus, so ist

$$\begin{aligned} Ff &:= f^* : FM_2 \rightarrow FM_1 \\ \phi &\mapsto \phi \circ f. \end{aligned} \quad \diamond$$

(2.15) Bemerkung

Sind $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ Modul-Homomorphismen, so gilt für alle $\phi \in FC$:

$$(g \circ f)^*(\phi) = \phi \circ (g \circ f) = (\phi \circ g) \circ f = g^*(\phi) \circ f = (f^* \circ g^*)(\phi),$$

d.h. $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. \diamond

(2.16) Beispiel

Es sei $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$, \mathcal{F} ein Links- \mathcal{D} -Modul und $F = \text{hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{F})$. Weiter sei

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D}^{1 \times q} &\rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p} \\ x &\mapsto xR. \end{aligned}$$

Wir wenden F auf f an und erhalten

$$\begin{aligned} f^* : \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{1 \times p}, \mathcal{F}) &\rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{1 \times q}, \mathcal{F}) \\ \phi &\mapsto \phi \circ f. \end{aligned}$$

Nun betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{1 \times q}, \mathcal{F}) & \xleftarrow{f^*} & \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{1 \times p}, \mathcal{F}) \\ \psi \downarrow \cong & & \cong \uparrow \bar{\psi} \\ \mathcal{F}^q & \xleftarrow{B} & \mathcal{F}^p \end{array}$$

Die Abbildungen ψ und $\bar{\psi}$ seien hier durch

$$\begin{aligned} \psi : \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{1 \times q}, \mathcal{F}) &\rightarrow \mathcal{F}^q & \bar{\psi} : \mathcal{F}^p &\rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{1 \times p}, \mathcal{F}) \\ \phi &\mapsto (\phi(e_1), \dots, \phi(e_q))^T & v &\mapsto \phi_v : x \mapsto xv \end{aligned}$$

definiert und $e_i \in \mathcal{D}^{1 \times q}$ bezeichne den i -ten Einheitsvektor für $i = 1, \dots, q$. Es ist leicht zu sehen, dass diese Abbildungen tatsächlich (wie im Diagramm angegeben) Isomorphismen zwischen \mathcal{D} -Moduln darstellen. Wir wollen die Abbildung B berechnen, welche durch

$$\begin{aligned} B : \mathcal{F}^p &\rightarrow \mathcal{F}^q \\ z &\mapsto (\psi \circ f^* \circ \bar{\psi})(z) \end{aligned}$$

beschrieben werden kann. Es gilt für alle $z \in \mathcal{F}^p$: ◇

$$\begin{aligned} B(z) &= (\psi \circ f^* \circ \bar{\psi})(z) = \psi(\phi_z \circ f) = (\phi_z(f(e_1)), \dots, \phi_z(f(e_q)))^T \\ &= (\phi_z(e_1 R), \dots, \phi_z(e_q R))^T = (e_1 R z, \dots, e_q R z)^T = R z, \end{aligned}$$

d.h. die Abbildung B ist durch $R \cdot$ gegeben.

(2.17) Satz

Es sei

$$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von \mathcal{D} -Moduln und

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{p_2} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M_1 \rightarrow 0 \\ \cdots \rightarrow Q_2 \xrightarrow{q_2} Q_1 \xrightarrow{q_1} Q_0 \xrightarrow{q_0} M_3 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

projektive Auflösungen von M_1 und M_3 . Dann gibt es Abbildungen, so dass

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2 \times Q_2 & \longrightarrow & P_1 \times Q_1 & \longrightarrow & P_0 \times Q_0 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & Q_2 & \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

kommutativ und exakt in Reihen und Spalten ist. ◇

Beweis

Wir starten mit

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & (1) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \iota_0 & & \downarrow f & & \\ P_0 \times Q_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & M_2 & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow \pi_0 & & \downarrow g & & \\ Q_0 & \xrightarrow{q_0} & M_3 & \longrightarrow & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

wobei

$$\begin{aligned} \iota_0 : P_0 &\rightarrow P_0 \times Q_0 & \pi_0 : P_0 \times Q_0 &\rightarrow Q_0 \\ x &\mapsto (x, 0) & (x, y) &\mapsto y. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist hier ι_0 injektiv, π_0 surjektiv und $\text{im}(\iota_0) = P_0 \times 0 = \ker(\pi_0)$. Da Q_0 projektiv und g surjektiv, existiert nach Lemma (2.5) ein $\mu : Q_0 \rightarrow M_2$ mit

$g \circ \mu = q_0$. Wir definieren

$$\begin{aligned} \epsilon_0 : P_0 \times Q_0 &\rightarrow M_2 \\ (x, y) &\mapsto (f \circ p_0)(x) + \mu(y). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (\epsilon_0 \circ \iota_0)(x) &= \epsilon_0(x, 0) = (f \circ p_0)(x) + \mu(0) = (f \circ p_0)(x) \text{ und} \\ (g \circ \epsilon_0)(x, y) &= g \circ ((f \circ p_0)(x) + \mu(y)) \\ &= (g \circ f \circ p_0)(x) + (g \circ \mu)(y) = 0 + q_0(y) = (q_0 \circ \pi_0)(x, y), \end{aligned}$$

d.h. das Diagramm (1) kommutiert.

Sei $m \in M_2$ und $y \in Q_0$, so dass $g(m) = q_0(y)$. Dann gilt

$$g(m - \mu(y)) = g(m) - (g \circ \mu)(y) = q_0(y) - q_0(y) = 0,$$

d.h. $m - \mu(y) \in \ker(g) = \text{im}(f)$. Wähle ein $m' \in M_1$ mit $f(m') = m - \mu(y)$ und $x \in P_0$ mit $p_0(x) = m'$. Wir erhalten

$$\epsilon_0(x, y) = (f \circ p_0)(x) + \mu(y) = f(m') + \mu(y) = m - \mu(y) + \mu(y) = m$$

und somit ϵ_0 surjektiv.

Weiter ist mit $\bar{\iota}_0 = \iota_0|_{\ker(p_0)}$ und $\bar{\pi}_0 = \pi_0|_{\ker(\epsilon_0)}$ die Sequenz

$$0 \rightarrow \ker(p_0) \xrightarrow{\bar{\iota}_0} \ker(\epsilon_0) \xrightarrow{\bar{\pi}_0} \ker(q_0) \rightarrow 0$$

exakt: Da ι_0 injektiv, gilt dies auch für die Einschränkung, und weiter ist

$$\begin{aligned} \ker(\bar{\pi}_0) &= \{(x, y) \in P_0 \times Q_0 \mid y = 0, (x, y) \in \ker(\epsilon_0)\} = \{(x, 0) \in P_0 \times Q_0 \mid (f \circ p_0)(x) = 0\} \\ &= \{(x, 0) \in P_0 \times Q_0 \mid p_0(x) = 0\} = \ker(p_0) \times 0 = \text{im}(\bar{\iota}_0), \end{aligned}$$

da f injektiv. Sei nun $y \in \ker(q_0)$, d.h. $q_0(y) = (g \circ \mu)(y) = 0$. Damit erhalten wir nun $\mu(y) \in \ker(g) = \text{im}(f)$ und wählen $m \in M_1$ mit $f(m) = -\mu(y)$ und $x \in P_0$ mit $p_0(x) = m$. Es folgt

$$\epsilon_0(x, y) = (f \circ p_0)(x) + \mu(y) = f(m) + \mu(y) = -\mu(y) + \mu(y) = 0,$$

also $(x, y) \in \ker(\epsilon_0)$ und $\bar{\pi}_0(x, y) = y$.

Im i -ten Schritt betrachten wir nun

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 P_i & \xrightarrow{p_i} & \ker(p_{i-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \iota_i & & \downarrow \bar{l}_{i-1} & & \\
 P_i \times Q_i & \xrightarrow{\epsilon_i} & \ker(\epsilon_{i-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \pi_i & & \downarrow \bar{\pi}_{i-1} & & \\
 Q_i & \xrightarrow{q_i} & \ker(q_{i-1}) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

und erhalten mit obiger Konstruktion ι_i, π_i und ϵ_i mit

$$\epsilon_i \circ \iota_i = \bar{l}_{i-1} \circ p_i = l_{i-1} \circ p_i, \quad \pi_{i-1} \circ \epsilon_i = \bar{\pi}_{i-1} \circ \epsilon_i = q_i \circ \pi_i$$

und $\text{im}(\epsilon_i) = \ker(\epsilon_{i-1})$, woraus insgesamt die Behauptung folgt. □

(2.18) Bemerkung

Die im Beweis konstruierten exakten Sequenzen

$$0 \rightarrow P_i \xrightarrow{\iota_i} P_i \oplus Q_i \xrightarrow{\pi_i} Q_i \rightarrow 0$$

liefern nach Anwenden von $F = \text{hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, N)$ wieder eine Sequenz

$$0 \leftarrow FP_i \xleftarrow{\iota_i^*} F(P_i \oplus Q_i) \xleftarrow{\pi_i^*} FQ_i \leftarrow 0.$$

Diese ist erneut exakt: Ist $0 = \pi_i^*(\Phi)$, so folgt $(\Phi \circ \pi_i)(x, y) = \Phi(y) = 0$ für alle $y \in Q_i$, also $\Phi = 0$, was die Injektivität von π_i^* zeigt. Weiter ist $\iota_i^* \circ \pi_i^* = (\pi_i \circ \iota_i)^* = 0$, und damit $\text{im}(\pi_i^*) \subseteq \ker(\iota_i^*)$. Sei nun $\Phi \in \ker(\iota_i^*)$, d.h. $(\Phi \circ \iota_i)(x) = \Phi(x, 0) = 0$ für alle $x \in P_i$. Zu $y \in Q_i$ setze $\Psi(y) = \Phi(0, y)$. Dann $\Psi \in FQ_i$ und es gilt

$$\pi_i^*(\Psi)(x, y) = (\Psi \circ \pi_i)(x, y) = \Psi(y) = \Phi(0, y) = \Phi(0, y) + \Phi(x, 0) = \Phi(x, y),$$

also insgesamt $\text{im}(\pi_i^*) = \ker(\iota_i^*)$. Zu guter Letzt zeigen wir die Surjektivität von ι_i^* . Ist $\Phi \in FP_i$, so setze $\Psi(x, y) = \Phi(x)$, womit sich $\iota_i^*(\Psi)(x) = (\Psi \circ \iota_i)(x) = \Psi(x, 0) = \Phi(x)$ ergibt. \diamond

— *Extensionsmoduln* —

Wiederum seien M und \mathcal{F} endlich erzeugte Links- \mathcal{D} -Moduln. Da wir immer eine freie Auflösung von M finden können, existiert auch eine projektive

$$\dots \xrightarrow{f_3} P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

d.h. P_i projektiv für alle $i \in \mathbb{N}$. Auf den Komplex

$$\dots \xrightarrow{f_3} P_2 \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \rightarrow 0 \quad (2)$$

wenden wir den Hom-Funktor $F = \text{hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{F})$ an und erhalten die Sequenz

$$\dots \xleftarrow{f_3^*} \text{hom}_{\mathcal{D}}(P_2, \mathcal{F}) \xleftarrow{f_2^*} \text{hom}_{\mathcal{D}}(P_1, \mathcal{F}) \xleftarrow{f_1^*} \text{hom}_{\mathcal{D}}(P_0, \mathcal{F}) \leftarrow 0. \quad (3)$$

Wegen $\text{im}(f_{i+1}) \subseteq \ker(f_i)$ gilt $f_{i+1}^* \circ f_i^* \stackrel{(2.15)}{=} (f_i \circ f_{i+1})^* = 0^* = 0$ für $i = 1, 2, \dots$ und mit $0 = \text{im}(0) \subseteq \ker(f_1^*)$ beschreibt (3) einen Komplex. Wir definieren nun die Extensionsgruppen

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{F}) := \ker_{\mathcal{F}}(f_1^*)$$

und für $i \geq 1$

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{F}) := \ker_{\mathcal{F}}(f_{i+1}^*) / \text{im}_{\mathcal{F}}(f_i^*).$$

Unter der Annahme, dass die P_i alle frei und endlich erzeugt sind, sprich $P_i \cong \mathcal{D}^{1 \times p_i}$ mit $p_i \in \mathbb{N}$, erhält (2) die Form

$$\dots \xrightarrow{R_3} \mathcal{D}^{1 \times p_2} \xrightarrow{R_2} \mathcal{D}^{1 \times p_1} \xrightarrow{R_1} \mathcal{D}^{1 \times p_0} \rightarrow 0.$$

Mit Beispiel (2.16) folgt dann

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_1 \cdot) \stackrel{(2.1)}{\cong} \text{hom}_{\mathcal{D}}(M, \mathcal{F})$$

und für $i \geq 1$

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{F}) \cong \ker_{\mathcal{F}}(R_{i+1} \cdot) / \text{im}_{\mathcal{F}}(R_i \cdot).$$

Auf analoge Weise können wir die Extensionsgruppen zu einem endlich erzeugten Rechts- \mathcal{D} -Modul N und beliebigem Rechts- \mathcal{D} -Modul \mathcal{G} definieren. Ausgehend von

$$0 \leftarrow N \xleftarrow{\kappa} \mathcal{D}^{p_0} \xleftarrow{S_1 \cdot} \mathcal{D}^{p_1} \xleftarrow{S_2 \cdot} \dots \xleftarrow{S_n \cdot} \mathcal{D}^{p_n} \leftarrow 0$$

erhalten wir nach obiger Prozedur

$$\begin{aligned} \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(N, \mathcal{G}) &= \ker_{\mathcal{G}}(\cdot S_1) \\ \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N, \mathcal{G}) &= \ker_{\mathcal{G}}(\cdot S_{i+1}) / \text{im}_{\mathcal{G}}(\cdot S_i). \end{aligned}$$

(2.19) Bemerkung

Ist M endlich erzeugter Links- \mathcal{D} -Modul und $\mathcal{F} = \mathcal{D}$, so werden die $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$ zu Rechts- \mathcal{D} -Moduln: Sind $[x], [y] \in \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), r \in \mathcal{D}$, so gilt

$$R_{i+1}(x + y)r = R_{i+1}xr + R_{i+1}yr = 0r + 0r = 0$$

und damit $[(x + y)r] = ([x] + [y])r \in \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$.

Analog erhält man bei Betrachtung eines Rechts-Moduls N , dass $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N, \mathcal{D})$ zu Links- \mathcal{D} -Moduln werden. ◇

(2.20) Lemma

Es seien M und N Links- \mathcal{D} -Moduln. Die Rechts- \mathcal{D} -Moduln $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, N)$ hängen nur von M und N ab, nicht aber von der Auflösung von M . ◇

Beweis

Wir betrachten zwei mögliche Auflösungen des Moduls M :

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \xrightarrow{p_2} & P_1 & \xrightarrow{p_1} & P_0 & \xrightarrow{p_0} & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow id_M & & \\ \cdots & \longrightarrow & \bar{P}_2 & \xrightarrow{\bar{p}_2} & \bar{P}_1 & \xrightarrow{\bar{p}_1} & \bar{P}_0 & \xrightarrow{\bar{p}_0} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Wir wollen f_i konstruieren, damit dieses Diagramm kommutiert. Betrachte zunächst

$$\begin{array}{ccc} & P_0 & \\ f_0 \swarrow & \downarrow p_0 & \\ \bar{P}_0 & \xrightarrow{\bar{p}_0} & M \longrightarrow 0. \end{array}$$

Wegen der Projektivität von P_0 gibt es ein $f_0 : P_0 \rightarrow \bar{P}_0$ mit $p_0 \circ f_0 = p_0 = id_M \circ p_0$, welches also die gewünschte Eigenschaft erfüllt.

Für $i \geq 1$ sei f_i konstruiert, mit $\bar{p}_i \circ f_i = f_{i-1} \circ p_i$. Dann $\bar{p}_i \circ f_i \circ p_{i+1} = f_{i-1} \circ p_i \circ p_{i+1} = 0$, da $\text{im}(p_{i+1}) \subseteq \ker(p_i)$, und somit $\text{im}(f_i \circ p_{i+1}) \subseteq \ker(\bar{p}_i) = \text{im}(\bar{p}_{i+1})$. Aus

$$\begin{array}{ccc} & P_i & \\ f_{i+1} \swarrow & \downarrow f_i \circ p_{i+1} & \\ \bar{P}_i & \xrightarrow{\bar{p}_{i+1}} & \text{im}(\bar{p}_{i+1}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

und der Projektivität von P_i folgt damit die Existenz eines f_{i+1} mit $\bar{p}_{i+1} \circ f_{i+1} = f_i \circ p_{i+1}$. Wir definieren nun die Abbildungen

$$\Phi_i : \ker(\bar{p}_{i+1}^*)/\text{im}(\bar{p}_i^*) \rightarrow \ker(p_{i+1}^*)/\text{im}(p_i^*), [\Psi] \mapsto [\Psi \circ f_i],$$

und zeigen zunächst, dass diese wohldefiniert sind: Ist $[\Psi] = [0]$, so gibt es ein $\delta \in FP_{i-1}$ mit $\bar{p}_i^*(\delta) = \Psi$ und wir folgern

$$\Psi \circ f_i = \delta \circ \bar{p}_i \circ f_i = \delta \circ f_{i-1} \circ p_i = p_i^*(\delta \circ f_{i-1}) \in \text{im}(p_i^*).$$

Für $\Psi \in \ker(\bar{p}_{i+1}^*)$ gilt weiterhin $p_{i+1}^*(\Psi \circ f_i) = \Psi \circ f_i \circ p_{i+1} = \Psi \circ \bar{p}_{i+1} \circ f_i = 0$, womit die Wohldefiniertheit gezeigt ist. Weiter zeigen wir die Unabhängigkeit von Φ_i von der Wahl der f_i . Es seien $f_i, g_i : P_i \rightarrow \bar{P}_i$, so dass obiges Diagramm kommutiert. Dann gilt insbesondere $\bar{p}_0 \circ f_0 = \bar{p}_0 \circ g_0$, d.h. $\text{im}(f_0 - g_0) \subseteq \ker(\bar{p}_0) = \text{im}(\bar{p}_1)$. Wie oben gibt es dann ein $\phi_0 : P_0 \rightarrow \bar{P}_1$ mit $f_0 - g_0 = \bar{p}_1 \circ \phi_0$. Weiter gilt

$$\bar{p}_1 \circ (f_1 - g_1 - \phi_0 \circ p_1) = \bar{p}_1 \circ f_1 - \bar{p}_1 \circ g_1 - \bar{p}_1 \circ \phi_0 \circ p_1 = f_0 \circ p_1 - g_0 \circ p_1 - (f_0 - g_0) \circ p_1 = 0,$$

also $\text{im}(f_1 - g_1 - \phi_0 \circ p_1) \subseteq \ker(\bar{p}_1)$. Wieder analog zu obiger Konstruktion gibt es damit $\phi_1 : P_1 \rightarrow \bar{P}_2$ mit $f_1 - g_1 - \phi_0 \circ p_1 = \bar{p}_2 \circ \phi_1$. Für $i \geq 1$ sei ϕ_i konstruiert, dass die Gleichung $f_i - g_i - \phi_{i-1} \circ p_i = \bar{p}_{i+1} \circ \phi_i$ gilt. Da $\text{im}(f_i - g_i - \phi_{i-1} \circ p_i) \subseteq \ker(\bar{p}_i) = \text{im}(\bar{p}_{i+1})$ erhalten wir $\phi_{i+1} : P_{i+1} \rightarrow \bar{P}_{i+2}$ mit $f_{i+1} - g_{i+1} - \phi_i \circ p_{i+1} = \bar{p}_{i+2} \circ \phi_{i+1}$. Für alle $i \geq 0$ gilt also der Zusammenhang

$$f_i - g_i = \phi_{i-1} \circ p_i + \bar{p}_{i+1} \circ \phi_i.$$

Damit erhalten wir letztendlich

$$\Psi \circ (f_i - g_i) = \Psi \circ \bar{p}_{i+1} \circ \phi_i + \Psi \circ \phi_{i-1} \circ p_i = 0 + p_i^*(\Psi \circ \phi_{i-1}) \in \text{im}(p_i^*)$$

für alle $\Psi \in \ker(\bar{p}_{i+1}^*)$, was uns die Unabhängigkeit von Φ_i bezüglich der Wahl der f_i liefert.

Zu guter Letzt betrachte nun das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & \downarrow f_2 & \searrow & \downarrow f_1 & \searrow & \downarrow f_0 & \searrow & \downarrow id_M & \\ \cdots & \longrightarrow & \bar{P}_2 & \longrightarrow & \bar{P}_1 & \longrightarrow & \bar{P}_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow & \downarrow \bar{f}_2 & \searrow & \downarrow \bar{f}_1 & \searrow & \downarrow \bar{f}_0 & \searrow & \downarrow id_M & \\ \cdots & \longrightarrow & P_2 & \longrightarrow & P_1 & \longrightarrow & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Die gestrichelten Pfeile können hierbei nun auf verschiedene Weise belegt werden: Einerseits ist $\bar{f}_i \circ f_i$ möglich, andererseits auch einfach die Identität id_{P_i} auf P_i . Da Φ_i unabhängig von dieser Wahl ist, folgt für alle $\Psi \in \ker(\bar{p}_{i+1}^*)$:

$$id_{\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M,N)}([h]) = [h \circ id_{P_i}] = [h \circ \bar{f}_i \circ f_i] = \Phi_i([h \circ \bar{f}_i]) = (\Phi_i \circ \bar{\Phi}_i)([h]).$$

Analog zeigt man $\bar{\Phi}_i \circ \Phi_i = id_{\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M,N)}([\Psi])$, d.h. Φ_i ist invertierbar und damit

$$\ker(\bar{p}_{i+1}^*)/\text{im}(\bar{p}_i^*) \cong \ker(p_{i+1}^*)/\text{im}(p_i^*),$$

was zu zeigen war. □

(2.21) Satz

Es seien M_1, M_2, M_3 und N \mathcal{D} -Moduln und

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz. Dann gibt es eine exakte Sequenz der Form

$$\dots \rightarrow \text{ext}^i(M_3, N) \rightarrow \text{ext}^i(M_2, N) \rightarrow \text{ext}^i(M_1, N) \rightarrow \text{ext}^{i+1}(M_3, N) \rightarrow \dots,$$

wobei $\text{ext}^i(M_j, N) := 0$ für $i < 0$ und $j \in \{1, 2, 3\}$. ◇

Beweis

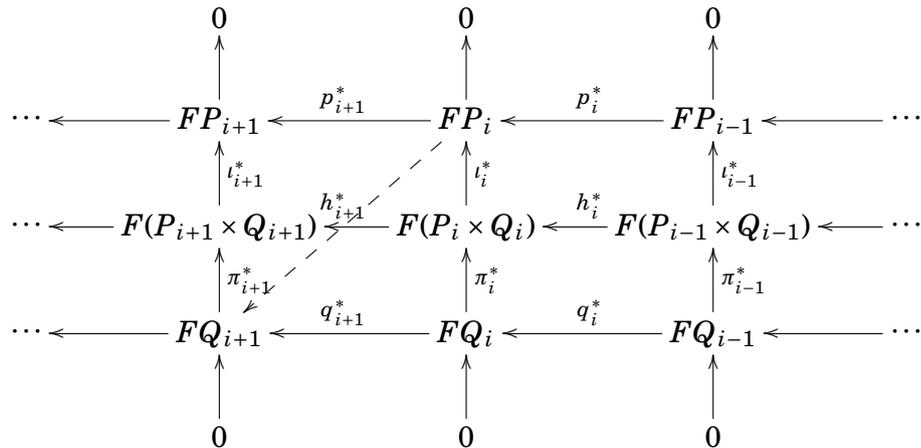
Wir gliedern den Beweis in mehrere Schritte:

1. Bestimmen des Ausgangsdiagramms:

Wegen der Exaktheit von

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

erhalten wir ein kommutatives Diagramm wie in Satz (2.17). Löschen der M_j und Anwenden von $F = \text{hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, N)$ liefert das Diagramm



Hierbei sind die Zeilen Komplexe und wegen Bemerkung (2.18) sind die Spalten sogar exakt. Des Weiteren erhalten wir mit Bemerkung (2.15) die Beziehungen

$$h_i^* \circ \pi_{i-1}^* = \pi_i^* \circ q_i^* \quad \text{und} \quad l_i^* \circ h_i^* = p_i^* \circ l_{i-1}^*.$$

2. Definition von Abbildungen zwischen $\text{ext}^i(\cdot, N)$:

Für $i \geq 0$ definieren wir nun die folgenden Abbildungen:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_i^* &: \ker(q_{i+1}^*)/\text{im}(q_i^*) \rightarrow \ker(h_{i+1}^*)/\text{im}(h_i^*), & [\phi] &\mapsto [\pi_i^*(\phi)], \\ \bar{l}_i^* &: \ker(h_{i+1}^*)/\text{im}(h_i^*) \rightarrow \ker(p_{i+1}^*)/\text{im}(p_i^*), & [\phi] &\mapsto [l_i^*(\phi)]. \end{aligned}$$

Weiter sei

$$\delta_i : \ker(p_{i+1}^*)/\text{im}(p_i^*) \rightarrow \ker(q_{i+2}^*)/\text{im}(q_{i+1}^*), \quad [\Psi] \mapsto \delta([\Psi]) = [\Phi]$$

(korrespondierend zum gestrichelten Pfeil in obigem Diagramm) wie folgt konstruiert: Zu $[\Psi] \in \ker(p_{i+1}^*)/\text{im}(p_i^*)$ wähle ein $\phi \in [\Psi]$. Dann gibt es $\phi' \in F(P_i \times Q_i)$ mit $l_i^*(\phi') = \phi$, da l_i^* surjektiv. Es ist $h_{i+1}^*(\phi') \in F(P_{i+1} \times Q_{i+1})$ und weiter

$$(l_{i+1}^* \circ h_{i+1}^*)(\phi') = (p_{i+1}^* \circ l_i^*)(\phi') = p_{i+1}^*(\phi) = 0,$$

d.h. $h_{i+1}^*(\phi') \in \ker(l_{i+1}^*) = \text{im}(\pi_{i+1}^*)$. Zusätzlich ist π_{i+1}^* injektiv, und damit existiert genau ein $\Phi \in FQ_{i+1}$ mit $\pi_{i+1}^*(\Phi) = h_{i+1}^*(\phi')$. Wir setzen dann $\delta_i([\Psi]) = [\Phi]$.

3. Wohldefiniertheit der Abbildungen:

Wir beginnen mit $\bar{\pi}_i^*$. Sei $\phi \in \ker(q_{i+1}^*)$. Dann ist $(h_{i+1}^* \circ \pi_i^*)(\phi) = (\pi_{i+1}^* \circ q_{i+1}^*)(\phi) = 0$ und somit $\bar{\pi}_i^*([\phi]) \in \ker(h_{i+1}^*)/\text{im}(h_i^*)$.

Weiter sei $[\phi] = [0]$, d.h. $q_i^*(\phi') = \phi$ für ein $\phi' \in FQ_{i-1}$. Wir wenden π_i^* auf dieses ϕ an und erhalten $\pi_i^*(\phi) = (\pi_i^* \circ q_i^*)(\phi') = (h_i^* \circ \pi_{i-1}^*)(\phi') \in \text{im}(h_i^*)$, d.h. $\bar{\pi}_i^*([\phi]) = [0]$.

Der Beweis für \bar{l}_i^* läuft ganz analog.

Betrachte nun δ_i . Mit den Bezeichnungen aus der Definition gilt

$$(\pi_{i+2}^* \circ q_{i+2}^*)(\Phi) = (h_{i+2}^* \circ \pi_{i+1}^*)(\Phi) = (h_{i+2}^* \circ h_{i+1}^*)(\phi') = 0$$

und damit (wegen π_{i+2}^* injektiv) $\Phi \in \ker(q_{i+2}^*)$, d.h. $[\Phi] \in \ker(q_{i+2}^*)/\text{im}(q_{i+1}^*)$.

Bei der Bildung von $[\Phi]$ haben wir zwei willkürliche Wahlen getroffen, nämlich $\phi \in [\Psi]$ und $\phi' \in F(P_i \times Q_i)$ mit $l_i^*(\phi') = \phi$. Wir zeigen nun die Unabhängigkeit von $[\Phi]$ bzgl. dieser Wahlen.

Sei dazu zunächst $\phi \in [\Psi]$ fest und $[\phi'], [\bar{\phi}']$ mit $l_i^*(\phi') = l_i^*(\bar{\phi}') = \phi$. Damit gilt nun

$\phi' - \bar{\phi}' \in \ker(\iota_i^*) = \text{im}(\pi_i^*)$ und wir wählen $f \in FQ_i$ mit $\pi_i^*(f) = \phi' - \bar{\phi}'$. Weiter erhalten wir

$$h_{i+1}^*(\phi' - \bar{\phi}') = (h_{i+1}^* \circ \pi_i^*)(f) = (\pi_{i+1}^* \circ q_{i+1}^*)(f). \quad (4)$$

Wie in der Definition von δ_i beschrieben, finden wir eindeutige $\Phi, \bar{\Phi} \in FQ_{i+1}$, die $\pi_{i+1}^*(\Phi) = h_{i+1}^*(\phi')$ bzw. $\pi_{i+1}^*(\bar{\Phi}) = h_{i+1}^*(\bar{\phi}')$ erfüllen. Mit Gleichung (4) ergibt sich $\pi_{i+1}^*(\Phi - \bar{\Phi}) = h_{i+1}^*(\phi' - \bar{\phi}') = (\pi_{i+1}^* \circ q_{i+1}^*)(f)$ und somit (wieder wegen π_{i+1}^* injektiv) $\Phi - \bar{\Phi} = q_{i+1}^*(f)$, d.h. $[\Phi - \bar{\Phi}] = [q_{i+1}^*(f)] = [0]$.

Weiter zeigen wir die Unabhängigkeit von der Wahl von $\phi \in [\Psi]$. Sei also $\bar{\phi}$ so, dass $\phi = \bar{\phi} + p_i^*(f)$ für ein $f \in FP_{i-1}$ ist. Da ι_{i-1}^* surjektiv, gibt es $g \in F(P_{i-1} \times Q_{i-1})$ mit $f = \iota_{i-1}^*(g)$. Es folgt $\phi = \bar{\phi} + (p_i^* \circ \iota_{i-1}^*)(g) = \bar{\phi} + (\iota_i^* \circ h_i^*)(g)$. Wähle nun $\bar{\Theta} \in F(P_i \times Q_i)$ mit $\iota_i^*(\bar{\Theta}) = \bar{\phi}$ und definiere $\Theta := \bar{\Theta} + h_i^*(g)$. Damit $\iota_i^*(\Theta) = \iota_i^*(\bar{\Theta}) + (\iota_i^* \circ h_i^*)(g) = \phi$ und wir erhalten weiter $h_{i+1}^*(\Theta) = h_{i+1}^*(\bar{\Theta}) + (h_{i+1}^* \circ h_i^*)(g) = h_{i+1}^*(\bar{\Theta})$. Da wie oben gezeigt die Bildung von $[\Phi]$ unabhängig von der Wahl von Θ ist, folgt nun insgesamt die Wohldefiniertheit von δ_i .

4. Linearität der Abbildungen:

Die Abbildungen $\bar{\pi}_i^*$ und $\bar{\iota}_i^*$ erben die Linearität von den Funktionen π_i^* bzw. ι_i^* . Zu zeigen ist also, dass δ_i linear ist. Seien dazu $[\Psi], [\Psi'] \in \ker(p_{i+1}^*)/\text{im}(p_i^*)$ und $\phi \in [\Psi], \phi' \in [\Psi']$. Dann ist $\phi + \phi' \in [\Psi] + [\Psi']$ und wir wählen $\Theta, \Theta' \in F(P_i \times Q_i)$ mit $\iota_i^*(\Theta) = \phi, \iota_i^*(\Theta') = \phi'$. Damit ergibt sich $\iota_i^*(\Theta + \Theta') = \iota_i^*(\Theta) + \iota_i^*(\Theta') = \phi + \phi'$ und wir nehmen $\Phi, \Phi' \in FQ_{i+1}$ mit $\pi_{i+1}^*(\Phi) = h_{i+1}^*(\Theta), \pi_{i+1}^*(\Phi') = h_{i+1}^*(\Theta')$. Wir erhalten $\delta_i([\Psi] + [\Psi']) = [\Phi] + [\Phi']$ und wegen

$$h_{i+1}^*(\Theta + \Theta') = h_{i+1}^*(\Theta) + h_{i+1}^*(\Theta') = \pi_{i+1}^*(\Phi) + \pi_{i+1}^*(\Phi') = \pi_{i+1}^*(\Phi + \Phi')$$

sowie der Injektivität von π_{i+1}^* auch $\delta_i([\Psi + \Psi']) = [\Phi] + [\Phi'] = [\Phi + \Phi']$.

Ist $d \in \mathcal{D}$, so folgt die Behauptung $d\delta_i([\Psi]) = \delta_i(d[\Psi])$ ähnlich wie bei der Addition, indem wir zu $\phi \in [\Psi]$ auch $d\phi \in [d\Psi]$ wählen.

5. Exaktheit:

Es bleibt nun zu zeigen, dass die Sequenz

$$\dots \xrightarrow{\delta_{i-1}} \text{ext}^i(M_3, N) \xrightarrow{\bar{\pi}_i^*} \text{ext}^i(M_2, N) \xrightarrow{\bar{\iota}_i^*} \text{ext}^i(M_1, N) \xrightarrow{\delta_i} \text{ext}^{i+1}(M_3, N) \xrightarrow{\bar{\pi}_{i+1}^*} \dots$$

tatsächlich exakt ist. Da dieser Beweis in einer recht technischen Diagrammjagd ausufert, welche ähnlich zur Wohldefiniertheit von δ_i verläuft, verweisen wir für Details auf [Rot09] Satz (6.10). \square

§ 3 Dimensionen von Ringen und Moduln

— Projektive Dimension —

(3.1) Definition

Es sei \mathcal{D} ein Ring und M Links- \mathcal{D} -Modul, N Rechts- \mathcal{D} -Modul.

1. Die projektive Dimension von M ist die minimale Länge einer projektiven Linksauflösung von M . Wir bezeichnen diese mit $\text{lpd}(M)$. Falls all solche Auflösungen unendliche Länge besitzen, setzen wir $\text{lpd}(M) = \infty$. Analog ist die projektive Dimension von N die minimale Länge einer projektiven Rechtsauflösung von N , bezeichnet als $\text{rpd}(N)$.
2. Für den Ring \mathcal{D} definieren wir

$$\text{lpd}(\mathcal{D}) := \sup\{\text{lpd}(M) \mid M \text{ Links-}\mathcal{D}\text{-Modul}\}$$

die projektive Linksdimension von \mathcal{D} . Analog ist

$$\text{rpd}(\mathcal{D}) := \sup\{\text{rpd}(N) \mid N \text{ Rechts-}\mathcal{D}\text{Modul}\}$$

die projektive Rechtsdimension von \mathcal{D} .

3. Falls $\text{rpd}(\mathcal{D}) = \text{lpd}(\mathcal{D})$ gilt, so nennen wir diese Zahl globale Dimension von \mathcal{D} , bezeichnet als $\text{gld}(\mathcal{D})$. ◇

Aus den Definitionen folgt sofort für alle Links- (bzw. Rechts-)Moduln M :

$$\text{lpd}(M) \leq \text{lpd}(\mathcal{D}), \text{ bzw. } \text{rpd}(M) \leq \text{rpd}(\mathcal{D}). \quad (5)$$

Bei Betrachtung der Sequenz

$$0 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (6)$$

mit P_0 projektiv erkennt man: Ist (6) exakt, so ist $M \cong P_0$, also M projektiv. Falls M nun projektiv, so setze $P_0 = M$ und obige Sequenz ist exakt. Wir halten also fest:

$$M \text{ projektiv} \Leftrightarrow \text{lpd}(M) = 0.$$

Wir geben erste Eigenschaften der projektiven Dimension für einen Noetherschen Ring an:

(3.2) Satz

1. Ist \mathcal{D} Noethersch, so gilt $\text{lpd}(\mathcal{D}) = \text{rpd}(\mathcal{D})$ ([Rot09], Prop (8.28)).

2. $\text{lpd}(M) = \sup\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) \neq 0\}$ ([Bjö93], A. IV, Remark 1.4). \diamond

Es ergeben sich einige unmittelbare Folgerungen:

(3.3) Folgerung

Ist $0 \neq \mathcal{D}$ ein Noetherscher Ring und M ein Links- \mathcal{D} -Modul, so gilt

$$\text{lpd}(\mathcal{D}) \leq n \Rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) = 0$$

für alle $i > n$ und Links- \mathcal{D} -Moduln M . Analog für Rechts- \mathcal{D} -Moduln N und $\text{rpd}(N)$. \diamond

Beweis

Ist M ein Links- \mathcal{D} -Modul, so folgt nach Voraussetzung und wegen (3.2.2):

$$n \geq \text{lpd}(\mathcal{D}) \geq \text{lpd}(M) = \sup\{i \in \mathbb{N} \mid \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) \neq 0\}.$$

Damit ist $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) = 0$ für $i > n$. \square

(3.4) Folgerung

Es sei

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz von \mathcal{D} -Moduln und M projektiv. Dann gilt für alle \mathcal{D} -Moduln N die Isomorphie

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(M'', N) \cong \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M', N)$$

für alle $i \geq 1$. \diamond

Beweis

Da M projektiv, ist $0 = \text{lpd}(M)$. Ist $i \geq 1$ so ist wegen (3.3) $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, N) = 0$. Anwenden von (2.21) liefert

$$0 \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(M'', \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M', \mathcal{D}) \rightarrow 0$$

exakt und somit $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(M'', \mathcal{D}) \cong \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M', \mathcal{D})$ wie gewünscht. \square

(3.5) Definition

Es sei $R \in \mathcal{D}^{p \times q}$ eine Matrix. Ist $S \in \mathcal{D}^{l \times p}$ mit $SR = 0$, so wird S als Linkssyzygie von R bezeichnet. Gilt sogar $\text{im}(\cdot S) = \ker(\cdot R)$, so heißt das Erzeugnis der Zeilen von S Linkssyzygienmodul von R und wir schreiben $S = \text{LSyz}(R)$. Analog sagen wir zum Erzeugnis der Spalten einer Matrix S mit $\text{im}(S \cdot) = \ker(R \cdot)$ Rechtssyzygienmodul und schreiben $S = \text{RSyz}(R)$. \diamond

(3.6) Bemerkung

Sei $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$ eine Matrix, zu der es eine weitere Matrix $X \in \mathcal{D}^{p \times q}$ gibt mit $RX = I_q$. Ist $S = \text{LSyz}(R)$, so gilt

$$S = SI_q = SRX = 0X = 0.$$

kurz: R rechtsinvertierbar $\Rightarrow \cdot R$ injektiv \Leftrightarrow alle Linkssyzygien sind 0. \diamond

Wir wollen uns nun der Bestimmung der globalen Dimension eines Moduls widmen. Falls diese endlich ist, können wir dazu das folgende Lemma nutzen:

(3.7) Lemma

Es sei M ein Links- \mathcal{D} -Modul und

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_m} \xrightarrow{\cdot R_m} \dots \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{D}^{1 \times p_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{D}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

eine endliche freie Auflösung von M . Dann gilt:

1) Ist $m \geq 3$ und existiert eine Rechtsinverse $S_m \in \mathcal{D}^{p_{m-1} \times p_m}$ von R_m , dann ist

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_{m-1}} \xrightarrow{\cdot T_{m-1}} \mathcal{D}^{1 \times (p_{m-2} + p_m)} \xrightarrow{\cdot T_{m-2}} \mathcal{D}^{1 \times p_{m-3}} \xrightarrow{\cdot R_{m-3}} \dots \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{D}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0 \quad (7)$$

ebenfalls eine endliche freie Auflösung, wobei

$$T_{m-1} = \begin{pmatrix} R_{m-1} & S_m \end{pmatrix} \text{ und } T_{m-2} = \begin{pmatrix} R_{m-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Ist $m = 2$ und existiert eine Rechtsinverse $S_2 \in \mathcal{D}^{p_1 \times p_2}$ von R_2 , dann ist

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_1} \xrightarrow{\cdot T_1} \mathcal{D}^{1 \times (p_0 + p_2)} \xrightarrow{\cdot \tau_0} M \rightarrow 0 \quad (8)$$

ebenfalls eine endliche freie Auflösung, wobei

$$T_1 = \begin{pmatrix} R_1 & S_2 \end{pmatrix} \text{ und } \tau_0 = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Beweis

(vgl. [QR07], Prop.20))

Für $m \geq 3$ gibt es drei Gleichungen zu beweisen:

a) $0 = \text{im}(0) = \ker(\cdot T_{m-1})$

b) $\text{im}(\cdot T_{m-1}) = \ker(\cdot T_{m-2})$

c) $\text{im}(\cdot T_{m-2}) = \ker(\cdot R_{m-3})$

a) Es sei $y \in \ker(\cdot T_{m-1})$, also $0 = yT_{m-1} = y \begin{pmatrix} R_{m-1} & S_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yR_{m-1} & yS_m \end{pmatrix}$. Insbesondere ist damit $y \in \ker(\cdot R_{m-1}) = \text{im}(\cdot R_m)$. Somit existiert ein $x \in \mathcal{D}^{1 \times p_m}$ mit $y = xR_m$ und damit $0 = yS_m = xR_m S_m = x$, woraus wir wiederum $y = 0$ folgern können. Die andere Inklusion ist klar.

b) Zu $y \in \text{im}(\cdot T_{m-1})$ gibt es ein $x \in \mathcal{D}^{1 \times p_{m-1}}$ mit $y = xT_{m-1}$. Dann gilt

$$yT_{m-2} = xT_{m-1}T_{m-2} = x \begin{pmatrix} R_{m-1} & S_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{m-2} \\ 0 \end{pmatrix} = x(R_{m-1}R_{m-2} + 0) = 0,$$

da $\text{im}(\cdot R_{m-1}) = \ker(\cdot R_{m-2})$, womit $\text{im}(\cdot T_{m-1}) \subseteq \ker(\cdot T_{m-2})$ gezeigt ist.

Für die andere Inklusion seien $a \in \mathcal{D}^{1 \times p_{m-2}}$, $b \in \mathcal{D}^{1 \times p_m}$, so dass $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \ker(\cdot T_{m-2})$, d.h.

$0 = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} T_{m-2} = aR_{m-2}$. Da $\text{im}(\cdot R_{m-1}) = \ker(\cdot R_{m-2})$ gibt es $x \in \mathcal{D}^{1 \times p_{m-1}}$ mit $a = xR_{m-1}$.

Definiere $y = x - xS_m R_m + bR_m \in \mathcal{D}^{1 \times p_{m-1}}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} yT_{m-1} &= (x - xS_m R_m + bR_m) \begin{pmatrix} R_{m-1} & S_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (x - xS_m R_m + bR_m)R_{m-1} & (x - xS_m R_m + bR_m)S_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xR_{m-1} - xS_m R_m R_{m-1} + bR_m R_{m-1} & xS_m - xS_m R_m S_m + bR_m S_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xR_{m-1} & xS_m - xS_m + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei die Gleichungen $R_m S_m = I_{p_m}$ und $R_m R_{m-1} = 0$ verwendet wurden. Also haben wir auch $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \in \text{im}(\cdot T_{m-1})$.

c) Zu $y \in \ker(\cdot R_{m-3})$ gibt es ein $x \in \mathcal{D}^{1 \times p_{m-2}}$ mit

$$y = xR_{m-2} = \begin{pmatrix} x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{m-2} \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{im}(\cdot T_{m-2}),$$

was $\ker(\cdot R_{m-3}) \subseteq \text{im}(\cdot T_{m-2})$ zeigt. Weiterhin ist

$$T_{m-2}R_{m-3} = \begin{pmatrix} R_{m-2}R_{m-3} \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

insgesamt also $\ker(\cdot R_{m-3}) = \text{im}(\cdot T_{m-2})$. Der Beweis zu $m = 2$ verläuft sehr ähnlich. \square

Lemma (3.7) ist nur ein Spezialfall des folgenden Satzes:

(3.8) Satz

Es sei M ein Links- \mathcal{D} -Modul, welcher eine endliche projektive Auflösung der Länge $n \geq 1$ besitzt:

$$0 \rightarrow P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0.$$

Dann gilt $\text{lpd}(M) = n$ genau dann, wenn d_n keine Rechtsinverse besitzt. \diamond

Beweis

siehe [Lam99] Prop (5.11). \square

Es bleibt noch den Fall der globalen Dimension 0 eines Moduls zu untersuchen:

(3.9) Lemma

Es sei $M = \text{coker}(\cdot R)$ mit $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$. Ist R rechtsinvertierbar, so ist $\text{lpd}(M) = 0$, d.h. M projektiv. Ist $\cdot R$ injektiv, so gilt auch die Rückrichtung. \diamond

Beweis

Ist R rechtsinvertierbar, so gilt $\text{im}(R \cdot) = \mathcal{D}^q$ und mit Bemerkung (3.6) auch $\cdot R$ injektiv. Dann ist die Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times q} \xrightarrow{\cdot R} \mathcal{D}^{1 \times p} \rightarrow M \rightarrow 0 \quad (9)$$

exakt und damit eine freie Auflösung von M . Damit gilt $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) = 0$, falls $i > 1$ und auch $\text{ext}_{\mathcal{D}}^1(M, \mathcal{D}) = \ker(0)/\text{im}(R \cdot) = \mathcal{D}^q/\mathcal{D}^q = 0$, woraus $\text{lpd}(M) = 0$ folgt.

Ist $\cdot R$ injektiv, so ist (9) wieder exakt. Nach Voraussetzung gilt

$$0 = \text{ext}^1(M, \mathcal{D}) = \ker(0)/\text{im}(R \cdot) = \mathcal{D}^q/\text{im}(R \cdot),$$

d.h. $\text{im}(R \cdot) = \mathcal{D}^q$ und somit R rechtsinvertierbar. \square

(3.10) Bemerkung

Die unnötig starke Voraussetzung $\cdot R$ injektiv für die Rückrichtung in obigem Lemma kann durch M besitzt eine endliche freie Auflösung ersetzt werden (siehe [QR07] Proposition 14 und Lemma 16). \diamond

Mithilfe der Aussagen (3.7) bis (3.10) können wir einen Algorithmus zur Bestimmung einer kürzesten freien Auflösung und der globalen Dimension eines endlich präsentierten Moduls geben, sofern diese endlich ist:

3.1.1 Algorithmus: projektive Dimension

Input: Ein Links- \mathcal{D} -Modul M mit existierender endlicher freier Auflösung, endlich präsentiert durch $R_1 \in \mathcal{D}^{p_1 \times p_0}$.

Output: Eine endliche Auflösung kürzester Länge von M , sowie $\text{lpd}(M)$.

```

Start:  $\mathcal{O}^{1 \times p_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{O}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ 
if  $R_1$  rechtsinvertierbar then
  return  $0 \rightarrow \mathcal{O}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ ,  $\text{lpd}(M) = 0$ 
else if  $\text{LSyz}(R_1) = 0$  then
  return  $0 \rightarrow \mathcal{O}^{1 \times p_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{O}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ ,  $\text{lpd}(M) = 1$ 
else
   $i \leftarrow 1$ 
   $R_2 \leftarrow \text{LSyz}(R_1)$ 
  repeat
     $i \leftarrow i + 1$ 
    if  $R_i$  rechtsinvertierbar then
      if  $i=2$  then
        return (8),  $\text{lpd}(M) = 1$ 
      else
        return (7),  $\text{lpd}(M) = i - 1$ 
      end if
    else
       $R_{i+1} \leftarrow \text{LSyz}(R_i)$ 
    end if
  until  $R_{i+1} = 0$ 
  return  $0 \rightarrow \mathcal{O}^{1 \times p_i} \xrightarrow{\cdot R_i} \dots \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{O}^{1 \times p_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{O}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$ ,  $\text{lpd}(M) = i$ 
end if

```

(3.11) Bemerkung

Die Berechnung von Syzygien, sowie das Prüfen von Invertierbarkeit und Bestimmen einer Inversen ist bereits für eine große Klasse von Ringen in SINGULAR implementiert. Die nötigen Verfahren basieren auf einer Gröbnerbasis-Theorie, wie sie in [Lev05] 1.1 näher beschrieben wird. Dort werden auch sogenannte G-Algebren eingeführt. Dies sind Ringe der Form $K\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ für einen Körper K in denen bestimmte Relationen aus einer Menge I gelten müssen (vgl. die Bildung der Weylalgebra in Beispiel (2.7)). Weiterhin brauchen wir eine Wohlordnung $<$, um Elemente aus der entstandenen Algebra zu vergleichen, welche noch weitere Bedingungen erfüllen soll (eine genaue Definition von G-Algebren findet sich ebenfalls in [Lev05] Def. (1.3.2). Dort wird auch gezeigt, dass diese Links- und Rechts-Noethersch sind). Die in SINGULAR implementierten Routinen SYZ, LEFTINVERSE und (für spätere Zwecke gebraucht) LIFT funktionieren für alle G-Algebren. Unter diese Klasse von Ringen fallen auch die in dieser Arbeit hauptsächlich betrachteten, wie kommutative Polynomringe und Weyl-Algebren. In [Lev05] (1.3.9) wird noch eine Vielzahl anderer Ringe genannt, die die oben genannten Voraussetzungen erfüllen und in denen die hier vorgestellten Algorithmen Ergebnisse liefern

sollten. ◇

(3.12) Beispiele

1. Es sei $\mathcal{D} = A_n(K)$ mit den Variablen x, y, d_x, d_y und $M = \mathcal{D}^{1 \times 3} / \mathcal{D}^{1 \times 3} R$, mit

$$R = \begin{pmatrix} 0 & d_y & d_x \\ -d_x + d_y & -d_x & -d_x \\ -d_x + d_y & -d_x - d_y & -2d_x \end{pmatrix}.$$

Die Zeile $R_2 = (1 \ -1 \ 1)$ erzeugt den Linkssyzygien Modul von R , woraus wir folgern, dass R nicht rechtsinvertierbar ist. Damit gilt $\text{lpd}(M) > 0$. Nun ist aber R_2 rechtsinvertierbar (z.B. durch $(1 \ 0 \ 0)^T$) und wir bilden

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & d_y & d_x & 1 \\ -d_x + d_y & -d_x & -d_x & 0 \\ -d_x + d_y & -d_x - d_y & -2d_x & 0 \end{pmatrix}$$

Nach (3.7.2) ist dann

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times 3} \xrightarrow{\cdot \bar{R}} \mathcal{D}^{1 \times 4} \rightarrow M \rightarrow 0$$

eine projektive Auflösung von M und somit $\text{lpd}(M) = 1$.

(Bem.: $M = \mathcal{D}^{1 \times 3} / \mathcal{D}^{1 \times 3} R \cong \mathcal{D}^{1 \times 4} / \mathcal{D}^{1 \times 3} \bar{R}$.)

2. Betrachte nun die transponierte Matrix aus obigem Beispiel, d.h. $M = \mathcal{D}^{1 \times 3} / \mathcal{D}^{1 \times 3} T$ mit $T = R^T$. Diesmal ist eine Linkssyzygie durch $T_2 = (-d_x \ d_x \ -d_y)$ gegeben, welche nicht rechtsinvertierbar ist. Nach (3.18) ist $A_n(K)$ ein Bereich, und so ist es leicht zu sehen, dass T_2 keine weitere Syzygie außer 0 besitzt. Somit haben wir die projektive Auflösung

$$0 \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\cdot T_2} \mathcal{D}^{1 \times 3} \xrightarrow{\cdot R} \mathcal{D}^{1 \times 3} \rightarrow M \rightarrow 0$$

und $\text{lpd}(M) = 2$.

3. Es gibt durchaus Beispiele, in denen die projektive Dimension eines Moduls (und damit wegen (5) auch die eines Ringes) unendlich sein kann:

Nehmen wir zum Beispiel den Ring $\mathcal{D} = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $R = 2$ und $M = \mathcal{D}/\text{im}(\cdot R)$. Dann gilt $\text{LSyz}(R) = 2$ und damit ist

$$\dots \xrightarrow{\cdot 2} \mathcal{D} \xrightarrow{\cdot 2} \mathcal{D} \xrightarrow{\cdot 2} \mathcal{D} \xrightarrow{\cdot R} \mathcal{D}/\text{im}(\cdot R) \rightarrow 0$$

eine Auflösung, welche nie endet, d.h. $\text{lpd}(M) = \text{gld}(\mathcal{D}) = \infty$.

Nun könnte man vielleicht auf den Gedanken kommen, dass man unter der Voraussetzung, dass \mathcal{D} ein Bereich ist, auf die Endlichkeit der projektiven Dimension schließen kann. Leider ist auch dies nicht der Fall: Betrachte dazu das Ideal $I = \langle x^3 - y^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[x, y]$ und $\mathcal{D} = \mathbb{R}[x, y]/I$. Nach einer kleinen Rechnung kann man sehen, dass $x^3 - y^2$ ein Primelement in $\mathbb{R}[x, y]$ ist, und somit ist \mathcal{D} ein Bereich.

Weiter sei $R = \begin{bmatrix} -y & x \\ -x^2 & y \end{bmatrix} \in \mathcal{D}^{2 \times 2}$, sowie $M = \mathcal{D}^{1 \times 2} / \mathcal{D}^{1 \times 2} R$. Dann gilt:

$$R^2 = \begin{bmatrix} -y & x \\ -x^2 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -y & x \\ -x^2 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^2 - x^3 & -yx + xy \\ x^2y - x^2y & -x^3 + y^2 \end{bmatrix} = [0]$$

und damit $\text{LSyz}(R) \supseteq \langle \begin{bmatrix} -y & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -x^2 & y \end{bmatrix} \rangle$.

Sei $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \in \text{LSyz}(R)$. Dann muss

$$[0] = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} -ay - bx^2 & ax + by \end{bmatrix}$$

gelten, was zu den Gleichungen

$$-ay - bx^2 = c(x^3 - y^2) \quad (10)$$

$$ax + by = d(x^3 - y^2) \quad (11)$$

äquivalent ist, wobei $c, d \in K[x, y]$ geeignete Polynome darstellen. Multiplizieren von Gleichung (10) mit x und (11) mit y und anschließendes Addieren liefert

$$-b(x^3 - y^2) = (cx + dy)(x^3 - y^2)$$

und da $K[x, y]$ Bereich, schließlich

$$b = -cx - dy.$$

Analog bringt die Multiplikation mit y von (10) und mit x^2 von (11)

$$a(x^3 - y^2) = (cy + dx^2)(x^3 - y^2)$$

und wieder unter Benutzung, dass $K[x, y]$ ein Bereich ist

$$a = cy + dx^2.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} y & -x \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} x^2 & -y \end{bmatrix}$$

was uns $\text{LSyz}(R) = \langle [(-y \ x)], [(-x^2 \ y)] \rangle$ zeigt.
Damit ist $R \neq 0$ zu sich selbst Linkssyzygie und

$$\dots \xrightarrow{R} \mathcal{D}^{1 \times 2} \xrightarrow{R} \mathcal{D}^{1 \times 2} \xrightarrow{R} \dots \xrightarrow{R} \mathcal{D}^{1 \times 2} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0$$

ist eine freie Auflösung unendlicher Länge. Da R wegen Bemerkung (3.6.2) keine Rechtsinverse besitzt, folgt damit auch hier $\text{lpd}(M) = \infty$. \diamond

Wie in obigem Beispiel gesehen, gibt es Ringe, in denen die globale projektive Dimension unendlich ist. In den in dieser Arbeit hauptsächlich betrachteten Ringen bekommen wir damit allerdings keine Probleme:

(3.13) Beispiele

Es sei K ein Körper der Charakteristik 0:

1. Für $\mathcal{D} = K[x_1, \dots, x_n]$ gilt $\text{gld}(\mathcal{D}) = n$ ([Rot09], Th. 8.37).
2. Es ist $\text{gld}(A_n(K)) = n$ ([Bha73], Cor 2.6). \diamond

— Allgemeines über Filtrierungen —

Bevor es um den Spezialfall der Reinheitsfiltrierung eines Moduls geht, wollen wir zunächst allgemeine Definitionen von Filtrierungen eines Moduls geben:

(3.14) Definition

[MR01] Es sei \mathcal{D} ein Ring. Weiter seien $(T_i, +), i = 0, 1, 2, \dots$ Untergruppen von \mathcal{D} , welche folgende Bedingungen erfüllen:

- i) $T_i T_j \subseteq T_{i+j}$ für alle Paare (i, j) ,
- ii) $T_i \subseteq T_j$ für alle $i < j$,
- iii) $\bigcup T_i = \mathcal{D}$.

Dann wird $\{T_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ Filtrierung von \mathcal{D} genannt. Falls eine solche existiert, nennt man \mathcal{D} einen gefilterten Ring. \diamond

(3.15) Beispiel

Es sei $\mathcal{D} = K[x_1, \dots, x_n]$ für einen Körper K und $p \in \mathcal{D}$. Stelle p in der Form

$$p = \sum_{v \in \mathbb{N}_0^n} a_v x^v \tag{12}$$

dar, wobei nur endlich viele $a_\nu \in K$ ungleich 0 sind und $x^\nu := \prod_{i=1}^n x_i^{\nu_i}$. Wir definieren den Totalgrad von p durch

$$\text{tgrad}(p) = \max\{|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n \mid 0 \neq a_\nu \text{ kommt als Koeffizient in (12) vor}\}.$$

Dann ist durch

$$T_i = \{p \in \mathcal{D} \mid \text{tgrad}(p) \leq i\}, i \in \mathbb{N}$$

eine Filtrierung von \mathcal{D} gegeben. Diese wird Gradfiltrierung von $K[x_1, \dots, x_n]$ genannt. \diamond

(3.16) Definition

Es sei \mathcal{D} ein Ring. Falls es eine Familie $T_i \subseteq \mathcal{D}, i \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass T_i Untergruppen von $(\mathcal{D}, +)$ sind und zusätzlich die Bedingungen

1. $T_i T_j \subset T_{i+j}$ für alle $i, j \in \mathbb{N}_0$
2. $\mathcal{D} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} T_n$

erfüllt sind, so heißt \mathcal{D} ein graduierter Ring und $\{T_n\}$ Graduierung von \mathcal{D} .

Ein Element $t \in T_n$ wird homogen vom Grad n genannt. \diamond

(3.17) Bemerkung

Ist \mathcal{D} ein graduierter Ring mit Graduierung $\{T_i\}$, so setze $M_i = T_0 \oplus \dots \oplus T_i$. Dann ist $\{M_i\}$ eine Filtrierung und damit \mathcal{D} ein gefilterter Ring.

Sei andersherum \mathcal{D} ein gefilterter Ring mit Filtrierung $\{T_i\}$. Wir setzen $M_0 = T_0$ und $M_i = T_i/T_{i-1}$ für $i \geq 1$. Dann nennen wir den Ring $M := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} M_n$ den zu \mathcal{D} assoziierten, graduierten Ring, kurz $M = \text{gr}(\mathcal{D})$.

Damit M tatsächlich zum Ring wird, definieren wir eine Multiplikation auf M : Es sei $s \in \mathcal{D}$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $s \in T_i \setminus T_{i-1}$ (wir sagen s ist vom Grad i). Sei nun $[s] = s + T_{i-1} \in M_i$ die Restklasse von s in M_i und $t \in \mathcal{D}$ vom Grad j . Wir definieren

$$[s][t] = st + T_{i+j-1} \in M_{i+j}.$$

Dies ist wohldefiniert, denn sei $s = s' + b, t = t' + c$ mit $b \in T_{i-1}$ und $c \in T_{j-1}$, so ist

$$st = s't' + s'c + bt' + bc = s't' + d$$

mit $d = s'c + bt' + bc \in T_{i+j-1}$, d.h. $[s][t] = [s'][t'] \in M_{i+j}$. \diamond

(3.18) Beispiel

1. Im Setting von Beispiel (3.15) setzen wir $M_0 = T_0$ und $M_i = T_i/T_{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann sind M_i die Untergruppen von \mathcal{D} , welche alle Monome vom Totalgrad i und deren K -Linearkombinationen beinhalten. Damit ist

$$\text{gr}(\mathcal{D}) = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \cong \mathcal{D}.$$

2. Es ist ein wohlbekanntes Ergebnis (siehe z.B. [Bjö79], Prop (1.2)), dass sich jedes p aus der n -ten Weyl-Algebra $A_n(K)$ eindeutig als endliche Summe

$$p = \sum_{(k,l)=v \in \mathbb{N}_0^{2n}} a_v x^k y^l \quad (13)$$

mit $a_v \in K$ schreiben lässt (mit anderen Worten: Die Menge $\{x^k y^l \mid (k,l) \in \mathbb{N}_0^{2n}\}$ bildet eine K -Basis von $A_n(K)$). Auch hier definieren wir einen Grad für Elemente aus $A_n(K)$, analog zu dem aus Beispiel (3.15):

$$\text{grad}(p) = \max\{|v| = |l| + |k| = l_1 + \dots + l_n + k_1 + \dots + k_n \mid 0 \neq a_v \text{ kommt als Koeffizient in (13) vor}\}.$$

Eine leichte Rechnung zeigt (unter Benutzung der Relationen aus I), dass die Formel

$$\text{grad}(pq) = \text{grad}(p) + \text{grad}(q)$$

für alle $p, q \in A_n(K)$ gilt (hieraus kann insbesondere auch gefolgert werden, dass $A_n(K)$ ein Bereich ist).

Wir wollen nun einen graduierten Ring von $A_n(K)$ bestimmen. Ähnlich wie im letzten Beispiel, setzen wir

$$T_i = \{p \in A_n(K) \mid \text{grad}(p) \leq i\}, i \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\{T_i\}$ eine Filtrierung von $A_n(K)$, welche als Bernstein Filtrierung bezeichnet wird.

Bemerkung (3.17) folgend, seien

$$M_i = T_i/T_{i-1} \text{ und damit } \text{gr}(A_n(K)) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i,$$

mit der oben beschriebenen Multiplikation. Damit ist $\text{gr}(A_n(K))$ ein kommutativer Polynomring: Für $1 \leq j \leq n$ sind $x_j, y_j \in T_1 \setminus T_0$, d.h. $[x_j][y_j] \in M_2$ und weiter

$$[x_j][y_j] = x_j y_j + T_1 = y_j x_j + 1 + T_1 = y_j x_j + T_1 = [y_j][x_j]. \quad \diamond$$

Aber nicht nur Ringe \mathcal{D} können eine Filtrierung besitzen, sondern auch \mathcal{D} -Moduln M :

(3.19) Definition

Es sei \mathcal{D} ein Ring mit Filtrierung $\{T_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ und M ein Links- \mathcal{D} -Modul. Für $i \in \mathbb{N}_0$ seien $(M_i, +)$ Untergruppen von M , welche die Eigenschaften

1. $T_i M_j \subseteq M_{i+j}$ für alle Paare (i, j) ,

$$2. M_i \subseteq M_j \text{ für } i < j,$$

$$3. \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} M_i = M$$

erfüllen. Dann heißt $\{M_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ Filtrierung von M und M selbst wird als gefilterter Modul bezeichnet. \diamond

Ziel dieser Arbeit wird es sein, eine spezielle Filtrierung eines gegebenen Moduls M zu geben, die sogenannte Reinheitsfiltrierung. Genauer folgt in Kapitel 5.

— Gelfand-Kirillov Dimension —

Wir wollen nun einen weiteren Dimensionsbegriff für speziell gefilterte Ringe und Moduln einführen, welche als Gelfand-Kirillov Dimension (kurz GKdim) bezeichnet wird. Ausgangslage hierfür sind speziell gewählte Filtrierungen:

(3.20) Definition

Es sei K ein Körper und \mathcal{D} eine K -Algebra mit Filtrierung $\{T_i\}$ und M ein Links- \mathcal{D} -Modul mit Filtrierung $\{M_i\}$.

1. $\{T_i\}$ wird als Standardfiltrierung bezeichnet, falls $T_0 = K$ und $T_1^n = T_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weiter ist $\{M_i\}$ eine Standardfiltrierung, falls $M_n = T_n M_0$ erfüllt ist, für alle $n \in \mathbb{N}$.
2. Wir nennen die Filtrierung $\{T_i\}$ (bzw. $\{M_i\}$) endlichdimensional, falls die K -Dimensionen der T_i für alle $i \in \mathbb{N}$ endlich ist (bzw. die K -Dimensionen der M_i). \diamond

(3.21) Bemerkung

Die Menge T_1^n soll hier als additiv abgeschlossene Menge gebildet werden, d.h. wenn $x, y \in T_1^n$, dann auch $x + y \in T_1^n$. \diamond

(3.22) Beispiel

Wir betrachten wieder die Filtrierung aus Beispiel (3.18.2) für $A_n(K)$. Diese ist endlichdimensional (siehe Lemma (3.24)). Wir zeigen, dass sie sogar eine Standardfiltrierung ist: Es gilt

$$T_0 = \{p \in A_n(K) \mid \text{grad}(p) \leq 0\} = K.$$

Weiter ist $T_1^i = T_i$: Dass jedes Produkt von i Elementen vom Grad ≤ 1 ein Element mit Grad $\leq i$ ergibt ist klar aufgrund der Gradformel, also $T_1^i \subseteq T_i$. Wähle nun ein beliebiges $p = \sum_{(k,l)=v \in \mathbb{N}_0^{2n}} a_v x^k y^l \in T_i$, d.h. $a_v = 0$ für alle v mit $|v| > i$. Da $x_j, y_j \in T_1$ für alle $1 \leq j \leq n$ ist

$$a_v x^k y^l = a_v \underbrace{x_1 x_1 \cdots x_1}_{k_1 \text{ mal}} \cdots \underbrace{x_n x_n \cdots x_n}_{k_n \text{ mal}} \underbrace{y_1 y_1 \cdots y_1}_{l_1 \text{ mal}} \cdots \underbrace{y_n y_n \cdots y_n}_{l_n \text{ mal}} \in T_1^i$$

für alle $v = (k, l) \in \mathbb{N}_0^{2n}$ mit $|v| \leq i$. Weiter soll T_1^i additiv abgeschlossen sein und da alle in der Summe von p vorkommenden Terme in T_1^i vorkommen, ist auch die Summe selbst und damit $p \in T_1^i$.

Analog ist die Filtrierung aus (3.15) eine endlichdimensionale Standardfiltrierung für $K[x_1, \dots, x_n]$. \diamond

Es sei nun $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 1}$ eine Funktion. Zu jeder solcher Abbildung definiere die Zahl

$$\gamma(f) := \limsup_{i \rightarrow \infty} (\log(f(i))/\log(i)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

(3.23) Definition

Seien \mathcal{D} eine K -Algebra und M ein Links- \mathcal{D} -Modul mit zugehörigen endlichdimensionalen Standardfiltrierungen $\{T_i\}$ für \mathcal{D} bzw. $\{M_i\}$ für M . Dann gibt es Funktionen $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 1}$ und $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 1}$ mit $f(n) = \dim_K(T_n)$ und $g(n) = \dim_K(M_n)$. Wir definieren die Gelfand-Kirillov Dimension

$$\text{GKdim}(\mathcal{D}) := \gamma(f) \text{ bzw. } \text{GKdim}(M) := \gamma(g)$$

von \mathcal{D} bzw. M . \diamond

(3.24) Lemma

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{N}$. Weiter sei T_n der K -Vektorraum, welcher die Menge $M_1 = \{x^\nu \mid |\nu| \leq n, \nu \in \mathbb{N}^s\}$ aller Monome vom Grad $\leq n$ in s Unbestimmten als Basis besitzt und V_n der K -Vektorraum, dessen Basis durch $M_2 = \{x^\nu \mid |\nu| = n, \nu \in \mathbb{N}^s\}$ gegeben ist. Dann gilt:

$$1. \dim(T_n) = \binom{n+s}{s}$$

$$2. \dim(V_n) = \binom{n+s-1}{s-1} \quad \diamond$$

Beweis

Betrachten wir zunächst die Aussage für V_n und beweisen diese per Induktion über s . Wir wollen zeigen, dass

$$\begin{aligned} \dim(V_n) &= |M_2| = |\{x^\nu \mid |\nu| = n, \nu \in \mathbb{N}^s\}| \\ &= |\{(v_1, \dots, v_s) \mid \sum_{i=1}^s v_i = n, v_i \in \mathbb{N}_0\}| \stackrel{z.z.}{=} \binom{n+s-1}{s-1} \end{aligned}$$

gilt. Für $s = 1$ gibt es nur die Möglichkeit $v_1 = n$ zu wählen, d.h. $|M_2| = 1$. Einsetzen von $s = 1$ in der rechten Seite liefert ebenfalls $1 = \binom{n}{0}$.

Sei nun $s \geq 1$ beliebig, wir zeigen die Aussage für $s + 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
|M_2| &= |\{(v_1, \dots, v_{s+1}) \mid \sum_{i=1}^{s+1} v_i = n, v_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, s+1\}| \\
&= |\bigcup_{j \leq n} \{(v_1, \dots, v_{s+1}) \mid \sum_{i=1}^s v_i = n - v_{s+1}, v_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, s, v_{s+1} = j\}| \\
&= \sum_{j=0}^n |\{(v_1, \dots, v_s) \mid \sum_{i=1}^s v_i = n - j, v_i \in \mathbb{N}_0, i = 1, \dots, s\}| \\
&\stackrel{IV}{=} \sum_{j=0}^n \binom{n-j+s-1}{s-1} = \binom{n+s}{s},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung durch eine weitere leichte Induktionsrechnung über n gezeigt werden kann.

Die erste Aussage folgt nun leicht aus der Tatsache, dass $T_n = \bigoplus_{i=0}^n V_i$ gilt, denn damit

$$\dim(T_n) = \sum_{i=0}^n \dim(V_i) = \sum_{i=0}^n \binom{i+s-1}{s-1} = \binom{n+s}{s}.$$

Man kann hier ebenfalls per Induktion über n argumentieren, um die letzte Gleichheit zu beweisen. □

(3.25) Lemma

Es sei $s \in \mathbb{N}$ und $f(n) = \binom{n+s}{s}$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\gamma(f) = s$.

Beweis

Es ist $f(n) = \binom{n+s}{s} = \frac{(n+s)!}{s!n!} = \frac{(n+s)(n+s-1)\cdots(n+1)}{s!} = \frac{n^s}{s!} + \sum_{j=0}^{s-1} a_j n^j$ für gewisse $a_j \in \mathbb{R}$. Für n hinreichend groß verhält sich $f(n)$ also wie $\frac{n^s}{s!}$. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\gamma(f) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} (\log(f(n))/\log(n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (\log(\frac{n^s}{s!} + \sum_{j=0}^{s-1} a_j n^j)/\log(n)) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} (\log(\frac{n^s}{s!})/\log(n)) = \limsup_{n \rightarrow \infty} ((\log(n)s - \log(s!))/\log(n)) \\
&= \limsup_{n \rightarrow \infty} (s - \log(s!)/\log(n)) = s.
\end{aligned}$$
□

(3.26) Satz

Für einen Körper K gilt:

1. $\text{GKdim}(K[x_1, \dots, x_n]) = n$.
2. $\text{GKdim}(A_n(K)) = 2n$. ◇

Beweis

Nach (3.22) sind die $\{T_i\}$ aus Beispiel (3.15) bzw. (3.18) endlichdimensionale Standardfiltrierungen mit

$$\dim(T_i) = \begin{cases} \binom{i+n}{n}, & \text{falls } \mathcal{D} = K[x_1, \dots, x_n] \\ \binom{i+2n}{2n}, & \text{falls } \mathcal{D} = A_n(K) \end{cases}$$

nach Lemma (3.24). Mit Lemma (3.25) folgen dann die Behauptungen. □

§ 4 Cohen-Macaulay und Auslander-reguläre Ringe

Wir wollen nun spezielle Arten von Ringen betrachten, in denen wir ein Verfahren geben können, um die Reinheitsfiltrierung zu berechnen. Dazu fordern wir gewisse Eigenschaften die unsere Ringe erfüllen sollen. Zunächst ein weiterer wichtiger Begriff bei der Untersuchung von Moduln:

(4.1) Definition

Für einen endlich erzeugten Links- \mathcal{D} -Modul M mit $\text{lpd}(M) = n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$j_{\mathcal{D}}(M) = \begin{cases} \inf\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) \neq 0\}, & \text{falls } M \neq 0 \\ \infty, & \text{falls } M = 0 \end{cases}$$

die Gradzahl von M (analog, falls M Rechts- \mathcal{D} -Modul). \diamond

Die Wohldefiniertheit der Gradzahl folgt aus (3.2.2), denn es ist $\text{ext}^n(M, \mathcal{D}) \neq 0$, falls $\text{lpd}(M) = n$. Ist \mathcal{D} sogar kommutativ, so kann die Gradzahl auch ohne die Forderung, dass M endliche projektive Dimension hat, definiert werden. Dies folgt aus [Eis95], (Prop. 18.4):

(4.2) Satz

Es sei \mathcal{D} ein kommutativer Ring und M, N endlich erzeugte \mathcal{D} -Moduln. Im Fall, dass $\text{ann}(N) + \text{ann}(M) = \mathcal{D}$ gilt, so ist $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, N) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Ansonsten gibt es ein $i \in \mathbb{N}$ mit $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, N) \neq 0$. \diamond

Wir betrachten in dieser Arbeit stets $N = \mathcal{D}$ und damit $\text{ann}(N) = 0$. Also kann der erste Fall obigen Satzes nur dann eintreffen, wenn $\text{ann}(M) = \mathcal{D}$ ist, in anderen Worten $M = 0$ gilt. Also gibt es für endlich erzeugtes $M \neq 0$ stets ein $i \in \mathbb{N}_0$ mit $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, N) \neq 0$, falls \mathcal{D} kommutativ ist.

(4.3) Bemerkung

Ist die projektive Dimension eines Rings endlich, so folgt aus (3.2.2):

$$0 \leq j_{\mathcal{D}}(M) \leq \text{lpd}(M) \leq \text{gld}(\mathcal{D}).$$

(4.4) Lemma

Sind M, M_1, M_2 Links- \mathcal{D} -Moduln und

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, so gilt

$$j_{\mathcal{D}}(M) \geq \inf\{j_{\mathcal{D}}(M_1), j_{\mathcal{D}}(M_2)\}. \quad \diamond$$

Beweis

Mit Lemma (2.21) erhalten wir eine exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow \text{ext}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M_2, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M_1, \mathcal{D}) \rightarrow \dots$$

Wäre nun $j_{\mathcal{D}}(M) < \inf\{j_{\mathcal{D}}(M_1), j_{\mathcal{D}}(M_2)\}$, so folgt, dass

$$0 \rightarrow \text{ext}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D}) \rightarrow 0$$

exakt ist und damit $\text{ext}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D}) = 0$, ein Widerspruch zur Definition der Gradzahl eines Moduls. \square

(4.5) Definition

Es sei \mathcal{D} ein Noetherscher Ring, dessen globale projektive Dimension endlich ist. Wir nennen \mathcal{D} einen Auslander-regulären Ring, falls für alle endlich erzeugten \mathcal{D} -Moduln M und alle Untermoduln N von $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$ die Ungleichung $j_{\mathcal{D}}(N) \geq i$ erfüllt ist. \diamond

Der nachfolgende Satz wird Grundlage sein, um einige wichtige Eigenschaften in Auslander-regulären Ringen festzuhalten. Ein Beweis zu diesem lässt sich in [Bjö79], Seite 73 finden oder aber auch in etwas allgemeinerer Fassung in [Lev81].

(4.6) Satz

Es sei \mathcal{D} ein Auslander-regulärer Ring mit $\text{gld}(\mathcal{D}) = n$ und M ein endlich erzeugter \mathcal{D} -Modul. Dann gibt es eine Kette von Untermoduln B_{-i} von M (wobei $B_{-j} = 0$ für $j > n$) mit $M = B_0 \supset B_{-1} \supset B_{-2} \supset \dots \supset B_{-n} \supset 0$ und \mathcal{D} -Moduln Q_i , so dass

$$0 \rightarrow B_{-j}/B_{-j-1} \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^j(\text{ext}_{\mathcal{D}}^j(M, \mathcal{D})) \rightarrow Q_j \rightarrow 0$$

exakt ist für alle $0 \leq j \leq n$. \diamond

Aus diesem Satz lassen sich nun einige Eigenschaften für Auslander-reguläre Ringe zeigen:

(4.7) Lemma

Es sei \mathcal{D} Auslander-regulär und M ein endlich erzeugter \mathcal{D} -Modul. Mit den Bezeichnungen aus Satz (4.6) gilt:

1. $j_{\mathcal{D}}(B_{-i}) \geq i$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$.
2. $j_{\mathcal{D}}(\text{ext}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) = j_{\mathcal{D}}(M)$.
3. $\text{ext}^{i-1}(\text{ext}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) = 0$ für alle $i \geq 1$.
4. $j_{\mathcal{D}}(\text{ext}^l(\text{ext}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D}), \mathcal{D})) \geq l + 2$ für alle $l > j_{\mathcal{D}}(M)$. \diamond

Beweis

Nach Satz (4.6) ist

$$0 \rightarrow B_{-i}/B_{-i-1} \xrightarrow{l} \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \rightarrow Q_i \rightarrow 0$$

exakt und damit

$$B_{-i}/B_{-i-1} \cong \text{im}(l) \subseteq \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}).$$

Mit der Auslander-Eigenschaft folgern wir $j_{\mathcal{D}}(B_{-i}/B_{-i-1}) \geq i$.

Ist $i > n$ so ist die erste Aussage klar. Wir führen den Beweis für $0 \leq i \leq n$ per rückläufiger Induktion. Sei also zunächst $i = n$. Die Sequenz

$$0 \rightarrow B_{-n-1} \rightarrow B_{-n} \rightarrow B_{-n}/B_{-n-1} \rightarrow 0$$

ist exakt, wobei $B_{-n-1} = 0$ und damit nach (4.4)

$$\begin{aligned} j_{\mathcal{D}}(B_{-n}) &\geq \inf\{j_{\mathcal{D}}(B_{-n-1}), j_{\mathcal{D}}(B_{-n}/B_{-n-1})\} \\ &= \inf\{\infty, j_{\mathcal{D}}(B_{-n}/B_{-n-1})\} = j_{\mathcal{D}}(B_{-n}/B_{-n-1}) \geq n. \end{aligned}$$

Für $0 \leq i \leq n$ betrachte nun

$$0 \rightarrow B_{-i} \rightarrow B_{-(i-1)} \rightarrow B_{-i}/B_{-(i-1)} \rightarrow 0$$

und damit nach Induktionsvoraussetzung

$$j_{\mathcal{D}}(B_{-(i-1)}) \geq \inf\{j_{\mathcal{D}}(B_{-i}), j_{\mathcal{D}}(B_{-i}/B_{-(i-1)})\} \stackrel{IV}{\geq} \inf\{i, i-1\} = i-1.$$

Um den zweiten Teil zu zeigen, benutzen wir wieder die Auslander-Eigenschaft: Da $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D})$ Untermodul von sich selbst, gilt $j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D})) \geq j_{\mathcal{D}}(M)$. Weiter verschwindet $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$ für alle $i < j_{\mathcal{D}}(M)$ und damit $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})) = 0$. Mit der Sequenz aus (4.6) folgern wir $B_{-i}/B_{-i-1} = 0$, d.h. $B_{-i} = B_{-i-1}$, falls $i < j_{\mathcal{D}}(M)$.

Wäre nun $j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D})) > j_{\mathcal{D}}(M)$, dann $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M)}(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) = 0$ und somit auch $B_{-j_{\mathcal{D}}(M)} = B_{-j_{\mathcal{D}}(M)-1}$. Also ist $B_{-j_{\mathcal{D}}(M)-1} = B_{-j_{\mathcal{D}}(M)} = \dots = B_{-1} = B_0 = M$ und wir erhalten mit dem ersten Teil $j_{\mathcal{D}}(M) = j_{\mathcal{D}}(B_{-j_{\mathcal{D}}(M)-1}) \geq j_{\mathcal{D}}(M) + 1$, ein Widerspruch.

Die dritte Aussage folgt sofort aus der Tatsache, dass $\text{ext}^i(M, \mathcal{D})$ Untermodul von sich selbst ist und damit $j_{\mathcal{D}}(\text{ext}^i(M, \mathcal{D})) \geq i$ wegen der Auslander-Eigenschaft. Für den Beweis des letzten Teils verweisen wir auf [Bjö93], A:2.4, da dieser einiges an Vorarbeit (u.a. im Bereich der Spektralsequenzen) benötigt. \square

In Auslander-regulären Ringen erhalten wir nun eine stärkere Aussage von Lemma (4.4):

(4.8) Satz

Es sei \mathcal{D} ein Auslander-regulärer Ring und M, M_1, M_2 Links- \mathcal{D} -Moduln. Ist weiter

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz, so gilt

$$j_{\mathcal{D}}(M) = \inf\{j_{\mathcal{D}}(M_1), j_{\mathcal{D}}(M_2)\}. \quad \diamond$$

Beweis

Wegen Lemma (4.4) bleibt $j_{\mathcal{D}}(M) \leq \inf\{j_{\mathcal{D}}(M_1), j_{\mathcal{D}}(M_2)\}$ zu zeigen. Ist $j_{\mathcal{D}}(M_1) \geq j_{\mathcal{D}}(M_2)$, dann erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_2)}(M_2, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_2)}(M, \mathcal{D}) \rightarrow \dots$$

und somit $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_2)}(M, \mathcal{D}) \neq 0$, da sonst $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_2)}(M_2, \mathcal{D}) = 0$.

Es sei nun $\inf\{j_{\mathcal{D}}(M_1), j_{\mathcal{D}}(M_2)\} = j_{\mathcal{D}}(M_1)$ und wir nehmen an, dass $j_{\mathcal{D}}(M) > j_{\mathcal{D}}(M_1)$ gilt. Dann ist

$$0 \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_1)}(M_1, \mathcal{D}) \xrightarrow{\iota} \text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_1)+1}(M_2, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_1)+1}(M, \mathcal{D}) \rightarrow \dots$$

exakt und wir folgern $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_1)}(M_1, \mathcal{D}) \cong \text{im}(\iota) \subseteq \text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_1)+1}(M_2, \mathcal{D})$. Durch die Auslander-Eigenschaft gilt dann $j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(M_1)}(M_1, \mathcal{D})) \geq j_{\mathcal{D}}(M_1) + 1$, was einen Widerspruch zum zweiten Teil von Lemma (4.7) darstellt. \square

(4.9) Folgerung

Es sei \mathcal{D} ein Auslander-regulärer Ring und M, N Links- \mathcal{D} -Moduln.

1. Gibt es ein surjektives $\pi : M \rightarrow N$, dann gilt $j_{\mathcal{D}}(M) \leq j_{\mathcal{D}}(N)$.
2. Ist N ein Untermodul von M so gilt $j_{\mathcal{D}}(M) \leq j_{\mathcal{D}}(N)$. \diamond

Beweis

Um 1. zu zeigen betrachte die Sequenz

$$0 \rightarrow \ker(\pi) \hookrightarrow M \xrightarrow{\pi} N \rightarrow 0.$$

Da π nach Voraussetzung surjektiv ist, ist diese exakt und mit Satz (4.8) folgt

$$j_{\mathcal{D}}(M) = \inf\{j_{\mathcal{D}}(\ker(\pi)), j_{\mathcal{D}}(N)\} \leq j_{\mathcal{D}}(N).$$

Für den zweiten Teil der Aussage, betrachte die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N \hookrightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

und schließe analog. \square

Es folgt nun eine weitere interessante Eigenschaft, welche Ringe besitzen können: \diamond

(4.10) Definition

Ist \mathcal{D} ein Noetherscher Ring, welcher die Gleichung

$$j_{\mathcal{D}}(M) = \text{GKdim}(\mathcal{D}) - \text{GKdim}(M)$$

für alle Links- \mathcal{D} -Moduln M erfüllt, so nennen wir diesen Cohen-Macaulay Ring. \diamond

Der Nutzen eines Cohen-Macaulay Ringes bezüglich der Reinheitsfiltrierung wird im folgenden Kapitel näher erläutert.

(4.11) Bemerkung

Das Konzept eines Cohen-Macaulay Ringes im kommutativen Fall basiert auf den Begriffen der Tiefe und Krull-Dimension eines Moduls. Ist \mathcal{D} ein lokaler Ring und M ein endlich erzeugter \mathcal{D} -Modul, so nennt man diesen Cohen-Macaulay, falls die Gleichung $\text{depth}(M) = \text{dim}(M)$ erfüllt ist, wobei $\text{depth}(\cdot)$ die Tiefe und $\text{dim}(\cdot)$ die Krull-Dimension von M bezeichnet. \mathcal{D} selbst wird als Cohen-Macaulay Ring bezeichnet, falls er aufgefasst als Modul über sich selbst Cohen-Macaulay ist (vgl. Definition 7.7.1 in [GP08]). Mit 7.7.10 aus [GP08] gilt für alle Ideale $I \subsetneq \mathcal{D}$ aus einem lokalen Cohen-Macaulay Ring die Formel

$$\text{dim}(\mathcal{D}) = \text{dim}(I) + \text{depth}(I).$$

Nach Definition ist $\text{dim}(M) := \text{dim}(\text{ann}(M))$ und mit $I = \text{ann}(M)$ ergibt sich aus obigem Zusammenhang

$$\text{dim}(\mathcal{D}) = \text{dim}(\text{ann}(M)) + \text{depth}(\text{ann}(M)).$$

Im nicht-kommutative Fall wird die Krull-Dimension $\text{dim}(\cdot)$ durch die Gelfand-Kirillov Dimension ersetzt, da diese algorithmisch besser zu berechnen ist. Identifizieren wir nun die Tiefe von $\text{ann}(M)$ als die Gradzahl $j_{\mathcal{D}}(M)$, so erhalten wir die Formel aus Definition 4.10. Für genaue Definitionen und Aussagen über die hier genannten Begriffe, verweisen wir an dieser Stelle auf Kapitel 7 in [GP08] oder Kapitel 18 in [Eis95]. \diamond

(4.12) Beispiel

Wegen den Ergebnissen aus Beispiel (3.18) können wir mit ([GZ93], Cor. 3.10) die folgende Aussage treffen:

Ist K ein Körper der Charakteristik 0, so sind die Ringe $K[x_1, \dots, x_n]$ und $A_n(K)$ Auslander-regulär und Cohen-Macaulay. \diamond

§ 5 Reinheitsfiltrierung

— Reine Moduln und Reinheitsfiltrierung —

Gegeben sei ein endlich erzeugter Links-Modul M über einem Auslander-regulären und gefilterten Ring \mathcal{D} mit $\text{gld}(\mathcal{D}) = n < \infty$. Wir wollen uns nun eine spezielle Art von Filtrierungen von M ansehen, welche auf dem folgenden Begriff beruht:

(5.1) Definition ([Qua11])

Ein endlich erzeugter Modul M wird $j_{\mathcal{D}}(M)$ -rein genannt, wenn für alle Untermoduln $0 \neq N \subseteq M$ die Gradzahlen von M und N übereinstimmen. \diamond

Aus der Definition ist sofort klar: Untermoduln eines reinen Moduls sind wieder rein. Betrachten wir die folgenden Mengen: Für $i = 0, \dots, n$ seien

$$t_i(M) := \{m \in M \mid j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m) \geq i\} \text{ und } t_i(M) := 0 \text{ falls } i > n. \quad (14)$$

Dies ist klarerweise eine absteigende Kette von Mengen:

$$t_0(M) = M \supseteq t_1(M) \supseteq t_2(M) \supseteq \dots \supseteq t_n(M) \supseteq t_{n+1}(M) = 0. \quad (15)$$

Wir setzen nun

$$\begin{aligned} M_0 &= t_{n+1}(M) = 0, \quad M_j = t_0(M) = M \text{ für } j \geq n \text{ und} \\ M_i &= t_{n-i}(M) = \{m \in M \mid j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m) \geq n - i\} \text{ für } i = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

(5.2) Lemma

Die oben konstruierten Mengen M_i sind \mathcal{D} -Moduln und bilden eine Filtrierung von M . \diamond

Beweis

Klar ist, dass $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = M$ und $M_i \subseteq M_j$ für $i < j$ gilt, da die M_i eine in i aufsteigende Kette von Teilmengen von M bilden, deren größtes Element M selbst ist. Wir zeigen, dass die M_j Untermoduln von M sind, woraus die Bedingung $T_i M_j \subseteq M_{i+j}$ für alle Filtrierungen $\{T_i\}$ von \mathcal{D} folgt.

Sei also $d \in \mathcal{D}$ und $m \in M_i$. Da $\mathcal{D}m$ und $\mathcal{D}dm$ Links- \mathcal{D} -Moduln sind und $\mathcal{D}dm \subseteq \mathcal{D}m$ gilt, folgt mit Folgerung (4.9.2)

$$n - i \leq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m) \leq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}dm)$$

und somit $dm \in M_i$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die M_i additiv sind. Dazu seien $m_1, m_2 \in M_i$. Es gilt

$\mathcal{D}(m_1 + m_2) \subseteq \mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2$ und wiederum mit Folgerung (4.9.2) erhalten wir die Beziehung $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(m_1 + m_2)) \geq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2)$. Betrachte die beiden Sequenzen

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{D}m_1 \cap \mathcal{D}m_2 \xrightarrow{f_1} \mathcal{D}m_1 \times \mathcal{D}m_2 \xrightarrow{g_1} \mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2 \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow \mathcal{D}m_1 \xrightarrow{f_2} \mathcal{D}m_1 \times \mathcal{D}m_2 \xrightarrow{g_2} \mathcal{D}m_2 \rightarrow 0, \end{aligned}$$

mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} f_1 : x \mapsto (x, x) & & g_1 : (x, y) \mapsto x - y \\ f_2 : x \mapsto (x, 0) & & g_2 : (x, y) \mapsto y. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die obigen Sequenzen exakt sind. Wenden wir Lemma (4.8) auf beide Sequenzen an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} n - i &\leq \inf\{j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_1), j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_2)\} \stackrel{4.8}{=} j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_1 \times \mathcal{D}m_2) \\ &\stackrel{4.8}{=} \inf\{j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_1 \cap \mathcal{D}m_2), j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2)\} \\ &\leq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_1 + \mathcal{D}m_2) \leq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}(m_1 + m_2)), \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Da die M_i sich von den $t_i(M)$ lediglich durch Umnummerierung unterscheiden, werden wir unser Augenmerk auf die $t_i(M)$ werfen, deren Eigenschaften sich dann leicht auf die M_i übertragen lassen.

(5.3) Lemma

Es sei \mathcal{D} ein Auslander-regulärer Ring und M ein Links- \mathcal{D} -Modul. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. M ist i -rein $\Leftrightarrow t_i(M) = M$ und $t_{i+1}(M) = 0$.
2. $j_{\mathcal{D}}(t_i(M)) \geq i$, falls M endlich erzeugt.
3. $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D})$ ist entweder 0 oder i -rein.
4. M ist $j_{\mathcal{D}}(M)$ -rein genau dann, wenn $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) = 0$ für alle $i \neq j_{\mathcal{D}}(M)$.

Beweis

1. Es sei M ein i -reiner Modul. Klar ist, dass $t_i(M) \subseteq M$ gilt, wir zeigen noch die andere Inklusion. Ist $0 \neq m \in M$, so ist $0 \neq \mathcal{D}m \subseteq M$ und damit $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m) = j_{\mathcal{D}}(M) = i$ nach Definition eines reinen Moduls. Hieraus folgt $m \in t_i(M)$ und $m \notin t_{i+1}(M)$. Nun gelte $t_i(M) = M$ und $t_{i+1}(M) = 0$ und es sei N ein Untermodul von M . Ist $0 \neq n \in N$, so ist $\mathcal{D}n \subseteq N$ und damit nach Folgerung (4.9.2) $j_{\mathcal{D}}(N) \leq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}n)$. Nach

Voraussetzung ist $n \in t_i(M)$, aber $n \notin t_{i+1}(M)$, woraus wir $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}n) = i$ folgern. Insgesamt ist (wegen $N \subseteq M$)

$$j_{\mathcal{D}}(M) \leq j_{\mathcal{D}}(N) \leq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}n) = i = j_{\mathcal{D}}(M)$$

und damit $j_{\mathcal{D}}(M) = j_{\mathcal{D}}(N)$ wie gewünscht.

2. Ist M endlich erzeugt, so auch $t_i(M)$, da \mathcal{D} Noethersch. Seien m_1, \dots, m_n Erzeuger von $t_i(M)$. Wir führen eine Induktion über n : Ist M zyklisch mit Erzeuger m_1 , so gilt $j_{\mathcal{D}}(t_i(M)) = j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_1) \geq i$. Sei also $n \geq 1$ und $t_i(M) = \langle m_1, \dots, m_{n+1} \rangle$. Mit $M' = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ ist ähnlich zu Lemma (5.2)

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M' \times \mathcal{D}m_{n+1} \rightarrow \mathcal{D}m_{n+1} \rightarrow 0$$

eine exakte Sequenz, woraus wir

$$j_{\mathcal{D}}(M' \times \mathcal{D}m_{n+1}) = \inf\{j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m_{n+1}), j_{\mathcal{D}}(M')\} \stackrel{IV}{\geq} i$$

schließen können. Da $\pi : M' \times \mathcal{D}m_{n+1} \rightarrow M' + \mathcal{D}m_{n+1}$, $(x, y) \mapsto x + y$ surjektiv, folgt mit (4.9.1)

$$j_{\mathcal{D}}(M' + \mathcal{D}m_{n+1}) \geq j_{\mathcal{D}}(M' \times \mathcal{D}m_{n+1}) \geq i$$

wie gewünscht.

3. Es sei $0 \neq \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) := N$ und $P := \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$. Da $N \neq 0$, folgt $j_{\mathcal{D}}(P) \leq i$ und wegen der Auslander-Eigenschaft $j_{\mathcal{D}}(P) \geq i$, d.h. $j_{\mathcal{D}}(P) = i$. Damit gilt

$$j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N, \mathcal{D})) = j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^l(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j_{\mathcal{D}}(P)}(P, \mathcal{D}), \mathcal{D})) \geq l + 2, \text{ für alle } l > i = j_{\mathcal{D}}(P) \quad (16)$$

wegen Lemma (4.7.4). Sei nun $N' \subseteq N$ ein Untermodul. Wegen der Auslander-Eigenschaft folgt $j_{\mathcal{D}}(N') \geq i$, wir zeigen noch $j_{\mathcal{D}}(N') \leq i$ und nehmen dazu an, dass $l := j_{\mathcal{D}}(N') > i$ gilt. Es ist

$$0 \rightarrow N' \hookrightarrow N \rightarrow N/N' \rightarrow 0$$

exakt und wir wenden Satz (2.21) an, um die exakte Sequenz

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N, \mathcal{D}) \xrightarrow{f} \text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N', \mathcal{D}) \xrightarrow{g} \text{ext}_{\mathcal{D}}^{l+1}(N/N', \mathcal{D})$$

zu erhalten. Daraus ergibt sich die weitere exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{im}(f) \hookrightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N', \mathcal{D}) \xrightarrow{g} \text{im}(g) \rightarrow 0$$

und wegen (4.7.2) schließen wir $l = j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N', \mathcal{D})) = \inf\{j_{\mathcal{D}}(\text{im}(f)), j_{\mathcal{D}}(\text{im}(g))\}$. Es können somit zwei Fälle auftreten: Einerseits kann wegen der Auslander-Eigenschaft

$$l = j_{\mathcal{D}}(\text{im}(g)) \geq j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{l+1}(N/N', \mathcal{D})) \geq l + 1$$

gelten, was offensichtlich einen Widerspruch darstellt. Falls aber $l = j_{\mathcal{D}}(\text{im}(f))$, so betrachte die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \ker(f) \hookrightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N, \mathcal{D}) \xrightarrow{f} \text{im}(f) \rightarrow 0,$$

mit welcher $j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N, \mathcal{D})) \leq j_{\mathcal{D}}(\text{im}(f))$ folgt und damit insgesamt

$$l = j_{\mathcal{D}}(\text{im}(f)) \geq j_{\mathcal{D}}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^l(N, \mathcal{D})) \geq l + 2$$

aus Gleichung (16), ebenfalls ein Widerspruch.

4. Der Beweis ist ähnlich zum letzten Teil und benutzt die Moduln Q_i aus Lemma 4.6. Genauer findet sich in [Bjö93], Prop. (2.6). \square

Für den folgenden Satz benötigen wir ein Standardwerkzeug der homologischen Algebra, das sogenannte Schlangen-Lemma (siehe u.a. [Rot09] Cor.(6.12)):

(5.4) Lemma ([Rot09], 6.12)

Es seien $A, B, C, \bar{A}, \bar{B}$ und \bar{C} Moduln über einem Ring \mathcal{D} und

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \\ 0 & \longrightarrow & \bar{A} & \xrightarrow{f'} & \bar{B} & \xrightarrow{g'} & \bar{C} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen. Dann gibt es eine exakte Sequenz der Form

$$0 \rightarrow \ker(a) \rightarrow \ker(b) \rightarrow \ker(c) \rightarrow \text{coker}(a) \rightarrow \text{coker}(b) \rightarrow \text{coker}(c) \rightarrow 0.$$

Die Abbildung $\ker(b) \rightarrow \ker(c)$ ist hierbei durch $g|_{\ker(b)}$ gegeben. \diamond

(5.5) Satz ([Qua11])

Es sei \mathcal{D} ein Auslander-regulärer Ring, M ein endlich erzeugter Links- \mathcal{D} -Modul und $t_i(M)$ definiert wie in (15). Dann sind die Moduln $t_i(M)/t_{i+1}(M)$ entweder 0 oder i -rein. \diamond

Beweis

Es sei $P = t_i(M)/t_{i+1}(M) \neq 0$. Wir zeigen $t_i(P) = P$ und $t_{i+1}(P) = 0$, woraus mit Lemma (5.3.1) die Behauptung folgt. Ist $p \in P$, so gilt $\mathcal{D}p \subseteq P$ und damit $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}p) \geq j_{\mathcal{D}}(P)$. Weiter ist

$$0 \rightarrow t_{i+1}(M) \rightarrow t_i(M) \rightarrow P \rightarrow 0$$

exakt und mit Lemma (5.3.2)

$$i \leq j_{\mathcal{D}}(t_i(M)) = \inf\{j_{\mathcal{D}}(P), j_{\mathcal{D}}(t_{i+1}(M))\} \leq j_{\mathcal{D}}(P) \leq j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}p),$$

also $p \in t_i(P)$. Wir haben damit $P \subseteq t_i(P) \subseteq P$, d.h. $P = t_i(P)$.

Es seien nun

$$\alpha : t_i(M) \rightarrow P, \quad \beta : P \rightarrow P/t_{i+1}(P)$$

kanonische Surjektionen. Dann ist

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & t_{i+1}(M) & & \ker(\beta \circ \alpha) & & \\
 & & \downarrow \iota_1 & & \downarrow \iota_2 & & \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & t_i(M) & \xrightarrow{id_{t_i(M)}} & t_i(M) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma & \circlearrowleft & \downarrow \alpha & \circlearrowleft & \downarrow \beta \circ \alpha \\
 0 & \longrightarrow & t_{i+1}(P) & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\beta} & P/t_{i+1}(P) \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & 0 & & 0
 \end{array}$$

exakt und kommutativ, wobei γ die Nullabbildung und ι_1, ι_2 Einbettungen sind. Mit den Beziehungen

$$\begin{aligned}
 \ker(\alpha) &= \text{im}(\iota_1) = t_{i+1}(M), & \ker(\gamma) &= 0, \\
 \text{coker}(\gamma) &= t_{i+1}(P)/\text{im}(\gamma) \cong t_{i+1}(P) \text{ und } \text{coker}(\alpha) = P/\text{im}(\alpha) = 0
 \end{aligned}$$

erhalten wir mithilfe des Schlangen-Lemmas (angewandt auf die horizontalen Sequenzen) eine weitere exakte Sequenz

$$0 \rightarrow t_{i+1}(M) \xrightarrow{\pi} \ker(\beta \circ \alpha) \xrightarrow{\bar{\pi}} t_{i+1}(P) \rightarrow 0, \quad (17)$$

mit $\pi = id_{t_i(M)}|_{\ker(\alpha)} = id_{t_{i+1}(M)}$. Mit den Lemmata (4.8) und (5.3.2) ergibt sich

$$j_{\mathcal{D}}(\ker(\beta \circ \alpha)) = \inf\{j_{\mathcal{D}}(t_{i+1}(M)), j_{\mathcal{D}}(t_{i+1}(P))\} \geq i + 1,$$

d.h. für alle $m \in \ker(\beta \circ \alpha)$ gilt $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m) \geq j_{\mathcal{D}}(\ker(\beta \circ \alpha)) \geq i + 1$ und somit $m \in t_{i+1}(M)$. Da $\alpha(m) = 0$ für alle $m \in t_{i+1}(M)$, folgt insgesamt $\ker(\beta \circ \alpha) = t_{i+1}(M)$. Aus der Exaktheit von (17) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} t_{i+1}(P) &= \operatorname{im}(\bar{\pi}) \cong \ker(\beta \circ \alpha) / \ker(\bar{\pi}) = \ker(\beta \circ \alpha) / \operatorname{im}(\pi) \\ &= \ker(\beta \circ \alpha) / t_{i+1}(M) = \ker(\beta \circ \alpha) / \ker(\beta \circ \alpha) = 0. \end{aligned} \quad \square$$

— Berechnung der Reinheitsfiltrierung —

Wir wollen nun ein Verfahren konstruieren, um die Reinheitsfiltrierung eines Moduls zu berechnen. Zunächst stellen wir unseren betrachteten mathematischen Rahmen auf: Es sei \mathcal{D} ein Auslander-regulärer Ring mit $\operatorname{gld}(\mathcal{D}) = n$ und M ein Links- \mathcal{D} -Modul, endlich präsentiert von einer Matrix $R_1 \in \mathcal{D}^{q \times p}$. Nach Lemma (4.7.3) gilt

$$\operatorname{ext}^{i-1}(\operatorname{ext}^i(M, \mathcal{D})) = 0 \quad (18)$$

für alle $i \geq 1$. Weiter wissen wir aus (2.13), dass immer eine freie Auflösung von M existiert. Da die Gradzahl von M nur von $\operatorname{ext}^i(M, \mathcal{D})$ abhängt, diese aber unabhängig von der Auflösung eines Moduls sind (Lemma 2.20), reicht es stets freie Auflösungen von M in Betracht zu ziehen.

Wir folgen dem in [Qua11] beschriebenen Verfahren und starten mit einer freien Auflösung von M

$$0 \xrightarrow{\cdot R_{n+1}} \mathcal{D}^{1 \times p_n} \xrightarrow{\cdot R_n} \dots \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_2} \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{D}^{1 \times p_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{D}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

löschen M und wenden $\operatorname{hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{D})$ an, um den Komplex

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{p_0} \xrightarrow{R_1 \cdot} \mathcal{D}^{p_1} \xrightarrow{R_2 \cdot} \mathcal{D}^{p_2} \xrightarrow{R_3 \cdot} \dots \xrightarrow{R_n \cdot} \mathcal{D}^{p_n} \xrightarrow{R_{n+1} \cdot} 0 \quad (19)$$

zu erhalten. Wir definieren die Objekte $R_{0,0} = 0$, $p_{0,0} = p_0$, $N_{0,0} = \mathcal{D}^{p_{0,0}}$ und für $1 \leq k \leq n + 1$:

$$R_{k,k} = R_k, \quad p_{k,k} = p_k, \quad p_{k-1,k} = p_{k-1}, \quad \text{sowie} \quad N_{k,k} = \operatorname{coker}(R_{k,k} \cdot) = \mathcal{D}^{p_{k-1,k}} / R_{k,k} \mathcal{D}^{p_{k-1,k}}. \quad (20)$$

Nun betrachten wir den Beginn einer freien Auflösung von $N_{k,k}$:

$$\mathcal{D}^{p_{-1,k}} \xrightarrow{R_{0,k} \cdot} \mathcal{D}^{p_{0,k}} \xrightarrow{R_{1,k} \cdot} \dots \xrightarrow{R_{k-2,k} \cdot} \mathcal{D}^{p_{k-2,k}} \xrightarrow{R_{k-1,k} \cdot} \mathcal{D}^{p_{k-1,k}} \xrightarrow{R_{k,k} \cdot} \mathcal{D}^{p_{k,k}} \xrightarrow{\pi_k} N_{k,k} \rightarrow 0 \quad (21)$$

Unsere ext -Moduln lassen sich damit durch

$$\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) = \operatorname{im}(R_{i,i+1} \cdot) / \operatorname{im}(R_{i,i} \cdot) \quad (22)$$

beschreiben. Weiter definieren wir die Moduln $N_{k-j,k} := \text{coker}(R_{k-j,k} \cdot)$, mit $1 \leq k \leq n+1$ und $1 \leq j \leq k$. Es gilt

$$N_{k-j-1,k} = \text{coker}(R_{k-j-1,k} \cdot) = \mathcal{D}^{p_{k-j-1,k}} / \text{im}(R_{k-j-1,k} \cdot) = \mathcal{D}^{p_{k-j-1,k}} / \ker(R_{k-j,k} \cdot) \cong \text{im}(R_{k-j,k} \cdot)$$

und damit ergibt sich die kurze exakte Sequenz

$$0 \rightarrow N_{k-j-1,k} \rightarrow \mathcal{D}^{p_{k-j,k}} \rightarrow N_{k-j,k} \rightarrow 0.$$

mit $k = 1, \dots, n+1$ und $j = 0, \dots, k-1$. Diese werden wir später weiter untersuchen, zunächst wollen wir uns aber mit

$$0 \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D}) \rightarrow N_{0,0} \xrightarrow{\pi} N_{0,1} \rightarrow 0 \quad (23)$$

beschäftigen. Wegen $N_{0,1} = \mathcal{D}^{p_{0,1}} / \text{im}(R_{0,1} \cdot)$ und

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D}) = \ker(R_1 \cdot) = \ker(R_{1,1} \cdot) = \text{im}(R_{0,1} \cdot) \subseteq \mathcal{D}^{p_{0,1}} = \mathcal{D}^{p_{0,0}}$$

ist diese Sequenz exakt. Da $N_{0,0} = \mathcal{D}^{p_{0,0}}$ frei und somit projektiv ist, gilt $\text{rpd}(N_{0,0}) = 0$ und somit ist $\text{ext}_{\mathcal{D}}^1(N_{0,0}, \mathcal{D}) = 0$ nach Satz (3.2.2). Wenden wir Satz (2.21) auf (23) an, erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(N_{0,1}, \mathcal{D}) \xrightarrow{f} \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}} \xrightarrow{g} \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D})) \xrightarrow{h} \text{ext}_{\mathcal{D}}^1(N_{0,1}, \mathcal{D}) \rightarrow 0 \quad (24)$$

wobei wir $\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\mathcal{D}^{p_{0,0}}, \mathcal{D}) \cong \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^{p_{0,0}}, \mathcal{D}) = \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}}$ verwendet haben (siehe Satz (2.1)). Die Abbildung f wird hierbei gebildet wie im Beweis von (2.21) und ergibt sich damit zu $f = id_{\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(N_{0,1}, \mathcal{D})}$. Definiere nun

$$\bar{f} : \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}} / \text{im}(f) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D})), [x] \mapsto g(x).$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und injektiv, da

$$[x] = [0] \Leftrightarrow x \in \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(N_{0,1}, \mathcal{D}) = \text{im}(f) = \ker(g) \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

Außerdem ist $\text{im}(\bar{f}) = \text{im}(g) = \ker(h)$ und wir erhalten letztendlich die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}} / \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(N_{0,1}, \mathcal{D}) \xrightarrow{\bar{f}} \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D})) \xrightarrow{h} \text{ext}_{\mathcal{D}}^1(N_{0,1}, \mathcal{D}) \rightarrow 0.$$

Sei nun $i \geq 1$ und

$$\begin{aligned} f_i : N_{i,i} = \mathcal{D}^{p_{i,i+1}} / \text{im}(R_{i,i} \cdot) &\rightarrow N_{i,i+1} = \mathcal{D}^{p_{i,i+1}} / \text{im}(R_{i,i+1} \cdot) \\ x + \text{im}(R_{i,i} \cdot) &\mapsto x + \text{im}(R_{i,i+1} \cdot) \end{aligned}$$

(die f_i sind wohldefiniert, da $\text{im}(R_{i,i}\cdot) \subseteq \ker(R_{i+1,i+1}\cdot) = \text{im}(R_{i,i+1}\cdot)$). Dann ergibt sich mit der Charakterisierung (22) die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \text{ext}^i(M, \mathcal{D}) \hookrightarrow N_{i,i} \xrightarrow{f_i} N_{i,i+1} \rightarrow 0.$$

Wende nun Satz (2.21) an um die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{i-1}(N_{i,i+1}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{i-1}(N_{i,i}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^{i-1}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})) \\ \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i+1}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

zu erhalten und schlieÙe mit (18) auf

$$0 \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i+1}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i}, \mathcal{D}) \xrightarrow{t_i} \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})), \quad (25)$$

exakt für $i = 1, \dots, n$.

Wir definieren nun die endlich erzeugten Moduln

$$T_i := \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i}, \mathcal{D}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist $T_0 = \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}}$ (siehe (24)) und für $i \geq 1$ lesen wir an der Auflösung der $N_{i,i}$ die Beziehung

$$T_i = \ker(\cdot R_{0,i}) / \text{im}(\cdot R_{1,i})$$

ab.

(5.6) Lemma

1. Für $i = 1, \dots, n$ gibt es Homomorphismen $\gamma_{i+1,i}$ und $\gamma_{i,i}$, so dass

$$0 \rightarrow T_{i+1} \xrightarrow{\gamma_{i+1,i}} T_i \xrightarrow{\gamma_{i,i}} \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \rightarrow \text{coker}(\gamma_{i,i}) \rightarrow 0$$

exakt und $\text{coker}(\gamma_{i,i})$ isomorph zu einem Untermodul von $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{i+2}(N_{i+1,i+1}, \mathcal{D})$ ist.

2. Es gibt einen Homomorphismus $\gamma_{0,0}$, so dass

$$0 \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(N_{0,1}, \mathcal{D}) \xrightarrow{id} \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}} \xrightarrow{\gamma_{0,0}} \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D})) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^2(N_{1,1}, \mathcal{D}) \rightarrow 0$$

exakt ist. ◊

Beweis

Ist $1 \leq i \leq n$ so nutze die Sequenz

$$0 \rightarrow N_{k-j-1,k} \rightarrow \mathcal{D}^{p_{k-j,k}} \rightarrow N_{k-j,k} \rightarrow 0.$$

Mit Lemma (3.4) folgt dann

$$\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(N_{k-j,k}, \mathcal{D}) \cong \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{k-j-1,k}, \mathcal{D}) \text{ bzw. } \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+2}(N_{k-j,k}, \mathcal{D}) \cong \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(N_{k-j-1,k}, \mathcal{D}) \quad (26)$$

für alle $k = 1, \dots, n+1$ und $j = 0, \dots, k$. Setze nun $k = i+1$ und $j = 0$ um

$$\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(N_{i+1,i+1}, \mathcal{D}) \cong \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i+1}, \mathcal{D})$$

zu erhalten. Analog ist $\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+2}(N_{i+1,i+1}, \mathcal{D}) \cong \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(N_{i,i+1}, \mathcal{D})$.

Diese Isomorphismen und die Definitionen der T_i eingesetzt in (25) liefert die gewünschte exakte Sequenz

$$0 \rightarrow T_{i+1} \xrightarrow{\gamma_{i+1,i}} T_i \xrightarrow{\gamma_{i,i}} \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \rightarrow \operatorname{coker}(\gamma_{i,i}) \rightarrow 0$$

mit

$$\begin{aligned} \operatorname{coker}(\gamma_{i,i}) &= \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) / \operatorname{im}(\gamma_{i,i}) = \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) / \ker(\tau_i) \\ &\cong \operatorname{im}(\tau_i) \subseteq \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(N_{i,i+1}, \mathcal{D}) \cong \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+2}(N_{i+1,i+1}). \end{aligned}$$

Der zweite Teil folgt aus (24) und der ersten Isomorphie aus (26) mit $i = 1$, $k = 1$ und $j = 0$. \square

Sei nun $\gamma_{1,0} : T_1 \rightarrow T_1$ die Identität und für $1 \leq i \leq n$ die Abbildungen $\gamma_{i+1,i} : T_{i+1} \rightarrow T_i$ gegeben wie in Lemma (5.6). Wir definieren Moduln M_i durch

$$M_0 = M, \quad M_i = (\gamma_{1,0} \circ \gamma_{2,1} \circ \dots \circ \gamma_{i,i-1})(T_i) \text{ und } M_{n+1} = 0. \quad (27)$$

Dann ist $M_i \cong T_i$, da die $\gamma_{i+1,i}$ injektiv sind und wegen $\gamma_{i,i-1}(T_i) \subseteq T_{i-1}$ gilt

$$M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_n \supseteq M_{n+1} = 0.$$

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass diese M_i genau der Filtrierung aus (15) entsprechen. Dazu zunächst folgende Vorbereitung:

(5.7) Lemma

Es sei M ein endlich präsentierter Links-Modul über einem Auslander-regulären Ring \mathcal{D} und M_i wie oben definiert. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Für $i = 0, \dots, n$ existieren exakte Sequenzen

$$0 \rightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\epsilon_{i+1}} M_i \xrightarrow{\epsilon_i} \operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \xrightarrow{\pi_i} \operatorname{coker}(\epsilon_i) \rightarrow 0,$$

mit $\operatorname{coker}(\epsilon_i)$ isomorph zu einem Untermodul von $\operatorname{ext}_{\mathcal{D}}^{i+2}(N_{i+1,i+1}, \mathcal{D})$, sowie $\operatorname{coker}(\epsilon_{n-1}) = 0$ und $\operatorname{coker}(\epsilon_n) = 0$.

2. $M_n \cong \text{ext}_{\mathcal{D}}^n(\text{ext}_{\mathcal{D}}^n(M, \mathcal{D}), \mathcal{D})$ und $M_{n-1}/M_n \cong \text{ext}_{\mathcal{D}}^{n-1}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{n-1}(M, \mathcal{D}), \mathcal{D})$.
3. $M = M_{j_{\mathcal{D}}(M)}$.
4. Es ist $M_i = 0$ oder $j_{\mathcal{D}}(M_i) \geq i$.
5. M_i/M_{i+1} verschwindet oder ist i -rein, $i = 0, \dots, n$. ◇

Beweis

1. Um den ersten Teil zu zeigen, bemerke

$$M = \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}}/\text{im}(\cdot R_{1,1}) \supseteq \ker(\cdot R_{0,1})/\text{im}(\cdot R_{1,1}) = T_1,$$

denn damit

$$M/T_1 = (\mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}}/\text{im}(\cdot R_{1,1})) / (\ker(\cdot R_{0,1})/\text{im}(\cdot R_{1,1})) \cong \mathcal{D}^{1 \times p_{0,0}}/\ker(\cdot R_{0,1}).$$

Nach Definition ist $N_{0,1} = \text{coker}(R_{0,1} \cdot)$, also gilt $\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(N_{0,1}, \mathcal{D}) = \ker(\cdot R_{0,1})$. Dies eingesetzt in Sequenz (24) liefert

$$0 \rightarrow M/T_1 \xrightarrow{f} \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \xrightarrow{g} \text{ext}_{\mathcal{D}}^2(N_{1,1}, \mathcal{D}) \rightarrow 0$$

für gewisse Abbildungen f und g . Mit

$$\epsilon_0 : M \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}), \quad m \mapsto f([m])$$

folgt dann die Exaktheit der Sequenz

$$0 \rightarrow T_1 \xrightarrow{\iota_1} M \xrightarrow{\epsilon_0} \text{ext}_{\mathcal{D}}^0(\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \xrightarrow{g} \text{ext}_{\mathcal{D}}^2(N_{1,1}, \mathcal{D}) \rightarrow 0$$

(es ist $\text{im}(\iota_1) = T_1 = \{m \in M \mid [m] = 0\} \stackrel{f \text{ inj.}}{=} \{m \in M \mid f([m]) = 0\} = \ker(\epsilon_0)$ und $\text{im}(\epsilon_0) = \text{im}(f) = \ker(g)$). Dies zeigt 1. für $i = 0$. Zu $i \geq 1$ definieren wir den Isomorphismus

$$\alpha_i : T_i \rightarrow M_i, \quad t \mapsto (\gamma_{1,0} \circ \gamma_{2,1} \circ \dots \circ \gamma_{i,i-1})(t)$$

und weiter die Abbildungen

$$\epsilon_i : M_i \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}), \quad m \mapsto \gamma_{i,i} \circ \alpha_i^{-1}(m),$$

sowie $\iota_{i+1} : M_{i+1} \hookrightarrow M_i$ die Einbettung von M_{i+1} in M_i . Die $\gamma_{i,i}$ stammen hierbei aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow T_{i+1} \xrightarrow{\gamma_{i+1,i}} T_i \xrightarrow{\gamma_{i,i}} \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \rightarrow \text{coker}(\gamma_{i,i}) \rightarrow 0$$

von Lemma (5.6). Wir beweisen nun, dass die Sequenz

$$0 \rightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\iota_{i+1}} M_i \xrightarrow{\epsilon_i} \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \xrightarrow{\pi_i} \text{coker}(\epsilon_i) \rightarrow 0$$

exakt ist, was die Behauptung darstellt. Die Injektivität von ι_{i+1} ist klar und es gilt $\text{im}(\iota_{i+1}) = M_{i+1}$. Wir zeigen nun $\ker(\epsilon_i) = M_{i+1}$. Aus der Definition von ϵ_i folgt $(\gamma_{i,i} \circ \alpha_i^{-1})(m) = 0$, falls $m \in \ker(\epsilon_i)$, d.h. $\alpha_i^{-1}(m) \in \ker(\gamma_{i,i}) = \text{im}(\gamma_{i+1,i})$. Es gibt also $t \in T_{i+1}$ mit $\alpha_i^{-1}(m) = \gamma_{i+1,i}(t)$ und damit $m = (\alpha_i \circ \gamma_{i+1,i})(t) = \alpha_{i+1}(t) \in M_{i+1}$.

Ist nun $m \in M_{i+1}$, so gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_i(m) &= (\gamma_{i,i} \circ \alpha_i^{-1})(m) = (\gamma_{i,i} \circ \alpha_i^{-1} \circ \alpha_{i+1} \circ \alpha_{i+1}^{-1})(m) \\ &= (\gamma_{i,i} \circ \alpha_i^{-1} \circ \alpha_i \circ \gamma_{i+1,i} \circ \alpha_{i+1}^{-1})(m) = (\gamma_{i,i} \circ \gamma_{i+1,i} \circ \alpha_{i+1}^{-1})(m) = 0 \end{aligned}$$

und damit $M_{i+1} \subseteq \ker(\epsilon_i)$.

Weiter gilt $\alpha_i^{-1}(M_i) = T_i$ und somit

$$\text{im}(\epsilon_i) = \epsilon_i(M_i) = (\gamma_{i,i} \circ \alpha_i^{-1})(M_i) = \gamma_{i,i}(T_i) = \text{im}(\gamma_{i,i}).$$

Also ist auch $\text{coker}(\epsilon_i) = \text{coker}(\gamma_{i,i})$ und damit die letzte Sequenz exakt, sowie $\text{coker}(\epsilon_i)$ isomorph zu einem Untermodul von $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{i+2}(N_{i+1,i+1}, \mathcal{D})$ nach Lemma (5.6). Wegen $\text{gld}(\mathcal{D}) = n$ gilt dann $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{i+2}(N_{i+1,i+1}, \mathcal{D}) = 0$ für $i \geq n-1$, d.h. $\text{coker}(\epsilon_{n-1}) = 0$ und $\text{coker}(\epsilon_n) = 0$.

2. Aus $M_{n+1} = 0, \text{coker}(\epsilon_n) = 0$ und dem ersten Teil für $i = n$ folgt

$$0 \rightarrow 0 \rightarrow M_n \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^n(\text{ext}_{\mathcal{D}}^n(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

exakt, also $M_n \cong \text{ext}_{\mathcal{D}}^n(\text{ext}_{\mathcal{D}}^n(M, \mathcal{D}), \mathcal{D})$. Weiter ist $\text{coker}(\epsilon_{n-1}) = 0$ und damit aus der exakten Sequenz von Teil 1

$$\text{ext}_{\mathcal{D}}^{n-1}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{n-1}(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \cong \text{im}(\epsilon_{n-1}) \cong M_{n-1}/\ker(\epsilon_{n-1}) = M_{n-1}/\text{im}(\iota_n) = M_{n-1}/M_n.$$

3. Für $j_{\mathcal{D}}(M) = 0$ ist die Aussage klar. Ist $j_{\mathcal{D}}(M) \geq 1$, dann $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}) = 0$ für alle $i = 0, \dots, j_{\mathcal{D}}(M) - 1$. Mit 1. folgt $0 \rightarrow M_{i+1} \rightarrow M_i \rightarrow 0$ exakt, woraus wir auf die Gleichungen $M = M_0 = M_1 = \dots = M_{j_{\mathcal{D}}(M)-1} = M_{j_{\mathcal{D}}(M)}$ schließen.
4. Klar ist, dass $j_{\mathcal{D}}(M_0) = j_{\mathcal{D}}(M) \geq 0$ gilt. Für $i = 1, \dots, n$ ist $M_i \cong T_i = \text{ext}^i(N_{i,i}, \mathcal{D})$, woraus wir $j_{\mathcal{D}}(M_i) \geq i$ wegen der Auslander-Eigenschaft schließen.
5. Es ist $M_i/M_{i+1} = M_i/\text{im}(\iota_{i+1}) = M_i/\ker(\epsilon_i) \cong \text{im}(\epsilon_i) \subseteq \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D})$ und damit $M_i/M_{i+1} = 0$ oder i -rein als Untermodul von 0 bzw. eines i -reinen Moduls (siehe Lemma (5.3.3)). \square

(5.8) Satz

Es sei \mathcal{D} ein Auslander-regulärer Ring, M ein endlich präsentierter \mathcal{D} -Modul. Dann sind die in (27) konstruierten M_i identisch mit den $t_i(M)$ aus (14). \diamond

Beweis

Ist $0 \neq m \in M_i$, so gilt $\mathcal{D}m \subseteq M_i$ und wir erhalten mit 4. aus dem letzten Lemma $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m) \geq j_{\mathcal{D}}(M_i) \geq i$, d.h. $m \in t_i(M)$.

Die andere Inklusion zeigen wir per Induktion über i . Für $i = 0$ ist $M_0 = t_0(M) = M$ klar, wir betrachten nun $i \geq 0$. Es ist

$$t_{i+1}(M)/M_{i+1} \subseteq t_i(M)/M_{i+1} \stackrel{IV}{=} M_i/M_{i+1}.$$

Nach 5. in Lemma (5.7) ist die rechte Seite 0 oder i -rein, also damit auch die linke Seite als Untermodul. Gilt $t_{i+1}(M)/M_{i+1} = 0$, so folgt $t_{i+1}(M) = M_{i+1}$. Nehmen wir also an, dass $t_{i+1}(M)/M_{i+1}$ rein mit Gradzahl i ist. Die Sequenz

$$0 \rightarrow M_{i+1} \rightarrow t_{i+1}(M) \rightarrow t_{i+1}(M)/M_{i+1} \rightarrow 0$$

ist exakt, und damit nach (4.8) und (5.3.2)

$$i + 1 \leq j_{\mathcal{D}}(t_{i+1}(M)) = \inf\{j_{\mathcal{D}}(M_{i+1}), j_{\mathcal{D}}(t_{i+1}(M)/M_{i+1})\} \leq j_{\mathcal{D}}(t_{i+1}(M)/M_{i+1}) = i,$$

ein Widerspruch. \square

Um nun die Reinheitsfiltrierung $\{M_i\}$ berechnen zu können, benötigen wir die Abbildungen $\gamma_{i,i+1}$. Dazu zeigen wir zunächst folgende Aussage:

(5.9) Lemma

Es sei ein Komplex wie in (19) gegeben, sowie eine Auflösung der $N_{k,k}$ aus (21). Dann gibt es für $i = 2, \dots, n$ und $j = 1, \dots, i$ Matrizen $F_{i-j,i}$ passender Größe, so dass die Gleichungen

$$F_{i-j,i}R_{i-j,i-1} = R_{i-j,i}F_{i-j-1,i}$$

gelten. \diamond

Beweis

Für ein festes $i \in \{2, \dots, n\}$ führen wir eine Induktion über $j \geq 1$. Wir stellen fest, dass $R_{i,i}R_{i-1,i-1} = R_iR_{i-1} = 0$ gilt, d.h. $\text{im}(R_{i,i}\cdot) \subseteq \ker(R_{i-1,i-1}) = \text{im}(R_{i-1,i}\cdot)$. Jede Spalte r von $R_{i,i}$ lässt sich also als $r = R_{i-1,i}f$ für ein $f \in \mathcal{D}^{p_{i-2,i}}$ schreiben. Wir fügen diese f 's in der richtigen Reihenfolge zusammen in eine Matrix $F_{i-2,i}$ und erhalten somit $R_{i-1,i-1} = R_{i-1,i}F_{i-2,i}$. Mit $F_{i-1,i} := I_{p_{i,i}}$ folgt nun die Behauptung für $j = 1$.

Sei nun $1 \leq j \leq i-1$ und $F_{i-j,i}, F_{i-j-1,i}$ gegeben, so dass die Gleichung in der Behauptung erfüllt ist. Dann gilt

$$R_{i-j,i}F_{i-j-1,i}R_{i-j-1,i-1} = F_{i-j,i}R_{i-j,i-1}R_{i-j-1,i-1} = 0,$$

und somit $\text{im}(F_{i-j-1,i}R_{i-j-1,i-1}) \subseteq \ker(R_{i-j,i}) = \text{im}(R_{i-j-1,i})$. Wie im Induktionsanfang folgt die Existenz einer Matrix $F_{i-j-2,i}$ mit

$$F_{i-j-1,i}R_{i-j-1,i-1} = R_{i-j-1,i}F_{i-j-2,i}$$

was die Behauptung für $j+1$ ist. □

Wir nutzen nun diese Matrizen $F_{i-j,i}$ und setzen zusätzlich $F_{0,1} = I_{p_{0,0}}$. Dann ist für alle $i \geq 0$ durch

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^{p-1,i+1} & \xrightarrow{R_{0,i+1}} & \mathcal{D}^{p_{0,i+1}} & \xrightarrow{R_{1,i+1}} & \mathcal{D}^{p_{1,i+1}} & \longrightarrow \dots & \xrightarrow{R_{i,i+1}} \mathcal{D}^{p_{i,i+1}} \xrightarrow{R_{i+1,i+1}} \mathcal{D}^{p_{i+1,i+1}} \xrightarrow{\pi_{i+1}} N_{i+1,i+1} \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow F_{0,i+1} & & \uparrow F_{1,i+1} & & \uparrow I_{p_{i,i+1}} \\ \mathcal{D}^{p-1,i} & \xrightarrow{R_{0,i}} & \mathcal{D}^{p_{0,i}} & \xrightarrow{R_{1,i}} & \mathcal{D}^{p_{1,i}} & \longrightarrow \dots & \xrightarrow{R_{i,i}} \mathcal{D}^{p_{i,i}} \xrightarrow{\pi_i} N_{i,i} \longrightarrow 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen gegeben. Entferne $N_{i,i}$ und $N_{i+1,i+1}$, wende $\text{hom}_{\mathcal{D}}(\cdot, \mathcal{D})$ an und erhalte schließlich die Komplexe

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{D}^{1 \times p-1,i+1} & \xleftarrow{R_{0,i+1}} & \mathcal{D}^{1 \times p_{0,i+1}} & \xleftarrow{R_{1,i+1}} & \mathcal{D}^{1 \times p_{1,i+1}} & \longleftarrow \dots & \xleftarrow{R_{i,i+1}} \mathcal{D}^{1 \times p_{i,i+1}} \xleftarrow{R_{i+1,i+1}} \mathcal{D}^{1 \times p_{i+1,i+1}} \longleftarrow 0 \\ & & \downarrow F_{0,i+1} & & \downarrow F_{1,i+1} & & \downarrow I_{p_{i,i+1}} \\ \mathcal{D}^{1 \times p-1,i} & \xleftarrow{R_{0,i}} & \mathcal{D}^{1 \times p_{0,i}} & \xleftarrow{R_{1,i}} & \mathcal{D}^{1 \times p_{1,i}} & \longleftarrow \dots & \xleftarrow{R_{i,i}} \mathcal{D}^{1 \times p_{i,i}} \longleftarrow 0 \end{array}$$

Für $0 \leq i \leq n$ definiere nun die Abbildungen

$$\gamma_{i,i+1} : \text{ext}_{\mathcal{D}}^{i+1}(N_{i+1,i+1}, \mathcal{D}) \rightarrow \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i}, \mathcal{D}), \quad [x] \mapsto [xF_{0,i+1}].$$

Diese sind wohldefiniert: Einerseits gibt es für $x \in \text{im}(\cdot R_{1,i+1})$ ein $y \in \mathcal{D}^{1 \times p_{1,i+1}}$, so dass $x = yR_{1,i+1}$ und damit ist

$$xF_{0,i+1} = yR_{1,i+1}F_{0,i+1} = yF_{1,i+1}R_{1,i} \in \text{im}(\cdot R_{1,i+1}).$$

Außerdem ist mit $x \in \ker(\cdot R_{0,i+1})$ die Gleichung $xF_{0,i+1}R_{0,i} = xR_{0,i+1}F_{-1,i+1} = 0$ erfüllt und damit $\gamma_{i,i+1}([x]) \in \text{ext}_{\mathcal{D}}^i(N_{i,i}, \mathcal{D})$. Es lässt sich nun zeigen ([Qua11], Seite 24 f.), dass die hier definierten Abbildungen genau mit den $\gamma_{i,i+1}$ aus der Konstruktion der Sequenz aus Lemma (5.6) übereinstimmen.

(5.10) Bemerkung

Um den Algorithmus anzugeben, verwenden wir die folgenden Bezeichnungen:

1. Ist N ein Untermodul eines Moduls M , so ist M/N ein wohldefinierter Modul. Für diesen schreiben wir dann $M/N = \text{modulo}(M, N)$.
2. Ist N das Erzeugnis der Spalten einer Matrix R und $M \supseteq N$ Erzeugnis der Spalten einer Matrix S , so gibt es eine weitere Matrix X mit $R = SX$ (vgl. Beweis von Lemma (5.9)). Die Bestimmung der Matrix X wird *lift* genannt und wir schreiben $X = \text{Rlift}(S, R)$.

Die beiden Befehle `LIFT` und `MODULO` sind in `SINGULAR` implementiert und funktionieren für alle G-Algebren (vgl. Bemerkung (3.11)) und somit auch die folgenden Algorithmen. Für weitere Details verweisen wir erneut auf [Lev05]. \diamond

Wir können damit nun einen Algorithmus zur Bestimmung der Reinheitsfiltrierung eines endlich präsentierten Moduls angeben:

5.2.1 Algorithmus: Reinheitsfiltrierung, Erzeuger

Input: Ein Links-Modul M endlich präsentiert durch eine Matrix $R_1 \in \mathcal{D}^{p_1 \times p_0}$ über einem Auslander-regulären Ring \mathcal{D} .

Output: Erzeugermatrizen der Reinheitsfiltrierung M_i von M , d.h. für $m \in M_i$ gilt die Ungleichung $j_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}m) \geq i$ und M_i/M_{i+1} ist i -rein.

- 1: **Start**: Bestimme mit Algorithmus (3.1.1):

$$0 \xrightarrow{\cdot R_{n+1}} \mathcal{D}^{1 \times p_n} \xrightarrow{\cdot R_n} \dots \rightarrow \mathcal{D}^{1 \times p_2} \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{D}^{1 \times p_1} \xrightarrow{\cdot R_1} \mathcal{D}^{1 \times p_0} \xrightarrow{\pi} M \rightarrow 0,$$

wobei $\text{lpd}(M) = n$.

- 2: **for** $i = 1, \dots, n + 1$ **do**
- 3: $N_{i+1, i+1} \leftarrow \text{coker}(R_i)$
- 4: $R_{i, i} \leftarrow R_i$
- 5: **for** $j = i - 1, \dots, 0$ **do**
- 6: $R_{j, i} \leftarrow \text{RSyz}(R_{j+1, i})$
- 7: **end for**
- 8: **end for**
- 9: **for** $i = 2, \dots, n$ **do**
- 10: $F_{i-1, i} \leftarrow I_{p_i}$
- 11: **for** $j = 1, \dots, i - 1$ **do**
- 12: $F_{i-j-1, i} = \text{Rlift}(R_{i-j, i}, F_{i-j, i} R_{i-j, i-1})$
- 13: **end for**
- 14: **end for**

```

15:  $M_0 \leftarrow M$ 
16: for  $i = 1, \dots, n + 1$  do
17:    $T_i \leftarrow \text{LSyz}(R_{0,i})$ 
18:    $M_i \leftarrow \text{modulo}(T_i F_{0,1} \dots F_{0,i}, R_{1,i})$ 
19: end for
20: return  $\{M_i \mid i = 0, \dots, n + 1\}$ 

```

(5.11) Bemerkung

Wir können Algorithmus (5.2.1) etwas vereinfachen, falls die Gradzahl von M bekannt ist und $j_{\mathcal{D}}(M) \geq 1$ gilt. Dann ist $\text{ext}_{\mathcal{D}}^0(M, \mathcal{D}) = \ker(R_1 \cdot) = 0$ und für $j \in \{1, \dots, j_{\mathcal{D}}(M) - 1\}$ gilt $0 = \text{ext}_{\mathcal{D}}^j(M, \mathcal{D}) = \ker(R_{j+1} \cdot) / \text{im}(R_j \cdot)$, d.h. $\ker(R_{j+1} \cdot) = \text{im}(R_j \cdot)$. Damit ist

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{p_0} \xrightarrow{R_1 \cdot} \mathcal{D}^{p_1} \xrightarrow{R_2 \cdot} \mathcal{D}^{p_2} \xrightarrow{R_3 \cdot} \dots \xrightarrow{R_i \cdot} \mathcal{D}^{p_i} \xrightarrow{\pi_i} N_{i,i} \rightarrow 0$$

exakt für $i = 1, \dots, j_{\mathcal{D}}(M)$. Die Schritte 2 bis 7 in obigem Algorithmus können dann durch die Folgenden ersetzt werden, so dass weniger Syzygien-Berechnungen durchgeführt werden müssen:

```

for  $i = 1, \dots, j_{\mathcal{D}}(M)$  do
  for  $j = i, \dots, 0$  do
     $R_{j,i} \leftarrow R_j$ 
  end for
end for
for  $i = j_{\mathcal{D}}(M) + 1, \dots, n + 1$  do
   $R_{i,i} \leftarrow R_i$ 
  for  $j = i - 1, \dots, 0$  do
     $R_{j,i} = \text{RSyz}(R_{j+1,i} \cdot)$ 
  end for
end for

```

◇

In obigen Algorithmen werden die M_i 's berechnet und die Erzeuger des Moduls als Matrix ausgegeben. In vielen Fällen ist es aber hilfreich, dass wir eine endliche Präsentation dieser Moduln angeben können, d.h. eine Matrix $S_i \in \mathcal{D}^{s_i \times r_i}$ für gewisse $r_i, s_i \in \mathbb{N}$, so dass $M_i \cong \mathcal{D}^{1 \times r_i} / \mathcal{D}^{1 \times s_i} S_i$ gilt. Dazu betrachte die folgende Konstruktion: Es sei $1 \leq i \leq n$ und $R'_{1,i}$ eine Matrix mit $\ker(\cdot R_{0,i}) = \text{im}(\cdot R'_{1,i})$. Wir erhalten dann $\text{im}(\cdot R_{1,i}) \subseteq \ker(\cdot R_{0,i}) = \text{im}(\cdot R'_{1,i})$. Somit gibt es eine \mathcal{D} -Matrix $R''_{1,i}$ mit $R_{1,i} = R''_{1,i} R'_{1,i}$ (siehe Beweis zu Lemma (5.9)).

Weiter gilt für $2 \leq i \leq n$ die Beziehung $R'_{1,i} F_{0,i} R_{0,i-1} = R'_{1,i} R_{0,i} F_{-1,i} = 0$ und damit $\text{im}(\cdot R'_{1,i} F_{0,i}) \subseteq \ker(\cdot R_{0,i-1}) = \text{im}(\cdot R_{1,i-1})$, woraus die Existenz von $F'_{1,i}$ folgt, so dass die Gleichung $R'_{1,i} F_{0,i} = F'_{1,i} R_{1,i-1}$ erfüllt ist.

Zu guter Letzt sei $R'_{2,i}$ eine Matrix mit $\text{im}(\cdot R'_{2,i}) = \ker(\cdot R'_{1,i})$.

(5.12) Satz

Es sei $M = \text{coker}(\cdot R)$ ein endlich präsentierter Modul über einem Auslander-regulären Ring und alle Bezeichnungen von Matrizen wie in obigen Konstruktionen. Weiter sei $\{M_i \mid i = 0, \dots, \text{lpd}(M) + 1\}$ die Reinheitsfiltrierung von M . Dann gilt:

1. Für $1 \leq i \leq n$ sind die M_i endlich präsentiert durch die Matrix $K_i = \begin{pmatrix} R''_{1,i} \\ R'_{2,i} \end{pmatrix}$.
2. Es ist $R'_{1,1}$ eine endliche Präsentation von M_0/M_1 . Ist $1 \leq i \leq \text{lpd}(M) - 1$, so sind die i -reinen Moduln M_i/M_{i+1} durch die Matrix $S_i = \begin{pmatrix} F'_{1,i+1} \\ R''_{1,i} \\ R'_{2,i} \end{pmatrix}$ präsentiert. \diamond

Da der Beweis in einer recht aufwendigen Konstruktion von Sequenzen und Diagrammen ausartet, verweisen wir für diesen auf [Qua11]: Die eigentliche Aussage stammt hier aus Theorem 12, die erforderlichen Konstruktionen können auf den Seiten 31 - 34 nachgelesen werden.

Wir verändern Algorithmus (5.2.1) um endliche Präsentierungen der Reinheitsfiltrierung berechnen zu können:

5.2.2 Algorithmus: Reinheitsfiltrierung, endliche Präsentierungen

Input: Ein Links-Modul M endlich präsentiert durch eine Matrix $R_1 \in \mathcal{D}^{p_1 \times p_0}$ über einem Auslander-regulären Ring \mathcal{D} .

Output: Endliche Präsentierungen der Reinheitsfiltrierung M_i von M und der i -reinen Moduln M_i/M_{i+1} .

- 1: **Start:** Führe die Schritte 1-14 von Algorithmus (5.2.1) aus, um die Matrizen $R_{i,j}$ und $F_{i,j}$ zu berechnen.
- 2: **for** $i = 1, \dots, n$ **do**
- 3: $R'_{1,i} \leftarrow \text{LSyz}(R_{0,i})$
- 4: $R''_{1,i} \leftarrow \text{Llift}(R'_{1,i}, R_{1,i})$
- 5: $R'_{2,i} \leftarrow \text{LSyz}(R'_{1,i})$
- 6: **end for**
- 7: **for** $i = 2, \dots, n$ **do**
- 8: $F'_{1,i} \leftarrow \text{Llift}(R'_{1,i-1}, R'_{1,i} F_{0,i})$
- 9: **end for**
- 10: $K_0 \leftarrow R_1$
- 11: $S_0 \leftarrow R'_{1,1}$
- 12: **for** $i = 1, \dots, n - 1$ **do**

13: $K_i \leftarrow \begin{pmatrix} R''_{1,i} \\ R'_{2,i} \end{pmatrix}$
 14: $S_i \leftarrow \begin{pmatrix} F'_{1,i+1} \\ R''_{1,i} \\ R'_{2,i} \end{pmatrix}$
 15: **end for**
 16: $K_n \leftarrow \begin{pmatrix} R''_{1,n} \\ R'_{2,n} \end{pmatrix}$
 17: $S_n = K_n$
 18: **return** (K, S)

(5.13) Beispiel

Wir wollen ein Beispiel zur Berechnung der Reinheitsfiltrierung geben. Sei $\mathcal{D} = A_2(K)$ mit den Variablen x, y, d_x und d_y , $M = \text{coker}(\cdot R_1)$ mit $R_1 = R^T$ wie in Beispiel (3.12.2). Dort haben wir bereits eine freie Auflösung von M berechnet und setzen nun nach (20) $R_{1,1} = R_1$, $R_{2,2} = R_2$ und $R_{3,3} = 0$. Wir berechnen

$$R_{0,1} = \text{RSyz}(R_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad R_{1,2} = \text{RSyz}(R_{2,2}) = \begin{pmatrix} 1 & -d_y \\ 1 & 0 \\ 0 & d_x \end{pmatrix},$$

$$R_{0,2} = \text{RSyz}(R_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R_{2,3} = \text{RSyz}(R_{3,3}) = 1.$$

Wir setzen $F_{1,2} = I_3$ und liften

$$F_{0,2} = \text{Rlift}(R_{1,2}, F_{1,2} \cdot R_{1,1}) = \begin{pmatrix} d_y & -d_x & -d_x - d_y \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Um nun endliche Präsentierungen für die Reinheitsfiltrierung zu erhalten, berechnen wir weitere Syzygien und Lifts:

$$R'_{1,1} = \text{LSyz}(R_{0,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R''_{1,1} = \text{Llift}(R'_{1,1}, R_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -d_x + d_y \\ d_y & -d_x - d_y \\ d_x & -2d_x \end{pmatrix},$$

$$R'_{1,2} = \text{LSyz}(R_{0,2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R''_{1,2} = \text{Llift}(R'_{1,2}, R_{1,2}) = R_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & -d_y \\ 1 & 0 \\ 0 & d_x \end{pmatrix},$$

$$R'_{2,1} = \text{LSyz}(R'_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R'_{2,2} = \text{LSyz}(R'_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu guter Letzt bestimme

$$F'_{1,2} = \text{Llift}(R'_{1,1}, R'_{1,2} \cdot F_{0,2}) = \begin{pmatrix} d_y & -d_x - d_y \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Aus diesen Ergebnissen bauen wir uns Repräsentationsmatrizen K_i bzw. S_i der Reinheitsfiltrierung der Moduln $M_i = \mathcal{D}^{1 \times q_i} / \mathcal{D}^{1 \times p_i} K_i$ bzw. $M_i / M_{i+1} = \mathcal{D}^{1 \times q_i} / \mathcal{D}^{1 \times p_i} S_i$:

$$\begin{aligned}
 K_0 = R_1 &= \begin{pmatrix} 0 & d_y - d_x & d_y - d_x \\ d_y & -d_x & -d_x - d_y \\ d_x & -d_x & -2d_x \end{pmatrix}, & S_0 = R'_{1,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
 K_1 &= \begin{pmatrix} R''_{1,1} \\ R'_{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d_x + d_y \\ d_y & -d_x - d_y \\ d_x & -2d_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & S_1 &= \begin{pmatrix} F'_{1,2} \\ K_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_y & -d_x - d_y \\ 1 & -2 \\ 0 & -d_x + d_y \\ d_y & -d_x - d_y \\ d_x & -2d_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 K_2 &= \begin{pmatrix} R''_{1,2} \\ R'_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -d_y \\ 1 & 0 \\ 0 & d_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & S_2 = K_2 &= \begin{pmatrix} 1 & -d_y \\ 1 & 0 \\ 0 & d_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. & \diamond
 \end{aligned}$$

§ 6 Implementierung

In diesem Teil der Arbeit, wollen wir die wichtigsten implementierten Prozeduren vorstellen und deren Funktionsweisen erläutern. Die Prozeduren sind für das Computeralgebrasystem SINGULAR geschrieben und in der Library *purityfiltration.lib* enthalten. Für genauere Informationen über SINGULAR und dessen Funktion, verweisen wir auf die Entwicklungshomepage ¹.

(6.1) Bemerkung

- Soweit nicht weiter angegeben sei \mathcal{D} eine G-Algebra, $R \in \mathcal{D}^{q \times p}$ eine Matrix und der Links-Modul M definiert durch $M = \text{coker}(\cdot R) = \mathcal{D}^{1 \times p} / \mathcal{D}^{1 \times q} R$. Bei sämtlichen Prozeduren brauchen wir die Voraussetzungen, dass die projektive Dimension von M kleiner ∞ ist.
- Da in SINGULAR eine Konvention herrscht, dass ein Modul stets durch das Erzeugnis der Spalten einer gegebenen Matrix beschrieben wird, müssen wir, um das Zeilerzeugnis zu erhalten, an gewissen Stellen die Matrix transponieren, was über den Befehl TRANSPOSE geschieht. ◇

PROJECTIVEDIMENSION

Der Aufruf PROJECTIVEDIMENSION(TRANSPOSE(R),0) liefert eine Liste mit zwei Einträgen: Der erste besteht aus einer projektiven Linksauflösung von M und der zweite gibt die projektive Linksdimension von M an. Mit PROJECTIVEDIMENSION(R,1) wird eine Rechtsauflösung des Moduls $M' = \mathcal{D}^q / R \mathcal{D}^p$ berechnet, sowie dessen projektive Rechtsdimension.

PURITYFILTRATION

Unter der Voraussetzung, dass \mathcal{D} Auslander-regulär ist, liefert der Befehl PURITYFILTRATION(TRANSPOSE(R)) zwei Listen: Die erste Liste gibt die Reinheitsfiltrierung des Moduls M an, wobei der i -te Eintrag dieser Liste den Modul M_{i-1} der Filtrierung repräsentiert. Der i -te Eintrag der zweiten Liste enthält die Matrix S_i , so dass der $(i-1)$ -reine Faktormodul als $M_{i-1}/M_i = \text{coker}(\cdot S_i)$ darstellbar ist.

GRADENUMBER

Die Funktion GRADENUMBER(TRANSPOSE(R)) berechnet die Gradzahl von M direkt über die Definition, das heißt alle Rechts-Moduln $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$ für

¹<http://www.singular.uni-kl.de>

$i = 0, 1, \dots$, bis diese ungleich 0 sind und gibt das kleinste solcher i aus. Ist der gegebene Modul 0, wird stellvertretend für ∞ eine -1 ausgegeben.

SHOWGRADES

Ist T eine Liste von Repräsentierungsmatrizen, so ruft SHOWGRADES(T) für jedes Element dieser Liste die Prozedur GRADENUMBER auf und gibt die Ergebnisse in einer weiteren Liste aus.

ALLEXTOFLEFT

Zur Bestimmung aller $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D})$ für $i = 0, \dots, \text{lpd}(M)$ kann der Befehl ALLEXTOFLEFT(TRANSDPOSE(R)) verwendet werden. Ausgegeben wird eine Liste, in dem der i -te Eintrag den $(i - 1)$ -ten (Rechts-)ext-Modul repräsentiert.

ALLEXTORIGHT

Betrachten wir statt M den Modul $M' = \mathcal{D}^q/R\mathcal{D}^p$, so benutzen wir die Funktion ALLEXTORIGHT(R). Auch hier gibt der i -te Eintrag der zurückgegebenen Liste eine Repräsentierung des (Links-)Moduls $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{i-1}(M', \mathcal{D})$ zurück, wobei $i = 1, \dots, \text{rpd}(M) + 1$.

DOUBLEEXT

Bei Aufruf von DOUBLEEXT(TRANSDPOSE(R), i), mit $0 \leq i \leq \text{lpd}(M)$, wird eine Darstellung des Doppel-ext-Moduls $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}))$ berechnet und ausgegeben.

ALDOUBLEEXT

Für den Links-Modul M gibt ALDOUBLEEXT(TRANSDPOSE(R)) eine doppelt indizierte Liste T aus. Mit $T[i][j]$ erhalten wir dann eine Repräsentierung des (Links-)Moduls $\text{ext}_{\mathcal{D}}^{j-1}(\text{ext}_{\mathcal{D}}^{i-1}(M, \mathcal{D}))$, mit $0 \leq i, j \leq \text{lpd}(M) + 1$.

IS_PURE

Es sei \mathcal{D} Auslander-regulär. Durch IS_PURE(TRANSDPOSE(R)) wird überprüft, ob der Modul M rein ist. Dies wird anhand des Satzes (5.3.4) gemacht, d.h. es wird überprüft ob alle $\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(\text{ext}_{\mathcal{D}}^i(M, \mathcal{D}), \mathcal{D}) = 0$ sind für $i \neq j_{\mathcal{D}}(M)$. Ist M rein, so gibt die Funktion 1 zurück, ansonsten 0 (Bemerkung: der 0-Modul wird hier als reiner Modul behandelt).

PURELIST

Ist T eine Liste von Darstellungsmatrizen von Moduln, so überprüft PURE-

`LIST(T)` die Reinheit jedes dieser Moduln und gibt die Ergebnisse in einer weiteren Liste zurück. Auch hier brauchen wir die Auslander-Eigenschaft von \mathcal{D} .

Einige Beispiele für die hier vorgestellten Prozeduren sind direkt in der Bibliothek `PURITYFILTRATION.LIB` enthalten und können mit `EXAMPLE "PROZEDURNAME"` aufgerufen werden.

§ 7 Beispielrechnungen

— *Kommutative Beispiele* —

Wir wollen uns zunächst ein einfaches kommutatives Beispiel in 3 Variablen anschauen, das heißt wir betrachten $\mathcal{D} = K[x, y, z]$. Sei M ein durch die Matrix $R = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ y & -z \end{pmatrix}$ präsentierter Modul. Wir berechnen eine projektive Auflösung von M :

PROJECTIVEDIMENSION(TRANSDIMENSION(R), 0);

$$0 \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{\cdot R_2} \mathcal{D}^{1 \times 3} \xrightarrow{\cdot R} \mathcal{D}^{1 \times 2} \rightarrow M \rightarrow 0, \text{ mit } R_2 = \begin{pmatrix} -y & z & x \end{pmatrix}$$

Es gilt also $\text{lpd}(M) = 2$. Wir erwarten also eine Reinheitsfiltrierung der Form $[M_0, M_1, M_2]$ und berechnen endliche Repräsentierungsmatrizen von dieser:

LIST T=PURETYFILTRATION(TRANSDIMENSION(R2)); T[1];

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ y & -z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ y & -z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

Wir erkennen also, dass $M = M_0 = M_1$ und $M_2 = 0$. Dies erkennen wir auch an den Faktormoduln M_i/M_{i+1}

T[2];

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \\ y & -z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right],$$

sowie deren Gradzahlen:

SHOWGRADES(T[2]); [-1, 1, -1];

Aus den Ergebnisse können wir schließen, dass schon M selbst 1-rein war und überprüfen dieses Ergebnis:

IS_PURE(TRANSDIMENSION(R)); 1
 GRADENUMBER(TRANSDIMENSION(R)); 1

Ein etwas interessanteres Beispiel liefert das folgende Ideal I : Wir betrachten

$$I = \langle x^3 + x^2y + x^2z - x^2 - xz - yz - z^2 + z, x^2yz + x^2y - yz^2 - yz, x^2y^2 - x^2y - y^2z + yz \rangle$$

bzw. $R \in \mathcal{D}^{3 \times 1}$ mit den Erzeugern von I als Zeilen. Dann ist $M := \mathcal{D}/I = \mathcal{D}/\mathcal{D}^{1 \times 3}R$. Bestimme die projektive Dimension von M :

PROJECTIVEDIMENSION(TRANSDPOSE(R),0);

$0 \rightarrow \mathcal{D} \xrightarrow{R_3} \mathcal{D}^{1 \times 3} \xrightarrow{R_2} \mathcal{D}^{1 \times 3} \xrightarrow{R} \mathcal{D} \rightarrow M \rightarrow 0$, wobei

$$R_3 = \begin{pmatrix} x+z & y-1 & -z-1 \end{pmatrix} \text{ und } R_2 = \begin{pmatrix} 0 & y-1 & -z-1 \\ yz+y & -x-z & -z-1 \\ y^2-y & 0 & -x-y-z+1 \end{pmatrix}$$

Somit ist die projektive (Links-)Dimension von M gleich 3. Wieder berechnen wir die Reinheitsfiltrierung von M

LIST T=PURITYFILTRATION(TRANSDPOSE(R),0); T[1];

$$\left[\begin{pmatrix} x^3 + x^2y + x^2z - x^2 - xz - yz - z^2 + z \\ x^2yz + x^2y - yz^2 - yz \\ x^2y^2 - x^2y - y^2z + yz \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x^3 + x^2y + x^2z - x^2 - xz - yz - z^2 + z \\ x^2yz + x^2y - yz^2 - yz \\ x^2y^2 - x^2y - y^2z + yz \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+y+z-1 \\ yz+y \\ y^2-y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z+1 \\ y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \right]$$

und die zugehörigen Faktormoduln

T[2];

$$\left[1, \begin{pmatrix} x^2 - z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ x+z-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z+1 \\ y-1 \\ x-1 \end{pmatrix} \right].$$

Wir prüfen ob diese rein sind

PURELIST(T[2]); [1,1,1,1]

und bestimmen die Gradzahlen

SHOWGRADES(T[2]); [-1,1,2,3],

welche wir aufgrund der Theorie auch erwartet haben.

Ohne auf weitere Details einzugehen, ziehen wir noch folgende Beobachtung in Betracht: Zu einem gegebenen Ideal I können wir die sogenannte äquidimensionale Zerlegung ausrechnen (genauere Definitionen hierzu finden sich in [GP08], Kapitel 4):

EQUIDIM(I); [$\langle z+1, y-1, x-1 \rangle, \langle y, x+z-1 \rangle, \langle x^2-z \rangle$]

Vergleicht man diese Zerlegung mit obigem Darstellung der reinen Faktormoduln von M , so sieht man, dass die Ergebnisse übereinstimmen. Es scheint also einen Zusammenhang zwischen der Reinheitsfiltrierung von \mathcal{D}/I und der äquidimensionalen Zerlegung von I zu geben. In [Bjö93] wird dies genauer untersucht.

— Legendre-Polynome —

Die Legendre-Gleichungen werden von Polynomen $P_n(x)$ erfüllt, für die die Kombination aus Differenzen- und Differentialgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + n(n+1)P_n(x) &= 0 \\ (n+2)P_{n+2} - (2n+3)xP_{n+1}(x) + (n+1)P_n(x) &= 0, \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun einen Ring \mathcal{D} , der von einer stetigen Variablen x und zugehörigem Differentialoperator D_x , sowie einer diskreten Variablen n und einem Shiftoperator S_n erzeugt wird. Sei also $M = \{x, D_x, n, S_n\}$, $K = \mathbb{R}$ und die Algebra $\mathcal{D} := K\langle M \rangle/I$, mit

$$I =_K \langle D_x x = x D_x + 1, S_n n = n S_n + S_n, x S_n = S_n x, x n = n x, D_x n = n D_x, D_x S_n = S_n D_x \rangle$$

(bemerke: \mathcal{D} ist das Tensorprodukt der ersten Weyl-Algebra mit der ersten Shift-Algebra, vgl. (2.7) und (2.9)). Die linken Seiten der Legendre-Gleichungen, lassen sich dann als Ideal J in \mathcal{D} schreiben, nämlich als

$$J = \langle (1-x^2)D_x^2 - 2xD_x + n(n+1), (n+2)S_n^2 - (2n+3)xS_n + (n+1) \rangle,$$

und wir betrachten $M = \mathcal{D}/JG = \mathcal{D}^{1 \times 5}/\mathcal{D}^{1 \times 5}R$, wobei R die Erzeuger von JG als Zeilen beinhaltet und JG eine Gröbner Basis von J darstellt.

$$\begin{aligned} &\text{PRINT}(R); \\ &\left(\begin{array}{l} nx D_x - n S_n D_x + n^2 + x D_x - S_n D_x + 2n + 1 \\ 2nx S_n - n S_n^2 + 3x S_n - 2S_n^2 - n - 1 \\ x^2 D_x^2 - n^2 + 2x D_x - D_x^2 - n \\ n S_n^2 D_x - 2n^2 S_n - x S_n D_x + 2S_n^2 D_x - 6n S_n - n D_x - 5S_n - D_x \\ 2x^2 S_n D_x - n S_n^2 + x S_n - 2S_n^2 - 2S_n D_x + n + 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Wir berechnen die Reinheitsfiltrierung von M :

LIST T=PURITYFILTRATION(TRANSDPOSE(R));

$$T[1]; [R, R, R, \begin{pmatrix} D_x \\ S_n \\ n+1 \end{pmatrix}]$$

$$T[2]; [1, 1, \begin{pmatrix} x^2 D_x + nx - nS_n + x - S_n - D_x \\ nx D_x - nS_n D_x + n^2 + x D_x - S_n D_x + 2n + 1 \\ 2nx S_n - nS_n^2 + 3x S_n - 2S_n^2 - n - 1 \\ nS_n^2 D_x - 2n^2 S_n - x S_n D_x + 2S_n^2 D_x - 6n S_n - n D_x - 5S_n - D_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_x \\ S_n \\ n+1 \end{pmatrix}]$$

Wir erkennen, dass $\text{lpd}(M) = 3$ und $M = M_0 = M_1 = M_2 \subsetneq M_3 \subsetneq 0$ gilt. Letzteres erkennen wir auch an den Gradzahlen der Faktormoduln:

$$\text{SHOWGRADES}(T[2]); [-1, -1, 2, 3].$$

Schließlich überprüfen wir auch hier die Reinheit der Elemente aus $T[2]$,

$$\text{PURELIST}(T[2]); [1, 1, 1, 1]$$

und erkennen, dass alles in Ordnung zu sein scheint.

— *Hypergeometrische Funktionen* —

Die hypergeometrischen Funktionen ${}_pF_q$ für $p, q \in \mathbb{N}$ bilden eine Art Verallgemeinerung der geometrischen Reihe. In [PWZ96] werden diese in Kapitel 3 eingeführt und genauer betrachtet. Uns soll es hier eher um bereits bekannte Gleichungen gehen, die sich aus der Definition der Funktionen ergeben, welche von allen hypergeometrischen Funktionen ${}_2F_1$ erfüllt sein müssen.

Wir betrachten dazu wieder eine Kombination von Shift- und Weyl-Algebra, diesmal mit den Variablen aus der Menge $A = \{a, S_a, b, S_b, c, S_c, z, D_z\}$, wobei a, b und c diskret mit zugehörigen Shiftoperatoren S_a, S_b, S_c und z stetig mit Differentialoperator D_z sein sollen. Setze also

$$\begin{aligned} I = & \langle \{S_i j - j S_i - \delta_{i,j} S_i \mid i, j \in \{a, b, c\}\} \cup \{D_z z - z D_z - 1\} \cup \{ij - ji \mid i, j \in \{a, b, c, z\}\} \\ & \cup \{ij - ji \mid i, j \in \{S_a, S_b, S_c, D_z\}\} \cup \{S_i z - z S_i \mid i \in \{a, b, c\}\} \\ & \cup \{i D_z - D_z i \mid i \in \{a, b, c\}\} \rangle \end{aligned}$$

und betrachte $\mathcal{D} = K\langle A \rangle / I$. Die Funktionen der Form ${}_2F_1$ werden alle durch die Operatoren annulliert, welche durch das Ideal

$$\begin{aligned} J = \langle & z(1-z)D_z^2 + (c - (a+b+1)z)D_z - ab, -c(1-z)D_z + (c-a)(c-b)S_c + c(a+b-c), \\ & (c-a-1) + (2(a+1) - c + (b-a-1)z)S_a + (a+1)(z-1)S_a^2, (c-a)S_c + aS_aS_c - c, \\ & (c-a-b-1)S_b + a(1-z)S_aS_b - (c-b-1), (b-a) + aS_a - bS_b, \\ & c(a+(b-c)z) - ac(1-z)S_a + (c-a)(c-b)zS_c, cD_z - abS_aS_bS_c, \\ & c(1-z)S_a - c + (c-b)zS_aS_c, (a+(b-c)z)S_aS_c + (c-a)S_c - c(1-z)S_a, \\ & (c+1)c(z-1) + (c+1)(c - (2(c+1) - a - b - 1)z)S_c + (c+1-a)(c+1-b)zS_c^2, \\ & -z(1-z)D_zS_a + (c-a-1) + (a+1-c+bz)S_a, \\ & -z(1-z)D_zS_b + (c-b-1) + (b+1-c+az)S_b \rangle \end{aligned}$$

gegeben sind. Wieder schreiben wir die Erzeuger von J zeilenweise in eine Matrix R , führen auf diese die Reinheitsfiltrierung aus und erhalten

PURITYFILTRATION(TRANSDPOSE(R));
OUT OF MEMORY...

Der Grund daran, dass der Rechner hier nicht mit der Rechnung hinterherkommt, liegt an der Bestimmung der projektiven Dimension des Moduls $M = \text{coker}(\cdot R)$ und den damit verbundenen Syzygienberechnungen. Hier ist also noch etwas zu tun, dass heißt an dieser Stelle sollte man die Implementierung noch etwas verbessern.

Wir können aber eine (vielleicht etwas naive) Vereinfachung vornehmen, in dem wir eine Gröbner Basis von J jeweils mit dem Ring schneiden, der jeweils ein Paar der Variablen aus der Menge $\{(a, S_a), (b, S_b), (c, S_c)\}$ nicht enthält (d.h. wir vernachlässigen alle Gleichungen, die Variablen des jeweiligen Paares enthalten). Zum Beispiel ergibt sich für das Paar (a, S_a) :

$$\begin{aligned} J_{Noa} = \langle & b^2S_b - bzD_z - b^2 + bS_b - zD_z - b, S_bS_czD_z + S_bS_cS_c - S_bS_c, \\ & bS_b^2 - S_bzD_z - bS_b + S_b^2 - S_b, bS_bS_c - bS_c + cS_c - c, \\ & cS_czD_z + c^2S_c + S_czD_z - c^2 + cS_c - c, bS_czD_z + bcS_c + S_czD_z - bc + cS_c - c, \\ & bS_bS_c - czD_z - bc, bS_bzD_z - z^2D_z^2 - bS_bD_z - bzD_z + zD_z^2 - bS_b + bD_z + b + D_z, \\ & S_cz^2D_z^2 + 2cS_czD_z - S_czD_z^2 + c^2S_c - cS_cD_z - czD_z + S_czD_z - c^2 + cD_z - S_cD_z \rangle. \end{aligned}$$

Dies sieht nun schon übersichtlicher aus und in der Tat liefert nach Bildung von R_a der Befehl

$$\text{LIST T=PUILITYFILTRATION(TRANSDPOSE}(R_a)); \quad \text{T}[2];$$

$$\left[1, 1, \begin{pmatrix} bS_b - zD_z - b \\ S_c zD_z + cS_c - c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ S_b \\ b+1 \\ zD_z - D_z - 1 \end{pmatrix} \right]$$

eine nicht triviale Filtrierung von M mit $M = M_0 = M_1 = M_2 \subsetneq M_3 = M_4 \subsetneq 0$. Die Gradzahlen der Faktormoduln

$$\text{SHOWGRADES(T}[2]); \quad [-1, -1, 2, -1, 4]$$

sind auch hier nicht überraschend. Selbige Prozedur angewendet auf J_{Nob} liefert ähnliche Ergebnisse. Eliminieren wir aber das Paar (c, S_c) und bilden R_c , so erhalten wir

$$\text{LIST T=PUILITYFILTRATION(TRANSDPOSE}(R_c)); \quad \text{T}[2];$$

$$\left[1, 1, \begin{pmatrix} bS_b - zD_z - b \\ aS_a - zD_z - a \end{pmatrix}, 1, 1, \begin{pmatrix} S_b \\ b+1 \\ S_a \\ a+1 \\ zD_z - D_z - 1 \end{pmatrix} \right].$$

Einerseits erkennen wir an der Größe der ausgegebenen Liste, dass die projektive Dimension im Falle von R_c auf 5 gestiegen ist (im Vergleich zu $\text{lpd}(\text{coker}(\cdot R_i)) = 4$ für $i = a, b$). Dies erkennen wir auch an den Gradzahlen

$$\text{SHOWGRADES(T}[2]); \quad [-1, -1, 2, -1, -1, 5]$$

welche bis zu 5 gehen. Infolgedessen hat sich auch unsere Reinheitsfiltrierung von M verändert:

$$M = M_0 = M_1 = M_2 \subsetneq M_3 = M_4 = M_5 \subsetneq 0.$$

Inwiefern dieses Ergebnis jetzt allerdings Aussagen über den Ausgangsmodul \mathcal{D}/J zulässt, bleibt noch zu diskutieren.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Masterarbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der angegebenen Quellen erstellt habe.

Christian Schilli
Herzogenrath, den 01.06.2012

Literatur

- [Bha73] Shrikant Mahadeo Bhatwadekar. On the global dimension of ore-extensions. *Nagoya Mathematical Journal*, 50:217–225, 1973.
- [Bjö79] Jan-Erik Björk. *Rings of Differential Operators*, volume 21. North Holland Publishing Company, 1979.
- [Bjö93] Jan-Erik Björk. *Analytic \mathcal{D} -Modules and applications*. Kluwer, 1993.
- [Eis95] David Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer, New York, 1995.
- [GP08] Gert-Martin Greuel and Gerhard Pfister. *A Singular Introduction to Commutative Algebra*. Springer, Berlin, second edition, 2008.
- [GZ93] Anthony Giaquinto and James J. Zhang. Quantum Weyl algebras. *ArXiv High Energy Physics - Theory e-prints*, October 1993.
- [Jan64] James P. Jans. *Rings and Homology*. Holt Rinehart Winston, Washington, 1964.
- [Lam99] Tsit-Yuen Lam. *Lectures on Modules and Rings*. Springer, New York, 1999.
- [Lev81] Thierry Levasseur. Grade des modules sur certains anneaux filtres. *Communications in Algebra*, 9(15):1519–1532, 1981.
- [Lev05] Viktor Levandovskyy. *Non-commutative Computer Algebra for polynomial algebras: Gröbner bases, applications and implementation*. PhD thesis, Universität Kaiserslautern, 2005.
- [Mal64] Bernard Malgrange. Systèmes différentiels à coefficients constants. *Séminaire Bourbaki*, 8:79–89, 1962-1964.
- [MR01] John C. McConnell and J. Chris Robson. *Noncommutative Noetherian Rings*, volume 30. American Mathematical Society, Rhode Island, 2001.
- [PWZ96] Marko Pertovšek, Herbert Wilf, and Doron Zeilberger. *A=B*. AK Peters. Ltd, 1996.
- [QR07] Alban Quadrat and Daniel Robertz. Computation of bases of free modules over the Weyl algebras. *J. Symbolic Computation*, 42(11-12):1113–1142, 2007.

-
- [Qua11] Alban Quadrat. Grade filtration of linear functional systems. Rapport de recherche RR-7769, INRIA, October 2011.
- [Rot09] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, second edition, 2009.