

# Über Struktur und Kohomologie von Moduln symmetrischer Gruppen

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften  
der RWTH Aachen University zur Erlangung des akademischen Grades  
eines Doktors der Naturwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker  
Christian Weber  
aus Trier

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß  
Universitätsprofessor Dr. David Green

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juli 2011

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten  
der Hochschulbibliothek online verfügbar.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>5</b>
<b>1 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen</b>	<b>11</b>
1.1 Partitionen, Young-Diagramme, Abaki, Residuen	11
1.2 Einige wichtige Typen von $S_n$ -Moduln	17
1.3 Spechtreihen und Kompositionsreihen	25
1.4 Verzweigungsregeln	30
1.5 Partitionen im Hauptblock	35
<b>2 Kohomologie</b>	<b>45</b>
2.1 Ein allgemeiner Überblick	45
2.2 Kohomologie über $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}_{(p)}$ , $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{F}_p$	56
2.3 Kohomologie zyklischer Gruppen von Primzahlordnung	58
2.4 Das Zassenhaus-Verfahren	61
2.5 Kohomologie von Spechtmoduln	64
<b>3 Kohomologie über <math>\mathbb{F}_p</math> und <math>\mathbb{Z}_p</math> für ungerades <math>p</math></b>	<b>73</b>
3.1 Kohomologie von einfachen $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduln und Spechtmoduln	73
3.2 Die Kombinatorik-Methode nach Hemmer	77
3.3 Die Partition $(n - 2, 1^2)$	92
3.4 Vererbung von $(p, \iota)$ -Spezialität	95
<b>4 Kohomologie über <math>\mathbb{F}_2</math> und <math>\mathbb{Z}_2</math></b>	<b>101</b>
4.1 Aufbau und Kohomologie bestimmter $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln	103
4.2 Beweise	116
4.3 Auf der Suche nach $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen	141
<b>5 Fazit</b>	<b>147</b>
5.1 Kohomologie von Spechtmoduln über $\mathbb{Z}$	147
5.2 Szczepańskis Vermutung für $S_n$	150
<b>A Die Operation der <math>S_n</math> auf bestimmten Spechtmoduln</b>	<b>155</b>
A.1 Die Operation der $S_n$ auf $S^\alpha$	155
A.2 Die Operation der $S_n$ auf $S^\beta$	156
A.3 Die Operation der $S_n$ auf $S^\gamma$	157
<b>B Der Beweis von Lemma 2.5.10</b>	<b>169</b>
<b>C Der Beweis von Lemma 3.3.1</b>	<b>175</b>
<b>D Der Beweis von Lemma 3.3.6 (a)</b>	<b>179</b>

<b>E</b> Der Beweis von Lemma 3.3.6 (b)	<b>187</b>
<b>F</b> Der Beweis von Lemma 3.2.20	<b>191</b>
<b>G</b> GAP-Routinen	<b>197</b>
<b>H</b> GAP-Ergebnisse	<b>205</b>
Literaturverzeichnis	<b>211</b>
Glossar und Index	<b>215</b>

# Vorwort

Die symmetrische Gruppe  $S_n$  ist die Menge der Permutationen auf den natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$ , zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Diese Gruppen wurden und werden von zahlreichen Mathematikern aus den unterschiedlichsten Blickwinkeln mit unterschiedlichsten Methoden studiert. Sie finden Anwendung unter anderem in Lie-Theorie, algebraischer Geometrie oder theoretischer Physik. Besonders zur Kombinatorik pflegen die symmetrischen Gruppen eine innige Beziehung: Einerseits können viele Abzählprobleme mit Hilfe von Permutationen formuliert werden, die auf den betrachteten Objekten in natürlicher Weise operieren. Andererseits liefert das kombinatorische Studium von Zahlpartitionen wichtige Erkenntnisse auf dem Gebiet der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen.

Im Rahmen der Darstellungstheorie endlicher Gruppen stellen die symmetrischen Gruppen einen attraktiven Spezialfall dar, da für sie viele allgemeine darstellungstheoretische Aspekte explizit beschrieben werden können, und das oft mit vergleichsweise einfachen kombinatorischen Mitteln. Dadurch werden die symmetrischen Gruppen gerne herangezogen, um allgemeine darstellungstheoretische Vermutungen zu überprüfen.

Zu den attraktiven Eigenschaften der symmetrischen Gruppen zählt, dass für sie jeder Körper ein Zerfällungskörper ist. Das hat zur Folge, dass viele Aussagen über  $KS_n$ -Moduln nur von der Charakteristik des Körpers  $K$  abhängen, nicht vom Körper selbst. Darüber hinaus gibt es etliche Sachverhalte, die sogar noch allgemeiner gelten. Ausgangspunkt sind dabei die Permutationsmoduln  $M_R^\lambda$ , jeweils definiert in Abhängigkeit von einem Integritätsbereich  $R$  und einer Partition  $\lambda$  von  $n$ . Bei den Permutationsmoduln handelt es sich um bestimmte zyklische  $RS_n$ -Moduln, die als  $R$ -Moduln endlich erzeugt und frei sind. In jedem solchen Permutationsmodul  $M_R^\lambda$  identifiziert man einen bestimmten Untermodul  $S_R^\lambda$ , der ebenfalls zyklisch als  $RS_n$ -Modul und endlich erzeugt und frei als  $R$ -Modul ist. Diese Moduln  $S_R^\lambda$ , bezeichnet als Spechtmoduln, nehmen eine zentrale Stellung in der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen ein. Die ganzzahligen Spechtmoduln sind gewissermaßen die Prototypen: Für jede Partition  $\lambda$  von  $n$  ist der Spechtmodul  $S_R^\lambda$  über  $R$  isomorph zum Tensorprodukt  $R \otimes_{\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Z}}^\lambda$ . Der  $R$ -Rang eines Spechtmoduls ist unabhängig von  $R$  und lässt sich leicht aus der zugehörigen Partition berechnen. Eine der wichtigsten Eigenschaften der Spechtmoduln ist, dass sie über Körpern der Charakteristik 0 ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen einfacher  $S_n$ -Moduln bilden.

Über Primzahlcharakteristik  $p$  ist die Situation deutlich komplizierter. Hier sind die Spechtmoduln im Allgemeinen nicht mehr einfach. Es ist zwar auch hier ein Vertretersystem für die einfachen  $S_n$ -Moduln bekannt, nämlich die eindeutigen einfachen Faktormoduln der Spechtmoduln zu  $p$ -regulären Partitionen, aber diese Beschreibung ist nicht sehr explizit. Im Allgemeinen sind nicht einmal die Dimensionen dieser einfachen Moduln bekannt. Auch über die Zerlegungszahlen, also die Vielfachheiten der irreduziblen Moduln als Kompositionsfaktoren der Spechtmoduln, weiß man im Allgemeinen wenig. Bei dem, was man weiß, spielt wieder Kombinatorik von Partitionen eine Schlüsselrolle. Zum Beispiel ist bekannt, dass der irreduzible Modul  $D^\mu$  (also der Kopf des Spechtmoduls  $S^\mu$  zur  $p$ -regulären Partition  $\mu$ ) höchstens dann ein Kompositionsfaktor des Spechtmoduls  $S^\lambda$  sein kann, wenn  $\mu$  lexikografisch größer oder gleich  $\lambda$  ist und außerdem den gleichen  $p$ -Kern besitzt. In hinreichend einfachen Situationen können auf Basis dieses Wissens bereits die Kompositionsfaktoren eines Spechtmoduls hergeleitet werden. Eine allgemeine Lösung für dieses Problem ist jedoch bislang noch nicht bekannt.

Weitere Fragen, die in diesem Zusammenhang auftauchen und bisher nur zum Teil beantwortet sind, lauten beispielsweise: Welche unzerlegbaren direkten Summanden hat ein Permutationsmodul  $M^\lambda$ ? Welche Gestalt haben Moduln, die man erhält, indem man bestimmte  $S_n$ -Moduln nach  $S_{n+1}$  induziert oder auf  $S_{n-1}$  einschränkt? Das sind nur ein paar Gründe, warum die Forschung im Bereich der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen spannend bleibt.

Eine weitere Säule dieser Arbeit, neben der Darstellungstheorie, ist gegeben durch die Kohomologie von Gruppen. Dieser Themenkomplex hat Wurzeln sowohl in der Algebra als auch in der Topologie. Hier interessieren wir uns vornehmlich für die erweiterungstheoretische Interpretation der Kohomologie in kleinen Graden. Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $V$  ein  $G$ -Modul, also eine abelsche Gruppe, auf der  $G$  operiert. Mit Hilfe einer injektiven Auflösung von  $V$  und dem kovarianten Hom-Funktor definiert man für jede nichtnegative ganze Zahl  $i$  eine Gruppe  $H^i(G, V)$ , die sogenannte Kohomologiegruppe von  $V$  vom Grad  $i$ . Auf deren genaue Definition verzichten wir an dieser Stelle, aber die Bedeutung der Kohomologie in den kleinen Graden soll kurz angedeutet werden.

Die Gruppe  $H^0(G, V)$  ist isomorph zum Fixpunkt-Untermodul von  $V$ , also demjenigen  $G$ -Untermodul, der aus allen Elementen von  $V$  besteht, die unter der Operation von  $G$  fest bleiben. Die Gruppe  $H^1(G, V)$  parametrisiert einerseits die Konjugiertenklassen der Komplemente von  $V$  im semidirekten Produkt  $V \rtimes G$ , andererseits, und das ist die für die vorliegende Arbeit wichtigere Interpretation, die Äquivalenzklassen der Erweiterungen des trivialen  $G$ -Moduls mit  $V$ . Der Hauptsatz der Erweiterungstheorie schließlich besagt, dass die Gruppe  $H^2(G, V)$  die Äquivalenzklassen der Erweiterungen von  $G$  mit  $V$  parametrisiert.

Ein großer Teil der vorliegenden Arbeit ist der Bestimmung der Kohomologie von diversen  $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduln, insbesondere Spechtmoduln gewidmet. In diesem Bereich liegt noch vieles im Dunkeln. Hier spielen wieder kombinatorische Methoden eine wichtige Rolle. Dabei handelt es sich allerdings weniger um eigene "kohomologische Kombinatorik", sondern mehr um eine Anwendung der "darstellungstheoretischen Kombinatorik", die im Zusammenhang unter anderem mit Blockzugehörigkeit, Kompositionsreihen, Verzweigungsregeln und Ähnlichem auftritt.

Die Kohomologie vom Grad 0 von Spechtmoduln über Körpern von Primcharakteristik wurde bereits von Gordon James vollständig beschrieben ([Jam78], Theorem 24.4). Dort ist freilich nicht von Kohomologie die Rede, betrachtet werden die Fixpunkt-Untermoduln von Spechtmoduln. In der Anwendung ist das Verfahren rein kombinatorisch; man braucht lediglich die entsprechende Partition und die Charakteristik des Körpers zu kennen. Dieser Ansatz von James wurde jüngst von David Hemmer weiterentwickelt ([Hem09]), um im Falle ungerader Charakteristik zu entscheiden, ob die erste Kohomologie eines Spechtmoduls trivial ist oder nicht. Entscheidende Teile der vorliegenden Arbeit bauen auf Hemmers Methode auf.

Die Kohomologie von symmetrischen Gruppen ist zwar für sich genommen schon ein interessantes Feld, und ihre Erforschung bedarf im Grunde keiner weiteren Rechtfertigung außer der, dass es noch viel zu erforschen gibt. Nichtsdestoweniger gibt es für die vorliegende Arbeit einen ganz konkreten Anlass, sich mit diesem Gebiet zu beschäftigen. Im Zentrum des Interesses steht speziell die zweite Kohomologie ganzzahliger Spechtmoduln. Die Ursache für dieses Interesse soll nun erläutert werden.

## Der Ausgangspunkt: eine Vermutung von Szczepański

Als Motivation dient eine Fragestellung, die aus den Arbeiten [HS95] und [Szc03] erwächst. Dort geht es um die Bestimmung von  $\mathcal{R}_1$ -Gruppen. Mit  $\mathcal{R}_1$  wird die Klasse der endlichen Gruppen bezeichnet, die isomorph zur Holonomiegruppe einer Bieberbachgruppe mit endlicher äußerer Automorphismengruppe sind. Im Allgemeinen kann die Zugehörigkeit einer Gruppe zu  $\mathcal{R}_1$  noch nicht entschieden werden. Nur bestimmte Typen endlicher Gruppen sind bezüglich ihrer  $\mathcal{R}_1$ -Zugehörigkeit klassifiziert: Die  $\mathcal{R}_1$ -Gruppen unter den abelschen Gruppen ([HS95], Theorem 4.2), unter den Diedergruppen ([HS95], Proposition 5.1) und unter den dzyklischen Gruppen ([MS03], Abschnitt 5.3) sind vollständig bestimmt. Bei den endlichen  $p$ -Gruppen ist die  $\mathcal{R}_1$ -Zugehörigkeit bis auf

bestimmte Ausnahmefälle bekannt ([HS95], Abschnitt 3). Außerdem kennt man sie auch bei gewissen Frobeniusgruppen ([HS95], Proposition 5.2) und gewissen nicht-abelschen einfachen Gruppen ([HS95], Abschnitt 6), allerdings nur in begrenztem Umfang.

In [Szc03] äußert Andrzej Szczepański die Vermutung, dass jede endliche Gruppe  $G$ , bei der die Anzahl ihrer  $\mathbb{Q}$ -irreduziblen Darstellungen mit der ihrer  $\mathbb{R}$ -irreduziblen übereinstimmt, eine  $\mathcal{R}_1$ -Gruppe ist. Die Idee dahinter ist folgende:

Es sei  $\mathcal{R}'_1$  die Klasse aller endlichen Gruppen, die isomorph zur Holonomiegruppe einer kristallografischen Gruppe mit endlicher äußerer Automorphismengruppe sind. Eine Bieberbachgruppe ist per Definition eine torsionsfreie kristallografische Gruppe; damit ist  $\mathcal{R}_1$  eine Teilklasse von  $\mathcal{R}'_1$ . Weiter sei  $\mathcal{W}$  die Klasse aller endlichen Gruppen, bei denen die Anzahl ihrer  $\mathbb{Q}$ -irreduziblen Darstellungen mit der ihrer  $\mathbb{R}$ -irreduziblen übereinstimmt. (Eine Gruppe  $G$  liegt in  $\mathcal{W}$  genau dann, wenn ihre sogenannte Whitehead-Gruppe  $\text{Wh}(G)$  endlich ist, da deren Rang gemäß [Oli88], Theorem 2.6, gegeben ist durch die Differenz zwischen der Anzahl der  $\mathbb{R}$ -irreduziblen und der Anzahl der  $\mathbb{Q}$ -irreduziblen Darstellungen von  $G$ . Szczepański verwendet in [Szc03] diese Charakterisierung über die Whitehead-Gruppen, daher rührt hier die Bezeichnung  $\mathcal{W}$ .) Gemäß [Szc96], Theorem A, ist die äußere Automorphismengruppe einer kristallografischen Gruppe genau dann endlich, wenn die  $\mathbb{Q}$ -irreduziblen Komponenten der zugehörigen Holonomiedarstellung alle Vielfachheit 1 haben und  $\mathbb{R}$ -irreduzibel sind. (Besagtes Theorem A wird zunächst nicht für kristallografische Gruppen, sondern nur für Bieberbachgruppen formuliert. Gemäß Remark 1 auf Seite 589 von [Szc96] lässt sich die Aussage aber entsprechend verallgemeinern.) Daraus wird in [Szc03], Proposition 1, gefolgert: Da jede endliche Gruppe  $G$  isomorph zur Holonomiegruppe einer kristallografischen Gruppe mit  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreier Holonomiedarstellung ist, ist  $\mathcal{W}$  eine Teilklasse von  $\mathcal{R}'_1$ . Nun soll auf analoge Weise geschlossen werden, dass  $\mathcal{W}$  sogar eine Teilklasse von  $\mathcal{R}_1$  ist. Dazu formuliert Szczepański die Vermutung, dass jede endliche Gruppe isomorph zur Holonomiegruppe nicht nur einer kristallografischen, sondern sogar einer Bieberbachgruppe mit  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreier Holonomiedarstellung ist.

## Das Ziel: ein Nachweis von Szczepańskis Vermutung im Fall der symmetrischen Gruppen

Da  $\mathbb{Q}$  ein Zerfällungskörper für die symmetrischen Gruppen ist, liegen diese alle in  $\mathcal{W}$ . Es ist also zu erwarten, dass die symmetrischen Gruppen  $\mathcal{R}_1$ -Gruppen sind. Für die symmetrischen Gruppen auf  $n \leq 6$  Punkten wird der Nachweis dafür in [Szc03], Theorem 1, erbracht, indem gezeigt wird, dass sie die letztgenannte Vermutung erfüllen, dass also  $S_n$  für  $n \leq 6$  isomorph zur Holonomiegruppe einer Bieberbachgruppe mit  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreier Holonomiedarstellung ist.

Die vorliegende Arbeit geht nun der Frage nach, wie die besagte Vermutung im Fall der symmetrischen Gruppen für beliebiges  $n$  bewiesen werden könnte. Deren eingangs beschriebene Besonderheiten ermöglichen eine ganz eigene Herangehensweise. Das Problem ist äquivalent zum Nachweis der Existenz eines  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreien, treuen  $\mathbb{Z}S_n$ -Gitters  $V$ , für das die zweite Kohomologiegruppe  $H^2(S_n, V)$  ein sogenanntes spezielles Element besitzt, also ein Element, das für jede Untergruppe  $1 \neq U \leq S_n$  durch die Restriktionsabbildung  $\text{res}_U^{S_n}$  nicht auf 0 abgebildet wird. Da die Spechtmoduln  $S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}$  einerseits ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen einfacher  $\mathbb{Q}S_n$ -Moduln bilden, andererseits jeweils isomorph zum Tensorprodukt  $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}$  sind, lautet der Plan, das gesuchte  $\mathbb{Z}S_n$ -Gitter  $V$  als direkte Summe von paarweise verschiedenen ganzzahligen Spechtmoduln zu schreiben.

Welche Spechtmoduln muss man dazu wählen? Es stellt sich heraus, dass man bei gegebenem  $n$  für jedes Paar aus einer Primzahl  $p$  und einer natürlichen Zahl  $\iota$  mit  $p\iota \leq n$  den Spechtmodul zu einer Partition  $\lambda$  von  $n$  benötigt, für den die Kohomologiegruppe  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  ein Element enthält, das bei Restriktion auf eine zyklische Untergruppe der  $S_n$ , die von einem Produkt aus  $\iota$  disjunkten  $p$ -Zykeln erzeugt wird, nicht auf 0 abgebildet wird. In diesem Fall nennen wir  $\lambda$  eine  $(p, \iota)$ -spezielle Partition.

Notwendige Voraussetzung für die  $(p, \iota)$ -Spezialität von  $\lambda$  ist, dass die Gruppenordnung von

$H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  von  $p$  geteilt wird. Daher ist es lohnenswert, sich zunächst einmal mit der Frage zu beschäftigen, wie man den Isomorphietyp von  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  bestimmt. Erste Schritte in diese Richtung wurden in der Diplomarbeit [Web06] und dem darauf aufbauenden Artikel [Web09a] unternommen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Ansätze weiter ausgebaut.

Das nächste Ziel ist, für jede natürliche Zahl  $n$  und jedes Paar  $(p, \iota)$  mit  $p\iota \leq n$  die Existenz einer  $(p, \iota)$ -speziellen Partition nachzuweisen. Dies soll geschehen, indem für jeden Fall eine konkrete Partition angegeben wird. Dabei ist zu beachten, dass die Wahl einer solchen Partition im gegebenen Zusammenhang nicht völlig beliebig ist. Es können Konflikte auftreten, wenn für unterschiedliche Paare  $(p, \iota)$  die gleiche Partition gewählt werden soll. Wenn nämlich in einem solchen Fall die jeweilige  $(p, \iota)$ -Spezialität von unterschiedlichen Elementen der Kohomologiegruppe herrühren würde, müsste man den entsprechenden Spechtmodul doppelt verwenden, was der  $\mathbb{Q}$ -Vielfachheitsfreiheit zuwiderläufe. Es hat allerdings den Anschein, dass das Angebot an  $(p, \iota)$ -speziellen Partitionen so groß ist, dass derartige Konflikte leicht vermieden werden können.

Wenn wir hier von "Anschein" sprechen, deutet dies bereits darauf hin, dass im Allgemeinen noch unklar ist, wie man auf theoretischer Basis Aussagen über die  $(p, \iota)$ -Spezialität von Partitionen treffen kann. Der derzeitige Stand sieht so aus, dass für fast alle Paare  $(p, \iota)$  mit  $p\iota \leq n$  eine Partition  $\lambda$  von  $n$  gefunden wird, bei der zumindest ein begründeter Verdacht auf  $(p, \iota)$ -Spezialität besteht. (Nur in der Situation, dass  $p = 2$ ,  $\iota$  gerade und  $n = 2\iota + 2$  ist, existiert noch kein allgemeiner Vorschlag für die Wahl von  $\lambda$ .) Der Nachweis der  $(p, \iota)$ -Spezialität der jeweiligen Partition gelingt bisher allerdings nur in einem begrenzten Anteil der Fälle, nämlich einerseits für den Fall, dass  $p = 2$  und  $\iota$  ungerade ist (hier kann immer die triviale Partition gewählt werden), andererseits für den Fall, dass  $p$  ungerade und  $n \leq p\iota + p - 3$  ist, bzw. unter der Voraussetzung, dass  $\iota$  kein Vielfaches von  $p$  ist, auch für  $n \leq p\iota + p - 1$ .

Eine Verallgemeinerung der Beweisführung bei ungeradem  $p$  auf die übrigen Kandidaten scheint möglich, sofern es gelingt, bestimmte Klippen zu umschiffen. Diese Klippen werden so weit wie möglich eingegrenzt, aber in dieser Arbeit leider noch nicht überwunden. Die Vorschläge für die  $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen bei geradem  $\iota$  werden bisher noch durch keine theoretischen Überlegungen gestützt, sondern sind allein durch konkret berechnete Beispiele inspiriert. Neben dem theoretischen Ansatz wird nämlich auch ein algorithmischer Ansatz verfolgt, der die Überprüfung einer Partition auf  $(p, \iota)$ -Spezialität mit Hilfe von GAP ermöglicht, wenn auch nur in eingeschränktem Maße. Mit Hilfe dessen kann Szczepański's Vermutung immerhin für  $S_n$  mit  $n \leq 13$  bewiesen werden.

Dies ist der rote Faden, an dem sich der Inhalt der vorliegenden Arbeit orientiert. Aber er sollte nicht als alleiniger Zweck verstanden werden. In seinem Einzugsbereich tauchen mitunter weitere Fragestellungen auf, die nur locker mit dem Ausgangsproblem zusammenhängen, die aber ebenfalls der Aufmerksamkeit wert sind. Bei diesen Themen handelt es sich zum Beispiel, wie bereits erwähnt, um die Möglichkeiten der Bestimmung von Kohomologie in kleinen Graden von  $S_n$ -Moduln über  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{F}_p$  (einerseits grundsätzlich, andererseits in bestimmten Spezialfällen), dann aber auch um die Vernetzung der Spechtmoduln im  $p$ -Hauptblock, um eine direkte Summenzerlegung des Tensorproduktes  $S_{\mathbb{Z}_p}^{(p\iota-1,1)} \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^{(p\iota-1,1)}$  für ungerades  $p$  (wobei  $\mathbb{Z}_p$  die Vervollständigung der  $p$ -adischen ganzen Zahlen bezeichnet) und nicht zuletzt um Strukturaussagen zu  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln.

## Aufbau der Arbeit

Die ersten beiden Kapitel haben vornehmlich den Charakter einer allgemeinen Einführung in die Themengebiete Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen und Kohomologie von Gruppen. Aus dramaturgischen Gründen sind hier aber auch schon vereinzelt neue Ergebnisse aufgenommen. Das betrifft insbesondere den Abschnitt 1.5, in dem die Hauptblock-Graphen eingeführt werden, sowie den letzten Teil von Abschnitt 2.5, wo mit der Bestimmung der zweiten Kohomologie bestimmter ganzzahliger Spechtmoduln begonnen wird.

In den Kapiteln 3 und 4 wird die Kohomologie von Spechtmoduln über den Körpern von Primcharakteristik  $p$  unter die Lupe genommen, da über die  $p$ -adischen ganzen Zahlen ein enger



Zusammenhang zur Kohomologie über  $\mathbb{Z}$  besteht. Dabei sind für ungerades  $p$  einerseits und  $p = 2$  andererseits gänzlich unterschiedliche Vorgehensweisen erforderlich. Daher werden diese beiden Fälle in zwei separaten Kapiteln behandelt.

Das letzte reguläre Kapitel ordnet die Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln ein in Bezug auf ihre Bedeutung einerseits für die offenen Fragen aus der Diplomarbeit [Web06], von denen etliche nun beantwortet werden können, andererseits für einen möglichen Beweis von Szczepańskis Vermutung im Spezialfall der symmetrischen Gruppen.

Manche der in dieser Arbeit verwendeten Beweise sind mit einigem technischen Aufwand verbunden, gleichzeitig aber vom Ansatz her elementar, so dass sie trotz ihrer Notwendigkeit nicht unbedingt zu einem tieferen Verständnis der Materie beitragen. Um den Lesefluss nicht zu sehr zu hemmen, wurden derartige Beweise in den Anhang ausgelagert. Darüber hinaus enthält der Anhang einige GAP-Routinen zur Ermittlung  $(p, \iota)$ -spezieller Partitionen sowie eine Liste der Ergebnisse, die damit errechnet wurden.

## Dank

Vor allen anderen möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Hiß meinen tief empfundenen Dank aussprechen. Nicht zuletzt dank seiner Ermutigung habe ich meine Promotion überhaupt erst in Angriff genommen. Das Thema fesselt mich nach wie vor, und seine Betreuung war mit einer großen Hilfe. Auch für seine Unterstützung in Bezug auf meine Anstellung bei der RWTH bin ich ihm sehr dankbar.

Prof. Dr. David Green von der Friedrich-Schiller-Universität Jena danke ich für seine Bereitschaft, das Koreferat zu übernehmen, und seine hilfreichen Hinweise.

Dr. Johannes Orlob danke ich für die fruchtbaren Diskussionen über die Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen, die insbesondere die Ausarbeitung des Konzeptes der Hauptblock-Graphen beflügelt haben. Besonders dankbar bin ich auch für sein Korrekturlesen meiner Arbeit und die vielen wertvollen Verbesserungsvorschläge.

Des Weiteren gilt mein Dank Dr. Frank Lübeck und Dr. Matthias Künzer: Matthias ist der beste Ansprechpartner für jegliche Fragen rund um die Kohomologie, und Frank lieh mir jederzeit ein offenes Ohr für Fragen aller Art, sei es mathematischer, programmiertechnischer oder sonstiger Natur.

Ihnen und allen anderen Mitarbeitern des Lehrstuhls D spreche ich meinen Dank aus für die kollegiale Atmosphäre bei der Arbeit, aber auch für die angenehmen Stunden jenseits des Arbeitsalltags bei Kaffeerunden, Wandertagen und Weihnachtsfeiern.



# Kapitel 1

## Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

Das erste Kapitel dient einerseits dazu, die in dieser Arbeit benötigten Grundlagen der Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen vorzustellen und die hier verwendeten Notationen einzuführen. Andererseits werden daraus auch schon neue Sachverhalte abgeleitet. Das betrifft insbesondere die Aussagen zu Endresiduen und den Hauptblock-Graphen.

Im ersten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Arithmetik von Partitionen. Wichtige Stichwörter sind Young-Diagramme,  $p$ -Kerne, Abaki und Residuen. Der zweite Abschnitt erläutert Konstruktionen von wichtigen  $S_n$ -Moduln, als da wären: Permutationsmoduln, Spechtmoduln, einfache Moduln und Youngmoduln. Im dritten Abschnitt schauen wir uns an, wie man die Struktur von  $S_n$ -Moduln mit Hilfe von Kompositions- und Spechtreihen beschreiben kann. Das spielt auch noch in den vierten Abschnitt hinein, in dem speziell die Struktur von eingeschränkten und induzierten  $S_n$ -Moduln mit Hilfe der Verzweigungsregeln untersucht wird. Der letzte Abschnitt des ersten Kapitels befasst sich mit der  $p$ -Block-Zugehörigkeit von unzerlegbaren  $S_n$ -Moduln bzw. von Partitionen, wobei es hauptsächlich um eine Kartografie der Hauptblock-Partitionen geht.

Die Informationen zu Partitionen, Permutationsmoduln, Spechtmoduln und einfachen  $S_n$ -Moduln basieren weitestgehend auf [Jam78] und [JK81]. Für die Youngmoduln sind [Gra85], [Jam83] und [Hen05] die wichtigsten Referenzen, und für die modularen Verzweigungsregeln ist es [Kle98b]. Die Hauptquellen für allgemeinere Aussagen aus der Darstellungstheorie sind [CR81] und [NT88], wobei solche Aussagen in dieser Arbeit der Einfachheit halber nicht immer in größtmöglicher, sondern oft nur in "hinreichender" Allgemeinheit formuliert werden. Zum Beispiel werden wir immer mit endlichen Gruppen und mit Integritätsbereichen arbeiten, auch wenn manche Aussagen auch für beliebige Gruppen oder beliebige kommutative Ringe Gültigkeit haben.

### 1.1 Partitionen, Young-Diagramme, Abaki, Residuen

Die Grundbegriffe aus dem Einzugsbereich der symmetrischen Gruppen (wie zum Beispiel Zykelschreibweise von Permutationen, das Signum einer Permutation, die alternierenden Gruppen und Ähnliches) können sicher als bekannt vorausgesetzt werden und bedürfen keiner weiteren Erläuterung. Wenn wir bei einigen dieser Grundbegriffe eine Ausnahme machen, so geschieht dies vornehmlich, um eventuellen notationellen Missverständnissen vorzubeugen.

Für eine Menge  $M$  bezeichnen wir mit  $S_M$  die *symmetrische Gruppe* auf  $M$ , also die Menge aller Bijektionen von  $M$  in sich selbst, zusammen mit der Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Für eine Teilmenge  $T \subseteq M$  identifizieren wir  $S_T$  auf kanonische Weise mit derjenigen Untergruppe von  $S_M$ , deren Elemente die Elemente von  $M \setminus T$  fest lassen. Für  $n \in \mathbb{N}_0$  sei  $\underline{n} := \{1, 2, \dots, n\}$  (also insbesondere  $\underline{0} = \emptyset$ ). Die *symmetrische Gruppe auf  $n$  Punkten* ist die Gruppe  $S_n := S_{\underline{n}}$ .

Eine *Komposition*  $\lambda$  von  $n \in \mathbb{N}_0$  ist eine Folge nichtnegativer ganzer Zahlen  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  mit der Eigenschaft, dass  $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i = n$  ist. Das bedeutet insbesondere, dass höchstens endlich viele der  $\lambda_i$  größer als 0 sind. Die *Länge* von  $\lambda$  ist

$$\ell(\lambda) := \min\{i \in \mathbb{N}_0 \mid \lambda_j = 0 \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } j > i\}.$$

Bei der Notation lassen wir in der Regel die Nullen nach dem Eintrag  $\ell(\lambda)$  weg und schreiben

$$\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) \vDash n.$$

Eine kompaktere Notation von  $\lambda \vDash n$  erhalten wir, wenn wir aufeinanderfolgende gleiche Teile zusammenfassen: Wenn  $\lambda_j = x \in \mathbb{N}_0$  ist für  $i < j \leq i + k$ , können wir statt  $k$  mal  $x$  auch  $x^k$  schreiben. Beispielsweise steht  $(1^2, 4^3, 0, 1^4)$  für die Komposition  $(1, 1, 4, 4, 4, 0, 1, 1, 1, 1) \vDash 18$ .

Eine *Partition*  $\lambda$  von  $n \in \mathbb{N}_0$  ist eine Komposition von  $n$  mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$  ist für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Damit sind insbesondere alle  $\lambda_i \neq 0$  für  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ . Wir schreiben

$$\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) \vdash n.$$

Die einzige Komposition der 0 ist ebenfalls eine Partition. Wir bezeichnen sie als die *leere Partition*  $\emptyset = (0) \vdash 0$ ; es ist  $\ell(\emptyset) = 0$ . Für  $n \in \mathbb{N}_0$  bezeichnen wir  $(n) \vdash n$  als die *triviale Partition* von  $n$ .

Die Menge  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  ist ein kommutatives Monoid bezüglich punktweiser Addition. Sowohl die Menge aller Kompositionen als auch die Menge aller Partitionen sind Teilmonoide von  $\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$  und zudem abgeschlossen bezüglich skalarer Multiplikation über  $\mathbb{N}$ . (Das ist unter anderem wichtig für die  $p$ -adische Zerlegung von Partitionen in (1.13).) Für  $\lambda \vDash n$  und  $q \in \mathbb{N}$  schreiben wir statt  $\lambda + (q)$  kurz  $\lambda + q$ .

Die Menge  $\text{Part}(n) := \{\lambda \vdash n\}$  aller Partitionen einer gegebenen Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  ist total geordnet bezüglich der lexikografischen Ordnung, definiert durch

$$\lambda \leq \mu \quad :\Leftrightarrow \quad \lambda = \mu \text{ oder } \lambda_m < \mu_m \text{ für } m := \min\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \neq \mu_i\}. \quad (1.1)$$

Außerdem ist  $\text{Part}(n)$  partiell geordnet bezüglich der *Dominanzordnung*, definiert durch

$$\lambda \trianglelefteq \mu \quad :\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \leq \sum_{i=1}^m \mu_i \text{ für alle } m \in \mathbb{N}. \quad (1.2)$$

Die zugehörigen strikten Ordnungen schreiben wir als  $\lambda < \mu$  bzw.  $\lambda \triangleleft \mu$ . Aus  $\lambda \triangleleft \mu$  folgt  $\lambda < \mu$ .

Jede Partition  $\lambda \vdash n$  kann durch ein sogenanntes *Young-Diagramm* repräsentiert werden:

$$[\lambda] := \{(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}.$$

Grafisch stellen wir ein solches Young-Diagramm als eine Anordnung von  $n$  Knoten (bzw. Kästchen) in  $\ell(\lambda)$  Zeilen dar, wobei für  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$  in der  $i$ -ten Zeile linksbündig  $\lambda_i$  Knoten stehen. Beispielsweise ist

$$[(5, 3, 1^2)] \hat{=} \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}$$

Falls  $\lambda_i > \lambda_{i+1}$  ist für ein  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ , nennen wir den Knoten  $(i, \lambda_i)$  eine *Ecke* von  $[\lambda]$ .

Die zu  $\lambda$  *konjugierte Partition*  $\lambda' \vdash n$  ist definiert als diejenige Partition, deren Young-Diagramm  $[\lambda']$  wir erhalten, indem wir  $[\lambda]$  an der Diagonale spiegeln, das heißt, indem wir Zeilen und Spalten vertauschen. Beispielsweise ist  $(5, 3, 1^2)' = (4, 2^2, 1^2)$ , denn

$$[(5, 3, 1^2)'] \hat{=} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array} \hat{=} [(4, 2^2, 1^2)].$$

Formal ausgedrückt ist  $\lambda' \vdash n$  gegeben durch

$$\lambda'_i := |\{1 \leq j \leq \ell(\lambda) \mid \lambda_j \geq i\}| \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist  $\ell(\lambda') = \lambda_1$  und  $(\lambda')' = \lambda$ .

Ebenso wie Partitionen kann man allgemeiner auch Kompositionen mit Hilfe von Young-Diagrammen repräsentieren. Dabei ist allerdings zu beachten, dass es dann im Allgemeinen nicht mehr sinnvoll ist, von Ecken oder von Konjugation zu sprechen.

Partitionen spielen eine wichtige Rolle beim Konstruieren und Klassifizieren von  $S_n$ -Moduln. Dazu werden einerseits bestimmte Eigenschaften der Partitionen selbst benötigt, andererseits Eigenschaften der jeweils zugehörigen Young-Diagramme. Formal handelt es sich bei Partition und zugehörigem Young-Diagramm zwar um unterschiedliche Objekte, die aber vom Informationsgehalt her sehr dicht beieinanderliegen. In der Praxis wäre es mühsam, ständig zwischen den beiden formal unterscheiden zu müssen. Daher wollen wir sie im Folgenden miteinander identifizieren. Das heißt, der Begriff “Young-Diagramm“ wird im weiteren Verlauf (fast) nicht mehr auftauchen. Statt dessen werden wir zum Beispiel von Knoten, Zeilen und Spalten einer Partition sprechen.

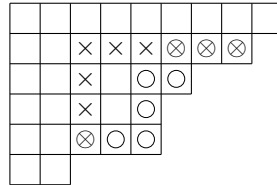
Ein wichtiges Mittel bei der Klassifikation von  $S_n$ -Moduln sind die  $p$ -Kerne von Partitionen. Später werden wir uns nur noch für den Fall interessieren, dass  $p$  eine Primzahl ist. Das Konzept, das dahinter steht, funktioniert aber viel allgemeiner. Daher sei vorerst  $p \in \mathbb{N}$ .

Für einen Knoten  $(i, j)$  der Partition  $\lambda \vdash n$  ist der *Haken*  $h_{i,j}$  die Menge aller Knoten  $(k, l)$  von  $\lambda$  mit entweder  $k = i$  und  $l \geq j$  oder  $k > i$  und  $l = j$ . Die *Hakenlänge* ist

$$|h_{i,j}| = (\lambda_i - j) + (\lambda'_j - i) + 1.$$

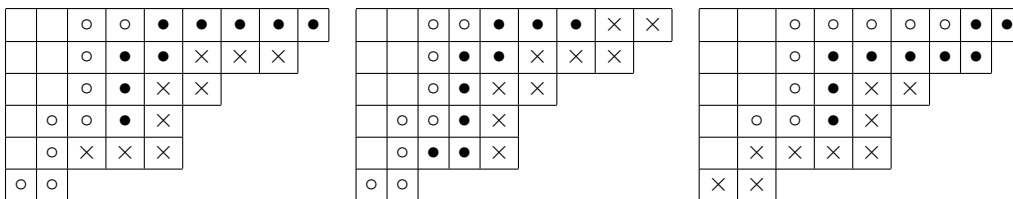
Dabei ist  $\lambda_i - j$  die Anzahl der Knoten rechts von  $(i, j)$  und  $\lambda'_j - i$  die Anzahl der Knoten unterhalb von  $(i, j)$ . Der zu  $h_{i,j}$  gehörige *Randhaken*  $rh_{i,j}$  ist die Menge aller Knoten, die zwischen  $(i, \lambda_i)$  und  $(\lambda'_j, j)$  auf dem Rand von  $\lambda$  liegen. Seine Länge ist  $|rh_{i,j}| = |h_{i,j}|$ .

**Beispiel 1.1.1** Wir betrachten  $\lambda := (9, 8, 6, 5^2, 2) \vdash 35$ . Die Kreuze markieren den Haken  $h_{2,3}$  und die Kreise den Randhaken  $rh_{2,3}$ . Die Länge von  $h_{2,3}$  bzw.  $rh_{2,3}$  ist gleich 9.



Eine Partition, die keinen Haken (und damit auch keinen Randhaken) der Länge  $p$  besitzt, heißt ein  $p$ -Kern. Besitzt eine Partition  $\lambda \vdash n$  einen Randhaken der Länge  $p$ , so erhält man eine Partition von  $n - p$ , indem man die Knoten besagten Randhakens aus  $\lambda$  entfernt. Besitzt die neue Partition wieder einen Randhaken der Länge  $p$ , entfernen wir auch diesen. Diesen Prozess iterieren wir, bis wir einen  $p$ -Kern erhalten. Dieser  $p$ -Kern  $\tilde{\lambda}$  heißt dann  $p$ -Kern von  $\lambda$ . Oft gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, die  $p$ -Randhaken aus  $\lambda$  zu entfernen, aber der  $p$ -Kern  $\tilde{\lambda}$  ist eindeutig bestimmt ([JK81], Theorem 2.7.16).

**Beispiel 1.1.2** Für  $\lambda := (9, 8, 6, 5^2, 2) \vdash 35$  ist der 9-Kern  $\tilde{\lambda} = (2^3, 1^2) \vdash 8$ . Hier sehen wir drei von mehreren Möglichkeiten,  $\tilde{\lambda}$  aus  $\lambda$  zu erhalten; es werden jeweils sukzessive die Randhaken entfernt, die durch die Symbole  $\times$ ,  $\bullet$  und  $\circ$  gekennzeichnet sind.

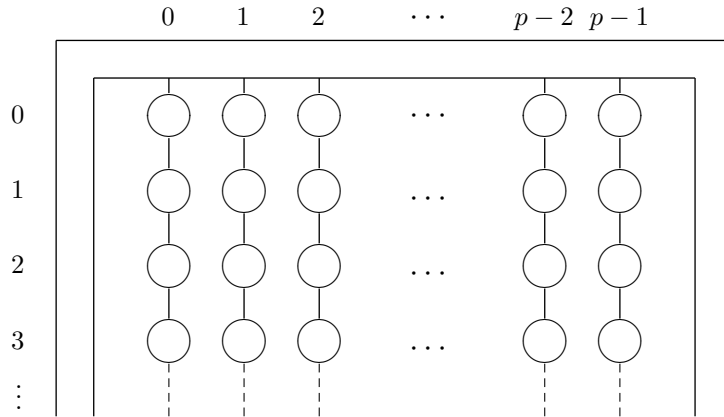


Der Beweis für die Eindeutigkeit des  $p$ -Kerns einer Partition benutzt die sogenannten  $\beta$ -Zahlen und das Abakus-Modell. Eine Folge von  $\beta$ -Zahlen ist eine Folge  $(\beta_1, \dots, \beta_q)$  mit  $\beta_i \in \mathbb{N}_0$  und  $\beta_1 > \dots > \beta_q$ . Aus einer solchen  $\beta$ -Folge erhält man eine Partition  $\lambda$  via  $\lambda_i := \beta_i + i - q$  für  $1 \leq i \leq q$  und  $\lambda_i := 0$  für  $i > q$ , denn per Konstruktion ist dann  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1} \geq 0$ . Dabei ist  $\ell(\lambda) = q$  genau dann, wenn  $\beta_q \neq 0$  ist. Umgekehrt erhalten wir aus einer Partition  $\lambda$  auch eine  $\beta$ -Folge via  $q \geq \ell(\lambda)$  und  $\beta_i := \lambda_i - i + q$  für  $1 \leq i \leq q$ . Im Falle  $q = \ell(\lambda)$  ist  $\beta_i = \lambda_i - i + \ell(\lambda) = (\lambda_i - 1) + (\lambda'_1 - i) + 1 = |h_{i,1}|$  für  $1 \leq i \leq q$ .

Zu jeder  $\beta$ -Folge gibt es also genau eine Partition, aber zu jeder Partition erhalten wir unendlich viele  $\beta$ -Folgen, abhängig davon, wie groß wir  $q$  wählen. Wir werden später Eindeutigkeit erzwingen, indem wir auf ein bestimmtes  $q$  normieren.

Zunächst aber stellen wir mit dem *Abakus*-Modell eine weitere Möglichkeit vor, Partitionen zu repräsentieren. Es wird in [JK81] nach Lemma 2.7.13 so beschrieben: Wir stellen uns vor, vor uns liegt ein Abakus auf dem Tisch, dessen Schienen von Norden nach Süden verlaufen, und wir schauen aus Richtung Süden darauf. Die Anzahl der Schienen beträgt  $p$ , und wir nummerieren sie von links nach rechts mit den Zahlen von 0 bis  $p - 1$ . Auf diesen Schienen können beliebig (aber immer nur endlich) viele Kugeln drapiert werden. Die Länge der Schienen ist "hinreichend", das heißt, wir können im Folgenden jede Kugel an jede gewünschte Position verschieben.

Wir unterteilen den Abakus nun in (eine hinreichend große Anzahl von) Zeilen, die wir bei 0 beginnend von Norden nach Süden durchnummerieren, und bestimmen so die zulässigen Positionen für die Kugeln: Jede Kugel liegt auf genau einer Schiene in genau einer Zeile, und an jeder solchen Position darf auch nur eine Kugel liegen. Die zulässigen Positionen nummerieren wir nun von Norden nach Süden zeilenweise durch, beginnend bei 0. Das heißt, die Position in der  $i$ -ten Zeile auf der  $j$ -ten Schiene hat die Nummer  $ip + j$ . Die Position mit der Nummer  $m \in \mathbb{N}_0$  befindet sich also auf der Schiene  $m \bmod p$ .



Bei gegebenem  $p$  gibt es nun eine Bijektion zwischen der Menge aller  $\beta$ -Folgen und der Menge aller Abakus-Konfigurationen: Da die Positionen in jeder Abakus-Konfiguration in  $\mathbb{N}_0$  liegen und paarweise verschieden sind, entspricht jede Konfiguration mit  $q$  Kugeln genau einer  $\beta$ -Folge  $(\beta_1, \dots, \beta_q)$ , die gerade die Positionen der Kugeln angibt. Über diese Bijektion bestimmt jede Abakus-Konfiguration eine eindeutige Partition  $\lambda$ . Umgekehrt wird  $\lambda$  für jedes  $q \geq \ell(\lambda)$  durch eine eindeutige Abakus-Konfiguration mit  $q$  Kugeln dargestellt.

Es sei  $0 \leq m \leq q$  die kleinste unbesetzte Position bei einer gegebenen Abakus-Konfiguration mit  $q$  Kugeln. Für  $0 \leq k < m$  gilt  $\beta_{q-k} = k$ . Für die zugehörige Partition  $\lambda$  gilt dann  $\lambda_{q-k} = \beta_{q-k} + (q - k) - q = 0$ . Die Kugeln an den Positionen  $0 \leq k < m$  stehen also für leere Zeilen von  $\lambda$ . Um eine Abakus-Konfiguration für  $\lambda$  mit genau  $\ell(\lambda)$  Kugeln zu erhalten, können wir die Nummerierung der Positionen bei der ersten unbesetzten Position mit 0 beginnen und die so erhaltene  $\beta$ -Folge in einen neuen Abakus übertragen ([JK81], 2.7.15).

Wenn wir statt bei der kleinsten unbesetzten Position bei irgendeiner Position vor dieser mit der Neunummerierung beginnen, erhalten wir auf analoge Weise eine Konfiguration zur gleichen

Partition, bei der zwar noch Nullzeilen mitgeführt werden, nur eben entsprechend weniger. Das bedeutet insbesondere: Wenn bei einer gegebenen Konfiguration die Zeilen von 0 bis  $t - 1$  voll sind, können wir diese Kugeln entfernen und die verbleibenden Kugeln um  $t$  Positionen nach oben schieben und erhalten so eine Konfiguration zur gleichen Partition. Diesen Umstand werden wir uns in Kürze zunutze machen.

Ist nun in einer Abakus-Konfiguration zur Partition  $\lambda$  die Position unmittelbar über einer Kugel leer, so entspricht gemäß Lemma 2.7.13 und Theorem 2.7.16 in [JK81] das Verschieben der entsprechenden Kugel an diese Position dem Entfernen eines  $p$ -Randhakens von  $\lambda$ . Also erhält man eine Abakus-Konfiguration des  $p$ -Kerns  $\tilde{\lambda}$ , indem man bei einer Abakus-Konfiguration von  $\lambda$  alle Kugeln so weit wie möglich nach oben schiebt. Insbesondere ändert das Entfernen eines  $p$ -Randhakens den  $p$ -Kern nicht, und damit ist dieser eindeutig bestimmt.

**Beispiel 1.1.3** Die Partition  $\lambda := (9, 8, 6, 5^2, 2) \vdash 35$  mit  $\ell(\lambda) = 6$  wird für  $q = 7$  durch die  $\beta$ -Folge  $(15, 13, 10, 8, 7, 3, 0)$  repräsentiert. Bei der zugehörigen Abakus-Konfiguration für  $p = 4$

	0	1	2	3
0	•	•	•	•
1	•	•	•	•
2	•	•	•	•
3	•	•	•	•

schieben wir erst alle Kugeln nach oben. Da dann die erste Zeile voll ist, können wir sie entfernen und die verbleibenden Kugeln nach oben schieben. Dadurch erhalten wir

	0	1	2	3			0	1	2	3
0	•	•	•	•	und	0	•	•	•	•
1	•	•	•	•		1	•	•	•	•
2	•	•	•	•		2	•	•	•	•
3	•	•	•	•		3	•	•	•	•

als Konfigurationen für den 4-Kern  $\tilde{\lambda}$ . Die beiden zugehörigen  $\beta$ -Folgen sind  $(11, 7, 4, 3, 2, 1, 0)$  und  $(7, 3, 0)$ , die beide für den 4-Kern  $\tilde{\lambda} = (5, 2) \vdash 7$  stehen.

Eng verwandt mit dem Konzept des Abakus ist das Konzept der Endresiduen, das im Folgenden vorgestellt werden soll. Es ist nicht gänzlich neu, wie wir in Lemma 1.1.4 und im Zusammenhang mit der Nakayama-Vermutung (Satz 1.5.1) sehen werden, aber die damit verbundenen Möglichkeiten wurden bisher offenbar noch nicht voll ausgeschöpft.

Das  $p$ -Residuum (oder einfach *Residuum*) eines Paares  $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ist definiert durch  $\text{res}(i, j) := j - i \pmod p$ . Auf diese Weise wird jedem Knoten einer Partition  $\lambda \vdash n$  ein  $p$ -Residuum zugeordnet. Für alle  $i \in \mathbb{N}$  nennen wir  $r_i := \text{res}(i, \lambda_i)$  das *Endresiduum* der  $i$ -ten Zeile. Das bedeutet insbesondere, dass wir auch leeren Zeilen ein Endresiduum zugestehen:  $r_i = (-i) \pmod p$  für  $i > \ell(\lambda)$ .

Statt für Zeilen kann man Endresiduen auch analog für Spalten definieren. Dann ist das Endresiduum der  $i$ -ten Spalte von  $\lambda$  gleich  $(-\text{res}(i, \lambda'_i)) \pmod p$ . In manchen Situationen (wie zum Beispiel in Lemma 1.5.4) ist es nützlich, mit den Endresiduen der Spalten zu argumentieren. In solchen Fällen werden wir, um zusätzliche Notation zu vermeiden, zu den Zeilen-Endresiduen der konjugierten Partition übergehen.

Für ein  $q \in \mathbb{N}$  mit  $q \geq \ell(\lambda)$  nennen wir  $\text{ER}(\lambda, q) := (r_1, \dots, r_q)$  eine *Endresiduenfolge* von  $\lambda$ . Für  $q^\lambda := \min\{q \in \mathbb{N}_0 \mid q \geq \ell(\lambda), p \mid q\}$  nennen wir  $\text{ER}(\lambda) := \text{ER}(\lambda, q^\lambda)$  die *minimale Endresiduenfolge* von  $\lambda$ . Warum wir auf  $q^\lambda$  normieren und nicht etwa auf  $\ell(\lambda)$ , hängt zusammen mit der folgenden Aussage.

**Lemma 1.1.4 ([JK81], Lemma 2.7.38.)** Falls die Anzahl der Kugeln  $q$  einer Abakus-Konfiguration zur Partition  $\lambda$  ein Vielfaches von  $p$  ist, gibt es für  $0 \leq k \leq p - 1$  eine Bijektion zwischen den Kugeln auf der  $k$ -ten Schiene und den Zeilen von  $\lambda$  zwischen  $\lambda_1$  und  $\lambda_q$  mit Endresiduum  $k$ .

*Beweis:* Wir bilden die Kugel an Position  $\beta_i$  auf die Zeile  $\lambda_i$  ab. Die Kugel an Position  $\beta_i$  befindet sich auf Schiene  $\beta_i \bmod p$ . Wegen  $p \mid q$  ist  $\beta_i = \lambda_i - i + q \equiv \lambda_i - i \pmod{p}$ , das heißt,  $\beta_i \bmod p = r_i$ . Damit ist das Endresiduum der  $i$ -ten Zeile von  $\lambda$  gleich der Nummer der Schiene, auf der die Kugel von Position  $\beta_i$  liegt, und es folgt die Behauptung.  $\square$

Dieses Lemma machen wir uns folgendermaßen zunutze: Zu einer Partition  $\lambda$  bestimmen wir die minimale Endresiduenfolge  $\text{ER}(\lambda)$ . Für  $0 \leq k \leq p-1$  sei  $a_k^\lambda$  die Vielfachheit des Endresiduums  $k$  in  $\text{ER}(\lambda)$ , also die Anzahl der Kugeln auf der  $k$ -ten Schiene in der Abakus-Konfiguration von  $\lambda$  mit  $q^\lambda$  Kugeln. Weiter sei

$$\alpha_k^\lambda := a_k^\lambda - \min\{a_j^\lambda \mid 0 \leq j \leq p-1\}. \quad (1.3)$$

So erhalten wir zwei  $p$ -Tupel  $a^\lambda := (a_0^\lambda, \dots, a_{p-1}^\lambda)$  und  $\alpha^\lambda := (\alpha_0^\lambda, \dots, \alpha_{p-1}^\lambda) \in \mathbb{N}_0^p$ .

**Lemma 1.1.5** *Für jede Partition  $\lambda$  gilt:*

- (a) *Es ist  $\alpha^\lambda = \alpha^{\tilde{\lambda}} = a^{\tilde{\lambda}}$ .*
- (b) *Der  $p$ -Kern jeder Partition  $\lambda$  ist durch  $\alpha^\lambda$  eindeutig bestimmt.*
- (c) *Wenn  $\lambda$  ein  $p$ -Kern ist, kommt mindestens ein  $0 \leq k \leq p-1$  nicht in  $\text{ER}(\lambda)$  vor.*

*Beweis:*

- (a) Dieser Teil ergibt sich aus dem vor Beispiel 1.1.3 beschriebenen Prinzip: Wir stellen  $\lambda$  durch die zugehörige Abakus-Konfiguration mit  $q^\lambda$  Kugeln dar. Die Folge  $a^\lambda$  gibt die Anzahlen der Kugeln auf jeder Schiene an. Wir schieben alle Kugeln nach oben und erhalten so eine Konfiguration zu  $\tilde{\lambda}$ . Wenn wir nun alle vollen Zeilen entfernen (das sind die ersten  $a := \min\{a_k^\lambda \mid 0 \leq k \leq p-1\}$  Stück) und die restlichen Kugeln nach oben schieben, haben wir immer noch eine Darstellung von  $\tilde{\lambda}$ , aber jetzt diejenige mit der minimalen durch  $p$  teilbaren Anzahl von Kugeln. Das heißt, jetzt gibt  $a^{\tilde{\lambda}}$  die Anzahl der Kugeln auf jeder Schiene an. Andererseits erhalten wir per Definition  $\alpha^\lambda$  aus  $a^\lambda$  durch  $\alpha_k^\lambda = a_k^\lambda - a$ . Damit ist  $\alpha^\lambda = a^{\tilde{\lambda}}$ . Die gleiche Argumentation greift, wenn wir direkt mit  $\tilde{\lambda}$  starten, da  $\tilde{\lambda}$  sein eigener  $p$ -Kern ist. Das heißt, es ist auch  $\alpha^{\tilde{\lambda}} = a^{\tilde{\lambda}}$ .
- (b) Wie wir oben gesehen haben, ist  $\tilde{\lambda}$  bei jeder zugehörigen Abakus-Konfiguration durch die Anzahl der Kugeln auf jeder Schiene eindeutig bestimmt, also durch  $a^{\tilde{\lambda}}$ . Jetzt folgt die Behauptung mit Teil (a).
- (c) Aus Teil (a) ergibt sich für  $\lambda = \tilde{\lambda}$ , dass  $\alpha^\lambda = a^\lambda$  ist. Per Definition ist mindestens ein Eintrag von  $\alpha^\lambda$  gleich 0, und die Behauptung folgt mit Lemma 1.1.4.  $\square$

Damit erhalten wir zwischen der Menge der  $p$ -Kerne und der Menge

$$\{(\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{N}_0^p \mid 0 \in \{\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}\}, p \mid \sum_{i=0}^{p-1} \alpha_i\}$$

die Bijektion

$$\tilde{\lambda} \longleftrightarrow \alpha^\lambda.$$

Auf die Endresiduen werden wir noch einmal zu sprechen kommen, wenn es um Partitionen im Hauptblock geht. Zuvor jedoch widmen wir uns der Konstruktion bestimmter  $S_n$ -Moduln.



## 1.2 Einige wichtige Typen von $S_n$ -Moduln

Es seien  $G, U$  und  $H$  endliche Gruppen mit  $U \leq G \leq H$ . Weiterhin sei  $R$  ein Integritätsbereich und  $V$  ein  $RG$ -Modul. Die Einschränkung von  $V$  auf  $U$  schreiben wir als  $V \downarrow_U^G$ , und die Induktion von  $V$  nach  $H$  schreiben wir als  $V \uparrow_G^H = RH \otimes_{RG} V$ . Falls  $G$  aus dem Kontext klar ist, können wir die Notation auch abkürzen zu  $V \downarrow_U$  und  $V \uparrow^H$ .

Ein *reiner*  $RG$ -Untermodule  $W$  von  $V$  ist ein  $G$ -invarianter  $R$ -Untermodule mit der Eigenschaft, dass  $V/W$  torsionsfrei ist. Wir bezeichnen  $V$  als  $RG$ -Gitter, wenn  $V$  endlich erzeugt und als  $R$ -Modul frei ist. (Da  $G$  endlich ist, ist  $V$  genau dann als  $RG$ -Modul endlich erzeugt, wenn es als  $R$ -Modul endlich erzeugt ist. Falls  $R$  ein Körper ist, ist jeder endlich erzeugte  $RG$ -Modul ein  $RG$ -Gitter.) Falls  $V$  ein  $RG$ -Gitter ist und  $W$  ein  $RG$ -Untergitter, so ist  $W$  genau dann ein reines  $RG$ -Untergitter, wenn  $V/W$  ein  $RG$ -Gitter ist.

Durch die triviale Operation wird  $R$  selbst zu einem  $RG$ -Modul. Um zwischen  $R$  als Ring und  $R$  als  $RG$ -Modul unterscheiden zu können, schreiben wir  $\mathbb{1} := \mathbb{1}_G := \mathbb{1}_{RG}$  für den trivialen  $RG$ -Modul. Dabei hängt die Genauigkeit der verwendeten Indizierung vom jeweiligen Kontext ab; wenn  $R$  oder  $G$  aus dem Zusammenhang bekannt oder irrelevant sind, wählen wir häufig eine der beiden kürzeren Notationen.

Der *Permutationsmodul* über  $R$  zu einer endlichen Gruppe  $G$  und einer  $G$ -Menge  $\Omega$  ist der freie  $R$ -Modul auf  $\Omega$  zusammen mit einer skalaren Multiplikation über  $RG$ , die gegeben ist durch die  $R$ -lineare Fortsetzung der Operation von  $G$  auf der Basis  $\Omega$ . Im Folgenden wird die Konstruktion eines bestimmten Typs von Permutationsmoduln für die symmetrischen Gruppen vorgestellt.

Es sei  $\lambda \vDash n \in \mathbb{N}_0$  eine Komposition. Trägt man die Zahlen von 1 bis  $n$  in beliebiger Reihenfolge in das Young-Diagramm  $[\lambda]$  ein, erhält man ein sogenanntes  $\lambda$ -Tableau (oder einfach *Tableau*). Die Menge aller solcher  $\lambda$ -Tableaus bezeichnen wir mit  $T(\lambda)$ . Ihre Mächtigkeit ist  $|T(\lambda)| = n!$ . Die  $S_n$  operiert kanonisch auf  $T(\lambda)$  durch Permutation der Tableau-Einträge.

Auf  $T(\lambda)$  definieren wir eine Äquivalenzrelation: Zwei Tableaus  $t, t' \in T(\lambda)$  seien äquivalent genau dann, wenn für alle  $1 \leq j \leq n$  gilt, dass  $j$  genau dann in der  $i$ -ten Zeile von  $t$  steht, wenn  $j$  auch in der  $i$ -ten Zeile von  $t'$  steht. Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation heißen  $\lambda$ -Tabloide (oder einfach *Tabloide*). Das Tabloid zu  $t \in T(\lambda)$  schreiben wir als  $\bar{t}$ . Die Menge aller  $\lambda$ -Tabloide bezeichnen wir mit  $\bar{T}(\lambda)$ . Ihre Mächtigkeit ist

$$|\bar{T}(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} (\lambda_i!)} \tag{1.4}$$

Die Gruppe  $S_n$  operiert kanonisch auf  $\bar{T}(\lambda)$  via  $\pi \bar{t} := \overline{\pi t}$  für alle  $\pi \in S_n, \bar{t} \in \bar{T}(\lambda)$ .

Salopp gesprochen erhalten wir aus einem Tableau ein Tabloid, indem wir bei jedem Eintrag die Information streichen, in welcher Spalte er steht, und nur die Zeilennummer beibehalten. Eine gängige Notation für  $\lambda$ -Tabloide ist, beim Tableau die senkrechten Striche wegzulassen und die Einträge in jeder Zeile aufsteigend geordnet zu notieren, zum Beispiel:

$$t := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 4 & 8 & 6 & 2 & 10 \\ \hline 9 & 1 & 5 & & \\ \hline 7 & & & & \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \in T((5, 3, 1^2)), \quad \bar{t} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ \hline 1 & 5 & 9 & & \\ \hline 7 & & & & \\ \hline 3 & & & & \\ \hline \end{array} \in \bar{T}((5, 3, 1^2)).$$

Diese Notation ist allerdings ziemlich platzraubend. Daher werden wir häufig die einzelnen Zeilen, durch Schrägstriche getrennt, hintereinanderschreiben, also im obigen Beispiel

$$\bar{t} =: \{2, 4, 6, 8, 10\} / \{1, 5, 9\} / \{7\} / \{3\} =: \overline{2, 4, 6, 8, 10 / 1, 5, 9 / 7 / 3} \tag{1.5}$$

Die erste Zeile ist durch die übrigen Zeilen eindeutig bestimmt. Daher kann man sie in der Notation auch weglassen. Das ist insbesondere dann praktikabel, wenn die erste Zeile sehr lang ist und die

übrigen kurz sind. Im obigen Beispiel würden wir also schreiben

$$\bar{t} =: \{1, 5, 9\}/\{7\}/\{3\} =: \overline{1, 5, 9}/\overline{7}/\overline{3}. \quad (1.6)$$

Diese Notation setzt natürlich voraus, dass aus dem jeweiligen Kontext bekannt ist, welche Partition dem Tabloid zugrunde liegt.

Nun betrachten wir  $\overline{T}(\lambda)$  als  $S_n$ -Menge. Den zugehörigen Permutationsmodul

$$M^\lambda := M_R^\lambda := R\overline{T}(\lambda)$$

nennen wir den Permutationsmodul zu  $\lambda$  (über  $R$ ). Da die  $S_n$  transitiv auf  $T(\lambda)$  und damit auch auf  $\overline{T}(\lambda)$  operiert, ist  $M_R^\lambda$  als  $RS_n$ -Modul zyklisch und wird als solcher von jedem beliebigen  $\lambda$ -Tabloid erzeugt. Außerdem folgt aus der Transitivität der Operation, dass bei einem Fixpunkt von  $M^\lambda$  unter  $S_n$  die Koeffizienten aller Tabloide gleich sind. Das heißt, der Fixpunkt-Untermodul von  $M^\lambda$  ist isomorph zu  $\mathbb{1}_{RS_n}$  und als  $R$ -Modul erzeugt von der *Spur*  $f_\lambda := \sum_{\bar{t} \in \overline{T}(\lambda)} \bar{t}$  von  $M^\lambda$ .

Falls  $\lambda = (n-1, 1)$  ist, nennen wir  $M_R^\lambda$  den *natürlichen Permutationsmodul*. Er entspricht dem Permutationsmodul, den wir erhalten, wenn wir  $\underline{n}$  als  $S_n$ -Menge zugrunde legen. Das liegt daran, dass die Operation von  $S_n$  auf  $\overline{T}((n-1, 1))$  durch die jeweils einzigen Einträge der  $(n-1, 1)$ -Tabloide in der zweiten Zeile festgelegt ist.

Eine andere Möglichkeit, den Permutationsmodul zu  $\lambda$  zu erhalten, ist folgende: Die *Young-Untergruppe*  $S_\lambda \leq S_n$  der symmetrischen Gruppe auf  $n$  Punkten ist die Gruppe

$$S_\lambda := S_{\{1, \dots, \lambda_1\}} \times S_{\{\lambda_1+1, \dots, \lambda_1+\lambda_2\}} \times \dots \times S_{\{\lambda_1+\dots+\lambda_{\ell(\lambda)-1}+1, \dots, n\}} \cong S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \dots \times S_{\lambda_{\ell(\lambda)}}.$$

Der nach  $S_n$  induzierte triviale  $S_\lambda$ -Modul ist als  $RS_n$ -Modul isomorph zum Permutationsmodul via

$$M_R^\lambda \longrightarrow \mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow^{S_n} = RS_n \otimes_{RS_\lambda} \mathbb{1}_{S_\lambda}, \quad [t_0] \rightarrow 1 \otimes 1, \quad (1.7)$$

wobei  $t_0$  für das Tableau steht, in das die Zahlen von 1 bis  $n$  der Reihe nach eingetragen sind (also in der ersten Zeile von 1 bis  $\lambda_1$ , in der zweiten von  $\lambda_1 + 1$  bis  $\lambda_1 + \lambda_2$  und so weiter).

Je nach Zusammenhang ist es manchmal nützlicher, den Permutationsmodul als einen solchen hochinduzierten trivialen  $S_\lambda$ -Modul zu betrachten. Der Einfachheit halber identifizieren wir beide Darstellungen miteinander, das heißt, die Bezeichnung  $M_R^\lambda$  kann sowohl für  $R\overline{T}(\lambda)$  als auch für  $\mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow^{S_n}$  stehen.

Permutationsmoduln wurden hier allgemein für Kompositionen eingeführt, weil es an manchen Stellen dieser Arbeit formal praktischer ist, solche zur Verfügung zu haben. Im Prinzip genügt es aber, die Permutationsmoduln zu Partitionen zu kennen. Denn aus der Komposition  $\lambda$  erhalten wir eine eindeutige Partition  $\bar{\lambda} \vdash n$ , indem wir die Zeilen von  $\lambda$  der Länge nach ordnen. Und aus jeder der beiden Darstellungen des Permutationsmoduls ergibt sich unmittelbar, dass  $M^\lambda$  und  $M^{\bar{\lambda}}$  isomorph als  $RS_n$ -Moduln sind.

Der zu  $V$  *duale Modul* ist der  $R$ -Modul  $V^* := \text{Hom}_R(V, R)$ . Wir fassen  $V^*$  als  $RG$ -Modul auf via  $g \cdot \varphi := V \rightarrow R, v \mapsto \varphi(g^{-1} \cdot v)$  für alle  $\varphi \in V^*$  und  $g \in G$ . In diesem Fall spricht man oft vom *Kontragredienten* von  $V$ . In dieser Arbeit soll allerdings nicht zwischen  $V^*$  als  $R$ -Modul und  $V^*$  als  $RG$ -Modul unterschieden werden. Wir sagen immer ‘‘dualer Modul‘‘ und meinen immer die  $RG$ -Modul-Struktur. Dementsprechend nennen wir  $V$  *selbstdual*, wenn  $V$  und  $V^*$  isomorph als  $RG$ -Moduln sind. Beispielsweise ist  $\mathbb{1}_{RG}$  selbstdual. Außerdem gilt mit Proposition 10.28 aus [CR81], dass  $(V^*) \uparrow^H \cong (V \uparrow^H)^*$  ist. Damit ist der Permutationsmodul  $M^\lambda$  selbstdual:

$$(M^\lambda)^* = (\mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow^{S_n})^* \cong (\mathbb{1}_{S_\lambda}^*) \uparrow^{S_n} \cong \mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow^{S_n} = M^\lambda. \quad (1.8)$$

Ab jetzt sei  $\lambda \vdash n$  eine Partition. Der Spechtmodul über  $R$  zu  $\lambda$  ist ein bestimmter Untermodul von  $M_R^\lambda$ . Wir erhalten ihn folgendermaßen:

Der *Spaltenstabilisator*  $\text{Stab}_v(t) \leq S_n$  von  $t \in T(\lambda)$  ist die maximale Untergruppe der  $S_n$ , die die Einträge von  $t$  nur innerhalb der Spalten permutiert. Damit ist  $\text{Stab}_v(t) \cong S_{\lambda'}$ . Für  $t \in T(\lambda)$  ist das  $\lambda$ -*Polytabloid* (oder einfach *Polytabloid*)  $e_t \in M_R^\lambda$  definiert durch

$$e_t := \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t)} \text{sgn}(\pi) \pi \bar{t}.$$

Das  $R$ -Modul-Erzeugnis der  $\lambda$ -Polytabloide nennen wir den *Spechtmodul* über  $R$  zu  $\lambda$ :

$$S^\lambda := S_R^\lambda := \langle e_t \mid t \in T(\lambda) \rangle_R.$$

Für alle  $\sigma \in S_n$  und alle  $t \in T(\lambda)$  gilt:

$$\sigma e_t = \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t)} \underbrace{\text{sgn}(\sigma \pi \sigma^{-1})}_{=\text{sgn}(\pi)} \sigma \pi \sigma^{-1} \bar{\sigma t} = \sum_{\pi' \in \text{Stab}_v(\sigma t)} \text{sgn}(\pi') \pi' \bar{\sigma t} = e_{\sigma t}.$$

Daher ist  $S_R^\lambda$  ein zyklischer  $RS_n$ -Modul, der als solcher von jedem beliebigen  $\lambda$ -Polytabloid erzeugt wird.

Als  $R$ -Modul ist  $S_R^\lambda$  frei: Ein  $\lambda$ -Tableau, dessen Einträge sowohl zeilen- als auch spaltenweise aufsteigend geordnet sind, nennen wir *Standard- $\lambda$ -Tableau* (oder einfach *Standard-Tableau*). Die Menge aller Standard- $\lambda$ -Tableaus bezeichnen wir mit  $ST(\lambda)$ . Falls  $t \in ST(\lambda)$  ist, bezeichnen wir  $e_t$  als *Standard- $\lambda$ -Polytabloid* (oder einfach *Standard-Polytabloid*). Die Standard- $\lambda$ -Polytabloide sind paarweise verschieden, und sie bilden eine  $R$ -Basis von  $S_R^\lambda$ . (Dies wird in [Jam78], Theorem 8.4, bewiesen. In [Jam78] werden zwar grundsätzlich nur Spechtmoduln über Körpern betrachtet, der besagte Beweis funktioniert aber über jedem Integritätsbereich genau so.) Damit ist der  $R$ -Rang von  $S_R^\lambda$  unabhängig von  $R$ :

$$\text{Rang}_R(S_R^\lambda) = |ST(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in [\lambda]} |h_{i,j}|}. \quad (1.9)$$

Dies ist die sogenannte *Hakenformel* ([Jam78], Theorem 20.1). Damit sind (bei gegebenem  $n$ ) die einzigen eindimensionalen Spechtmoduln der triviale  $S^{(n)} = \mathbb{1}_{S_n}$  und der alternierende  $S^{(1^n)}$ . Letzterer gehört zur Signumsdarstellung, daher schreiben wir auch  $\text{sgn}_n := \text{sgn}_{n,R} := S_R^{(1^n)}$ .

Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}$  sind gewissermaßen die Prototypen aller Spechtmoduln, denn es gilt folgende Isomorphie von  $RS_n$ -Moduln:

$$R \otimes_{\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Z}}^\lambda = \langle r \otimes v \mid r \in R, v \in S_{\mathbb{Z}}^\lambda \rangle_{\mathbb{Z}} = \langle 1 \otimes e_t \mid t \in ST(\lambda) \rangle_R \cong S_R^\lambda. \quad (1.10)$$

Falls  $Q$  der zu  $R$  gehörige Quotientenkörper ist, erhält man mit einer analogen Argumentation

$$Q \otimes_R S_R^\lambda \cong S_Q^\lambda. \quad (1.11)$$

Außerdem liefert Reduktion modulo einer Primzahl  $p$  für  $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_p\}$ :

$$S_R^\lambda / (p \cdot S_R^\lambda) = \langle e_t \mid t \in ST(\lambda) \rangle_R / \langle p e_t \mid t \in ST(\lambda) \rangle_R \cong S_{\mathbb{F}_p}^\lambda. \quad (1.12)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbb{Z}_{(p)}$  die  *$p$ -adischen ganzen Zahlen*, also die Lokalisierung von  $\mathbb{Z}$  nach dem Primideal  $p\mathbb{Z}$ :

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \{r/s \mid r, s \in \mathbb{Z}, p \nmid s\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Der Ring  $\mathbb{Z}_{(p)}$  ist ein diskreter Bewertungsring bezüglich der  $p$ -adischen Bewertung, und  $\mathbb{Z}_p$  bezeichnet die  $p$ -adische Vervollständigung von  $\mathbb{Z}_{(p)}$  ([CR81], §4C).

Die Spechtmoduln über  $\mathbb{Q}$  haben ebenfalls eine besondere Bedeutung:

**Satz 1.2.1 ([Jam78], Theorem 4.12)** *Die Spechtmoduln über  $\mathbb{Q}$  sind selbstdual und absolut irreduzibel und bilden ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen der einfachen  $\mathbb{Q}S_n$ -Moduln.*

Über einem Körper von Primcharakteristik sind Spechtmoduln im Allgemeinen weder einfach noch selbstdual. Aber es gilt:

**Satz 1.2.2 ([Jam78], Theorem 8.15)** *Für jeden Körper  $k$  ist  $(S_k^\lambda)^* \cong S_k^{\lambda'} \otimes \text{sgn}_n$ .*

Falls  $\text{char}(k) = 2$  ist, ist  $\text{sgn}_n = \mathbb{1}$ . Damit sind über Charakteristik 2 duale Spechtmoduln wieder selbst Spechtmoduln.

Zur späteren Verwendung sei an dieser Stelle noch Folgendes festgehalten:

**Lemma 1.2.3** *Es seien  $k, m \in \mathbb{N}$  und  $\ell \in \mathbb{N}_0$  mit  $m \geq k$  und  $m + k\ell = n$ . Weiter sei  $\lambda := (m, k^\ell) \vdash n$ . Dann ist  $S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  zyklisch als  $RS_{n-1}$ -Modul und wird von einem beliebigen  $\lambda$ -Polytabloid  $e_t$  erzeugt, bei dem im Tableau  $t$  der Eintrag  $n$  an der Position  $(\ell + 1, k)$  steht (also in der unteren Ecke).*

*Beweis:* Für  $\ell = 0$  ist die Aussage klar, da dann  $\lambda = (n)$  ist. Für  $m = k$  hat  $\lambda$  nur eine Ecke, und in jedem Standard- $\lambda$ -Tableau steht der Eintrag  $n$  in dieser Ecke. Darum kann man aus einem einzigen Standard- $\lambda$ -Polytabloid  $e_{t_0}$  mit Hilfe geeigneter  $\sigma \in S_{n-1}$  alle anderen Standard- $\lambda$ -Polytabloide via  $\sigma e_{t_0} = e_{\sigma t_0}$  erzeugen, das heißt, es ist

$$S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} = \langle e_t \mid t \in ST(\lambda) \rangle_R \subseteq \langle e_{t_0} \rangle_{RS_{n-1}} \subseteq S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}.$$

Ab jetzt sei  $\ell > 0$  und  $m > k$ . Falls beim Tableau  $t \in T(\lambda)$  der Eintrag  $n$  in der unteren Ecke steht, kann via  $\sigma e_t = e_{\sigma t}$  mit  $\sigma \in S_{n-1}$  jedes andere Tableau erzeugt werden, das den Eintrag  $n$  in der unteren Ecke hat. Darum können wir für den Beweis ein bestimmtes Tableau wählen. Da wir allerdings für die Argumentation nur die Einträge der  $k$ -ten und letzten Spalte benötigen, lassen wir die übrigen Einträge beliebig. Wir setzen

$$t := \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline *** & n - \ell & *** & n - \ell - 1 \\ \hline *** & n - \ell + 1 & & \\ \hline \vdots & \vdots & & \\ \hline *** & n & & \\ \hline \end{array}$$

Mit geeigneten  $\sigma \in S_{n-1}$  kann man via  $\sigma e_t = e_{\sigma t}$  alle Standard- $\lambda$ -Polytabloide mit  $n$  in der unteren Ecke erzeugen. Zur Erzeugung der übrigen Standard- $\lambda$ -Polytabloide benötigen wir folgende Gruppen:

$$s := \{ \pi \in \text{Stab}_v(t) \mid \pi(i) = i \text{ für } n - \ell \leq i \leq n \},$$

$$S := s \times S_{\{n-\ell-1, \dots, n\}}, \quad A := s \times \{ \pi \in S_{\{n-\ell-1, \dots, n\}} \mid \text{sgn}(\pi) = 1 \} \leq S.$$

Dann ist  $A$  ein Normalteiler in  $S$ , und wegen  $S/A \cong S_{\ell+2}/A_{\ell+2}$  ist  $[S : A] = 2$ . Als Vertretersystem für die Rechtsnebenklassen von  $A$  in  $S$  wählen wir die Identität und  $(n - \ell - 1, n - \ell)$ . Dann gilt:

$$\sum_{\pi \in S} \text{sgn}(\pi) \pi \bar{t} = \sum_{\pi \in A} \text{sgn}(\pi) \pi \bar{t} - \sum_{\pi \in A} \text{sgn}(\pi) \pi \underbrace{(n - \ell - 1, n - \ell) \bar{t}}_{= \bar{t}} = 0.$$

Des Weiteren ist  $\text{Stab}_v(t) \leq S$ . Die beiden direkten Produkte unterscheiden sich nur im letzten Faktor, darum können wir als Vertretersystem für die Linksnebenklassen von  $\text{Stab}_v(t)$  in  $S$  ein Vertretersystem für die Linksnebenklassen von  $S_{\{n-\ell, \dots, n\}}$  in  $S_{\{n-\ell-1, \dots, n\}}$  wählen. Wir nehmen die Identität und  $(n - \ell - 1, i)$  für  $n - \ell \leq i \leq n$ . Dann gilt:

$$0 = \sum_{\pi \in S} \text{sgn}(\pi) \pi \bar{t} = \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t)} \text{sgn}(\pi) \pi \bar{t} - \sum_{i=n-\ell}^n \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t)} \text{sgn}(\pi) (n - \ell - 1, i) \pi \bar{t}$$

$$= \left( 1 - \sum_{i=n-\ell}^n (n-\ell-1, i) \right) e_t.$$

Damit ist

$$\left( 1 - \sum_{i=n-\ell}^{n-1} (n-\ell-1, i) \right) e_t = (n-\ell-1, n)e_t = e_{(n-\ell-1, n)t}.$$

Das Tableau  $(n-\ell-1, n)t$  hat den Eintrag  $n$  in der ersten Zeile, und wie vorhin können wir mit geeigneten  $\sigma \in S_{n-1}$  via  $\sigma e_{(n-\ell-1, n)t} = e_{\sigma(n-\ell-1, n)t}$  alle Standard- $\lambda$ -Polytabloide mit  $n$  in der ersten Zeile erzeugen. Damit ist  $S^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} = \langle e_t \rangle_{RS_{n-1}}$ .  $\square$

Mit diesem Lemma sind insbesondere nach  $S_{n-1}$  eingeschränkte Spechtmoduln zu Haken- und Zweiteil-Partitionen zyklisch als  $RS_{n-1}$ -Moduln.

Ab jetzt sei  $k$  ein Körper der Charakteristik  $p \in \mathbb{P}$  und  $V \neq 0$  ein endlich erzeugter  $kG$ -Modul. (Mit  $\mathbb{P}$  bezeichnen wir die Menge der Primzahlen.) Das *Radikal* von  $V$ , geschrieben  $\text{rad}(V)$ , ist der Schnitt aller maximalen  $kG$ -Untermoduln von  $V$ . Insbesondere ist  $\text{rad}(V) = 0$ , falls  $V$  einfach ist. Mit [Ben98], Proposition 1.2.5, und [NT88], Lemma 8.16, ist  $\text{rad}(V)$  der kleinste  $kG$ -Untermodul von  $V$ , dessen Faktormodul halbeinfach ist. Dieser Faktormodul  $\text{hd}(V) := V/\text{rad}(V)$  heißt der *Kopf* von  $V$ . Der *Sockel* von  $V$ , geschrieben  $\text{soc}(V)$ , ist die Summe aller einfachen  $kG$ -Untermoduln von  $V$ , also der maximale halbeinfache  $kG$ -Untermodul von  $V$ .

Auf  $M_k^\lambda$  erhalten wir eine symmetrische,  $S_n$ -invariante Bilinearform durch die bilineare Fortsetzung von

$$\Phi(\bar{t}_1, \bar{t}_2) := \begin{cases} 1 & \text{für } \bar{t}_1 = \bar{t}_2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit [JK81], Theorem 7.1.7, gilt für jeden  $kS_n$ -Untermodul  $A$  von  $M_k^\lambda$ , dass entweder  $S_k^\lambda \leq A$  oder  $A \leq S_k^{\lambda^\perp}$  ist, wobei  $S_k^{\lambda^\perp}$  für den Orthogonalraum von  $S_k^\lambda$  in  $M_k^\lambda$  bezüglich  $\Phi$  steht. Damit liegt jeder echte  $kS_n$ -Untermodul von  $S_k^\lambda$  in  $S_k^{\lambda^\perp}$ , es ist also insbesondere  $\text{rad}(S_k^\lambda) \subseteq S_k^\lambda \cap S_k^{\lambda^\perp}$ .

Eine Partition  $\lambda$  heißt *p-regulär*, wenn  $|\{1 \leq j \leq \ell(\lambda) \mid \lambda_j = \lambda_i\}| < p$  ist für alle  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ . Andernfalls heißt  $\lambda$  *p-singulär*. Der Modul  $S_k^\lambda / (S_k^\lambda \cap S_k^{\lambda^\perp})$  ist genau dann ungleich 0, wenn  $\lambda$  *p-regulär* ist ([JK81], Corollary 7.1.11). In diesem Fall ist mit [Jam78], Theorem 4.9,  $\text{rad}(S_k^\lambda) = S_k^\lambda \cap S_k^{\lambda^\perp}$ . Für *p-reguläres*  $\lambda$  definieren wir

$$D^\lambda := D_k^\lambda := \text{hd}(S_k^\lambda).$$

**Satz 1.2.4 ([JK81], Theorem 7.1.14)** (a) Für jede *p-reguläre* Partition  $\lambda \vdash n$  ist der  $kS_n$ -Modul  $D^\lambda$  absolut irreduzibel und selbstdual.

(b) Die Moduln  $D^\lambda$  zu den *p-regulären* Partitionen von  $n$  bilden ein Vertretersystem für die Isomorphieklassen der einfachen  $kS_n$ -Moduln.

(c) Für jede Partition  $\lambda \vdash n$  sind alle Kompositionsfaktoren von  $\text{rad}(S_k^\lambda)$  und  $M_k^\lambda/S_k^\lambda$  isomorph zu Moduln  $D^\mu$  zu *p-regulären*  $\mu \vdash n$  mit  $\mu \triangleright \lambda$ .

Der letzte wichtige Typ von  $S_n$ -Moduln, den wir hier betrachten, sind die *Youngmoduln*. Wir erhalten sie, indem wir die Permutationsmoduln in direkte Summen zerlegen. Darum benötigen wir den Satz von Krull-Schmidt, von dem wir in der vorliegenden Arbeit die folgende Version verwenden wollen:

**Satz 1.2.5 (Krull-Schmidt)** Es sei  $R$  ein Körper, ein vollständiger diskreter Bewertungsring oder ein diskreter Bewertungsring, für den gilt, dass der Quotientenkörper von  $R$  ein Zerfällungskörper für  $G$  ist. Weiter sei  $V$  ein  $RG$ -Gitter. Dann gilt:

(a) Man kann  $V$  als endliche direkte Summe unzerlegbarer  $RG$ -Untergitter ausdrücken:

$$V \cong \bigoplus_{i=1}^r V_i.$$

Dabei sind die  $V_i$  bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt.

(b) Wenn  $L$  ein direkter Summand von  $V$  ist, dann existiert ein  $I \subseteq \underline{r}$  mit

$$L \cong \bigoplus_{i \in I} V_i.$$

*Beweis:* Teil (a) ergibt sich aus [CR81], Theorem 6.12 und Theorem 30.18 (iii). Der Teil (b) ist in [CR81], Corollary 6.16, formuliert.  $\square$

Youngmoduln können einerseits über diskreten Bewertungsringen (wie  $\mathbb{Z}_{(p)}$  und  $\mathbb{Z}_p$ ) definiert werden, andererseits über Körpern. Die Youngmoduln über Körpern der Charakteristik 0 sind identisch mit den Spechtmoduln, und Youngmoduln über diskreten Bewertungsringen benötigen wir für die vorliegende Arbeit nicht. Darum betrachten wir nur Youngmoduln über einem Körper  $k$  der Charakteristik  $p > 0$ .

**Satz 1.2.6** Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine Menge  $\{Y^\mu \mid \mu \vdash n\}$  von unzerlegbaren  $kS_n$ -Moduln, so dass für alle  $\lambda \vdash n$  gilt:

(a) Für alle  $\mu \vdash n$  existieren eindeutig bestimmte Zahlen  $\kappa_{\lambda, \mu}^p \in \mathbb{N}_0$  (die nicht von  $k$  abhängen, nur von  $p$ ), so dass gilt:

$$M^\lambda \cong \bigoplus_{\mu \vdash n} \kappa_{\lambda, \mu}^p Y^\mu \cong Y^\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \triangleright \lambda} \kappa_{\lambda, \mu}^p Y^\mu.$$

(Dies ist so zu lesen, dass  $\kappa_{\lambda, \lambda}^p = 1$  ist und  $\kappa_{\lambda, \mu}^p = 0$  für  $\mu \not\triangleright \lambda$ .)

(b) Es ist  $S^\lambda \leq Y^\lambda$  ein  $kS_n$ -Untermodul.

(c) Aus  $Y^\lambda \cong Y^\mu$  folgt  $\lambda = \mu$ .

*Beweis:* Die Aussage ist eine leichte Umformulierung von Theorem 3.1 in [Jam83]. Insbesondere fließt in Teil (a) der Satz 8.12 (ii) aus [Gra85] ein.  $\square$

(Hier offenbart sich ein kleiner Notationskonflikt: Für  $q \in \mathbb{N}_0$  kann  $q \cdot V$  sowohl für die direkte Summe von  $q$  Kopien von  $V$  als auch für das Bild von  $V$  unter der Multiplikation mit  $q$  stehen. Ihrer Kürze wegen soll die Notation aber beibehalten werden. Aus dem jeweiligen Zusammenhang wird immer unmissverständlich klar werden, welche der beiden Bedeutungen gemeint ist.)

Da die unzerlegbaren direkten Summanden von  $M^\lambda$  mit dem Satz von Krull-Schmidt bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt sind, können wir mit Satz 1.2.6 definieren: Der Youngmodul zur Partition  $\lambda$  ist der (bezüglich Inklusion) kleinste  $kS_n$ -Untermodul von  $M^\lambda$ , der  $S^\lambda$  enthält und ein Komplement in  $M^\lambda$  besitzt. Gemäß der obigen Notation bezeichnen wir ihn mit  $Y^\lambda =: Y_k^\lambda$ .

(Da wir gelegentlich [Gra85] zitieren, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass dort die  $Y^\lambda$  als unzerlegbare Youngmoduln bezeichnet werden. “Youngmoduln“ sind dort direkte Summen von “unzerlegbaren Youngmoduln“.)

Eine wichtige Eigenschaft von Youngmoduln, die wir später häufig verwenden werden, lautet:

**Satz 1.2.7** ([Gra85], Satz 12.5) Jeder Youngmodul ist selbstdual.

Die Vielfachheit  $\kappa_{\lambda,\mu}^p \in \mathbb{N}_0$  von  $Y^\mu$  als direkter Summand von  $M^\lambda$  heißt  $p$ -Kostka-Zahl (oder einfach *Kostka-Zahl*) zu  $\lambda$  und  $\mu$ . Die Kostka-Zahlen sind im Allgemeinen nicht bekannt. Eine Ausnahme sind zum Beispiel die Zweiteil-Partitionen. In [Hen05] wird eine Möglichkeit der kombinatorischen Bestimmung der direkten Summenzerlegung von  $M^\lambda$  für den Fall vorgestellt, dass  $\lambda$  eine Zweiteil-Partition ist. Bevor wir sie formulieren, definieren wir folgende Relationen:

**Definition 1.2.8** Für  $a, b \in \mathbb{N}$  seien die  $p$ -adischen Darstellungen gegeben durch  $a := \sum_{i=0}^r a_i p^i$  und  $b := \sum_{i=0}^s b_i p^i$ . (Das bedeutet, es sind  $a_i, b_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$  für alle  $i$  und  $a_r \neq 0 \neq b_s$ .)

(a) Wir schreiben  $a \subseteq_p b$ , falls  $r \leq s$  und  $a_i \leq b_i$  für alle  $1 \leq i \leq r$  ist.

(b) Wir schreiben  $a \subset_p b$ , falls  $r < s$  und  $a_i \in \{0, b_i\}$  für alle  $1 \leq i \leq r$  ist.

In der Literatur werden beide Relationen  $\subseteq_p$  und  $\subset_p$  gelesen als “ $p$ -contained“, also etwa “enthalten zur Basis  $p$ “. Da sie in unterschiedlichen Zusammenhängen auftauchen ( $\subseteq_p$  brauchen wir jetzt,  $\subset_p$  zum Beispiel in Satz 1.3.8), kommen wir mit der identischen Lesart in keinen direkten Konflikt. Zur Unterscheidung könnte man  $\subset_p$  als “stark enthalten“ und  $\subseteq_p$  als “schwach enthalten“ lesen.

Eine Zweiteil-Partition wird nur von Partitionen mit höchstens zwei Teilen dominiert, deren erste Zeile länger ist. Damit erlaubt der folgende Satz eine vollständige Zerlegung eines Permutationsmoduls zu einer Zweiteil-Partition in Youngmoduln.

**Satz 1.2.9** Es seien  $0 \leq j \leq m \leq n/2$  und  $\lambda := (n-m, m), \mu := (n-j, j)$ . Dann ist

$$\kappa_{\lambda,\mu}^p = \begin{cases} 1 & \text{für } m-j \subseteq_p n-2j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

*Beweis:* Aus [Hen05], Lemma 3.2, ergibt sich, dass  $\kappa_{\lambda,\mu}^p \leq 1$  ist. In [Hen05], Theorem 3.3, wird gezeigt, dass  $\kappa_{\lambda,\mu}^p$  genau dann ungleich 0 ist, wenn  $m-j \subseteq_p n-2j$  ist.  $\square$

**Beispiel 1.2.10** Es sei  $p = 2$ .

(a) In der Situation von Satz 1.2.9 sei  $m = 1$ . Dann gilt  $1 = 1 - 0 \subseteq_2 n - 2 \cdot 0 = n$  genau dann, wenn  $n$  ungerade ist. Damit erhalten wir für  $n \geq 2$ :

$$M^{(n-1,1)} \cong \begin{cases} Y^{(n-1,1)} \oplus \mathbb{1} & \text{für ungerades } n, \\ Y^{(n-1,1)} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

(b) In der Situation von Satz 1.2.9 sei  $m = 2$ . Dann gilt  $2 = 2 - 0 \subseteq_2 n - 2 \cdot 0 = n$  genau dann, wenn  $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ , und  $1 = 2 - 1 \subseteq_2 n - 2 \cdot 1 = n - 2$  genau dann, wenn  $n$  ungerade ist. Damit erhalten wir für  $n \geq 4$ :

$$M^{(n-2,2)} \cong \begin{cases} Y^{(n-2,2)} \oplus Y^{(n-1,1)} & \text{für } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ Y^{(n-2,2)} \oplus \mathbb{1} & \text{für } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ Y^{(n-2,2)} \oplus Y^{(n-1,1)} \oplus \mathbb{1} & \text{für } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ Y^{(n-2,2)} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

(c) In der Situation von Satz 1.2.9 sei  $m = 3$ . Dann gilt  $3 = 3 - 0 \subseteq_2 n - 2 \cdot 0 = n$  genau dann, wenn  $n \equiv 3 \pmod{4}$ ,  $2 = 3 - 1 \subseteq_2 n - 2 \cdot 1 = n - 2$  genau dann, wenn  $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ , und  $1 = 3 - 2 \subseteq_2 n - 2 \cdot 2 = n - 4$  genau dann, wenn  $n$  ungerade ist. Damit erhalten wir für  $n \geq 6$ :

$$M^{(n-3,3)} \cong \begin{cases} Y^{(n-3,3)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus Y^{(n-1,1)} & \text{für } n \equiv 1 \pmod{4}, \\ Y^{(n-3,3)} & \text{für } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ Y^{(n-3,3)} \oplus Y^{(n-2,2)} \oplus \mathbb{1} & \text{für } n \equiv 3 \pmod{4}, \\ Y^{(n-3,3)} \oplus Y^{(n-1,1)} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Mit der sogenannten *Klyachko-Formel* kann man die Bestimmung beliebiger Kostka-Zahlen auf die Bestimmung derjenigen Kostka-Zahlen zurückführen, bei denen  $\mu$  eine  $p$ -spaltenreguläre Partition ist. Eine Partition  $\mu$  heißt  *$p$ -spaltenregulär*, wenn  $\mu'$  regulär ist, das heißt, wenn  $\mu_i - \mu_{i+1} < p$  für alle  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$  ist.

Jede Partition  $\mu \vdash n \in \mathbb{N}$  besitzt mit [Gra85], Lemma 7.5, eine eindeutige  $p$ -adische Zerlegung in  $p$ -spaltenreguläre Partitionen: Es existieren ein eindeutiges  $s \in \mathbb{N}_0$  sowie eine eindeutige Folge  $\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \dots, \mu^{(s)}$  von  $p$ -spaltenregulären Partitionen mit  $\mu^{(j)} \vdash \bar{\mu}_j \in \mathbb{N}_0$  für  $0 \leq j \leq s$ , so dass  $\mu^{(s)} \neq \emptyset$  ist und

$$\mu = \sum_{j=0}^s p^j \mu^{(j)}. \quad (1.13)$$

Für  $\lambda \vdash n$  setzen wir

$$M(\lambda, \mu, p) := \left\{ D \in \mathbb{N}_0^{\ell(\lambda) \times s+1} \mid \sum_{j=0}^s p^j D_{i,j} = \lambda_i \quad \forall 1 \leq i \leq \ell(\lambda), \sum_{i=1}^{\ell(\lambda)} D_{i,j} = \bar{\mu}_j \quad \forall 0 \leq j \leq s \right\}.$$

Dabei beginnen wir die Indizierung der Spalten der Matrizen  $D$  bei 0 und die der Zeilen bei 1. Für  $0 \leq j \leq s$  ist die  $j$ -te Spalte jedes  $D \in M(\lambda, \mu, p)$  eine Komposition von  $\bar{\mu}_j$ . Wenn wir die Einträge der Größe nach ordnen, erhalten wir daraus eine Partition  $\lambda(D, j) \vdash \bar{\mu}_j$ . Damit können wir jetzt die Klyachko-Formel formulieren:

**Satz 1.2.11** ([Gra85], Satz 7.14) *Für  $\lambda, \mu \vdash n$  gilt:*

$$\kappa_{\lambda, \mu}^p = \sum_{D \in M(\lambda, \mu, p)} \prod_{j=0}^s \kappa_{\lambda(D, j), \mu^{(j)}}^p.$$

(In [Gra85] wird eine kompaktere Notation der Matrizen  $D$  verwendet, bei der die Nullspalten gestrichen sind, die bei leeren Partitionen  $\mu^{(j)}$  entstehen. Zum konkreten Rechnen ist das praktischer, auf die theoretischen Aussagen hat das keinen Einfluss.)

Falls  $\mu$  bereits spaltenregulär ist, ist  $s = 0$  und  $\mu^{(0)} = \mu$ . Das einzige Element von  $M(\lambda, \mu, p)$  ist eine Matrix  $D$ , deren einzige Spalte die Einträge  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}$  enthält. Damit ist  $\lambda(D, 0) = \lambda$ . In diesem Fall lautet die Klyachko-Formel also  $\kappa_{\lambda, \mu}^p = \kappa_{\lambda, \mu}^p$ , liefert also keine neue Information.

Ein Vergleich der für die Klyachko-Formel benötigten Matrizen führt zu einer nützlichen Folgerung aus Satz 1.2.11:

**Folgerung 1.2.12** ([Hen05], Corollary 6.2) *Für  $\lambda, \mu \vdash n$  und  $d, a \in \mathbb{N}$  mit  $\lambda_2 < p^d$  gilt:*

$$\kappa_{\lambda+a \cdot p^d, \mu+a \cdot p^d}^p = \kappa_{\lambda, \mu}^p.$$

Dabei ist zu beachten, dass in [Hen05] als zusätzliche Voraussetzung für diese Aussage  $\lambda_1 \geq n/2$  gefordert wird. Diese Bedingung ist aber nicht erforderlich und wird auch im dortigen Beweis nicht benutzt.

Wir schauen uns ein paar Beispiele zur Anwendung der Folgerung an, die wir für Kapitel 4 noch brauchen werden.

**Beispiel 1.2.13** *Es sei  $p = 2$ .*

(a) *Für  $n \geq 3$  gilt:*

$$M^{(n-2, 1^2)} \cong \begin{cases} Y^{(n-2, 1^2)} \oplus 2Y^{(n-1, 1)} & \text{für ungerades } n, \\ Y^{(n-2, 1^2)} \oplus Y^{(n-1, 1)} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$



(b) Für  $n \geq 4$  gilt:

$$M^{(n-3,1^3)} \cong \begin{cases} Y^{(n-3,1^3)} \oplus 2Y^{(n-2,1^2)} & \text{für } n = 4, \\ Y^{(n-3,1^3)} \oplus 2Y^{(n-3,2,1)} \oplus 2Y^{(n-2,1^2)} & \text{für gerades } n > 4, \\ Y^{(n-3,1^3)} \oplus 2Y^{(n-3,2,1)} \oplus Y^{(n-2,1^2)} \oplus 2Y^{(n-1,1)} & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

(c) Für  $n \geq 5$  sind die Kostka-Zahlen  $\kappa_{(n-3,2,1),\mu}^2$  zu  $\mu \triangleright (n-3,2,1)$  gegeben durch die folgende Tabelle.

$\mu$	$(n)$	$(n-1,1)$	$(n-2,2)$	$(n-2,1^2)$	$(n-3,3)$
$n = 5$	0	2	1	0	0
$5 < n \equiv 1 \pmod{4}$	0	2	1	0	1
$n \equiv 2 \pmod{4}$	0	0	0	1	1
$n \equiv 3 \pmod{4}$	1	1	1	0	1
$n \equiv 0 \pmod{4}$	0	1	0	1	1

*Beweis:* Die Partition  $(n-2,1^2)$  wird nur von  $(n-2,2)$ ,  $(n-1,1)$  und  $(n)$  dominiert. Mit Folgerung 1.2.12 genügt es, die betreffenden Kostka-Zahlen für irgendein ungerades und irgendein gerades  $n$  zu bestimmen. Die obigen Werte sind dem Anhang I von [Gra85] entnommen, in dem alle 2-Kostka-Zahlen für  $n \in \{7, 8, 9\}$  aufgeführt sind. (Man vergleiche dazu auch [MO11], (2.6).)

Teil (b) und (c) funktionieren zum größten Teil mit einer analogen Argumentation, allerdings enthält der Anhang I von [Gra85] keine Information über den Fall  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Die 2-Kostka-Zahlen für  $n = 6$  dürfen zwar als bekannt gelten, nur liegen sie in keiner zitierfähigen Quelle vor. Daher verwenden wir für den Fall  $n \equiv 2 \pmod{4}$  in Teil (c) eine andere Begründung. Dabei fließen Informationen ein, die jetzt noch nicht zur Verfügung stehen, daher formulieren wir den Rest des Beweises erst in Abschnitt 4.2.2.  $\square$

Zum Schluss dieses Abschnitts sei noch Folgendes angemerkt: Wir haben festgestellt, dass jeder Körper ein Zerfällungskörper für  $S_n$  ist. Außerdem haben wir festgestellt, dass die  $p$ -Kostka-Zahlen für jeden Körper der Charakteristik  $p$  die gleichen sind. Auch die Verzweigungsregeln aus Abschnitt 1.4 funktionieren über jedem Körper der Charakteristik  $p$  gleich. Daher genügt es für unsere Zwecke, wenn wir im weiteren Lauf stellvertretend für beliebige Körper der Charakteristik  $p$  immer  $\mathbb{F}_p$  betrachten.

### 1.3 Spechtreihen und Kompositionsreihen

Es sei weiterhin  $G$  eine endliche Gruppe und  $R$  ein Integritätsbereich. Außerdem sei  $V$  jetzt ein  $RS_n$ -Gitter. Falls  $V$  eine Filtrierung aus reinen  $RS_n$ -Untergittern

$$0 =: V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_{r-1} \leq V_r := V$$

besitzt, so dass für  $1 \leq i \leq r$  der Faktormodul  $V_i/V_{i-1}$  isomorph zu einem Spechtmodul  $S^{\lambda(i)}$  ist, dann nennen wir die Folge dieser Spechtmoduln eine *Spechtreihe* von  $V$  und schreiben:

$$V \longrightarrow S^{\lambda(1)} \mid S^{\lambda(2)} \mid \dots \mid S^{\lambda(r)}.$$

**Lemma 1.3.1 ([Jam78], Corollary 17.14)** *Der Permutationsmodul  $M^\lambda$  besitzt eine von  $R$  unabhängige Spechtreihe*

$$M^\lambda \longrightarrow S^{\lambda(1)} \mid \dots \mid S^{\lambda(r)},$$

mit  $\lambda(1) = \lambda$ ,  $\lambda(r) = (n)$  und  $\lambda(i) \triangleleft \lambda$  für alle  $2 \leq i \leq r$ .

Der Beweis der Existenz der Spechtreihe impliziert einen Algorithmus zur Bestimmung der Spechtfaktoren, aus dem sich die Zusatzinformationen über die vorkommenden Partitionen ergeben. Dieser Algorithmus soll hier nicht erläutert, aber gelegentlich verwendet werden. Die Details finden sich in Kapitel 17 von [Jam78]. (Dort werden streng genommen nur Permutationsmoduln über Körpern betrachtet. Eine Verallgemeinerung des Beweises auf beliebiges  $R$  findet sich zum Beispiel in [Web06], Satz 1.2.37.) Die aus diesem Algorithmus resultierende Spechtreihe von  $M^\lambda$  soll als *Standard-Spechtreihe* bezeichnet werden.

**Beispiel 1.3.2** ([Jam78], **Example 17.17**) *Es sei  $m \leq n/2$ . Dann gilt:*

$$M^{(n-m,m)} \longrightarrow S^{(n-m,m)} | S^{(n-m+1,m-1)} | \dots | S^{(n-1,1)} | S^{(n)}.$$

Spechtreihen sind im Allgemeinen nicht eindeutig, zum Beispiel dann nicht, wenn  $V$  eine direkte Summe zweier  $RS_n$ -Gitter ist, die beide eine Spechtreihe besitzen. In diesem Fall können wir obige Notation präzisieren, indem wir die Spechtreihen der beiden direkten Summanden getrennt angeben:

$$V \longrightarrow (S^{\lambda(1,1)} | \dots | S^{\lambda(r,1)}) \oplus (S^{\lambda(1,2)} | \dots | S^{\lambda(r',2)})$$

Bei mehreren direkten Summanden kann man die Notation entsprechend weiter verfeinern. Aber auch ein unzerlegbares  $RS_n$ -Gitter kann unterschiedliche Spechtreihen besitzen. Wir schauen uns eine weitere mögliche Ursache für das Zustandekommen unterschiedlicher Spechtreihen für ein und denselben  $RS_n$ -Modul an.

**Lemma 1.3.3** *Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $RG$ -Gitter.*

(a) *Es gibt einen  $R$ -Modul-Homomorphismus*

$$\mathrm{Hom}_{RG}(V, W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{RG}(W^*, V^*), \quad f \mapsto [f^* : W^* \rightarrow V^*, \varphi \rightarrow \varphi \circ f].$$

(b) *Falls  $V \leq W$  ein reines  $RG$ -Untergitter ist, existiert ein reines  $RG$ -Untergitter  $U \leq W^*$  mit  $(W/V)^* \cong U$  und  $V^* \cong W^*/U$ .*

*Beweis:* Teil (a) ergibt sich aus [CR81], (10.32). Nun sei  $V$  ein reines  $RG$ -Untergitter von  $W$  und  $f : V \hookrightarrow W$  die Einbettung. Wir können eine  $R$ -Basis von  $V$  zu einer  $R$ -Basis von  $W$  fortsetzen. Damit existiert ein zu  $f$  linksinverses  $g \in \mathrm{Hom}_{RG}(W, V)$ , also ist  $f^*$  surjektiv. Mit  $U := \mathrm{Kern}(f^*)$  und mit Hilfe der zugehörigen dualen Basis von  $W^*$  folgt Teil (b).  $\square$

Nun sei  $V$  wieder ein  $RS_n$ -Gitter. Falls  $V$  eine Filtrierung aus reinen  $RS_n$ -Untergittern

$$0 =: V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_{r-1} \leq V_r := V$$

besitzt, so dass für  $1 \leq i \leq r$  der Faktormodul  $V_i/V_{i-1}$  isomorph zu einem dualen Spechtmodul  $(S^{\lambda(i)})^*$  ist, dann nennen wir die Folge dieser Spechtmoduln eine *duale Spechtreihe* von  $V$ . Aus Lemma 1.3.3 folgt induktiv, dass  $V$  genau dann eine solche duale Spechtreihe besitzt, wenn  $V^*$  die folgende Spechtreihe besitzt:

$$V^* \longrightarrow S^{\lambda(r)} | S^{\lambda(r-1)} | \dots | S^{\lambda(1)}.$$

Wir haben gesehen, dass  $(S_{\mathbb{F}_2}^\lambda)^* \cong S_{\mathbb{F}_2}^{\lambda'}$  ist. Falls also ein selbstdualer  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Modul  $V$  eine Spechtreihe besitzt, besitzt er mit  $V \cong V^*$  auch eine duale Spechtreihe, und diese duale Spechtreihe ist wieder selbst eine Spechtreihe. Beispiele für solche Moduln sind Permutationsmoduln und Youngmoduln. Genauer gesagt, gilt für Youngmoduln über beliebiger Charakteristik:

**Lemma 1.3.4** *Der Youngmodul  $Y^\lambda$  hat sowohl eine Spechtreihe als auch eine duale Spechtreihe:*

$$Y^\lambda \longrightarrow \begin{cases} S^{\lambda(1)} | \dots | S^{\lambda(r)}, \\ (S^{\lambda(r)})^* | \dots | (S^{\lambda(1)})^*, \end{cases}$$

wobei  $\lambda = \lambda(1) > \lambda(2) \geq \dots \geq \lambda(r)$  ist.

*Beweis:* In [Don87], (2.6), wird die Existenz einer dualen Spechtreihe mit den angegebenen Eigenschaften nachgewiesen. Aus der Selbstdualität von  $Y^\lambda$  (Satz 1.2.7) resultiert dann die Spechtreihe.  $\square$

Die Aussage in [Don87], (2.6), ist detaillierter als hier das Lemma 1.3.4. Insbesondere werden die Vielfachheiten der dualen Spechtmoduln in der Spechtreihe auf die Vielfachheiten irreduzibler Kompositionsfaktoren von Weyl-Moduln zurückgeführt. Man vergleiche dazu auch [Jam83], Theorem 3.1 (ii). Das soll hier aber nicht weiter vertieft werden. Ebensovienig befassen wir uns hier damit, inwieweit die Standard-Spechtreihe der Permutationsmoduln mit den Spechtreihen der Youngmoduln aus [Don87], (2.6), zusammenhängt.

Unterschiedliche Spechtreihen eines einzelnen Moduls können allerdings auch weniger offensichtliche Ursachen haben als die bisher genannten, wie das folgende Beispiel zeigt.

**Lemma 1.3.5** *Im Integritätsbereich  $R$  gelte  $1 = -1$  (also zum Beispiel  $R = \mathbb{F}_2$ ). Weiter sei  $m \leq n/2$ ,  $\lambda := (n - m, m) \vdash n$  und  $\mu := (n - m + 1, 1^m) \vdash n + 1$ . Dann gilt:*

(a) *Es sind  $M^\lambda$  und  $S^\mu \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  isomorph als  $RS_n$ -Moduln.*

(b) *Der Modul  $M^\lambda$  hat eine Spechtreihe*

$$M^\lambda \longrightarrow S^{(n-m, 1^m)} \mid S^{(n-m+1, 1^{m-1})}.$$

*Beweis:* Teil (b) folgt aus Teil (a) mit Satz 1.4.1, der Spechtreihen für induzierte und eingeschränkte Spechtmoduln angibt. Um Teil (a) zu zeigen, definieren wir

$$t := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & m & \cdots & n - m \\ \hline n - m + 1 & \cdots & n & & \\ \hline \end{array} \in T(\lambda),$$

$$\tau := \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline n - m + 1 & 1 & 2 & \cdots & n - m \\ \hline \vdots & & & & \\ \hline n & & & & \\ \hline n + 1 & & & & \\ \hline \end{array} \in T(\mu).$$

Dann ist  $M^\lambda = \langle \bar{t} \rangle_{RS_n}$ , und mit Lemma 1.2.3 ist  $S^\mu \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} = \langle e_\tau \rangle_{RS_n}$ . Wir zeigen, dass die  $RS_n$ -lineare Fortsetzung von  $\bar{t} \mapsto e_\tau$  erstens wohldefiniert und zweitens ein Isomorphismus ist.

Die Young-Untergruppe  $S_\lambda \leq S_n$  ist der Stabilisator des Tabloids  $\bar{t}$ . Es sei  $N \subseteq S_n$  ein Vertretersystem für die Linksnebenklassen von  $S_\lambda$  in  $S_n$ . Dann sind die Tabloide  $g\bar{t}$  mit  $g \in N$  paarweise verschieden und damit  $R$ -linear unabhängig in  $M^\lambda$ . Für  $\sigma \in S_n$  sei  $a_\sigma \in R$ . Dann folgt aus

$$0 = \sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma \bar{t} = \sum_{g \in N} \sum_{\sigma \in S_\lambda} a_{g\sigma} g \underbrace{\sigma \bar{t}}_{=\bar{t}}$$

mit der linearen Unabhängigkeit der  $g\bar{t}$ , dass  $\sum_{\sigma \in S_\lambda} a_{g\sigma} = 0$  ist für alle  $g \in N$ .

Nun sei  $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \in S_\lambda$  mit  $\sigma_1 \in S_{n-m}$  und  $\sigma_2 \in S_{\{n-m+1, \dots, n\}} = \text{Stab}_v(\tau) \cap S_n$ . Jetzt kommt die Voraussetzung ins Spiel, dass  $1 = -1$  ist: Dann spielt das Signum in den Polytabloiden über  $R$  keine Rolle, das heißt, es ist

$$\sigma e_\tau = \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(\tau)} \sigma_2 \pi \underbrace{\sigma_1 \bar{\tau}}_{=\bar{\tau}} = \sum_{\pi' \in \text{Stab}_v(\tau)} \pi' \bar{\tau} = e_\tau.$$

Aus  $\sum_{\sigma \in S_\lambda} a_{g\sigma} = 0$  für alle  $g \in N$  folgt nun:

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_\sigma \sigma e_\tau = \sum_{g \in N} \sum_{\sigma \in S_\lambda} a_{g\sigma} g \underbrace{\sigma e_\tau}_{=e_\tau} = \sum_{g \in N} \left( \sum_{\sigma \in S_\lambda} a_{g\sigma} \right) g e_\tau = 0.$$

Daher lässt sich  $\bar{t} \mapsto e_\tau$ , wie behauptet,  $RS_n$ -linear fortsetzen. Da der so erhaltene Homomorphismus einen  $RS_n$ -Erzeuger auf einen  $RS_n$ -Erzeuger abbildet, ist er surjektiv. Die  $R$ -Dimension beider Moduln ist mit (1.4) bzw. (1.9) jeweils gleich  $\binom{n}{m}$ . Damit ist der Homomorphismus sogar bijektiv.  $\square$

In Beispiel 1.5.2 werden wir sehen, in welcher Beziehung diese Spechtreihe zur Standard-Spechtreihe von  $M^{(n-m,m)}$  aus Beispiel 1.3.2 steht.

Nun kommen wir zum Begriff der Kompositionsreihen. Es sei  $k$  ein Körper der Charakteristik  $p > 0$ , und  $G$  sei nach wie vor eine endliche Gruppe. Mit [CR81], Proposition 3.9, besitzt jeder endlich erzeugte  $kG$ -Modul  $V$  eine *Kompositionsreihe*, das heißt, es existiert eine endliche Folge von  $kG$ -Untermoduln

$$0 =: V_0 \leq V_1 \leq \dots \leq V_m := V$$

mit der Eigenschaft, dass die Faktormoduln  $V_i/V_{i-1}$  für  $1 \leq i \leq m$  alle einfach sind. Mit dem Satz von *Jordan-Hölder* ([CR81], Theorem 3.11) sind die Faktoren einer solchen Kompositionsreihe bis auf Isomorphie und Reihenfolge eindeutig bestimmt. Falls  $V$  eine eindeutige Kompositionsreihe besitzt, nennen wir  $V$  *uniserial* und schreiben

$$V \longrightarrow F_1 \mid F_2 \mid \dots \mid F_m,$$

wobei  $F_i$  für den Isomphietyp von  $V_i/V_{i-1}$  steht. Falls  $V$  zum Beispiel ein  $kS_n$ -Modul ist, setzen wir für die  $F_i$  Moduln der Form  $D^\lambda$  ein.

Wichtig für die Zulässigkeit dieser Notation ist, dass wirklich die Kompositionsreihe eindeutig ist, nicht etwa nur die Folge der Isomphietypen der Kompositionsfaktoren. Beispielsweise ist  $V := \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$  nicht uniserial, obwohl die Folge der Kompositionsfaktoren zu jeder Kompositionsreihe die Gestalt  $\mathbb{1} \mid \mathbb{1}$  hat. Falls von  $V$  eine direkte Summenzerlegung in uniserielle Moduln bekannt ist, können wir die Notation analog zu den Spechtreihen verfeinern, also etwa

$$V \longrightarrow (F_{1,1} \mid \dots \mid F_{m,1}) \oplus (F_{1,2} \mid \dots \mid F_{m',2}).$$

Komplexere Untermodulstrukturen können wir mit sogenannten Hasse-Diagrammen darstellen. Diese werden zu Anfang von Kapitel 4 erläutert.

Oft ist es allerdings so, dass wir die genaue Untermodulstruktur von  $V$  nicht kennen, sondern vielleicht nur die (jetzt als paarweise verschieden aufgefassten) Isomphietypen  $S_j$  der Kompositionsfaktoren mit ihren Vielfachheiten  $[V : S_j]$ . In diesem Fall schreiben wir

$$V \longrightarrow [V : S_1] \cdot S_1 + [V : S_2] \cdot S_2 + \dots + [V : S_t] \cdot S_t. \quad (1.14)$$

Auch wenn es irreduzible Spechtmoduln über  $\mathbb{F}_p$  gibt, sollte keine Verwechslungsgefahr zwischen Specht- und Kompositionsreihen bestehen: Wenn eine Spechtreihe gemeint ist, werden die Faktoren auch explizit als Spechtmoduln geschrieben, und als irreduzible Moduln, wenn eine Kompositionsreihe gemeint ist.

Da die einfachen  $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduln mit Satz 1.2.4 selbstdual sind, erhalten wir aus jeder Kompositionsreihe eines  $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduls  $V$  mit Lemma 1.3.3 eine Kompositionsreihe von  $V^*$ , indem wir die Reihenfolge der Faktoren umkehren. Insbesondere ist  $\text{soc}(V) \cong \text{hd}(V^*)$ . Falls  $V$  selbstdual ist, ist demzufolge  $\text{soc}(V) \cong \text{hd}(V)$ .

Über die Kompositionsfaktoren von Spechtmoduln über  $\mathbb{F}_p$ , geschweige denn über ihre Kompositionsreihen, ist insgesamt nur wenig bekannt. In Abschnitt 4.1 werden wir bestimmte Partitionen im Fall  $p = 2$  genauer unter die Lupe nehmen. Als Vorbereitung darauf schauen wir uns hier ein paar allgemeinere Beispiele für bekannte Kompositionsreihen von Spechtmoduln über  $\mathbb{F}_p$  an.

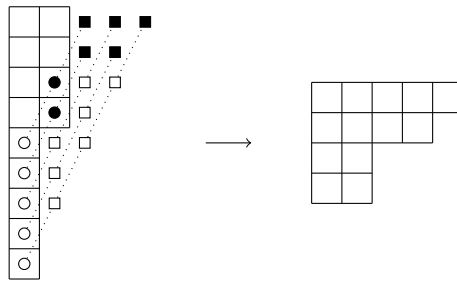
Zunächst betrachten wir die Hakenpartitionen. Für ungerades  $p$  sind die Kompositionsreihen der zugehörigen Spechtmoduln aus [Jam78] bekannt. Die hier verwendete Formulierung orientiert sich an derjenigen aus [BKM96], Abschnitt 5, um im weiteren Verlauf den Bezug auf diese Arbeit zu erleichtern.

**Satz 1.3.6** ([Jam78], Theorem 24.1) *Es sei  $p$  ungerade.*

- (a) *Falls  $p \nmid n$  ist, ist  $S^{(n-j, 1^j)}$  einfach für alle  $0 \leq j \leq n-1$ .*
- (b) *Falls  $p \mid n$  ist, existieren paarweise nichtisomorphe einfache  $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduln  $h_{n,k}$ ,  $0 \leq k \leq n-2$ , so dass  $S^{(n-j, 1^j)}$  für  $0 \leq j \leq n-1$  eine Kompositionsreihe  $S^{(n-j, 1^j)} \rightarrow h_{n,j-1} \mid h_{n,j}$  besitzt, wobei  $h_{n,-1}$  und  $h_{n,n-1}$  jeweils als der Nullmodul interpretiert werden.*

Im Folgenden sei  $p$  weiterhin ungerade und  $0 \leq j \leq n-1$ . Weiter sei  $\lambda := (n-j, 1^j)$ . Für  $p \nmid n$  setzen wir  $h_{n,j} := S^\lambda$ . Damit ist  $h_{n,j} = \text{hd}(S^\lambda)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Falls  $\lambda$   $p$ -regulär ist, ist  $h_{n,j} = D^\lambda$ , ebenfalls mit [Jam78], Theorem 24.1. Falls  $\lambda$   $p$ -singulär ist, wenn also  $j \geq p$  ist, kann man  $h_{n,j}$  ebenfalls leicht bestimmen:

Eine *Leiter* ist eine Knotenmenge  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \cap g_i$ , wobei  $g_i$  für  $i \in \mathbb{N}$  die Gerade in  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist, die durch die Punkte  $(i, 1)$  und  $(1, (i-1)(p-1)^{-1} + 1)$  läuft. Per Konstruktion haben alle Knoten innerhalb einer Leiter das  $p$ -Residuum  $i-1 \pmod p$  ([JK81], 6.3.45). Eine Partition  $\lambda$  ist genau dann  $p$ -regulär, wenn bei jeder Leiter diejenigen Knoten, die sie mit  $\lambda$  gemeinsam hat, ‘‘am oberen Ende der Leiter‘‘ liegen. Wir erhalten aus jedem  $\lambda$  eine  $p$ -reguläre Partition  $\lambda^R$ , indem wir in jeder Leiter, die  $\lambda$  schneidet, alle Knoten ‘‘ans obere Ende der Leiter schieben‘‘ ([JK81], 6.3.48). Beispielsweise gilt für  $p = 3$ , dass  $(2^4, 1^5)^R = (5, 4, 2^2) \vdash 13$  ist:



Mit [JK81], 6.3.59 (iii), enthält  $S^\lambda$  einen Kompositionsfaktor  $D^{\lambda^R}$  mit Vielfachheit 1. Das bedeutet insbesondere, dass  $h_{n,j} = D^{(n-j, 1^j)^R}$  ist: Falls  $p \nmid n$  ist, hat  $S^{(n-j, 1^j)}$  nur einen Kompositionsfaktor, und für  $p \mid n$  folgt die Aussage per Induktion über  $j$ .

**Beispiel 1.3.7** *Für  $p = 3 \mid n$  und  $j < 2n/3$  ist der jeweilige Isomorphietyp von  $h_{n,j}$  gegeben durch:*

$j$		0		1		2		3		4		5		...
$(n-j, 1^j)^R$		$(n)$		$(n-1, 1)$		$(n-2, 1^2)$		$(n-3, 2, 1)$		$(n-4, 2^2)$		$(n-5, 3, 2)$		...

*(Die Voraussetzung  $j < 2n/3 = (p-1)n/p$  dient lediglich der einfacheren Tabellengestaltung: Sie erzwingt, dass der erste Teil von  $(n-j, 1^j)^R$  stets die Länge  $n-j$  hat. Andernfalls würde die Tabelle nicht stimmen. Beispielsweise ist für  $n = 7$  und  $j = 5$  die Partition  $(n-j, 1^j)^R$  gegeben durch  $(3^2, 1) = (n-4, 3, 1)$ .)*

Auch für Zweiteil-Partitionen (und beliebiges  $p \in \mathbb{P}$ ) sind die Kompositionsfaktoren der zugehörigen Spechtmoduln bekannt. Mit Satz 1.2.4 ist bereits klar, dass jeder Kompositionsfaktor von  $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda$  mit  $\lambda := (n-m, m) \vdash n$ ,  $m \geq 1$ , die Form  $D^{(n-j, j)}$  mit  $0 \leq j \leq m$  hat, da  $\lambda$  nur von Partitionen der Form  $(n-j, j)$  dominiert wird. Dabei sind die zu überprüfenden Partitionen  $(n-j, j)$  alle  $p$ -regulär, das heißt,  $D^{(n-j, j)}$  existiert. Nicht  $p$ -regulär wäre  $(n-j, j)$  höchstens im Fall  $p = 2$  und  $n = 2j$ . Aus  $0 \leq j \leq m \leq n/2$  folgt dann aber, dass  $m = j$  ist. Das heißt, dann ist  $\lambda$  schon nicht  $p$ -regulär und hat daher mit Satz 1.2.4 nur Kompositionsfaktoren zu Partitionen, die  $\lambda$  echt dominieren. Mit der Notation aus Definition 1.2.8 gilt:

**Satz 1.3.8 ([Jam78], Theorem 24.15)** *Es sei  $\lambda := (n - m, m) \vdash n$ ,  $m \geq 1$ . Die Vielfachheit von  $D^{(n-j, j)}$  als Kompositionsfaktor von  $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda$  ist 1 für  $m - j \subset_p n - 2j + 1$  und 0 sonst.*

In günstigen Fällen ergibt sich aus Satz 1.3.8 schon unmittelbar die Untermodulstruktur von  $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda$ . Ein wichtiges Beispiel dafür ist das folgende:

**Folgerung 1.3.9 ([Web09a], Corollary 4.7)** *Es sei  $n \geq 2p$  mit  $n > 4$ , falls  $p = 2$  ist. Weiter sei  $\lambda := (n - p, p)$  und  $n + 1 \equiv j \pmod{p}$  für ein  $0 \leq j \leq p - 1$ . Mit den Sätzen 1.3.8, 1.2.4 und 2.5.4 ist  $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda$  uniseriell mit einer der folgenden Kompositionsreihen:*

$S_{\mathbb{F}_p}^\lambda \longrightarrow$	$j = 0$	$j \neq 0$
$n + 1 \not\equiv p + j \pmod{p^2}$	$D^\lambda$	$D^{(n-j, j)} \mid D^\lambda$
$n + 1 \equiv p + j \pmod{p^2}$	$\mathbf{1} \mid D^\lambda$	$D^{(n-j, j)} \mid \mathbf{1} \mid D^\lambda$

Im Fall  $p = 2$  und  $n = 4$  ist  $S_{\mathbb{F}_2}^\lambda = S_{\mathbb{F}_2}^{(2^2)} \cong D^{(3,1)}$ . Auch dies erhält man unmittelbar aus Satz 1.3.8; der Fall konnte nur nicht in die Tabelle integriert werden, weil  $\lambda = (2^2)$  nicht 2-regulär ist und daher der Modul  $D^\lambda$  nicht existiert.

Den oben zitierten Satz 2.5.4 werden wir übrigens im Zusammenhang mit der Kohomologie der  $S_n$  behandeln. Mit ihm zählen wir die Vielfachheit von  $\mathbf{1}$  als Untermodul eines Spechtmoduls.

## 1.4 Verzweigungsregeln

Bei den *Verzweigungsregeln (Branching Rules)* im weiteren Sinne geht es darum, die Struktur eines nach  $S_{n-1}$  eingeschränkten bzw. nach  $S_{n+1}$  induzierten  $S_n$ -Moduls von einem bestimmten Typ mit Hilfe von  $S_{n-1}$ - bzw.  $S_{n+1}$ -Moduln vom gleichen Typ zu beschreiben. Da die relevanten Typen von  $S_n$ -Moduln über Partitionen parametrisiert sind, setzen die Verzweigungsregeln  $\text{Part}(n)$  mit  $\text{Part}(n-1)$  und  $\text{Part}(n+1)$  in Beziehung. Die in dieser Hinsicht wichtigste Beziehung entsteht durch das Entfernen bzw. Hinzufügen von Knoten.

Ein Knoten von  $\lambda \vdash n$  heißt *entfernbar*, wenn durch Entfernen des Knotens aus  $\lambda$  eine Partition von  $n-1$  entsteht. Mit anderen Worten, die entfernbaren Knoten von  $\lambda$  sind seine Ecken. Wenn  $A$  eine Ecke von  $\lambda$  ist, schreiben wir  $\lambda_A := \lambda \setminus \{A\} \vdash n-1$ . Die Menge aller solcher Partitionen bezeichnen wir mit

$$\lambda- := \{\lambda_A \mid A \text{ ist ein entfernbare Knoten von } \lambda\}.$$

Die Anzahl der Ecken von  $\lambda$  ist gleich der Anzahl der von 0 verschiedenen Zeilenlängen von  $\lambda$ , das heißt, es ist

$$|\lambda-| = |\{\lambda_i \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda)\}|.$$

Analog heißt ein Knoten von  $\lambda \vdash n$  *addierbar*, wenn durch Hinzufügen des Knotens zu  $\lambda$  eine Partition von  $n+1$  entsteht. Addierbar sind also alle Knoten  $(i, \lambda_i + 1)$  mit  $1 \leq i \leq \ell(\lambda) + 1$  und  $\lambda_i \leq \lambda_{i-1}$ . Das bedeutet insbesondere, dass  $(1, \lambda_1)$  und  $(\ell(\lambda) + 1, 1)$  immer addierbare Knoten sind. Wenn  $B$  ein solcher addierbarer Knoten ist, schreiben wir  $\lambda^B := \lambda \cup \{B\} \vdash n+1$ . Die Menge aller solcher Partitionen bezeichnen wir mit

$$\lambda+ := \{\lambda^B \mid B \text{ ist ein addierbarer Knoten von } \lambda\}.$$

Die Mächtigkeit von  $\lambda+$  ist um 1 höher als die Anzahl der Ecken von  $\lambda$ , da man einerseits in der Zeile unmittelbar unter einer Ecke einen Knoten ergänzen kann, andererseits auf jeden Fall immer in der ersten Zeile.



sortiert zusammenfassen und die lexikografische Anordnung in jedem Block beibehalten. (Genaueres zu  $p$ -Blöcken folgt im nächsten Abschnitt.)

Es seien  $G, H, U$  endliche Gruppen mit  $U \leq G \leq H$ ,  $R$  ein Integritätsbereich und  $V$  ein  $RG$ -Modul. Weiter sei  $h_1, h_2, \dots, h_m$  ein Vertretersystem für die Doppelnebenklassen  $G \setminus H/U$ . Dann besagt der Satz von Mackey ([CR81], Theorem 10.13):

$$V \uparrow_{\downarrow U}^H \cong \bigoplus_{i=1}^m ({}^{h_i} V \downarrow_{h_i G \cap U}) \uparrow^U.$$

Damit können wir einen nach  $S_{n-1}$  eingeschränkten Permutationsmodul als direkte Summe von Permutationsmoduln schreiben: Wir setzen  $x_i := \sum_{k=1}^i \lambda_k$  für  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ . Ein Vertretersystem für die Doppelnebenklassen  $S_{n-1} \setminus S_n/S_\lambda$  ist gegeben durch die Transpositionen

$$\{(x_i, n) \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda)\}.$$

Dabei steht  $(n, n)$  für die Identität. Für  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$  sei  $\lambda(i) := \lambda_{(i, \lambda_i)} \vdash n-1$  (wobei wir hier die am Anfang von Abschnitt 1.4 eingeführte Notation der Knotenentfernung auf Kompositionen ausweiten). Dann ist  ${}^{(x_i, n)} S_\lambda \cap S_{n-1} = S_{\lambda(i)}$ , und es folgt:

$$M_{R \downarrow S_{n-1}}^{\lambda \uparrow S_n} \cong \mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow_{\downarrow S_{n-1}}^{S_n} \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell(\lambda)} \mathbb{1}_{(x_i, n) S_\lambda \cap S_{n-1}} \uparrow^{S_n} \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell(\lambda)} M_R^{\lambda(i)}.$$

Da der Permutationsmodul zur Komposition  $\lambda(i)$  isomorph zum Permutationsmodul zur Partition  $\overline{\lambda(i)}$  ist, gilt mit  $\ell := |\{\lambda_j \mid 1 \leq j \leq \ell(\lambda)\}|$  und  $a_i := |\{1 \leq j \leq \ell(\lambda) \mid \lambda_j = \lambda_i\}|$ :

$$M_{R \downarrow S_{n-1}}^{\lambda \uparrow S_n} \cong \bigoplus_{i=1}^{\ell} a_i \cdot M_R^{\overline{\lambda(i)}}. \quad (1.15)$$

Die Induktion von Permutationsmoduln ist noch einfacher: Ein nach  $S_{n+1}$  induzierter Permutationsmodul ist wieder ein Permutationsmodul. Es sei  $\Lambda := \lambda^{(\ell(\lambda)+1, 1)}$ . Dann sind  $S_\lambda$  und  $S_\Lambda$  isomorph, und es gilt:

$$M_{R \uparrow S_n}^{\lambda \downarrow S_{n+1}} \cong \mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow_{\uparrow S_{n+1}}^{S_n} \cong \mathbb{1}_{S_\Lambda} \uparrow^{S_{n+1}} \cong M_R^\Lambda. \quad (1.16)$$

Für Youngmoduln können wir daraus ähnliche, aber weniger präzise Verzweigungsregeln folgern. Ab jetzt sei  $R = \mathbb{F}_p$ .

**Folgerung 1.4.2** Für  $\lambda \vdash n$  sind  $Y^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  und  $Y^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  jeweils eine direkte Summe aus Youngmoduln.

*Beweis:* Mit Satz 1.2.6 gilt:

$$M_{\downarrow S_{n-1}}^\lambda \cong Y^\lambda \downarrow_{\downarrow S_{n-1}}^{S_n} \oplus \bigoplus_{\mu \triangleright \lambda} \kappa_{\lambda, \mu}^p Y^\mu \downarrow_{\downarrow S_{n-1}}^{S_n}.$$

Nun lässt sich  $M_{\downarrow S_{n-1}}^\lambda$  mit dem Satz von Krull-Schmidt (Satz 1.2.5) bis auf Isomorphie eindeutig in eine direkte Summe aus unzerlegbaren Summanden zerlegen. Mit (1.15) und Satz 1.2.6 sind diese Summanden Youngmoduln. Damit folgt die Behauptung für eingeschränkte Youngmoduln mit dem Satz von Krull-Schmidt, und für induzierte Youngmoduln folgt sie analog.  $\square$

Im Allgemeinen ist nicht ohne Weiteres erkennbar, aus welchen Youngmoduln genau eine solche direkte Summenzerlegung von  $Y^\lambda \downarrow_{\downarrow S_{n-1}}^{S_n}$  bzw.  $Y^\lambda \uparrow_{\uparrow S_n}^{S_{n+1}}$  besteht, insbesondere da sie abhängig von  $p$  ist. Im Allgemeinen bleibt nichts anderes übrig, als die Methode aus Folgerung 1.4.2 ad hoc anzuwenden, was wiederum nur dann geht, wenn man die dazu notwendigen Kostka-Zahlen kennt. Beispiele für dieses Vorgehen im Fall  $p = 2$  werden wir in Abschnitt 4.2.2 sehen.



Da die Kostka-Zahlen für Zweiteil-Partitionen mit Satz 1.2.9 bekannt sind, kann man nach genau diesem Prinzip Verzweigungsregeln für die Einschränkung von Youngmoduln zu Zweiteil-Partitionen herleiten. Dies geschieht in Theorem 5.1 von [Hen05]. Diese Regeln sollen hier nicht vorgestellt werden, da sie mit einem gewissen Notationsaufwand verbunden sind und wir sie nur auf wenige Beispiele anwenden wollen. Daher soll an dieser Stelle der Hinweis genügen, dass sich die folgende Aussage unmittelbar aus [Hen05], Theorem 5.1, ergibt:

**Beispiel 1.4.3** Für  $p = 2$  gilt:

$$\begin{aligned}
Y^{(n-1,1)} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} &\cong \begin{cases} Y^{(n-2,1)} & \text{für ungerades } n > 2, \\ 2 \cdot \mathbf{1}_{S_{n-1}} & \text{für } n = 2, \\ Y^{(n-2,1)} \oplus 2 \cdot \mathbf{1}_{S_{n-1}} & \text{für gerades } n > 2. \end{cases} \\
Y^{(n-2,2)} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} &\cong \begin{cases} Y^{(n-3,2)} & \text{für ungerades } n > 4, \\ 2 \cdot Y^{(2,1)} \oplus 2 \cdot \mathbf{1}_{S_{n-1}} & \text{für } n = 4, \\ Y^{(n-3,2)} \oplus 2 \cdot Y^{(n-2,1)} & \text{für } 4 < n \equiv 2 \pmod{4}, \\ Y^{(n-3,2)} \oplus 2 \cdot Y^{(n-2,1)} \oplus 2 \cdot \mathbf{1}_{S_{n-1}} & \text{für } 4 < n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases} \\
Y^{(n-3,3)} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} &\cong \begin{cases} Y^{(n-4,3)} & \text{für ungerades } n > 6, \\ 2 \cdot Y^{(5,2)} \oplus 2 \cdot Y^{(4,1)} & \text{für } n = 6, \\ Y^{(n-4,3)} \oplus 2 \cdot Y^{(n-3,2)} \oplus 2 \cdot Y^{(n-2,1)} & \text{für } 6 < n \equiv 2 \pmod{4}, \\ Y^{(n-4,3)} \oplus 2 \cdot Y^{(n-3,2)} & \text{für } 6 < n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für irreduzible  $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduln gibt es die sogenannten *modularen Verzweigungsregeln*. Hier ist die Situation noch komplizierter. Wünschenswert wäre es, die genaue Untermodulstruktur oder wenigstens eine Kompositionsreihe von  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  oder  $D^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  zu kennen. Dies gelingt allerdings in den seltensten Fällen. Immerhin liefern uns die modularen Verzweigungsregeln Kopf und Sockel von  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  und  $D^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}$ , und für  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  sogar die irreduziblen Kompositionsfaktoren samt Vielfachheiten.

Der Großteil der Entdeckung der modularen Verzweigungsregeln geht zurück auf Alexander Kleshchev, der sie in seinen Arbeiten [Kle95a], [Kle95b], [Kle96] und [Kle98a] entwickelt hat. Die folgende Darstellung der modularen Verzweigungsregeln orientiert sich an der Zusammenfassung aus [Kle98b], Abschnitt 4.

Ein Knoten  $A$  von  $\lambda \vdash n$  heißt *normal*, wenn er entfernbar ist und eine Injektion aus der Menge der addierbaren Knoten oberhalb von  $A$  mit dem gleichen  $p$ -Residuum wie  $A$  in die Menge der entfernbar Knoten oberhalb von  $A$  mit dem gleichen  $p$ -Residuum wie  $A$  existiert, so dass für  $B \mapsto C_B$  jeweils  $C_B$  echt zwischen  $A$  und  $B$  liegt. Ein Knoten  $A$  von  $\lambda$  heißt *gut*, wenn er normal ist und unter allen normalen Knoten mit  $p$ -Residuum  $\text{res}(A)$  der niedrigste. Ein addierbarer Knoten  $B$  heißt *gut*, wenn er gut als Knoten von  $\lambda^B$  ist.

Für  $p$ -reguläres  $\lambda$  mit gutem Knoten  $A$  ist die Partition  $\lambda_A$  auf jeden Fall  $p$ -regulär: Nehmen wir an, dass durch Entfernen eines normalen Knotens  $A$  aus einer  $p$ -regulären Partition eine  $p$ -singuläre entsteht. Dann bedeutet das einerseits, dass unterhalb von  $A$  exakt  $p - 1$  (nicht leere) Zeilen die gleiche Länge haben. Es sei  $A'$  die nächste Ecke unterhalb von  $A$ ; dann hat  $A'$  das gleiche Residuum wie  $A$ . Andererseits ist  $A'$  ein normaler Knoten, denn zwischen  $A'$  und  $A$  liegen keine addierbaren Knoten mit dem gleichen Residuum wie dem von  $A'$ . Daher ist  $A'$  mit der gleichen Argumentation normal, mit der man auch die Normalität von  $A$  begründen kann. Also kann  $A$  kein guter Knoten sein, da unterhalb von  $A$  ein normaler Knoten mit dem gleichen Residuum existiert.

**Satz 1.4.4** Es sei  $\lambda \vdash n$  eine  $p$ -reguläre Partition.

- (a) Es sei  $A$  ein entfernbarer Knoten von  $\lambda$ , so dass  $\lambda_A$  wieder  $p$ -regulär ist. Dann ist  $D^{\lambda_A}$  genau dann ein Kompositionsfaktor von  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$ , wenn  $A$  normal ist. In diesem Fall ist

$$[D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} : D^{\lambda_A}] = |\{\text{normale Knoten } B \text{ oberhalb von } A \text{ mit } \text{res}(B) = \text{res}(A)\}|.$$

- (b) Es seien  $A_1, \dots, A_d$  die guten Knoten von  $\lambda$ . Dann existieren unzerlegbare, selbstduale Moduln  $I_1, \dots, I_d$  mit  $\text{soc}(I_j) \cong \text{hd}(I_j) \cong D^{\lambda^{A_j}}$ , die zu paarweise verschiedenen Blöcken gehören, so dass

$$D^{\lambda} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong \bigoplus_{j=1}^d I_j$$

ist. Insbesondere ist

$$\text{soc}(D^{\lambda} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \cong \text{hd}(D^{\lambda} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \cong \bigoplus_{j=1}^d D^{\lambda^{A_j}}.$$

- (c) Es ist  $D^{\lambda} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  genau dann halbeinfach, wenn alle normalen Knoten von  $\lambda$  paarweise verschiedene Residuen haben (das heißt, wenn alle normalen Knoten gut sind). In diesem Fall ist

$$D^{\lambda} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong \bigoplus_{A \text{ gut}} D^{\lambda^A}.$$

Insbesondere ist  $D^{\lambda} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  genau dann irreduzibel, wenn  $\lambda$  einen eindeutigen normalen Knoten  $A$  besitzt. In diesem Fall ist  $A$  der höchste entfernbare Knoten, und  $\lambda_A$  ist  $p$ -regulär.

- (d) Es seien  $B_1, \dots, B_{d'}$  die guten addierbaren Knoten von  $\lambda$ . Dann existieren unzerlegbare, selbstduale Moduln  $J_1, \dots, J_{d'}$  mit  $\text{soc}(J_i) \cong \text{hd}(J_i) \cong D^{\lambda^{B_i}}$ , die zu paarweise verschiedenen Blöcken gehören, so dass

$$D^{\lambda} \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \cong \bigoplus_{i=1}^{d'} J_i$$

ist. Insbesondere ist

$$\text{soc}(D^{\lambda} \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}) \cong \text{hd}(D^{\lambda} \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}) \cong \bigoplus_{i=1}^{d'} D^{\lambda^{B_i}}.$$

- (e) Es ist  $D^{\lambda} \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  genau dann halbeinfach, wenn die Anzahl der normalen Knoten von  $\lambda$  um 1 kleiner ist als die Anzahl der guten addierbaren Knoten von  $\lambda$ . In diesem Fall ist

$$D^{\lambda} \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \cong \bigoplus_{B \text{ gut addierbar}} D^{\lambda^B}.$$

Dabei ist in (a) und (c) zu beachten: Sofern von einem normalen Knoten  $B$  nicht ausdrücklich verlangt ist, dass  $\lambda_B$   $p$ -regulär ist, wird das auch nicht vorausgesetzt.

Im Falle der Einschränkung von irreduziblen Moduln zu Zweiteil-Partitionen können wir die modularen Verzweigungsregeln noch exakter formulieren. Dies geschieht in der Hauptaussage von [She99] (Seite 3304), hier wiedergegeben in der Formulierung von [Kle98b], Theorem 3.6:

**Satz 1.4.5** Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  mit  $n \geq 2m$ , und es sei  $\lambda := (n - m, m) \vdash n$ . Die  $p$ -adische Entwicklung von  $n - 2m$  sei gegeben durch  $\sum_{i=0}^l s_i p^i$ . Weiter sei  $t$  der minimale Index mit  $s_t < p - 1$ . (Falls  $s_i = p - 1$  ist für  $0 \leq i \leq l$ , ist  $t = l + 1$ .) Im Folgenden interpretieren wir  $D^{(n-j, j)}$  für  $j < 0$  als den 0-Modul.

- (a) Für  $p > 2$  gilt:

(i) Für  $n - 2m = 0$  ist  $D^{\lambda} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong D^{(m, m-1)}$ .

(ii) Für  $n - 2m \equiv -2 \pmod{p}$  ist  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong D^{(n-m-1, m)}$ .

(iii) Für  $0 \neq n - 2m \not\equiv -1, -2 \pmod{p}$  ist

$$D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong D^{(n-m-1, m)} \oplus D^{(n-m, m-1)}.$$

(iv) Für  $n - 2m \equiv -1 \pmod{p}$  ist  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  unzerlegbar mit folgenden Kompositionsfaktoren:

- Für  $s_t = p - 2$ :

$$D^{(n-m-1, m)}, \quad 2D^{(n-m-1+p^i, m-p^i)} \text{ für } 0 \leq i \leq t-1.$$

- Für  $s_t < p - 2$ :

$$D^{(n-m-1, m)}, \quad D^{(n-m-1+p^t, m-p^t)}, \quad 2D^{(n-m-1+p^i, m-p^i)} \text{ für } 0 \leq i \leq t-1.$$

(b) Für  $p = 2$  gilt:

(i) Für gerades  $n$  ist  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong D^{(n-m-1, m)}$ .

(ii) Für ungerades  $n$  ist  $D^\lambda \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  unzerlegbar mit Kompositionsfaktoren

$$D^{(n-m-1, m)}, \quad 2D^{(n-m-1+2^i, m-2^i)} \text{ für } 0 \leq i \leq t-1.$$

## 1.5 Partitionen im Hauptblock

Der Hintergrund zu  $p$ -Blöcken soll hier nur sehr knapp umrissen werden. Für Details sei auf Kapitel 1, Abschnitt 8.2, sowie Kapitel 3, Abschnitt 6.4, von [NT88] verwiesen.

Es sei  $R$  ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper  $K$  der Charakteristik 0. Der Restklassenkörper  $k := R/\pi R$  habe Charakteristik  $p > 0$ , wobei  $\pi R$  das eindeutige maximale Ideal von  $R$  bezeichnet. In diesem Fall nennen wir  $(K, R, k)$  ein  $p$ -modulares System. Weiterhin nehmen wir an, dass  $K$  genügend groß für  $G$  ist, das heißt, dass  $K$  alle  $|G|$ -ten Einheitswurzeln enthält. Insbesondere sind dann  $K$  und  $k$  beides Zerfällungskörper für  $G$ .

Wir können  $1 \in RG$  als Summe von zentral primitiven orthogonalen Idempotenten schreiben:  $1 = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ . Wir setzen  $B_i := \varepsilon_i RG \varepsilon_i$  für alle  $1 \leq i \leq m$ . Das liefert eine Zerlegung in unzerlegbare direkte Summanden von  $RG = \bigoplus_{i=1}^m B_i$  als  $(RG, RG)$ -Bimodul, und es ist  $B_i B_j = 0$  für  $i \neq j$ . Wir nennen die  $B_i$  die  $p$ -Blöcke von  $G$ . Jeder  $RG$ -Modul  $V$  lässt sich als direkte Summe  $\bigoplus_{i=1}^m \varepsilon_i V$  schreiben. Wir sagen,  $V$  liegt in  $B_i$  (oder "gehört zu  $B_i$ "), wenn  $\varepsilon_i V = V$  ist. Wenn  $V$  ein unzerlegbarer  $RG$ -Modul ist, gehört er zu einem eindeutigen  $B_i$ , und jeder Untermodul sowie jeder Faktormodul von  $V$  gehören ebenfalls zu  $B_i$ .

Via Reduktion modulo  $\pi$  erhalten wir analoge Aussagen über  $kG$ : Es ist  $1 = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^* \in kG$  eine Summe aus zentral primitiven orthogonalen Idempotenten  $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i + \pi RG$ , und das liefert eine Zerlegung in unzerlegbare direkte Summanden von  $kG = \bigoplus_{i=1}^m B_i^*$  als  $(kG, kG)$ -Bimodul. Dabei ist  $B_i^* := \varepsilon_i^* kG \varepsilon_i^* \cong B_i/\pi B_i$ . Wir sagen, ein  $kG$ -Modul  $V$  liegt in  $B_i$ , wenn  $\varepsilon_i^* V = V$  ist. Auch hier gilt: Jeder  $kG$ -Modul  $V$  lässt sich als direkte Summe  $\bigoplus_{i=1}^m \varepsilon_i^* V$  schreiben; wenn  $V$  ein unzerlegbarer  $kG$ -Modul ist, gehört er zu einem eindeutigen  $B_i$ , und jeder Untermodul sowie jeder Faktormodul von  $V$  gehören ebenfalls zu  $B_i$ .

Falls für einen einfachen  $kG$ -Modul  $V$  mit zugehöriger Matrixdarstellung  $\chi_V$  gilt, dass  $\chi_V(\varepsilon_i) \neq 0$  ist, sagen wir,  $V$  liegt in  $B_i$  bzw.  $\chi_V$  liegt in  $B_i$ . Dies ist für ein eindeutiges  $i \in \{1, \dots, m\}$  der Fall.

Wir haben oben vorausgesetzt, dass  $R$  ein vollständiger diskreter Bewertungsring ist. Nun sei  $R'$  ein diskreter Bewertungsring, dessen  $\pi$ -adische Vervollständigung gerade  $R$  ist und dessen Quotientenkörper ein Zerfällungskörper für  $G$  ist. Dann gilt mit [CR81], Theorem 30.18, dass jedes  $RG$ -Gitter isomorph zur Vervollständigung eines  $R'G$ -Gitters ist, und ein  $R'G$ -Gitter ist genau dann unzerlegbar, wenn seine Vervollständigung als  $RG$ -Gitter unzerlegbar ist. Damit können wir

sagen: Ein unzerlegbares  $R'G$ -Gitter  $V$  liegt im Block  $B_i$  genau dann, wenn seine Vervollständigung in  $B_i$  liegt.

Als  $p$ -Hauptblock (oder einfach Hauptblock) bezeichnen wir den Block, in dem der triviale Modul (über  $R$ ,  $k$ ,  $K$  oder  $R'$ ) liegt. Wenn  $B_1$  der Hauptblock und  $V$  ein  $RG$ - bzw.  $kG$ -Modul ist, nennen wir  $\varepsilon_1 V$  bzw.  $\varepsilon_1^* V$  den Hauptblockanteil von  $V$  und  $\bigoplus_{i=2}^m \varepsilon_i V$  bzw.  $\bigoplus_{i=2}^m \varepsilon_i^* V$  das Komplement des Hauptblockanteils.

Die  $p$ -Blöcke der symmetrischen Gruppen sind über die  $p$ -Kerne der Partitionen parametrisiert:

**Satz 1.5.1 (Vermutung von Nakayama, [JK81], 6.1.21)** *Zwei gewöhnliche irreduzible Darstellungen der  $S_n$  liegen im gleichen  $p$ -Block genau dann, wenn sie den gleichen  $p$ -Kern haben.*

Das bedeutet insbesondere: Zwei Spechtmoduln  $S^\lambda$  und  $S^\mu$  bzw. zwei Youngmoduln  $Y^\lambda$  und  $Y^\mu$  bzw. zwei irreduzible Moduln  $D^\lambda$  und  $D^\mu$  liegen genau dann im gleichen  $p$ -Block, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  den gleichen  $p$ -Kern haben. Überdies hat jede Partition in einer Spechtreihe eines unzerlegbaren  $\mathbb{F}_p S_n$ -,  $\mathbb{Z}_p S_n$ - bzw.  $\mathbb{Z}_{(p)} S_n$ -Gitters den gleichen  $p$ -Kern, ebenso jede Partition in einer Kompositionsreihe eines unzerlegbaren  $\mathbb{F}_p S_n$ -Gitters. Als Beispiel für die Anwendung der Block-Charakterisierung über die  $p$ -Kerne betrachten wir eine Folgerung aus Lemma 1.3.5:

**Beispiel 1.5.2** *Es seien  $n, m \in \mathbb{N}$ , wobei  $n$  ungerade und  $m < n/2$  ist. Weiter sei  $k$  ein Körper der Charakteristik 2. Dann hat der Spechtmodul über  $k$  zur Hakenpartition  $(n-m, 1^m)$  eine Spechtreihe*

$$S_k^{(n-m, 1^m)} \longrightarrow \begin{cases} S_k^{(n-m, m)} \mid S_k^{(n-m+2, m-2)} \mid \dots \mid S_k^{(n-3, 3)} \mid S_k^{(n-1, 1)} & \text{für ungerades } m, \\ S_k^{(n-m, m)} \mid S_k^{(n-m+2, m-2)} \mid \dots \mid S_k^{(n-2, 2)} \mid \mathbf{1} & \text{für gerades } m. \end{cases}$$

*Beweis:* Mit Beispiel 1.3.2 und Lemma 1.3.5 hat der Permutationsmodul über  $k$  zur Partition  $(n-m, m)$  zwei Spechtreihen

$$M_k^{(n-m, m)} \longrightarrow \begin{cases} S_k^{(n-m, m)} \mid S_k^{(n-m+1, m-1)} \mid \dots \mid S_k^{(n-1, 1)} \mid S_k^{(n)}, \\ S_k^{(n-m, 1^m)} \mid S_k^{(n-m+1, 1^{m-1})}. \end{cases}$$

Falls  $m$  gerade ist, hat die Partition  $(n-m, 1^m)$  den 2-Kern  $(1)$  und die Partition  $(n-m+1, 1^{m-1})$  den 2-Kern  $(2, 1)$ ; wenn  $m$  ungerade ist, ist es umgekehrt. Daher liefert die zweite Spechtreihe eine Zerlegung von  $M_k^{(n-m, m)}$  in

$$M_k^{(n-m, m)} \cong S_k^{(n-m, 1^m)} \oplus S_k^{(n-m+1, 1^{m-1})}.$$

Für  $0 \leq i \leq m$  hat die Partition  $(n-m+i, m-i)$  den 2-Kern  $(1)$ , falls  $m-i$  gerade ist, und den 2-Kern  $(2, 1)$ , falls  $m-i$  ungerade ist. Da jeder Spechtmodul in einem eindeutig bestimmten Block liegt, liefern die Spechtfaktoren aus der Standard-Spechtreihe von  $M_k^{(n-m, m)}$ , deren Partitionen den 2-Kern wie  $(n-m, 1^m)$  haben, unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge eine Spechtreihe von  $S_k^{(n-m, 1^m)}$ . Damit folgt die Behauptung.  $\square$

Zur obigen Beweisführung sei noch Folgendes angemerkt:

- Es wird keine Aussage über die Zerlegung von  $M_k^{(n-m, m)}$  in Youngmoduln getroffen: Die beiden Spechtmoduln  $S_k^{(n-m, 1^m)}$  und  $S_k^{(n-m+1, 1^{m-1})}$  können durchaus in weitere direkte Summanden zerfallen.
- Die Beispiele aus Tabelle 4.1.5 (mit  $m = 2$  und  $m = 3$ ) legen die Vermutung nahe, dass die Aussage von Beispiel 1.5.2 auch für gerades  $n$  gilt. Da aber in diesem Fall alle beteiligten Zweiteil-Partitionen den gleichen 2-Kern haben (sie liegen alle im Hauptblock), ist die obige Beweisführung nicht anwendbar. Der Versuch einer Verallgemeinerung soll hier aber unterbleiben.

Nakayama veröffentlichte seine Vermutung 1940 in [Nak40]. Der erste vollständige Beweis erfolgte 1947 durch Brauer und Robinson. Weitere Beweise unterschiedlicher Autoren, darunter Nakayama selbst, folgten. Trotzdem wird der Satz kurioserweise traditionell immer noch als Vermutung bezeichnet.

James formuliert die Aussage in [Jam78], Theorem 21.11, so: “ $S^\mu$  und  $S^\lambda$  liegen im gleichen  $p$ -Block von  $S_n$  genau dann, wenn eine (endliche) Permutation  $\sigma$  von  $\{1, 2, \dots\}$  existiert, so dass für alle  $i$  gilt:  $\lambda_i - i \equiv \mu_{\sigma(i)} - \sigma(i) \pmod{p}$ .” Hier sehen wir das Konzept der Endresiduen durchscheinen: Mit der Terminologie aus Abschnitt 1.1 können wir diese Aussage direkt umformulieren zu: “ $S^\mu$  und  $S^\lambda$  liegen im gleichen  $p$ -Block von  $S_n$  genau dann, wenn  $\alpha^\lambda = \alpha^\mu$  ist.“

Wir haben in Lemma 1.1.5 gesehen, dass man mit Hilfe eines Abakus relativ leicht zwischen  $\tilde{\lambda}$  und  $\alpha^\lambda$  bijektiv hin- und herschalten kann. Aber beide Objekte speichern Informationen, die man dem jeweiligen Gegenpart nicht ohne Weiteres entnehmen kann. Im Folgenden nehmen wir die für diese Arbeit wichtigste Anwendung der Endresiduen unter die Lupe.

Die  $p$ -Kerne der Partitionen aus  $\text{Part}(n)$  haben zunächst nicht viel mit denjenigen der Partitionen aus  $\text{Part}(n+1)$  zu tun. Um einen Zusammenhang herzustellen, müsste man bestimmte nur von  $n$  abhängige Typen von Partitionen betrachten. Im Allgemeinen hätte dies vermutlich nur geringen praktischen Nutzen, aber zwei Typen von  $p$ -Kernen lohnen die Aufmerksamkeit sehr wohl: Wenn  $n \bmod p = k$  ist, dann ist  $(k)$  der zum Hauptblock und  $(1^k)$  der zum sgn-Block gehörige  $p$ -Kern. Für  $n \bmod p \in \{0, 1\}$  sind die beiden Blöcke identisch (also im Fall  $p = 2$  für jedes  $n$ ).

Im Folgenden wollen wir unser Augenmerk auf die  $p$ -Hauptblock-Partitionen richten. Diese sind insofern von Interesse, als die Zugehörigkeit eines unzerlegbaren Moduls zum Hauptblock mit Lemma 2.1.7 notwendige Voraussetzung dafür ist, dass die zugehörigen Kohomologiegruppen nichttrivial sein können. Alle folgenden Ergebnisse können durch Übergang zu den konjugierten Partitionen auf analoge Weise für den  $p$ -sgn-Block formuliert werden. Wir verzichten allerdings hier darauf, da die einzige Anwendung der sgn-Partitionen in Lemma 1.5.4 eine ausführliche Beschäftigung damit nicht rechtfertigt.

Als  $p$ -Hauptblock-Graphen  $\mathcal{B}_0(p)$  bezeichnen wir den induzierten Teilgraphen des Young-Graphen  $\mathcal{Y}$ , dessen Knotenmenge aus den zum  $p$ -Hauptblock gehörigen Partitionen besteht. (Ein induzierter Teilgraph eines Graphen  $G = (V, E)$  mit Knotenmenge  $V$  und Kantenmenge  $E$  ist ein Graph  $G' = (E', V')$  mit  $E' \subseteq E$ , so dass zwei Knoten von  $G'$  genau dann durch eine Kante verbunden sind, wenn sie es auch in  $G$  sind.) Bei der Beschreibung der Struktur von  $\mathcal{B}_0(p)$  machen wir uns zunutze, dass mit Lemma 1.1.5 der  $p$ -Kern einer Partition  $\lambda$  durch die Folge  $\alpha^\lambda$  eindeutig bestimmt ist. Für die Partitionen in  $\mathcal{B}_0(p)$  haben diese Folgen  $\alpha^\lambda$  eine besonders schöne Gestalt. Um sie zu ermitteln brauchen wir nur die trivialen Partitionen zu betrachten.

Das Endresiduum der ersten Zeile von  $(n)$  ist immer  $k := (n - 1) \bmod p$ . Da die übrigen Zeilen leer sind, ist für  $n \geq 1$  die minimale Endresiduenfolge gegeben durch  $\text{ER}((n)) = (k, p - 2, p - 3, \dots, 1, 0)$ . (Für  $n = 0$  ist  $\text{ER}(\emptyset)$  leer.) Falls  $k = p - 1$  ist, kommt jedes Endresiduum gleich oft vor. Falls  $k < p - 1$  ist, kommt  $k$  innerhalb der ersten  $p$  Zeilen zwei Mal als Endresiduum vor,  $p - 1$  gar nicht und die übrigen genau einmal. Also ist

$$\alpha^{(n)} = \begin{cases} (0, \dots, 0) & \text{für } k = p - 1, \\ (1, \dots, 1, \alpha_k^{(n)} = 2, 1, \dots, 1, 0) & \text{für } k < p - 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

(Zur Erinnerung: die Einträge der Folge sind von 0 bis  $p - 1$  indiziert.) Wenn  $\lambda \vdash n$  im Hauptblock liegt, ist  $\alpha^\lambda = \alpha^{(n)}$ . Das bedeutet insbesondere: Eine Partition  $\mu \in \lambda+$  liegt genau dann im Hauptblock, wenn der hinzugefügte Knoten das Residuum  $(k + 1) \bmod p = n \bmod p$  hat. Denn dann ist die Vielfachheit von  $(k + 1) \bmod p$  als Endresiduum von  $\mu$  um 1 höher als bei  $\lambda$ , und die von  $k$  ist um 1 niedriger. Ebenso liegt  $\mu \in \lambda-$  genau dann im Hauptblock, wenn der entfernte Knoten das Residuum  $k$  besitzt. (Mit “Vielfachheit eines Endresiduums“ ist immer die Vielfachheit innerhalb der minimalen Endresiduenfolge gemeint. Diese Vielfachheiten werden durch die Folge  $\alpha^\lambda$  angegeben. Da uns allerdings nicht die genauen Vielfachheiten, sondern nur ihre Differenzen untereinander interessieren, arbeitet es sich leichter mit  $\alpha^\lambda$ .) Damit können wir zeigen, dass  $\mathcal{B}_0(p)$  die folgende Struktur hat:

**Satz 1.5.3** *Es sei  $\lambda \in \mathcal{B}_0(p)$  mit  $\lambda \vdash n$ .*

- (a) *Es existiert ein  $\mu \in \mathcal{B}_0(p) \cap \lambda+$ .*  
 (b) *Falls  $p \nmid n$  ist, existiert ein  $\mu \in \mathcal{B}_0(p) \cap \lambda-$ .*

*Beweis:* Es sei wie oben  $k := (n - 1) \bmod p$ .

- (a) Mit der obigen Argumentation ist ein  $\mu \in \lambda+$  gesucht, das aus  $\lambda$  durch Hinzufügen eines Knotens mit Residuum  $(k + 1) \bmod p$  hervorgeht. Wir müssen den neuen Knoten also zu einer Zeile mit Endresiduum  $k$  addieren, was genau dann geht, wenn die darüber liegende Zeile länger ist. (Hierbei nehmen wir  $\lambda_0 = \infty$  an, und wir betrachten auch leere Zeilen.)

Angenommen, über jeder Zeile von  $\lambda$  mit Endresiduum  $k$  läge eine genau so lange Zeile. Dann hätte jede dieser Zeilen das Endresiduum  $(k + 1) \bmod p$ . Das heißt, die Anzahl der Zeilen mit Endresiduum  $(k + 1) \bmod p$  wäre größer oder gleich der Anzahl der Zeilen mit Endresiduum  $k$ . Für  $k \neq p - 1$  führt dies unmittelbar zum Widerspruch, denn mit (1.17) ist die Vielfachheit von  $k$  größer als die aller anderen Endresiduen.

Für  $k = p - 1$  kommt jedes Endresiduum innerhalb der Zeilen 1 bis  $q^\lambda = \min\{q \in \mathbb{N}_0 \mid q \geq \ell(\lambda), p \mid q\}$  gleich oft vor. Falls  $\lambda_{q^\lambda} \neq 0$  ist, ist dies die letzte nicht-leere Zeile von  $\lambda$ , und die erste leere Zeile hat Endresiduum  $p - 1$ , was ein Widerspruch zur Annahme ist. Falls  $\lambda_{q^\lambda} = 0$  ist, führt dies ebenfalls zum Widerspruch: Dann hat  $\lambda_{q^\lambda}$  das Endresiduum 0, und gemäß unserer Annahme liegt über jeder Zeile mit Endresiduum  $p - 1$  eine Zeile mit Endresiduum 0. Damit kommt 0 innerhalb der Zeilen 1 bis  $q^\lambda$  einmal öfter als Endresiduum vor als  $p - 1$  statt genau so oft.

Also ist die Annahme falsch, das heißt,  $\lambda$  besitzt einen Nachfolger in  $\mathcal{B}_0(p)$ .

- (b) Nach Voraussetzung ist  $p \nmid n$ , das heißt, es ist  $k < p - 1$ . (Insbesondere ist dann gemäß (1.17) die Vielfachheit von  $p - 1$  als Endresiduum von  $\lambda$  kleiner als jede der übrigen.) Diesmal suchen wir in  $\lambda$  eine Ecke mit Residuum  $k$ , denn durch das Entfernen einer solche Ecke erhalten wir eine Partition aus  $\mathcal{B}_0(p) \cap \lambda-$ .

Angenommen, es gäbe keine solche Ecke. Das würde bedeuten: Unterhalb jeder Zeile mit Endresiduum  $k$  läge eine ebenso lange Zeile. Diese hätte dann jeweils das Endresiduum  $(k - 1) \bmod p$ . Für  $k > 0$  führt dies unmittelbar zum Widerspruch: Die Vielfachheit von  $k - 1$  wäre mindestens so hoch wie die von  $k$ , aber gemäß (1.17) ist sie echt kleiner.

Nun sei  $k = 0$ . Falls  $q^\lambda = \ell(\lambda)$  ist, können wir genau so argumentieren wie bei  $k > 0$ . Falls  $q^\lambda > \ell(\lambda)$  ist, ist die Zeile  $q^\lambda$  leer, hat also Endresiduum 0. Dies wäre innerhalb der ersten  $q^\lambda$  Zeilen die einzige mit Endresiduum 0, die nicht noch innerhalb dieser  $q^\lambda$  Zeilen von einer Zeile mit Endresiduum  $p - 1$  gefolgt würde. Damit wäre die Vielfachheit von 0 als Endresiduum um genau 1 höher als die von  $p - 1$ . Gemäß (1.17) ist sie aber um 2 höher.

Also ist die Annahme falsch, das heißt,  $\lambda$  besitzt einen Vorgänger in  $\mathcal{B}_0(p)$ . □

Man sieht schnell, dass wir in Teil (b) von Satz 1.5.3 den Fall  $p \mid n$  wirklich ausschließen müssen, wenn man zum Beispiel die Hakenpartitionen betrachtet. Andererseits existieren im Fall  $p \mid n$  auch Partitionen, die sehr wohl einen Vorgänger im Hauptblock haben, was sich zwangsläufig aus Teil (a) ergibt. Genauer gesagt: Falls  $p \mid n$  ist, so besitzt  $\lambda$  genau dann einen Vorgänger im Hauptblock, wenn eine Ecke mit Residuum  $p - 1$  existiert. Der einzige Unterschied zum Fall  $p \nmid n$  ist der, dass eine Ecke mit passendem Residuum nicht zwangsläufig existieren muss.

Falls wir in einem konkreten solchen Fall etwas über die Existenz eines Vorgängers im Hauptblock aussagen wollen, kommen wir meist nicht umhin, die Residuen in den Ecken zu bestimmen. In speziellen Fällen geht es allerdings auch schneller. Zum Beispiel: Wenn  $p \mid n$  und  $\lambda_1 < p - 1$  ist, kann kein Vorgänger von  $\lambda$  im Hauptblock liegen, da ein solcher den  $p$ -Kern  $(p - 1)$  haben müsste. In diesem Fall kann  $\lambda$  also keine Ecke mit Residuum  $p - 1$  besitzen. Außerdem gilt:

**Lemma 1.5.4** *Es sei  $p \mid n \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \in \mathcal{B}_0(p)$  mit  $\lambda \vdash n$ .*

- (a) *Ist  $\ell(\lambda) \equiv p - 1 \pmod{p}$ , so existiert ein  $\mu \in \lambda^-$  mit  $p$ -Kern  $(1^{p-1})$ .*
- (b) *Ist  $\lambda_1 \equiv p - 1 \pmod{p}$ , so existiert ein Vorgänger von  $\lambda$  in  $\mathcal{B}_0(p)$ .*

*Beweis:* Eigentlich interessiert uns nur Teil (b), aber dieser ist äquivalent zum leichter zu zeigenden Teil (a): Für  $p \mid n$  liegt  $\lambda$  genau dann im Hauptblock, wenn  $\lambda'$  im Hauptblock liegt. Außerdem ist  $\lambda_1 = \ell(\lambda')$ . Und  $\lambda'$  besitzt genau dann einen Vorgänger mit  $p$ -Kern  $(1^{p-1})$ , wenn  $\lambda$  einen Vorgänger mit  $p$ -Kern  $(p - 1) = (1^{p-1})'$  besitzt, der damit im Hauptblock liegt.

Zeigen wir also Teil (a): Gesucht ist ein  $\mu \in \lambda^-$  mit

$$\alpha^\mu = \alpha^{(1^{p-1})} = (2, 0, 1, \dots, 1).$$

Wegen  $\alpha^\lambda = (0, \dots, 0)$  müssen wir eine Ecke mit Residuum 1 aus  $\lambda$  entfernen, um  $\mu$  zu erhalten. Zu zeigen ist also, dass eine solche Ecke existiert.

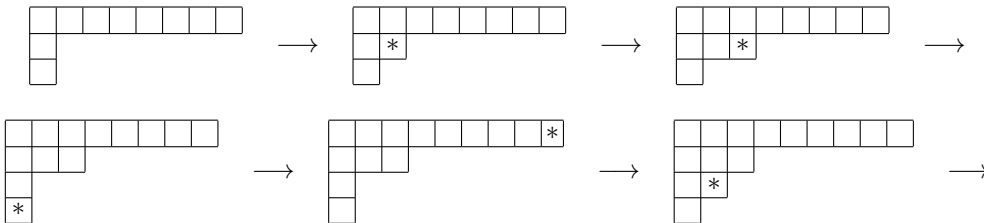
Wegen  $\ell(\lambda) \equiv p - 1 \pmod{p}$  ist die Zeile  $q^\lambda$  leer, hat also Endresiduum 0. Die Zeile  $q^\lambda - 1$  hingegen ist nicht leer. Wenn sie Endresiduum 1 hat, liegt dieses in einer Ecke. Wenn sie ein anderes Endresiduum hat, muss es weiter oben eine Zeile mit Endresiduum 1 geben, die nicht unmittelbar von einer Zeile mit Endresiduum 0 gefolgt wird, da die Vielfachheiten der Endresiduen 0 und 1 gleich sind. Damit haben wir eine Ecke mit Residuum 1, und die Behauptung folgt.  $\square$

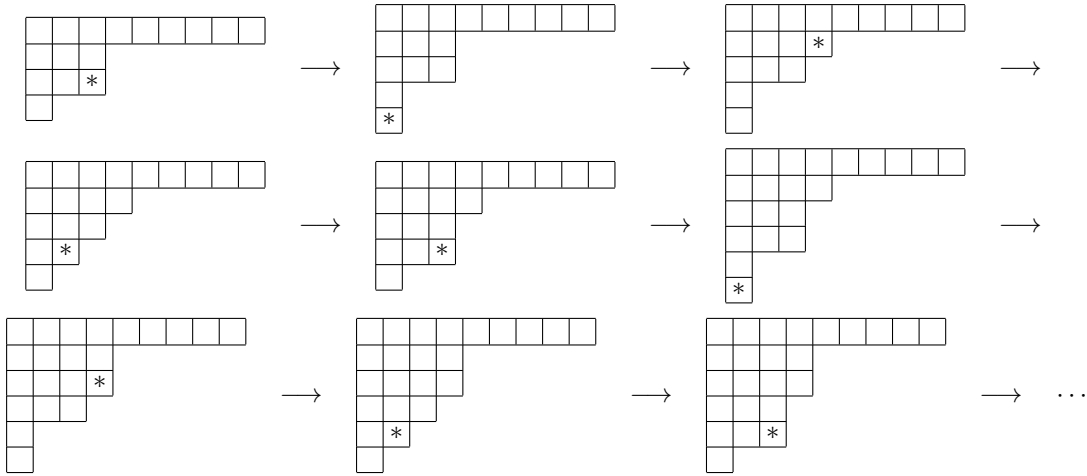
Im weiteren Verlauf werden die folgenden Mengen von Partitionen von großer Wichtigkeit sein:

**Definition 1.5.5** *Es sei  $2 < p \in \mathbb{P}$  mit  $p \mid n$ . Dann bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}_p(n)$  die Menge der folgenden Partitionen:*

- $(n - 2, j, 1)$  für  $1 \leq j \leq p - 2$ ,
- $(n - 2, p - 2, 1^2)$ ,
- $(n - 1, p - 2, j, 1)$  für  $1 \leq j \leq p - 2$ ,
- $(n - 1, (p - 2)^2, 1^2)$ ,
- $(n - 1, (p - 1)^x, p - 2, j, 1)$  für  $x \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq j \leq p - 2$ ,
- $(n - 1, (p - 1)^x, (p - 2)^2, 1^2)$  für  $x \in \mathbb{N}$ .

Die Bedeutung der  $\mathcal{P}_p(n)$  wird sich in Lemma 3.2.15 offenbaren. Es ist nicht schwer zu sehen, dass es sich hierbei um Pfade in  $\mathcal{Y}$  mit handelt: Für jedes  $m \geq n$  enthält  $\mathcal{P}_p(n)$  genau eine Partition von  $m$ . Die Wurzel des Pfades ist  $(n - 2, 1^2)$ , und die übrigen Partitionen erhält man durch folgenden Algorithmus: Man startet mit  $(n - 2, 1^2)$ , füllt sukzessive die vorletzte Zeile bis zur Länge  $p - 2$  mit Knoten auf, ergänzt dann einen Knoten in einer neuen Zeile unterhalb der Partition, dann einen Knoten in der nunmehr viertletzten Zeile, und iteriert diese Prozedur. Zur Veranschaulichung die graphische Darstellung des Beispiels  $p = 5$  und  $n = 10$ :





Es handelt sich allerdings nicht nur um einen Pfad in  $\mathcal{Y}$ :

**Lemma 1.5.6** *Es sei  $2 < p \in \mathbb{P}$  mit  $p \mid n$ . Dann ist  $\mathcal{P}_p(n)$  ein Pfad in  $\mathcal{B}_0(p)$ :*

*Beweis:* Wir zeigen, dass für jede Partition  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$  die Folge  $\alpha^\lambda$  gleich  $\alpha^{(n)}$  ist. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die gemäß dem oben beschriebenen Algorithmus hinzugefügten Knoten jeweils das richtige Residuum haben, also beim Hinzufügen an eine Partition  $\lambda \vdash m$  das Residuum  $m \bmod p$ . Zunächst sehen wir uns die ersten Schritte in den Pfaden an.

Der Fall  $p = 3$  ist insofern besonders, als hier das ‘‘Auffüllen der vorletzten Zeile‘‘ entfällt, da  $p - 2 = 1$  ist. Der Anfang der Pfade sieht daher so aus:

$i$	$\lambda \vdash n + i$	$\text{ER}(\lambda, 6)$	$\alpha^\lambda$
0	$(n - 2, 1^2)$	$(0, 2, 1, 2, 1, 0)$	$(0, 0, 0)$
1	$(n - 2, 1^3)$	$(0, 2, 1, 0, 1, 0)$	$(2, 1, 0)$
2	$(n - 1, 1^3)$	$(1, 2, 1, 0, 1, 0)$	$(1, 2, 0)$
3	$(n - 1, 1^4)$	$(1, 2, 1, 0, 2, 0)$	$(0, 0, 0)$
4	$(n - 1, 2, 1^3)$	$(1, 0, 1, 0, 2, 0)$	$(2, 1, 0)$
5	$(n - 1, 2, 1^4)$	$(1, 0, 1, 0, 2, 1)$	$(1, 2, 0)$
6	$(n - 1, 2^2, 1^3)$	$(1, 0, 2, 0, 2, 1)$	$(0, 0, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Hauptsächlich aus Gründen der Tabellengestaltung sehen wir uns auch den Fall  $p = 5$  vorab gesondert an. Der Anfang der Pfade für  $p = 5$  sieht so aus:

$i$	$\lambda \vdash n + i$	$\text{ER}(\lambda, 5)$	$\alpha^\lambda$
0	$(n - 2, 1^2)$	$(2, 4, 3, 1, 0)$	$(0, 0, 0, 0, 0)$
1	$(n - 2, 2, 1)$	$(2, 0, 3, 1, 0)$	$(2, 1, 1, 1, 0)$
2	$(n - 2, 3, 1)$	$(2, 1, 3, 1, 0)$	$(1, 2, 1, 1, 0)$
3	$(n - 2, 3, 1^2)$	$(2, 1, 3, 2, 0)$	$(1, 1, 2, 1, 0)$
4	$(n - 1, 3, 1^2)$	$(3, 1, 3, 2, 0)$	$(1, 1, 1, 2, 0)$
5	$(n - 1, 3, 2, 1)$	$(3, 1, 4, 2, 0)$	$(0, 0, 0, 0, 0)$
6	$(n - 1, 3^2, 1)$	$(3, 1, 0, 2, 0)$	$(2, 1, 1, 1, 0)$
7	$(n - 1, 3, 3, 1^2)$	$(3, 1, 0, 2, 1)$	$(1, 2, 1, 1, 0)$
8	$(n - 1, 4, 3, 1^2)$	$(3, 2, 0, 2, 1)$	$(1, 1, 2, 1, 0)$
9	$(n - 1, 4, 3, 2, 1)$	$(3, 2, 0, 3, 1)$	$(1, 1, 1, 2, 0)$
10	$(n - 1, 4, 3^2, 1)$	$(3, 2, 0, 4, 1)$	$(0, 0, 0, 0, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$



Für  $p > 5$  sieht der Anfang der Pfade so aus:

$i$	$\lambda \vdash n+i$	$ER(\lambda, p)$	$\alpha^\lambda$
0	$(n-2, 1^2)$	$(p-3, p-1, p-2, p-4, \dots, 0)$	$(0, \dots, 0)$
1	$(n-2, 2, 1)$	$(p-3, 0, p-2, p-4, \dots, 0)$	$(2, 1, \dots, 1, 0)$
2	$(n-2, 3, 1)$	$(p-3, 1, p-2, p-4, \dots, 0)$	$(1, 2, 1, \dots, 1, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p-3$	$(n-2, p-2, 1)$	$(p-3, p-4, p-2, p-4, \dots, 0)$	$(1, \dots, 1, 2, 1, 1, 0)$
$p-2$	$(n-2, p-2, 1^2)$	$(p-3, p-4, p-2, p-3, p-5, \dots, 0)$	$(1, \dots, 1, 2, 1, 0)$
$p-1$	$(n-1, p-2, 1^2)$	$(p-2, p-4, p-2, p-3, p-5, \dots, 0)$	$(1, \dots, 1, 2, 0)$
$p$	$(n-1, p-2, 2, 1)$	$(p-2, p-4, p-1, p-3, p-5, \dots, 0)$	$(0, \dots, 0)$
$p+1$	$(n-1, p-2, 3, 1)$	$(p-2, p-4, 0, p-3, p-5, \dots, 0)$	$(2, 1, \dots, 1, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2p-4$	$(n-1, p-2^2, 1)$	$(p-2, p-4, p-5, p-3, p-5, \dots, 0)$	$(1, \dots, 1, 2, 1, 1, 1, 0)$
$2p-3$	$(n-1, p-2^2, 1^2)$	$(p-2, p-4, p-5, p-3, p-4, p-6, \dots, 0)$	$(1, \dots, 1, 2, 1, 1, 0)$
$2p-2$	$(n-1, p-1, p-2, 1^2)$	$(p-2, p-3, p-5, p-3, p-4, p-6, \dots, 0)$	$(1, \dots, 1, 2, 1, 0)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Man sieht, dass mindestens bis zur Höhe  $n+2p-2$  die Folgen  $\alpha^\lambda$  die Gestalt aus (1.17) haben und damit zum Hauptblock gehören.

Ab der Höhe  $n+2p-2$  hat die erste Zeile jeder Partition im Pfad die Länge  $n-1$  und die zweite Zeile die Länge  $p-1$ . Außerdem ist ab dann  $\ell(\lambda) \geq 5$ , und es werden immer nur Knoten innerhalb der letzten vier Zeilen oder unterhalb der Partition ergänzt. Darum genügt es, die letzten Zeilen der Partitionen zu betrachten.

Es sei  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i \geq 2p-2$  mit  $p-1 \mid i$ , und wir betrachten die Partition von  $n+i$  aus  $\mathcal{P}_p(n)$ . Wir nehmen per Induktion an, dass sie im Hauptblock liegt, und dass ihre letzten vier Zeilen folgende Gestalt und folgende Residuen haben:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 \vdots & & & & \vdots \\
 \hline
 i+1 & i+2 & \cdots & i+p-2 & i+p-1 \\
 \hline
 i & i+1 & \cdots & i+p-3 & \\
 \hline
 i-1 & & & & \\
 \hline
 i-2 & & & & \\
 \hline
 \end{array} \\
 i-4 \left|
 \end{array}$$

(Die Einträge sind alle modulo  $p$  zu lesen.) Dass dies für  $i = 2p-2$  gilt, haben wir bereits oben ausgerechnet. Jetzt zeigen wir, dass wir durch das Hinzufügen von Knoten an den entsprechenden Stellen nach  $p-1$  Schritten bei einer Partition von  $n+i+p-1$  landen, deren letzten vier Zeilen die gleiche Gestalt haben.

Der erste hinzugefügte Knoten muss das Residuum  $n+i \bmod p = i \bmod p$  haben, der nächste  $i+1 \bmod p$  und so weiter. Innerhalb der ersten  $p-3$  Schritte passt das jeweils zu ergänzende Endresiduum immer in die vorletzte Zeile. Nach  $p-3$  Schritten landen wir also bei

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|}
 \hline
 \vdots & & & & \vdots \\
 \hline
 i+1 & i+2 & \cdots & i-2 & i-1 \\
 \hline
 i & i+1 & \cdots & i-3 & \\
 \hline
 i-1 & i & \cdots & i-4 & \\
 \hline
 i-2 & & & & \\
 \hline
 \end{array} \\
 i-4 \left|
 \end{array}$$

In den nun folgenden Schritten  $p-2$  und  $p-1$  werden ein Residuum  $i-3 \bmod p$  und  $i-2 \bmod p$

ergänzt, und wir landen bei

$i - 5$		$\vdots$				$\vdots$	
		</					

ist. Daraus folgt

$$k_i = ip - (p-1)x_i - p = (p-1)(i-1-x_i) + (i-1).$$

Wegen  $k_i \in \{0, \dots, p-2\}$  erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen, dass

$$x_i \bmod p = k_i = (i-1) \bmod (p-1)$$

ist. Das bedeutet insbesondere, dass der Fall  $x_i \equiv p-1 \pmod{p}$  nicht auftritt. Da wir  $k_i$  sowohl in Abhängigkeit von  $i$  als auch in Abhängigkeit von  $x_i$  bestimmen können, ist die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \not\equiv p-1 \pmod{p}\}, \quad i \mapsto x_i = \frac{p(i-1) - k_i}{p-1}$$

eine Bijektion (mit Umkehrabbildung  $j \mapsto ((p-1)j + (j \bmod p))/p + 1$ ). Insgesamt sind also die “bösen“ Partitionen, deren erste Zeile Länge  $n$  hat, gegeben durch

- (a)  $(n, (p-1)^x, p-2, 1+k, 1)$  für  $x \in \mathbb{N}_0, k = x \bmod p \in \{0, \dots, p-3\}$ ,
- (b)  $(n, (p-1)^x, (p-2)^2, 1^2)$  für  $x \in \mathbb{N}, x \equiv p-2 \pmod{p}$ .

Um in der zweiten Zeile aus den ersten  $p-1$  Spalten herauszufallen, muss erstens  $n > p$  sein, damit die erste Zeile länger als  $p-1$  ist, und zweitens geht das frühestens nach  $(n-1, p-1, p-2, 1^2) \vdash n+2p-2$ , da hier die zweite Zeile erstmals die Länge  $p-1$  erreicht. Ihr Endresiduum ist dann  $p-3$ , dahinter kann man also einen Knoten mit Residuum  $p-2$  ergänzen. Daher sind die “bösen“ Partitionen, deren zweite Zeile Länge  $p$  hat, Partitionen von  $n+ip-1$  mit  $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ . Für jedes solche  $i$  hat die entsprechende “böse“ Partition die Gestalt  $(n-1, p, (p-1)^{x_i}, p-2, k_i+1, 1)$  bzw.  $(n-1, p, (p-1)^{x_i}, (p-2)^2, 1^2)$  für ein  $x_i \in \mathbb{N}_0$  und ein  $k_i \in \{0, \dots, p-3\}$ . Diesmal sind  $x_i$  und  $k_i$  folgendermaßen gegeben:

Falls die “böse“ Partition die Gestalt  $(n-1, p, (p-1)^{x_i}, (p-2)^2, 1^2)$  hat, setzen wir  $k_i := p-2$ . Dann erhalten wir in jedem der beiden Fälle aus der obigen Darstellung der “bösen“ Partitionen, dass

$$n+ip-1 = n-1+p+(p-1)x_i+p+k_i = n-1+p(x_i+2)-x_i+k_i$$

ist. Daraus folgt

$$k_i = ip - (p-1)x_i - 2p = (p-1)(i-2-x_i) + (i-2).$$

Wegen  $k_i \in \{0, \dots, p-2\}$  erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen, dass

$$x_i \bmod p = k_i = (i-2) \bmod (p-1)$$

ist. Also tritt auch hier der Fall  $x_i \equiv p-1 \pmod{p}$  nicht auf, und analog zu oben ist die Abbildung

$$\psi : \mathbb{N} \setminus \{1\} \longrightarrow \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \not\equiv p-1 \pmod{p}\}, \quad i \mapsto x_i = \frac{p(i-2) - k_i}{p-1}$$

eine Bijektion (mit Umkehrabbildung  $j \mapsto ((p-1)j + (j \bmod p))/p + 2$ ). Insgesamt sind also die “bösen“ Partitionen, deren zweite Zeile Länge  $p$  hat, gegeben durch

- (a)  $(n-1, p, (p-1)^x, p-2, k+1, 1)$  für  $x \in \mathbb{N}_0, k = x \bmod p \in \{0, \dots, p-3\}$ ,
- (b)  $(n-1, p, (p-1)^x, (p-2)^2, 1^2)$  für  $x \in \mathbb{N}, x \equiv p-2 \pmod{p}$

für  $n > p$ . Insgesamt gilt also:

**Lemma 1.5.7** *Es sei  $2 < p \in \mathbb{P}$  mit  $p \mid n$ . Folgende Partitionen liegen in  $\mathcal{B}_0(p) \setminus \mathcal{P}_p(n)$  und sind Nachfolger einer Partition aus  $\mathcal{P}_p(n)$ :*

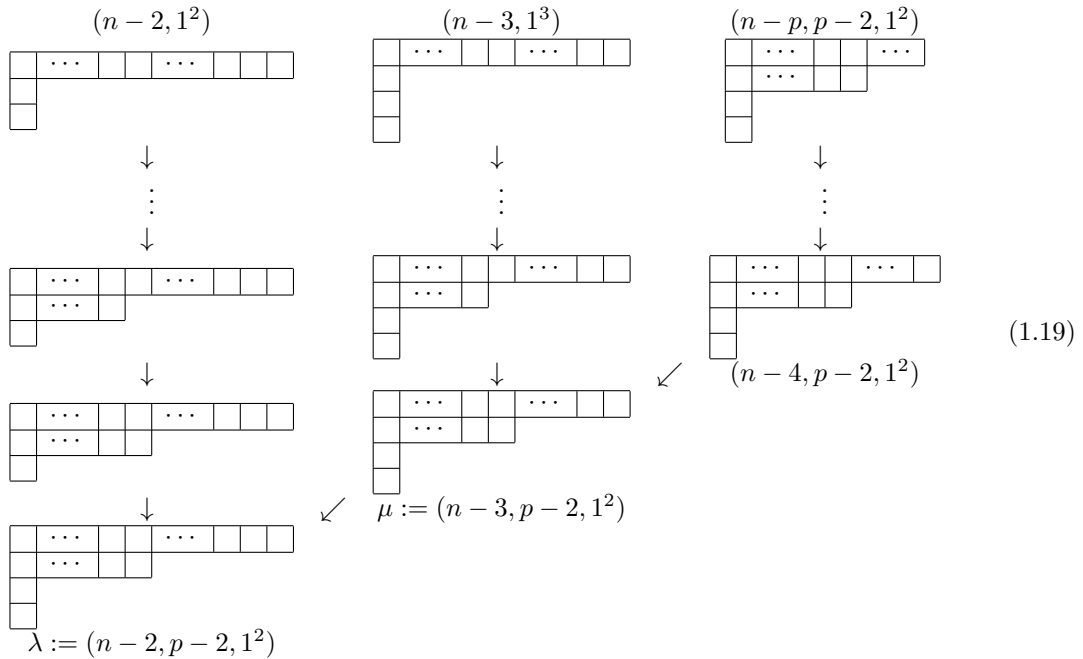
- $(n-2, p-1, 1) \vdash n+p-2$  für  $n > p$ ,
- $(n, (p-1)^x, p-2, k+1, 1) \vdash m \equiv 0 \pmod{p}$  für  $x \in \mathbb{N}_0$ ,  $k = x \bmod p \in \{0, \dots, p-3\}$ ,
- $(n, (p-1)^x, (p-2)^2, 1^2) \vdash m \equiv 0 \pmod{p}$  für  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \equiv p-2 \pmod{p}$ ,
- $(n-1, p, (p-1)^x, p-2, k+1, 1) \vdash m \equiv -1 \pmod{p}$  für  $n > p$ ,  $x \in \mathbb{N}_0$ ,  $k = x \bmod p \in \{0, \dots, p-3\}$ ,
- $(n-1, p, (p-1)^x, (p-2)^2, 1^2) \vdash m \equiv -1 \pmod{p}$  für  $n > p$  und  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x \equiv p-2 \pmod{p}$ .

Schließlich suchen wir noch, wie angekündigt, die “bösen“ Vorgänger. Wie wir bereits festgestellt haben, sind bei jeder Partition im Pfad innerhalb der ersten  $p-1$  Spalten alle Endresiduen und damit insbesondere auch die Residuen der Ecken paarweise verschieden. Wenn wir also den Pfad durch Entfernen einer Ecke verlassen wollen, geht das nur, wenn diese Ecke außerhalb der ersten  $p-1$  Spalten liegt.

Für  $n = p$  ist das niemals der Fall, also laufen keine Pfade aus  $\mathcal{B}_0(p)$  in  $\mathcal{P}_p(p)$  hinein. Für  $n > p$  ragt einzig die erste Zeile über die ersten  $p-1$  Spalten hinaus. Falls sie die Länge  $n-1$  hat, ist ihr Endresiduum  $p-2$ . Diese Ecke kann daher nur aus einer Partition  $\lambda \vdash n+i$  mit  $i \geq p-1$  und  $i \equiv p-1 \pmod{p}$  entfernt werden. Für  $i = p-1$  bleiben wir damit im Pfad, für  $i > p-1$  landen wir bei der Partition

$$\lambda - 1 \vdash n + i - 1. \quad (1.18)$$

Dabei ist  $n+i-1 \equiv -2 \pmod{p}$ . Mehr Information zur späteren Verwendung benötigen wir in diesem Fall nicht. Es bleibt noch die Situation zu betrachten, dass (für  $n > p$ ) die erste Zeile Länge  $n-2$  und damit Endresiduum  $p-3$  hat. Dann gibt es genau eine kritische Stelle, an der folgende Pfade aus  $\mathcal{B}_0(p)$  zusammenlaufen:



Die Partition  $\lambda \vdash n+p-2$  hat zwei Ecken mit Endresiduum  $p-3$ . Für  $p = 3$  ist  $(n-3, 1^3) = \mu = (n-p, p-2, 1^2)$ . Für  $p > 3$  hat die Partition  $\mu$  zwei Ecken mit Endresiduum  $p-4$ . Alle Partitionen, die darüber liegen, haben nur Ecken mit paarweise verschiedenen Endresiduen, darum sind ihre Vorgänger in  $\mathcal{B}_0(p)$  eindeutig bestimmt. Die Partitionen  $(n-3, 1^3)$  und  $(n-p, p-2, 1^2)$  können abhängig von  $n$  und  $p$  einen Vorgänger in  $\mathcal{B}_0(p)$  besitzen, aber für unsere Zwecke ist das irrelevant.

Diese Informationen werden im Zusammenhang mit Lemma 3.2.15 noch eine wichtige Rolle spielen. Zuvor jedoch werden wir uns mit dem Thema Kohomologie auseinandersetzen.

# Kapitel 2

## Kohomologie

Dieses Kapitel umreißt die für diese Arbeit benötigten Grundlagen aus der homologischen Algebra. Um den Rahmen nicht zu sprengen, müssen wir darauf verzichten, so tief in die Hintergründe einzutauchen, wie das an manchen Stellen vielleicht wünschenswert wäre. Für mehr Details sei auf die Werke [Wei94], [Ben98] und [Eve91] verwiesen, auf denen ein Großteil dieses Kapitels basiert.

Der Abschnitt 2.1 führt die wichtigsten Begriffe und Notationen ein, gibt eine Motivation, warum wir uns überhaupt mit Kohomologie beschäftigen, und stellt einige zentrale Sachverhalte vor, die wir später bei der konkreten Bestimmung von Kohomologie nutzen werden. Anderen zentralen Sachverhalten gestehen wir aufgrund ihrer besonderen Bedeutung für die vorliegende Arbeit eigene Unterkapitel zu: In Abschnitt 2.2 wird die Kohomologie über  $\mathbb{F}_p$  in Beziehung zur Kohomologie über  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_{(p)}$  und  $\mathbb{Z}_p$  gesetzt. In Abschnitt 2.3 beschäftigen wir uns mit der Kohomologie zyklischer Gruppen. Und in Abschnitt 2.4 werden das sogenannte Zassenhaus-Verfahren sowie einige verwandte Methoden zur Bestimmung der Kohomologie von kleinem Grad vorgestellt. Abschließend wird in Abschnitt 2.5 die Marschrichtung in Bezug auf die Untersuchung der Kohomologie der symmetrischen Gruppen vorgegeben. Die Vorarbeit hierzu wurde in [Web06] und [Web09a] geleistet.

Wie schon im ersten Kapitel werden wir der Bequemlichkeit halber viele Aussagen nicht in größtmöglicher Allgemeinheit formulieren, um so ein paar Grundvoraussetzungen die ganze Zeit beibehalten zu können. Im ganzen Kapitel sei  $G$  eine endliche Gruppe,  $R$  ein Integritätsbereich und  $V$  und  $W$  zwei endlich erzeugte  $RG$ -Moduln.

Die skalare Multiplikation mit  $x \in RG$  ist ein Endomorphismus auf  $V$ . Falls  $V$  ein  $RG$ -Gitter vom Rang  $k \in \mathbb{N}$  ist, erhalten wir eine Matrixdarstellung  $\Phi : RG \rightarrow R^{k \times k}$ , indem wir jedes  $x \in RG$  auf die zugehörige Abbildungsmatrix bezüglich einer fest gewählten  $R$ -Basis von  $V$  abbilden. Der Einfachheit halber werden wir des öfteren ein  $RG$ -Gitter  $V$  mit  $R^k$  identifizieren, indem wir jedes  $v \in V$  mit seiner Koordinatenspalte bezüglich einer fest gewählten  $R$ -Basis von  $V$  gleichsetzen. Dann ist  $g.v = \Phi(g).v$  für alle  $g \in G$ .

### 2.1 Ein allgemeiner Überblick

Ein *Kettenkomplex*  $\mathbf{C}_\bullet := \{C_n, d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ist eine Familie von  $RG$ -Moduln  $C_n$  zusammen mit  $RG$ -Modul-Homomorphismen  $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , so dass die Komposition  $d_{n-1} \circ d_n = 0$  ist für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Ein *Kokettenkomplex*  $\mathbf{C}^\bullet := \{C^n, d^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  ist eine Familie von  $RG$ -Moduln  $C^n$  zusammen mit  $RG$ -Modul-Homomorphismen  $d^n : C^n \rightarrow C^{n+1}$ , so dass die Komposition  $d^{n+1} \circ d^n = 0$  ist für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Wir erhalten offensichtlich aus dem Kettenkomplex  $\mathbf{C}_\bullet$  einen Kokettenkomplex, indem wir  $C^n := C_{-n}$  und  $d^n := d_{-n}$  setzen. Es handelt sich also im Prinzip um die gleichen Objekte, es ist nur je nach Zusammenhang die eine oder andere Notation intuitiver. Den Punkt  $\bullet$  werden wir bei der Notation künftig weglassen; die Gefahr von Missverständnissen sollte nicht bestehen.

Es sei  $\mathbf{C}$  ein Kokettenkomplex. Wir nennen die Elemente von  $Z^n(\mathbf{C}) := \text{Kern}(d^n)$  die *n-Kozykel*

und die von  $B^n(\mathbf{C}) := \text{Bild}(d^{n-1})$  die  $n$ -Koränder von  $\mathbf{C}$ . Wegen  $d^n \circ d^{n-1} = 0$  ist  $B^n(\mathbf{C}) \subseteq Z^n(\mathbf{C})$ . Wir nennen  $H^n(\mathbf{C}) := Z^n(\mathbf{C})/B^n(\mathbf{C})$  den  $n$ -ten Kohomologiemodul von  $\mathbf{C}$ . (Man definiert analog für Kettenkomplexe Zykel, Ränder und Homologiemoduln, aber hier werden wir uns damit nicht weiter befassen.) Falls  $\text{Bild}(d^{n-1}) = \text{Kern}(d^n)$  ist für alle  $n \in \mathbb{Z}$ , nennen wir  $\mathbf{C}$  *exakt*.

Allgemeiner nennen wir auch eine endliche Folge von  $RG$ -Modul-Homomorphismen

$$V_0 \xrightarrow{\varphi_0} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} \dots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\varphi_n} V_{n+1}$$

eine *exakte Sequenz*, wenn  $\text{Bild}(\varphi_i) = \text{Kern}(\varphi_{i+1})$  ist für  $0 \leq i \leq n$ . Insbesondere nennen wir eine solche Folge mit  $n = 3$  und  $V_0 = V_4 = 0$  eine *kurze exakte Sequenz*:

$$0 \xrightarrow{\varphi_0} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} V_3 \xrightarrow{\varphi_3} 0.$$

Wegen der Exaktheit sind dann  $\varphi_0$  und  $\varphi_3$  jeweils eine Nullabbildung, und damit ist  $\varphi_1$  injektiv und  $\varphi_2$  surjektiv. Falls auch  $V_3 = 0$  ist, ist  $\varphi_1$  ein Isomorphismus. (Falls die Homomorphismen  $\varphi_i$  aus dem Zusammenhang klar oder nicht relevant sind, können wir sie in der Notation der Sequenz auch weglassen.)

Der  $RG$ -Modul  $V$  heißt *projektiv*, wenn gilt: Für jeden Homomorphismus  $f : V \rightarrow B$  und jeden Epimorphismus  $g : A \rightarrow B$  existiert ein Homomorphismus  $\varphi : V \rightarrow A$  mit  $f = g \circ \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ & \swarrow \exists \varphi & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Mit [Wei94], Proposition 2.2.1, ist  $V$  genau dann projektiv, wenn er ein direkter Summand eines freien  $RG$ -Moduls  $M$  ist. (Dann ist  $V^*$  als direkter Summand des freien  $RG$ -Moduls  $M^*$  ebenfalls projektiv.)

Der  $R$ -Modul  $V$  heißt *injektiv*, wenn gilt: Für jeden Homomorphismus  $f : A \rightarrow V$  und jeden Monomorphismus  $g : A \rightarrow B$  existiert ein Homomorphismus  $\varphi : B \rightarrow V$  mit  $f = \varphi \circ g$ .

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{g} & B \\ & & \downarrow f & \swarrow \exists \varphi & \\ & & V & & \end{array}$$

Eine *projektive Auflösung* von  $V$  ist ein Kettenkomplex  $\mathbf{P}$ , so dass  $P_n$  projektiv für  $n \geq 0$  und gleich 0 für  $n < 0$  ist, und ein Homomorphismus  $P_0 \rightarrow V$  existiert, für den der Komplex

$$\dots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow V \longrightarrow 0$$

exakt ist. Mit [Wei94], Lemma 2.2.5, besitzt  $V$  eine projektive Auflösung. Der kontravariante Hom-Funktor  $\text{Hom}_{RG}(-, W)$  ist links exakt; damit erhalten wir einen Kokettenkomplex  $\text{Hom}_{RG}(\mathbf{P}, W)$  durch

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(P_0, W) \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(P_1, W) \longrightarrow \dots,$$

der in  $0 \rightarrow \text{Hom}_{RG}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{RG}(P_0, W)$  exakt ist.

Eine *injektive Auflösung* von  $W$  ist ein Kettenkomplex  $\mathbf{I}$ , so dass  $I^n$  injektiv für  $n \geq 0$  und gleich 0 für  $n < 0$  ist, und ein Homomorphismus  $W \rightarrow I^0$  existiert, für den der Komplex

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow \dots$$

exakt ist. Mit [Wei94], Lemma 2.3.6 und Exercise 2.3.5, besitzt  $W$  eine injektive Auflösung. Der kovariante Hom-Funktor  $\text{Hom}_{RG}(V, -)$  ist links exakt; damit erhalten wir einen Kokettenkomplex  $\text{Hom}_{RG}(V, \mathbf{I})$  durch

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(V, W) \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(V, I^0) \longrightarrow \text{Hom}_{RG}(V, I^1) \longrightarrow \dots,$$

der in  $0 \rightarrow \text{Hom}_{RG}(V, W) \rightarrow \text{Hom}_{RG}(V, I^0)$  exakt ist.

Wir definieren die  $i$ -te Ext-Gruppe durch  $\text{Ext}_{RG}^i(V, W) := H^i(\text{Hom}_{RG}(V, \mathbf{I}))$  für  $i \in \mathbb{N}_0$ . Dabei ist  $\text{Ext}_{RG}^i(V, W)$  mit Abschnitt 2.5.1 aus [Wei94] unabhängig von der Wahl der injektiven Auflösung.

Man kann die Ext-Gruppen auch mit Hilfe von projektiven Auflösungen definieren, wie es zum Beispiel in [Ben98], Abschnitt 2.4, geschieht. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Herangehensweisen wird im folgenden Satz beschrieben.

**Satz 2.1.1** ([Wei94], Theorem 2.7.6) *Es sei  $\mathbf{P}$  eine projektive Auflösung von  $V$  und  $\mathbf{I}$  eine injektive Auflösung von  $W$ . Dann gilt (unabhängig von der Wahl von  $I$  und  $P$ ) für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ :*

$$\text{Ext}_{RG}^i(V, W) = H^i(\text{Hom}_{RG}(V, \mathbf{I})) \cong H^i(\text{Hom}_{RG}(\mathbf{P}, W)).$$

Per Konstruktion ist klar, dass  $\text{Ext}_{RG}^0(V, W) \cong \text{Hom}_{RG}(V, W)$  ist. Für  $i > 0$  können die Ext-Gruppen so interpretiert werden, dass  $\text{Ext}_{RG}^i(V, W)$  die  $i$ -fachen Erweiterungen von  $V$  mit  $W$  ‘‘zählt‘‘. Was genau es damit auf sich hat, kann man zum Beispiel in [Wei94], Vista 3.4.6, oder Abschnitt 2.6 von [Ben98] nachlesen. Hier werden wir uns nur den Fall der einfachen Erweiterungen klar machen.

Zuvor jedoch muss noch folgender Sachverhalt festgehalten werden: Eine kurze exakte Sequenz von  $RG$ -Moduln  $0 \rightarrow M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow 0$  induziert die lange exakte Ext-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{RG}(V, M_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{RG}(V, M_1) & \longrightarrow & \text{Hom}_{RG}(V, M_2) \\ & & \longrightarrow & & \cdots & \longrightarrow & \text{Ext}_{RG}^{i-1}(V, M_2) \\ & & \longrightarrow & & \text{Ext}_{RG}^i(V, M_1) & \longrightarrow & \text{Ext}_{RG}^i(V, M_2) \longrightarrow \cdots \end{array} \quad (2.1)$$

Eine Erklärung dazu findet sich in [Ben98], Proposition 2.5.3.

Kommen wir nun zur Interpretation von  $\text{Ext}_{RG}^1(V, W)$ . Eine (*einfache*) Erweiterung  $\xi$  von  $V$  mit  $W$  ist eine kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow W \rightarrow X \rightarrow V \rightarrow 0$ . (Dabei ist insbesondere  $X$  ein  $RG$ -Modul, der einen Untermodul isomorph zu  $W$  enthält, so dass der zugehörige Faktormodul isomorph zu  $V$  ist.) Zwei solche Erweiterungen  $\xi$  und  $\xi'$  heißen äquivalent, wenn ein kommutatives Diagramm von dieser Gestalt existiert:

$$\begin{array}{ccccccc} \xi : & 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & X & \longrightarrow & V & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \text{id} & \circlearrowleft & \downarrow \cong & \circlearrowleft & \downarrow \text{id} & & \\ \xi' : & 0 & \longrightarrow & W & \longrightarrow & X' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Isomorphie zwischen  $X$  und  $X'$  eine zwar notwendige, aber keineswegs hinreichende Bedingung für die Äquivalenz der beiden Erweiterungen ist. Für uns wird häufig die genaue Äquivalenzklasse keine Rolle spielen. In solchen Fällen werden wir allein  $X$  als Erweiterung von  $V$  mit  $W$  bezeichnen, und die in der zugehörigen exakten Sequenz gespeicherte zusätzliche Information unter den Tisch fallen lassen. Vorerst jedoch arbeiten wir mit der strikten Definition.

Eine Erweiterung von  $V$  mit  $W$  heißt *trivial* (‘‘split‘‘), wenn sie äquivalent ist zu  $0 \rightarrow W \rightarrow V \oplus W \xrightarrow{\pi} V \rightarrow 0$ , wobei  $\pi$  die Projektion auf  $V$  ist.

Wir wollen eine Beziehung zwischen den Äquivalenzklassen von Erweiterungen von  $V$  mit  $W$  und der Gruppe  $\text{Ext}_{RG}^1(V, W)$  herstellen. Zu diesem Zweck definieren wir zunächst die sogenannte

Baer-Summe zweier Erweiterungen  $\xi : 0 \rightarrow W \xrightarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{\pi} V \rightarrow 0$  und  $\xi' : 0 \rightarrow W \xrightarrow{\varepsilon'} X' \xrightarrow{\pi'} V \rightarrow 0$ . Dabei handelt es sich um die Erweiterung

$$\xi + \xi' := 0 \longrightarrow W \xrightarrow{\varepsilon''} X''/W' \xrightarrow{\pi''} V \longrightarrow 0, \quad (2.2)$$

die folgendermaßen gegeben ist:

$$\begin{aligned} X'' &:= \{(x, x') \in X \oplus X' \mid \pi(x) = \pi'(x')\}, \\ W' &:= \{(-\varepsilon(w), \varepsilon'(w)) \mid w \in W\}, \\ \varepsilon'' &:= W \longrightarrow X''/W', \quad w \mapsto (\varepsilon(w), 0) + W' = (0, \varepsilon'(w)) + W', \\ \pi'' &:= X''/W' \longrightarrow V, \quad (x, x') + W' \mapsto \pi(x) = \pi'(x'). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\pi''$  ist wohldefiniert, da  $\text{Bild}(\varepsilon) = \text{Kern}(\pi)$  ist (bzw.  $\text{Bild}(\varepsilon') = \text{Kern}(\pi')$ ). Aus der Surjektivität von  $\pi$  folgt, dass auch  $\pi''$  surjektiv ist, und aus der Injektivität von  $\varepsilon$  ergibt sich die von  $\varepsilon''$ . Schließlich ist  $\text{Bild}(\varepsilon'') = (\varepsilon(W) \oplus \varepsilon'(W))/W' = \text{Kern}(\pi'')$ . Damit handelt es sich bei  $\xi + \xi'$  also tatsächlich um eine Erweiterung von  $V$  mit  $W$ .

Des Weiteren benötigen wir die Abbildung  $\Theta$ , die wir folgendermaßen erhalten: Eine Erweiterung  $\xi$  von  $V$  mit  $W$  induziert mit (2.1) eine Abbildung  $\delta : \text{Hom}_{RG}(V, V) \rightarrow \text{Ext}_{RG}^1(V, W)$ . Wir setzen  $\Theta(\xi) := \delta(\text{id}_V)$ . Damit können wir nun die gewünschte Beziehung herstellen:

**Satz 2.1.2** *Die Menge  $\text{ext}(V, W)$  der Äquivalenzklassen von Erweiterungen von  $V$  mit  $W$  wird durch die vertreterweise definierte Baer-Summe zur abelschen Gruppe, und durch die vertreterweise angewendete Abbildung  $\Theta$  wird ein Isomorphismus abelscher Gruppen zwischen  $\text{ext}(V, W)$  und  $\text{Ext}_{RG}^1(V, W)$  definiert, der die Äquivalenzklasse der trivialen Erweiterungen auf 0 abbildet.*

*Beweis:* Der Satz ist eine Zusammenfassung der Aussagen aus [Wei94], Lemma 3.4.1, Theorem 3.4.3 und Corollary 3.4.5.  $\square$

Unter gewissen Voraussetzungen können alle nichttrivialen Erweiterungen von  $V$  mit  $W$  mit ein und demselben  $X$  realisiert werden können. Das besagt die nächste bekannte Folgerung, für die hier ein Beweis ausformuliert wird, da nur schwer Quellen dafür zu finden sind.

**Folgerung 2.1.3** *Es sei  $\text{Ext}_{RG}^1(V, W)$  (und damit auch  $\text{ext}(V, W)$ ) zyklisch von Ordnung  $p \in \mathbb{P}$ . Für  $1 \leq r \leq p-1$  sei  $r = r \cdot 1 \in R$  invertierbar (also zum Beispiel  $R = \mathbb{Z}_p$  oder ein Körper der Charakteristik  $p$ ). Die Erweiterung  $\xi : 0 \rightarrow W \xrightarrow{\varepsilon} X \xrightarrow{\pi} V \rightarrow 0$  sei Vertreter eines Erzeugers von  $\text{ext}(V, W)$ . Dann ist durch*

$$\xi_r := 0 \longrightarrow W \xrightarrow{r^{-1}\varepsilon} X \xrightarrow{\pi} V \longrightarrow 0$$

für  $1 \leq r \leq p-1$  ein Vertretersystem für die Äquivalenzklassen nichttrivialer Erweiterungen von  $V$  mit  $W$  gegeben. Insbesondere ist jede nichttriviale Erweiterung  $X'$  isomorph zu  $X$ .

*Beweis:* Dass es sich bei den  $\xi_r$  um Erweiterungen handelt, ist klar, da  $r^{-1}\varepsilon(W) = \varepsilon(r^{-1}W) = \varepsilon(W)$  ist. Nach Voraussetzung ist  $\text{ext}(V, W) \setminus \{0\} = \{\overline{r\xi} \mid 1 \leq r \leq p-1\}$ . Wir zeigen per Induktion über  $r$ , dass die  $r$ -fache Baer-Summe  $r \cdot \xi = \xi + \dots + \xi$ , geschrieben als

$$r\xi : 0 \longrightarrow W \xrightarrow{\varepsilon_r} X_r \xrightarrow{\pi_r} V \longrightarrow 0,$$

für  $1 \leq r \leq p-1$  äquivalent zu  $\xi_r$  ist. Für  $r = 1$  ist dies klar: Es ist  $\xi_1 = \xi$ . Jetzt nehmen wir an, dass die Aussage für ein  $r$  zwischen 1 und  $p-2$  gezeigt sei. Damit existiert ein Isomorphismus  $\varphi_r : X \rightarrow X_r$  mit

$$\varepsilon_r = \varphi_r \circ r^{-1}\varepsilon, \quad \pi_r = \pi \circ \varphi_r^{-1}. \quad (2.3)$$

Die Erweiterung

$$(r+1)\xi = \xi + r\xi : 0 \longrightarrow W \xrightarrow{\varepsilon_{r+1}} X_{r+1} \xrightarrow{\pi_{r+1}} V \longrightarrow 0$$



ist gemäß (2.2) gegeben durch  $X_{r+1} = X''/W'$  mit

$$\begin{aligned} X'' &= \{(x, x') \in X \oplus X_r \mid \pi(x) = \pi_r(x')\} = \{(x, \varphi_r(x - \varepsilon(w))) \mid x \in X, w \in W\}, \\ W' &= \{(-\varepsilon(w), \varepsilon_r(w)) \mid w \in W\} = \{(-\varepsilon(w), \varphi_r(r^{-1}\varepsilon(w))) \mid w \in W\}, \\ \varepsilon_{r+1} : W &\longrightarrow X_{r+1}, w \mapsto (\varepsilon(w), 0) + W', \\ \pi_{r+1} : X_{r+1} &\longrightarrow V, (x, \varphi_r(x - \varepsilon(w))) + W' \mapsto \pi(x). \end{aligned}$$

(Bei der jeweils zweiten Darstellung von  $X''$  und  $W'$  geht die Aussage (2.3) aus der Induktionsvoraussetzung ein. Insbesondere für  $X''$  verwenden wir, dass  $\pi(x) = \pi_r(x') = \pi \circ \varphi_r^{-1}(x')$  genau dann gilt, wenn  $x - \varphi_r^{-1}(x') \in \text{Kern}(\pi) = \varepsilon(W)$  ist, wenn also  $x' = \varphi_r(x - \varepsilon(w))$  ist für ein  $w \in W$ .) Nun definieren wir die Abbildung  $\varphi_{r+1}$  durch

$$\varphi_{r+1} : X \longrightarrow X_{r+1}, x \mapsto (x, \varphi_r(x)) + W'.$$

Dies ist offensichtlich ein  $RG$ -Modul-Homomorphismus. Seine Bijektivität erhalten wir, indem wir zeigen, dass die zugehörige inverse Abbildung gegeben ist durch

$$\psi : X_{r+1} \longrightarrow X, (x, \varphi_r(x - \varepsilon(w))) + W' \mapsto x - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w).$$

Zunächst stellen wir fest, dass sie wohldefiniert ist, da für alle  $x \in X$ ,  $x' \in X'$  und  $w, w' \in W$  gilt:

$$\begin{aligned} &\psi((x - \varepsilon(w'), \varphi_r(x - \varepsilon(w)) + \varphi_r(r^{-1}\varepsilon(w'))) + W') \\ &= \psi((x - \varepsilon(w'), \varphi_r(x - \varepsilon(w')) - \varepsilon(w - (r+1)/r \cdot w')) + W') \\ &= (x - \varepsilon(w')) - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w - (r+1)/r \cdot w') = x - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle  $x \in X$  und  $w \in W$ :

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi_{r+1}(x) &= \psi((x, \varphi_r(x)) + W') = x, \\ \varphi_{r+1} \circ \psi((x, \varphi_r(x - \varepsilon(w))) + W') &= \varphi_{r+1}(x - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w)) \\ &= (x - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w), \varphi_r(x - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w))) + W' \\ &= (x, \varphi_r(x - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w)) + \varphi_r(r^{-1} \cdot r/(r+1) \cdot \varepsilon(w))) + W' \\ &= (x, \varphi_r(x - \varepsilon(w))) + W'. \end{aligned}$$

Damit ist  $\varphi_{r+1}$  ein  $RG$ -Modul-Isomorphismus. Es bleibt noch zu zeigen, dass er die Äquivalenz von  $(r+1)\xi$  und  $\xi_{r+1}$  liefert, dass also das zugehörige Diagramm kommutiert:

$$\begin{aligned} \pi_{r+1} \circ \varphi_{r+1}(x) &= \pi_{r+1}((x, \varphi_r(x)) + W') = \pi(x) \quad \text{für alle } x \in X, \\ \varphi_{r+1}^{-1} \circ \varepsilon_{r+1}(w) &= \varphi_{r+1}^{-1}((\varepsilon(w), 0) + W') \\ &= \varepsilon(w) - r/(r+1) \cdot \varepsilon(w) = (r+1)^{-1} \cdot \varepsilon(w) \quad \text{für alle } w \in W. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

Eine Anwendung dieser Folgerung werden wir in Abschnitt 2.3 sehen. Jetzt folgen noch zwei weitere wichtige Lemmata über Ext-Gruppen.

**Lemma 2.1.4** *Es seien  $V_1, V_2$  und  $V_3$  drei  $RG$ -Moduln.*

(a) *Falls  $V_1$  als  $R$ -Modul projektiv ist (also insbesondere, wenn  $V_1$  ein  $RG$ -Gitter ist), gilt für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ :*

$$\text{Ext}_{RG}^i(V_1 \otimes_R V_3, V_2) \cong \text{Ext}_{RG}^i(V_3, \text{Hom}_R(V_1, V_2)).$$

(b) Falls  $V_1$  und  $V_2$   $RG$ -Gitter sind, sind  $V_1^* \otimes_R V_2$  und  $\text{Hom}_R(V_1, V_2)$  als  $RG$ -Gitter isomorph.

(c) Falls  $V_1$  und  $V_2$   $RG$ -Gitter sind, gilt für  $i \in \mathbb{N}_0$ :

$$\text{Ext}_{RG}^i(V_1 \otimes_R V_3, V_2) \cong \text{Ext}_{RG}^i(V_3, V_1^* \otimes_R V_2).$$

Daraus folgt insbesondere:

$$\text{Ext}_{RG}^i(V_1, V_2) \cong \text{Ext}_{RG}^i(\mathbb{1}, V_1^* \otimes_R V_2) \cong \text{Ext}_{RG}^i(\mathbb{1}, V_2 \otimes_R V_1^*) \cong \text{Ext}_{RG}^i(V_2^*, V_1^*).$$

*Beweis:* Teil (a) ergibt sich aus [Ben98], Proposition 3.1.8. Teil (b) steht in [CR81], Proposition 10.30. Teil (c) ist eine direkte Folgerung aus den Teilen (a) und (b).  $\square$

**Lemma 2.1.5** (a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Der  $RG$ -Modul  $W$  ist injektiv.
- Es ist  $\text{Ext}_{RG}^i(V, W) = 0$  für jeden  $RG$ -Modul  $V$  und jedes  $i \in \mathbb{N}$ .
- Es ist  $\text{Ext}_{RG}^1(V, W) = 0$  für jeden  $RG$ -Modul  $V$ .

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- Der  $RG$ -Modul  $V$  ist projektiv.
- Es ist  $\text{Ext}_{RG}^i(V, W) = 0$  für jeden  $RG$ -Modul  $W$  und jedes  $i \in \mathbb{N}$ .
- Es ist  $\text{Ext}_{RG}^1(V, W) = 0$  für jeden  $RG$ -Modul  $W$ .

(c) Falls  $V$  ein projektiver  $RG$ -Modul ist, so ist für jedes  $RG$ -Gitter  $W$  auch  $W \otimes_R V$  ein projektiver  $RG$ -Modul.

*Beweis:* Teil (a) und (b) ergeben sich aus [CR81], Remarks 8.4 (v). Das entscheidende Argument ist, dass ein injektiver Modul  $W$  die injektive Auflösung  $0 \rightarrow W \rightarrow W \rightarrow 0$  besitzt und ein projektiver Modul  $V$  die projektive Auflösung  $0 \rightarrow V \rightarrow V \rightarrow 0$ .

Nun sei  $V$  projektiv und  $W$  ein beliebiges  $RG$ -Gitter. Mit Teil (b) und Lemma 2.1.4 (a) ist dann  $\text{Ext}_{RG}^1(W \otimes_R V, X) \cong \text{Ext}_{RG}^1(V, \text{Hom}_R(W, X)) = 0$  für jeden  $RG$ -Modul  $X$ . Also folgt, wieder mit Teil (b), dass  $W \otimes_R V$  projektiv ist.  $\square$

Nun kommen wir zur Kohomologie. Wir definieren die  $i$ -te Kohomologiegruppe von  $V$  durch  $H^i(G, V) := \text{Ext}_{RG}^i(\mathbb{1}_{RG}, V)$ . Wir können  $R$  in der Notation unterschlagen, weil die Kohomologie nicht von  $R$  abhängt, wie auf den Seiten 2 und 3 von [Eve91] ausgeführt wird: Wir können  $V$  auch als  $\mathbb{Z}G$ -Modul auffassen, und es gilt für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ :

$$H^i(G, V) = \text{Ext}_{RG}^i(\mathbb{1}_{RG}, V) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{1}_{\mathbb{Z}G}, V).$$

Die Ordnung unserer endlichen Gruppe  $G$  hat einen starken Einfluss auf die Kohomologiegruppen:

**Satz 2.1.6** Es sei  $i \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $|G| \cdot H^i(G, V) = 0$ , das heißt, die Ordnung jedes Elements von  $H^i(G, V)$  teilt  $|G|$ . Falls  $V$  ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}G$ -Modul ist, folgt daraus, dass  $H^i(G, V)$  eine endliche abelsche Gruppe ist.

*Beweis:* Die Aussagen stehen in [Wei94], Theorem 6.5.8 und Corollary 6.5.10.  $\square$

Bei diversen Klassen von Moduln weiß man von vornherein, dass sie keine Kohomologie haben:

**Lemma 2.1.7** (a) Falls  $V$  ein Vektorraum über  $\mathbb{Q}$  ist, ist  $H^i(G, V) = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

- (b) Falls  $V$  ein injektiver oder ein projektiver  $RG$ -Modul ist, ist  $H^i(G, V) = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .
- (c) Es sei  $(K, R, k)$  ein  $p$ -modulares System und  $V$  ein  $\Theta G$ -Modul für  $\Theta \in \{K, R, k\}$ . Falls  $V$  keinen Hauptblockanteil besitzt, ist  $H^i(G, V) = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ .

*Beweis:*

- (a) Dies ist in [Wei94], Corollary 6.5.9, als Folgerung aus Satz 2.1.6 formuliert. Man vergleiche dazu auch Proposition 6.1.10 in [Wei94].
- (b) Die Aussage für injektives  $V$  ergibt sich direkt aus Lemma 2.1.5 (a). Falls  $V$  projektiv ist, ist  $V^*$  ebenfalls projektiv, und mit den Lemmata 2.1.4 (c) und 2.1.5 (b) gilt  $H^i(G, V) \cong \text{Ext}_{RG}^i(V^*, \mathbb{1}_{RG}^*) = 0$ .
- (c) Es sei  $\mathbf{P}$  eine projektive Auflösung von  $\mathbb{1}_{RG}$ . Sie kann so gewählt werden, dass jedes  $P_i$  zum gleichen Block wie  $\mathbb{1}_{RG}$ , also zum Hauptblock gehört. Mit Satz 2.1.1 ist  $H^i(G, V) \cong H^i(\text{Hom}_{RG}(\mathbf{P}, V))$ , und die Behauptung folgt.  $\square$

Die oben angesprochene Interpretation der Ext-Gruppen greift natürlich auch im Spezialfall der Kohomologieguppen. Insbesondere für die 0-te Kohomologie gilt:

$$H^0(G, V) \cong \text{Hom}_{RG}(\mathbb{1}_{RG}, V) \xrightarrow{f \mapsto f(1)} \text{Fix}_G(V). \quad (2.4)$$

Die Kohomologieguppe  $H^1(G, V)$  zählt gemäß den obigen Ausführungen die Erweiterungen von  $V$  mit  $\mathbb{1}$ . Darüber hinaus gibt es aber noch eine weitere Betrachtungsweise der Kohomologie, die wir für  $i \in \{1, 2\}$  in Hinblick auf das Zassenhaus-Verfahren in Abschnitt 2.4 unter die Lupe nehmen wollen.

**Definition 2.1.8** (a) Eine Abbildung  $\delta : G \rightarrow V$  mit  $\delta(g_1g_2) = \delta(g_1) + g_1\delta(g_2)$  für  $g_1, g_2 \in G$  heißt Derivation von  $G$  mit Werten in  $V$ . Die Menge aller Derivationen von  $G$  mit Werten in  $V$  bezeichnen wir mit  $Z^1(G, V)$ .

- (b) Es sei  $v \in V$ . Eine Abbildung der Form  $\delta_v : G \rightarrow V, g \mapsto gv - v$  heißt innere Derivation von  $G$  mit Werten in  $V$ . Die Menge aller inneren Derivationen von  $G$  mit Werten in  $V$  bezeichnen wir mit  $B^1(G, V)$ .

Per Definition ist jede Derivation durch die Bilder der Elemente einer Erzeugermenge von  $G$  eindeutig festgelegt. Falls  $G$  eine freie Gruppe ist, definiert jede beliebige Wahl von Bildern der Elemente einer Erzeugermenge von  $G$  eine Derivation, da jedes Element von  $G$  eine eindeutige Darstellung als Produkt in den gewählten Erzeugern hat und die Bilder der Inversen der Erzeuger durch  $0 = \delta(1) = \delta(x^{-1}) + x^{-1}\delta(x)$  eindeutig bestimmt sind.

**Definition 2.1.9** (a) Ein Faktorensystem von  $G$  mit Werten in  $V$  ist eine Abbildung  $\alpha : G \times G \rightarrow V$ , mit der Eigenschaft, dass für alle  $g_1, g_2, g_3 \in G$  gilt:

$$\begin{aligned} \alpha(g_1g_2, g_3) + \alpha(g_1, g_2) &= \alpha(g_1, g_2g_3) + g_1\alpha(g_2, g_3), \\ \alpha(g_1, 1) &= 0 = \alpha(1, g_1). \end{aligned}$$

Die Menge aller Faktorensysteme von  $G$  mit Werten in  $V$  bezeichnen wir mit  $Z^2(G, V)$ .

- (b) Es sei  $\rho : G \rightarrow V$  eine Abbildung mit  $\rho(1) = 0$ . Eine Abbildung der Form

$$\alpha_\rho : G \times G \longrightarrow V, \quad (g_1, g_2) \mapsto \rho(g_1) + g_1\rho(g_2) - \rho(g_1g_2)$$

heißt prinzipales Faktorensystem von  $G$  mit Werten in  $V$ . Die Menge aller prinzipalen Faktorensysteme von  $G$  mit Werten in  $V$  bezeichnen wir mit  $B^2(G, V)$ .

Bei Derivationen und Faktorensystemen handelt es sich um Spezialfälle einer allgemeineren Definition von Abbildungen aus einem  $i$ -fachen direkten Produkt von  $G$  mit sich selbst nach  $V$ . Wie genau diese Verallgemeinerung aussieht, braucht uns im Moment nicht zu kümmern. Hier sei nur so viel gesagt, dass wir gemäß [Wei94], Application 6.5.5, für alle  $i \in \mathbb{N}$  solche Mengen  $Z^i(G, V)$  und  $B^i(G, V)$  erhalten. Es sind alles abelsche Gruppen bezüglich punktweiser Addition, wobei  $B^i(G, V)$  jeweils eine Untergruppe von  $Z^i(G, V)$  ist mit  $Z^i(G, V)/B^i(G, V) \cong H^i(G, V)$ . (Man vergleiche für  $i = 1$  auch [Wei94], Theorem 6.4.5.) Bei Bedarf werden wir  $H^i(G, V)$  und  $Z^i(G, V)/B^i(G, V)$  miteinander identifizieren. Dementsprechend werden wir zum Beispiel des Öfteren  $\bar{\alpha} := \alpha + B^2(G, V)$  für die Elemente von  $H^2(G, V)$  schreiben.

Der Grund, warum wir uns die Fälle  $i = 1$  und  $i = 2$  herausgegriffen haben, ist der, dass sie uns über Erweiterungen von  $G$  mit  $V$  eine weitere Interpretation der Kohomologie liefern. Das Konzept der Erweiterungen von  $G$  mit  $V$  ist eng verwandt mit dem der Erweiterungen von  $V$  mit  $W$ , aber es treten andere Phänomene auf. Eine Erweiterung  $\xi$  von  $G$  mit  $V$  ist eine kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1.$$

(Da wir  $G$  multiplikativ schreiben, ist die triviale Gruppe auf der rechten Seite durch 1 repräsentiert.) Zwei Erweiterungen  $\xi$  und  $\xi'$  von  $G$  mit  $V$  heißen äquivalent, wenn ein kommutatives Diagramm von dieser Gestalt existiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} \xi : & 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ & & & \downarrow \text{id} & \circlearrowleft & \downarrow \cong & \circlearrowleft & \downarrow \text{id} & & \\ \xi' : & 0 & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \Gamma' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Die Erweiterung  $\xi$  *spaltet auf*, wenn das Bild von  $V$  ein Komplement in  $\Gamma$  besitzt, das heißt, wenn  $\Gamma$  isomorph zum semidirekten Produkt  $V \rtimes G$  ist.

**Satz 2.1.10** (a) Die Gruppe  $H^1(G, V)$  parametrisiert die Konjugiertenklassen der Komplemente von  $V$  in  $V \rtimes G$ .

(b) Die Gruppe  $H^2(G, V)$  parametrisiert die Äquivalenzklassen der Erweiterungen von  $G$  mit  $V$ .

*Beweis:* Die Aussagen werden in [Ben98], Proposition 3.7.2 und 3.7.3, gezeigt. Die besagten Parametrisierungen werden dabei mit Hilfe von Derivationen und Faktorensystemen definiert.  $\square$

Die Herangehensweise über Derivationen liefert uns bequemer als die ursprüngliche Definition folgende Aussage:

**Lemma 2.1.11** (a) Es ist  $H^1(G, \mathbb{1}_{RG}) \cong \text{Hom}(G, R)$ .

(b) Es ist  $H^1(G, \mathbb{1}_{\mathbb{Z}G}) = 0$ .

*Beweis:* Da  $G$  trivial auf  $\mathbb{1}_{RG}$  operiert, ist jede Derivation ein Gruppenhomomorphismus von  $G$  nach  $\mathbb{1}_{RG}$ , und die Nullabbildung ist die einzige innere Derivation. Damit folgt Teil (a), und daraus wiederum folgt mit der Endlichkeit von  $G$  Teil (b).  $\square$

Der Rest dieses Abschnitts befasst sich im Wesentlichen damit, wie man in gewissen Situationen bestimmte Kohomologiegruppen auf andere Kohomologiegruppen zurückführen kann. Das einfachste Beispiel ist sicher die Kohomologie von direkten Summen. Wie man sich auf Basis der Komplexe leicht überlegt, gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$H^i(G, V \oplus W) \cong H^i(G, V) \oplus H^i(G, W).$$

Das bedeutet insbesondere: Falls  $H$  der Hauptblockanteil von  $V$  ist und  $K$  dessen Komplement, dann ist mit Lemma 2.1.7 (c)

$$H^i(G, V) = H^i(G, H \oplus K) \cong H^i(G, H).$$

Wenn wir eine nichttriviale Erweiterung  $X$  von  $V$  mit  $W$  gegeben haben, ist die Sache nicht mehr ganz so einfach. Wir bekommen gemäß (2.1) eine lange exakte Kohomologiesequenz

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(G, W) & \longrightarrow & H^0(G, X) & \longrightarrow & H^0(G, V) \\ & & \longrightarrow & & \cdots & \longrightarrow & H^{i-1}(G, V) \\ & & \longrightarrow & & H^i(G, X) & \longrightarrow & H^i(G, V) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Abhängig davon, welche Kohomologiegruppen aus einer solchen Sequenz bekannt sind, kann man aufgrund der Exaktheit in manchen Situationen auf die Isomorphietypen anderer Kohomologiegruppen aus der Sequenz schließen. Dieses Verfahren werden wir häufig für Kohomologie vom Grad  $\leq 2$  anwenden. Da die obige Notation etwas unhandlich ist, werden wir oft Tabellen der Form

$$\begin{array}{c|ccc} & W & X & V \\ \hline 0 & & & \\ 1 & & & \\ 2 & & & \end{array} \quad (2.5)$$

verwenden, in die für  $i \in \{0, 1, 2\}$  und  $M \in \{V, W, X\}$  die Isomorphietypen von  $H^i(G, M)$  eingetragen werden. Da  $H^i(G, M)$  per Definition ein  $R$ -Modul ist, können wir im Fall, dass  $R$  ein Körper ist, den Isomorphietyp von  $H^i(G, M)$  durch die  $R$ -Dimension angeben. Falls für  $M \in \{V, W, X\}$  und einen weiteren  $RG$ -Modul  $M'$  gilt, dass  $H^i(G, M) \cong H^i(G, M')$  ist für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ , können wir bei der Indizierung der Spalten auch  $M$  durch  $M'$  ersetzen. Neue Tabelleneinträge, die sich aus der Exaktheit der Sequenz ergeben, werden wir durch Kursivdruck kennzeichnen.

Als Nächstes befassen wir uns mit der Kohomologie von induzierten und eingeschränkten Modulen.

**Satz 2.1.12 (Eckmann-Shapiro-Lemma)** *Es sei  $H$  eine endliche Gruppe mit  $G \leq H$ . Dann gilt für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ :*

$$H^i(G, V) \cong H^i(H, V \uparrow_G^H).$$

*Beweis:* Unter der Bezeichnung ‘‘Eckmann-Shapiro-Lemma‘‘ (oder ‘‘Shapiros Lemma‘‘) werden in der Literatur zumeist allgemeinere Varianten der obigen Aussage geführt. Dabei handelt es sich um durchaus unterschiedliche Verallgemeinerungen. In [Wei94], Shapiro’s Lemma 6.3.2, werden beispielsweise auch nicht-endliche Gruppen betrachtet; die obige Variante erhalten wir daraus, wenn wir zusätzlich [Wei94], Lemma 6.3.4, verwenden. In [Ben98], Corollary 3.3.2, hingegen werden zwar auch nur endliche Gruppen  $G$  und  $H$  betrachtet, dafür ist dort die Aussage auf Basis der Ext-Gruppen formuliert; hier erhalten wir die obige Variante, indem wir zusätzlich Lemma 2.1.4 (c) anwenden.  $\square$

**Beispiel 2.1.13** *Es sei  $\lambda \vdash n \in \mathbb{N}_0$ .*

(a) *Für  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $\mu := \lambda + (0^{\ell(\lambda)}, 1^k) \vdash n + k$  ist  $S_\lambda \cong S_\mu$ , und mit dem Eckmann-Shapiro-Lemma folgt für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ :*

$$\begin{aligned} H^i(S_n, M^\lambda) &\cong H^i(S_n, \mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow^{S_n}) \cong H^i(S_\lambda, \mathbb{1}_{S_\lambda}) \\ &\cong H^i(S_\mu, \mathbb{1}_{S_\mu}) \cong H^i(S_{n+k}, \mathbb{1}_{S_\mu} \uparrow^{S_{n+k}}) \cong H^i(S_{n+k}, M^\mu). \end{aligned}$$

*Insbesondere gilt für  $\mu = (n, 1^k)$ , dass  $H^i(S_{n+k}, M^\mu) \cong H^i(S_n, \mathbb{1})$  ist.*

(b) Mit Lemma 2.1.11 und dem Eckmann-Shapiro-Lemma folgt:

$$H^1(S_n, M_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong H^1(S_\lambda, \mathbb{1}_{\mathbb{Z}S_\lambda}) = 0.$$

Im Fall der eingeschränkten Moduln ist die Situation komplizierter. Zwischen der Kohomologie von  $V$  und der von  $V \downarrow_U^G$  für eine Untergruppe  $U$  von  $G$  besteht nicht zwangsläufig ein aussagekräftiger Zusammenhang. Wenn einer besteht, dann finden wir ihn mit Hilfe der Restriktions- und der Transferabbildung.

Die natürliche Injektion  $\text{Fix}_G(V) \rightarrow \text{Fix}_U(V \downarrow_U^G)$  induziert für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  einen Homomorphismus

$$\text{res}_U^G : H^i(G, V) \longrightarrow H^i(U, V \downarrow_U^G).$$

Wir nennen ihn *Restriktion*. (Man vergleiche dazu [Wei94], Definition 6.7.1 und Subgroups 6.7.2. Auf der Basis von Derivationen bzw. Faktorensystemen ausgedrückt, entspricht die Restriktion der Einschränkung von Abbildungen, also  $\text{res}_U^G(\delta) = \bar{\delta}|_U \in H^1(U, V \downarrow_U^G)$  für  $\delta \in H^1(G, V)$  bzw.  $\text{res}_U^G(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}|_{U \times U} \in H^2(U, V \downarrow_U^G)$  für  $\bar{\alpha} \in H^2(G, V)$ .)

Nun sei  $X$  ein Vertretersystem für die Linksnebenklassen von  $U$  in  $G$ . Dann wird durch  $\text{Fix}_U(V \downarrow_U^G) \rightarrow \text{Fix}_G(V)$ ,  $v \mapsto \sum_{x \in X} xv$  ein  $R$ -Modul-Homomorphismus definiert. Dieser induziert für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  einen Homomorphismus

$$\text{tr}_U^G : H^i(U, V \downarrow_U^G) \longrightarrow H^i(G, V).$$

Wir nennen ihn *Transfer*. (Man vergleiche dazu [Wei94], Transfer Maps 6.7.16.) Diese beiden Abbildungen werden durch ihre Komposition besonders interessant:

**Lemma 2.1.14** (a) Es ist  $\text{tr}_U^G \circ \text{res}_U^G = [G : U] \cdot \text{id}$ .

(b) Falls  $H^i(G, V)$  ein Element enthält, dessen Ordnung den Index  $[G : U]$  nicht teilt, dann ist  $\text{res}_U^G \neq 0$ .

(c) Falls  $\text{ggT}([G : U], |H^i(G, V)|) = 1$  ist, ist  $\text{res}_U^G$  injektiv.

*Beweis:* Teil (a) findet sich in [Wei94], Lemma 6.7.17. Teil (b) folgt daraus, denn besagtes Element wird durch Multiplikation mit  $[G : U]$  nicht auf 0 abgebildet. Teil (c) ist eine Verschärfung von Teil (b) und folgt ebenfalls aus Teil (a), da unter der Voraussetzung  $\text{ggT}([G : U], |H^i(G, V)|) = 1$  die Multiplikation mit  $[G : U]$  in  $H^i(G, V)$  bijektiv ist.  $\square$

Der nächste Punkt behandelt einen Spezialfall bei der Kohomologie von Tensorprodukten.

**Satz 2.1.15** Es sei  $K$  ein Körper,  $G$  und  $H$  seien endliche Gruppen,  $V$  sei ein  $KG$ -Modul und  $W$  ein  $KH$ -Modul. Wir betrachten  $V \otimes_K W$  als  $K(G \times H)$ -Modul via  $(g, h)(v \otimes w) := gv \otimes hw$  für  $g \in G$ ,  $h \in H$ ,  $v \in V$  und  $w \in W$ . Dann gilt

$$H^i(G \times H, \mathbb{1}_{K(G \times H)}) \cong \bigoplus_{j=0}^i H^j(G, \mathbb{1}_{KG}) \otimes H^{i-j}(H, \mathbb{1}_{KH}).$$

*Beweis:* Die Aussage wird in der Bemerkung nach Theorem 3.5.6 in [Ben98] hergeleitet. Es handelt sich um einen Spezialfall der Künneth-Formel.  $\square$

**Folgerung 2.1.16** Es sei  $G = G_1 \times \cdots \times G_n$  ein direktes Produkt aus  $n$  Gruppen und  $K$  ein Körper. Dann folgt aus Satz 2.1.15 per Induktion über  $n$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ :

$$H^i(G_1 \times \cdots \times G_n, \mathbb{1}_{KG}) \cong \bigoplus_{\substack{\mu \models i \\ \ell(\mu) \leq n}} \bigotimes_{j=1}^n H^{\mu_j}(G_j, \mathbb{1}_{KG_j}).$$

Daraus ergibt sich, dass man die Bestimmung der Kohomologie von Permutationsmoduln über Körpern auf die Bestimmung der Kohomologie der trivialen  $S_n$ -Moduln zurückführen kann:

**Beispiel 2.1.17** *Es sei  $\lambda \vdash n$  und  $i \in \mathbb{N}_0$ . Alle vorkommenden  $S_n$ -Moduln seien Moduln über einem Körper  $K$ . Mit dem Eckmann-Shapiro-Lemma (Satz 2.1.12) und Folgerung 2.1.16 erhalten wir für jede Partition  $\lambda$ :*

$$\begin{aligned} H^i(S_n, M^\lambda) &\cong H^i(S_n, \mathbb{1}_{S_\lambda} \uparrow^{S_n}) \cong H^i(S_\lambda, \mathbb{1}) \\ &\cong H^i(S_{\lambda_1} \times \cdots \times S_{\lambda_{\ell(\lambda)}}, \mathbb{1}) \cong \bigoplus_{\substack{\mu \vdash i \\ \ell(\mu) \leq \ell(\lambda)}} \bigotimes_{j=1}^{\ell(\lambda)} H^{\mu_j}(S_{\lambda_j}, \mathbb{1}). \end{aligned}$$

Wenn insbesondere  $\ell(\lambda) = 2$  ist, also  $\lambda = (n - k, k)$  für  $1 \leq k \leq n/2$ , gilt damit

$$H^i(S_n, M^\lambda) \cong \bigoplus_{j=0}^i H^j(S_{n-k}, \mathbb{1}) \otimes H^{i-j}(S_k, \mathbb{1}).$$

Zum Abschluss dieses Abschnitts sollen noch die sogenannten speziellen Elemente eingeführt werden. Wir nennen ein Element  $\bar{\alpha} \in H^2(G, V)$  ein *spezielles Element*, wenn  $\text{res}_U^G(\bar{\alpha}) \neq 0$  ist für alle nichttrivialen Untergruppen  $1 \neq U \leq G$ . (Spezielle Elemente könnte man natürlich analog für Kohomologie von jedem anderen Grad definieren. Hier benötigen wir sie allerdings nur für die zweite Kohomologie und belassen es daher dabei.)

Da jede nichttriviale Untergruppe eine Untergruppe von Primzahlordnung besitzt, ist diese Bedingung äquivalent dazu, dass  $\text{res}_U^G(\bar{\alpha}) \neq 0$  ist für alle Untergruppen  $U \leq G$  mit  $|U| \in \mathbb{P}$ . Wenn man konkret die Spezialität eines Elementes überprüfen will, ist diese Charakterisierung praktischer, da man weniger Untergruppen betrachten muss. Wir können die Zahl der zu betrachtenden Untergruppen sogar noch weiter reduzieren. Dazu benötigen wir die folgende Aussage.

**Lemma 2.1.18** *Es sei  $U \leq G$  eine Untergruppe und  $g \in G$ . Dann gibt es für alle  $i \in \mathbb{N}$  ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} & H^i(G, V) & \\ \text{res}_U^G \swarrow & & \searrow \text{res}_{gU}^G \\ H^i(U, V \downarrow_U^G) & \xrightarrow{\cong} & H^i(gU, V \downarrow_{gU}^G) \end{array}$$

*Beweis:* Die Aussage ergibt sich aus den Ausführungen auf Seite 35 in [Eve91]. □

Es sei  $p \in \mathbb{P}$  mit  $p \mid |G|$ . Die Gruppe  $G$  operiert auf ihren Untergruppen der Ordnung  $p$  durch Konjugation. Die Anzahl der konjugierten Klassen sei mit  $k(p)$  bezeichnet, und die konjugierten Klassen selbst mit  $K_1^{(p)}, \dots, K_{k(p)}^{(p)}$ . Mit Lemma 2.1.18 folgt nun:

**Folgerung 2.1.19** *Ein Element  $\bar{\alpha} \in H^2(G, V)$  ist genau dann speziell, wenn für alle  $p \in \mathbb{P}$  mit  $p \mid |G|$  und alle  $\iota \in \{1, \dots, k(p)\}$  ein  $U \in K_\iota^{(p)}$  existiert, so dass  $\text{res}_U^G(\bar{\alpha}) \neq 0$  ist.*

Für  $G = S_n$  sind die konjugierten Klassen von Elementen durch die Zykeltypen parametrisiert. In einer zyklischen Untergruppe von  $S_n$  von Primzahlordnung  $p$  sind alle Elemente außer der Identität Produkte aus einer bestimmten Anzahl disjunkter  $p$ -Zykel. Die konjugierten Klassen von Untergruppen der Ordnung  $p$  sind daher durch ebendiese Anzahl von  $p$ -Zykeln eindeutig bestimmt. Dadurch und durch Folgerung 2.1.19 ist die folgende Definition motiviert.

**Definition 2.1.20** Es seien  $p \in \mathbb{P}$  und  $n, \iota \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft, dass  $p\iota \leq n$  ist. Weiter sei  $V$  ein  $S_n$ -Modul und  $g \in S_n$  ein (beliebiges) Produkt aus genau  $\iota$  disjunkten  $p$ -Zykeln. Ein Element  $\bar{\alpha} \in H^2(S_n, V)$  nennen wir  $(p, \iota)$ -speziell, wenn  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}(\bar{\alpha}) \neq 0$  ist. Falls für eine Partition  $\lambda \vdash n$  die Kohomologiegruppe  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  ein  $(p, \iota)$ -spezielles Element besitzt, nennen wir  $\lambda$  ebenfalls  $(p, \iota)$ -speziell.

Mit Lemma 2.1.18 hängt die Bedingung  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}(\bar{\alpha}) \neq 0$  nicht vom gewählten  $g$  ab, daher kann man die Definition so formulieren. Der Nutzen dieser Definition offenbart sich in der folgenden Aussage.

**Lemma 2.1.21** Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $X_n := \{(p, \iota) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N} \mid p\iota \leq n\}$ . Für jedes Paar  $(p, \iota) \in X_n$  existiere eine  $(p, \iota)$ -spezielle Partition  $\lambda(p, \iota) \vdash n$ . Dann besitzt  $H^2(S_n, \bigoplus_{(p, \iota) \in X_n} S_{\mathbb{Z}}^{\lambda(p, \iota)})$  ein spezielles Element.

*Beweis:* Für alle Untergruppen  $U \leq S_n$  erhalten wir auf kanonische Weise ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} H^2(S_n, \bigoplus_{(p, \iota) \in X_n} S_{\mathbb{Z}}^{\lambda(p, \iota)}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{(p, \iota) \in X_n} H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda(p, \iota)}) \\ \downarrow \text{res}_U^{S_n} & \circlearrowleft & \downarrow (\text{res}_U^{S_n}, \dots, \text{res}_U^{S_n}) \\ H^2(U, \bigoplus_{(p, \iota) \in X_n} S_{\mathbb{Z}}^{\lambda(p, \iota)} \downarrow_U^{S_n}) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_{(p, \iota) \in X_n} H^2(U, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda(p, \iota)} \downarrow_U^{S_n}) \end{array}$$

Jetzt folgt die Behauptung mit Folgerung 2.1.19.  $\square$

Wenn wir also einen  $\mathbb{Z}S_n$ -Modul  $V$  suchen, für den  $H^2(S_n, V)$  ein spezielles Element besitzt, können wir das Problem darauf zurückführen,  $(p, \iota)$ -spezielle Partitionen zu finden. Warum wir das wollen und wie man ansetzen kann, damit werden wir uns später noch ausführlicher beschäftigen, wenn wir noch mehr Informationen über die Kohomologie von Spechtmoduln zur Verfügung haben.

## 2.2 Kohomologie über $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{Z}_{(p)}$ , $\mathbb{Z}_p$ und $\mathbb{F}_p$

Bei der Erforschung der Kohomologie von  $S_n$ -Moduln ist der Fokus zumeist auf die  $S_n$ -Moduln über Körpern der Charakteristik  $p > 0$  gerichtet. Die Kohomologie über  $\mathbb{F}_p$  ist jedoch eng mit der Kohomologie über  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}_{(p)}$  und  $\mathbb{Z}_p$  verwoben. Dieser Zusammenhang soll im Folgenden herausgearbeitet werden.

Es sei  $V$  ein  $\mathbb{Z}G$ -Gitter und  $p \in \mathbb{P}$ . Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{\cdot p} V \longrightarrow V/pV \longrightarrow 0.$$

Dabei ist  $V/pV \cong \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} V$ . Die zugehörige exakte Kohomologiesequenz sieht so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(G, V) & \xrightarrow{\pi_0} & H^0(G, V) & \xrightarrow{\delta_0} & H^0(G, V/pV) \\ & & \xrightarrow{\beta_0} & H^1(G, V) & \xrightarrow{\pi_1} & \dots & \xrightarrow{\delta_{i-1}} H^{i-1}(G, V/pV) \\ & & \xrightarrow{\beta_{i-1}} & H^i(G, V) & \xrightarrow{\pi_i} & H^i(G, V) & \xrightarrow{\delta_i} H^i(G, V/pV) \\ & & \xrightarrow{\beta_i} & H^{i+1}(G, V) & \xrightarrow{\pi_{i+1}} & H^{i+1}(G, V) & \xrightarrow{\delta_{i+1}} \dots \end{array}$$

Die Homomorphismen  $\pi_i$  sind definiert durch

$$\pi_i : H^i(G, V) \longrightarrow H^i(G, V), \quad x \mapsto px.$$



Die verbindenden Homomorphismen  $\beta_i$  nennen wir *Bockstein-Homomorphismen*. (In der Literatur wird dieser Terminus normalerweise nur in dem Fall benutzt, dass  $V = \mathbb{1}_G$  ist. Hier wollen wir den Begriff aber weiter fassen.)

Da  $H^i(G, V)$  eine endliche abelsche Gruppe ist, ist ihr Isomorphietyp mit dem Fundamentalsatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen durch ihre *Invariantenteiler* bestimmt, das heißt, es existieren eindeutig bestimmte  $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$  mit  $e_j \mid e_{j+1}$  für  $1 \leq j \leq r-1$ , so dass gilt:

$$H^i(G, V) \cong \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{Z}/e_j\mathbb{Z}.$$

Für  $i \in \mathbb{N}$  sei  $x_i$  der  $p$ -Rang von  $H^i(G, V)$ , also die Anzahl der direkten Summanden der maximalen elementar abelschen Untergruppe. Anders ausgedrückt:  $x_i$  ist die Anzahl der durch  $p$  teilbaren Invariantenteiler von  $H^i(G, V)$ . Weiter sei  $d_i$  die  $\mathbb{F}_p$ -Dimension von  $H^i(G, V/pV)$  für  $i \in \mathbb{N}_0$ . Dann können wir aus obiger Kohomologiesequenz folgende Aussage ableiten:

**Lemma 2.2.1** ([Web09a], Lemma 2.1) *Für alle  $i \in \mathbb{N}$  ist  $d_i = x_i + x_{i+1}$ .*

**Folgerung 2.2.2** ([Web09a], Corollary 2.2) *Es sei  $i \in \mathbb{N}$ .*

- (a) *Falls  $p \mid |H^i(G, V)|$  ist, so sind  $H^{i-1}(G, V/pV)$  und  $H^i(G, V/pV)$  beide nichttrivial.*
- (b) *Es ist  $H^i(G, V/pV) \neq 0$  genau dann, wenn  $p \mid |H^i(G, V)|$  oder  $p \mid |H^{i+1}(G, V)|$  ist.*

Zu beachten ist, dass Lemma 2.2.1 keinerlei Aussage über  $H^0(G, V)$  trifft, da diese Gruppe nicht endlich ist, wenn sie nichttrivial ist. In Abschnitt 2.5 werden wir den Spezialfall betrachten, dass  $V$  ein Spechtmodul ist. In dieser Situation wird es sich dann auch lohnen, die 0-te Kohomologie mit einzubeziehen.

Nun kommen  $\mathbb{Z}_{(p)}$  und  $\mathbb{Z}_p$  ins Spiel. Den  $p$ -Anteil einer natürlichen Zahl  $n$  bezeichnen wir mit  $[n]_p$ , das heißt,  $[n]_p$  ist die höchste  $p$ -Potenz, die  $n$  teilt. Weiter setzen wir  $[n]_{p'} := n/[n]_p$ . Als den  $p$ -Anteil  $A_p$  einer endlichen abelschen Gruppe  $A$  (die wir additiv schreiben) bezeichnen wir ihre maximale  $p$ -Untergruppe (die aus allen Elementen von  $p$ -Potenz-Ordnung besteht). Wenn  $e_1, \dots, e_r$  die Invariantenteiler von  $A$  sind, dann ist

$$A \cong \underbrace{\bigoplus_{j=1}^r \mathbb{Z}/[e_j]_p\mathbb{Z}}_{\cong A_p} \oplus \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{Z}/[e_j]_{p'}\mathbb{Z}.$$

Falls  $p \nmid n$  ist, ist die Ordnung jedes Elements von  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}_p$  invertierbar. Daher ist in diesem Fall  $\mathbb{Z}_p \otimes (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = 0$ . Außerdem gilt für  $k \in \mathbb{N}$  folgende  $\mathbb{Z}$ -Modul-Isomorphie:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p) = \langle z \otimes (k + p^k\mathbb{Z}_p) \mid z \in \mathbb{Z}_p, k \in \{0, \dots, n-1\} \rangle_{\mathbb{Z}} \\ &= \langle 1 \otimes (1 + p^k\mathbb{Z}_p) \rangle_{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{Z}_p/p^k\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Diese beiden Aussagen gelten mit der gleichen Argumentation auch schon über  $\mathbb{Z}_{(p)}$  statt über  $\mathbb{Z}_p$ . Daraus folgt:

$$\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong \mathbb{Z}_{(p)} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A_p.$$

Bis zum Ende des Abschnitts sei  $R \in \{\mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_p\}$ .

**Folgerung 2.2.3** *Für alle  $i \in \mathbb{N}$  ist der  $p$ -Anteil von  $H^i(G, V)$  isomorph zu  $H^i(G, R \otimes_{\mathbb{Z}} V)$ :*

$$H^i(G, R \otimes_{\mathbb{Z}} V) \cong R \otimes_{\mathbb{Z}} H^i(G, V) \cong H^i(G, V)_p \cong \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{Z}/[e_j]_p\mathbb{Z}.$$

(Dabei können wir  $R$  mit [CR81], Theorem 8.16, nach draußen ziehen.)

Wenn wir also für alle Primteiler  $p \mid |H^i(G, V)|$  (die mit Satz 2.1.6 eine Teilmenge der Primteiler von  $|G|$  sind) die Invariantenteiler von  $H^i(G, R \otimes_{\mathbb{Z}} V)$  kennen, dann kennen wir auch die Invariantenteiler von  $H^i(G, V)$ . Das ist insbesondere insofern praktisch, als wir künftig Aussagen über die Gruppenordnung von  $H^i(G, V)$  oft nur primfaktorweise machen können oder wollen.

Hinzu kommt, dass der aktuelle Abschnitt bis einschließlich Folgerung 2.2.2 seine Gültigkeit behält, wenn wir  $V$  durch  $R \otimes_{\mathbb{Z}} V$  ersetzen: Einerseits ist  $(R \otimes_{\mathbb{Z}} V)/p(R \otimes_{\mathbb{Z}} V) \cong (R/pR) \otimes_{\mathbb{Z}} V \cong \mathbb{F}_p \otimes_{\mathbb{Z}} V \cong V/pV$ , so dass die Bedeutung der  $d_i$  nicht geändert wird. Andererseits werden mit Folgerung 2.2.3 auch die  $x_i$  nicht geändert. Die Folgerung 2.2.2 liest sich für  $R \otimes_{\mathbb{Z}} V$  so:

- (a) Falls  $H^i(G, R \otimes_{\mathbb{Z}} V) \neq 0$  ist, so sind  $H^{i-1}(G, V/pV) \neq 0$  und  $H^i(G, V/pV) \neq 0$ .
- (b) Es ist  $H^i(G, V/pV) \neq 0$  genau dann, wenn  $H^i(G, R \otimes_{\mathbb{Z}} V) \neq 0$  oder  $H^{i+1}(G, R \otimes_{\mathbb{Z}} V) \neq 0$  ist.

Das sollte man im Hinterkopf behalten, wenn im weiteren Verlauf auf bestimmte Aussagen aus [Web09a] verwiesen wird. Dort wurde der Übergang zu  $R \in \{\mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_p\}$  noch nicht vorgenommen, daher sind die entsprechenden Aussagen dort etwas anders formuliert. Wir werden im weiteren Verlauf speziell  $R = \mathbb{Z}_p$  betrachten, da wir für bestimmte Aussagen einen vollständigen diskreten Bewertungsring benötigen.

## 2.3 Kohomologie zyklischer Gruppen von Primzahlordnung

Es sei  $G := \langle g \rangle$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $p \in \mathbb{N}$ . (Auf Primzahlen werden wir uns gleich erst beschränken.) Weiter sei  $V$  ein  $RG$ -Modul. Wir setzen  $N := \sum_{j=0}^{p-1} g^j \in RG$  und  $\text{Kern}_V(N) := \{v \in V \mid Nv = 0\}$ . Dann ist  $(1 - g)V \leq \text{Kern}_V(N)$  und  $N \cdot V \leq \text{Fix}_G(V)$ .

**Satz 2.3.1** ([Wei94], Theorem 6.2.2)

$$H^i(G, V) \cong \begin{cases} \text{Fix}_G(V) & \text{für } i = 0, \\ \text{Kern}_V(N)/(1 - g)V & \text{für ungerades } i, \\ \text{Fix}_G(V)/(N \cdot V) & \text{für gerades } i > 0. \end{cases}$$

Ab jetzt sei  $p \in \mathbb{P}$  und  $R = \mathbb{Z}_p$ . Wir wollen die Kohomologie von  $\mathbb{Z}_p G$ -Gittern untersuchen. Da über  $\mathbb{Z}_p$  der Satz von Krull-Schmidt (Satz 1.2.5) anwendbar ist, genügt es, die Kohomologie unzerlegbarer  $\mathbb{Z}_p G$ -Gitter zu kennen. Davon gibt es nur drei Typen:

**Satz 2.3.2** Jedes unzerlegbare  $\mathbb{Z}_p G$ -Gitter ist entweder isomorph zum trivialen Modul  $\mathbb{1}$ , zum zyklotomischen Modul  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  (wobei  $\omega$  eine primitive  $p$ -te Einheitswurzel in  $\mathbb{C}$  sei) oder zum regulären Modul  $\mathbb{Z}_p G$ .

*Beweis:* Es sei  $V$  ein  $\mathbb{Z}_p G$ -Gitter. Mit [CR81], Theorem 30.18, ist  $V$  die  $p$ -adische Vervollständigung eines  $\mathbb{Z}_{(p)} G$ -Gitters  $V'$ . Dieses  $\mathbb{Z}_{(p)} G$ -Gitter  $V'$  wiederum ist mit [CR81], Corollary 23.14, die Lokalisierung eines  $\mathbb{Z} G$ -Gitters  $V''$ . Damit ist  $V$  die  $p$ -adische Vervollständigung von  $V''$ . Mit [CR81], Lemma 34.16, ist  $V$  genau dann unzerlegbar, wenn  $V''$  unzerlegbar ist.

Nun sei  $V''$  unzerlegbar als  $\mathbb{Z} G$ -Gitter. Dann gilt mit [CR81], Theorem 34.31, einer der drei Fälle:

- $V'' \cong \mathbb{1}$ ,
- $V''$  ist isomorph zu einem  $\mathbb{Z}[\omega]$ -Ideal von  $\mathbb{Q}(\omega)$ ,
- $V''$  ist isomorph zur nichttrivialen Erweiterung eines  $\mathbb{Z}[\omega]$ -Ideals von  $\mathbb{Q}(\omega)$  mit  $\mathbb{1}$ .

Dabei hängt im zweiten und dritten Fall der jeweilige Isomphietyp nur von der Idealklasse des  $\mathbb{Z}[\omega]$ -Ideals ab.

(Zu den Begrifflichkeiten siehe [CR81], §4F, bzw. [CR62], §20: Es sei  $R$  ein Dedekind-Bereich mit Quotientenkörper  $K$ . Ein (*gebrochenes*)  $R$ -Ideal in  $K$  ist ein von 0 verschiedener, endlich erzeugter  $R$ -Untermodul von  $K$ . Für jedes  $R$ -Ideal  $J$  existiert ein  $a \in R$ , so dass  $aJ$  ein gewöhnliches Ideal in  $R$  ist. Zwei  $R$ -Ideale  $J$  und  $J'$  heißen äquivalent, wenn ein  $c \in K^*$  existiert mit  $cJ = J'$ . Die Äquivalenzklassen bezüglich dieser Relation heißen  $R$ -Idealklassen, und  $J$  und  $J'$  sind genau dann äquivalent, wenn sie isomorph als  $R$ -Moduln sind.)

Nun sei  $M$  ein von 0 verschiedenes  $\mathbb{Z}[\omega]$ -Ideal von  $\mathbb{Q}(\omega)$ . Dann hat  $M$  den  $\mathbb{Z}$ -Rang  $p - 1$  (siehe [CR62], Seite 507). Die  $p$ -adische Vervollständigung  $\hat{M}$  von  $M$  ist ein  $\mathbb{Z}_p[\omega]$ -Ideal von  $\mathbb{Q}_p(\omega)$  (wobei  $\mathbb{Q}_p$  die  $p$ -adische Vervollständigung von  $\mathbb{Q}$  bezeichnet). Es existiert ein  $a \in \mathbb{Z}_p[\omega]$ , so dass  $a\hat{M}$  ein gewöhnliches Ideal von  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  ist. Nun ist  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  aber ein Hauptidealbereich, wie wir gleich noch sehen werden. Das heißt, es ist  $a\hat{M} = c\mathbb{Z}_p[\omega]$  für ein  $0 \neq c \in \mathbb{Z}_p[\omega]$ . Damit liegen  $\hat{M}$  und  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  in derselben  $\mathbb{Z}_p[\omega]$ -Idealklasse, sind also isomorph als  $\mathbb{Z}_p[\omega]$ -Moduln. Damit sind sie auch isomorph als  $\mathbb{Z}_pG$ -Moduln, wobei die Operation von  $g$  der Multiplikation mit  $\omega$  entspricht (siehe [CR62], Seite 507).

Das Fazit ist, dass  $\mathbb{Q}_p(\omega)$  nur eine Idealklasse besitzt. Falls  $V''$  also unzerlegbar vom  $\mathbb{Z}$ -Rang  $p - 1$  ist, ist  $V$  isomorph zu  $\mathbb{Z}_p[\omega]$ . Falls  $V''$  unzerlegbar vom  $\mathbb{Z}$ -Rang  $p$  ist, ist  $V$  isomorph zu einer nichttrivialen Erweiterung von  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  mit  $\mathbb{1}$ , deren Isomphietyp von keiner Idealklasse mehr abhängt, das heißt,  $V''$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}_pG$ . (Eine direktere Begründung dafür werden wir uns weiter unten ansehen.)

Es steht noch die Begründung dafür aus, dass  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  ein Hauptidealbereich ist. Der dazu benötigte Hintergrund findet sich in [Kob84], Abschnitt 2 von Kapitel III, und [CR81], §4C und Proposition 4.5: Die  $p$ -adische Bewertung auf  $\mathbb{Q}_p$  lässt sich eindeutig zu einer diskreten Bewertung von  $\mathbb{Q}_p(\omega)$  fortsetzen. Der zu  $\mathbb{Q}_p(\omega)$  gehörige diskrete Bewertungsring  $\{x \in \mathbb{Q}_p(\omega) \mid |x|_p \leq 1\}$  ist der ganzzahlige Abschluss von  $\mathbb{Z}_p$  in  $\mathbb{Q}_p(\omega)$ , also  $\mathbb{Z}_p[\omega]$ . Als diskreter Bewertungsring ist  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  ein Hauptidealbereich.  $\square$

Um des besseren Verständnisses willen lohnt es sich, die Gestalt von  $\mathbb{Z}_pG$  näher zu inspizieren. (Das Folgende funktioniert übrigens auch schon über  $\mathbb{Z}$ .) Zunächst macht man sich am besten klar, welche Matrixdarstellungen zu  $\mathbb{Z}_pG$  und  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  gehören. Zur Standardbasis  $\{1, g, g^2, \dots, g^{p-1}\}$  von  $\mathbb{Z}_pG$  erhalten wir die Darstellung

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_p^{p \times p}.$$

Zur Standardbasis  $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-2}\}$  von  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  erhalten wir die Darstellung

$$g \mapsto \omega \mapsto \begin{pmatrix} 0 & & & -1 \\ 1 & & & -1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_p^{(p-1) \times (p-1)}.$$

Wir können  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  in  $\mathbb{Z}_pG$  einbetten via  $\omega^i \rightarrow g^i - g^{i+1}$  für  $0 \leq i \leq p - 2$ . Das zu  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  isomorphe reine  $\mathbb{Z}_pG$ -Untergitter ist damit  $(1 - g)\mathbb{Z}_pG$ . Es ist  $\mathbb{Z}_pG / (1 - g)\mathbb{Z}_pG \cong \mathbb{1}$ . Des Weiteren ist  $\text{Fix}_G(\mathbb{Z}_pG) = \langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{1}$  ein reines  $\mathbb{Z}_pG$ -Untergitter von  $\mathbb{Z}_pG$  mit  $\mathbb{Z}_pG / \langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{Z}_p[\omega]$  via  $g^i + \langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p} \mapsto \omega^i$ . Die beiden Untermoduln  $(1 - g)\mathbb{Z}_pG$  und  $\langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p}$  haben trivialen Schnitt, und es ist

$$\mathbb{Z}_pG / (\langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p} \oplus (1 - g)\mathbb{Z}_pG) = \langle 1 + (\langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p} \oplus (1 - g)\mathbb{Z}_pG) \rangle_{\mathbb{Z}_p} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

denn es ist

$$\mathbb{Z}_pG = \langle g^i \mid 0 \leq i \leq p - 1 \rangle_{\mathbb{Z}_p} = \langle 1, 1 - g^i \mid 1 \leq i \leq p - 1 \rangle_{\mathbb{Z}_p},$$

$$\begin{aligned} \langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p} \oplus (1-g)\mathbb{Z}_p G &= \langle N, g^i - g^{i+1} \mid 0 \leq i \leq p-2 \rangle_{\mathbb{Z}_p} \\ &= \langle N, 1 - g^i \mid 1 \leq i \leq p-1 \rangle_{\mathbb{Z}_p} = \langle p \cdot 1, 1 - g^i \mid 1 \leq i \leq p-1 \rangle_{\mathbb{Z}_p}. \end{aligned}$$

Schließlich halten wir noch fest, dass alle drei unzerlegbaren  $\mathbb{Z}_p G$ -Gitter aus Gründen des Rangs selbstdual sind.

Mit diesem Wissen und Satz 2.3.1 können wir jetzt, wie gewünscht, die Kohomologie der unzerlegbaren  $\mathbb{Z}_p G$ -Gitter ermitteln:

**Folgerung 2.3.3** *Es sei  $V$  ein unzerlegbares  $\mathbb{Z}_p G$ -Gitter. Dann ist der Isomorphietyp von  $H^i(G, V)$  bestimmt durch die folgende Tabelle.*

$V \cong$	$i = 0$	$i \in \mathbb{N}$ ungerade	$i \in \mathbb{N}$ gerade
$\mathbf{1}$	$\mathbb{Z}_p$	$0$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}_p[\omega]$	$0$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$	$0$
$\mathbb{Z}_p G$	$\mathbb{Z}_p$	$0$	$0$

*Beweis:* Zunächst bestimmen wir die erforderlichen Untermoduln:

$V \cong$	$\text{Fix}_G(V)$	$N \cdot V$	$\text{Kern}_V(N)$	$(1-g)V$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$p \cdot \mathbf{1}$	$0$	$0$
$\mathbb{Z}_p[\omega]$	$0$	$0$	$\mathbb{Z}_p[\omega]$	$(1-g)\mathbb{Z}_p[\omega]$
$\mathbb{Z}_p G$	$\langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p}$	$\langle N \rangle_{\mathbb{Z}_p}$	$(1-g)\mathbb{Z}_p G$	$(1-g)\mathbb{Z}_p G$

Mit Satz 2.3.1 kann man daraus nahezu unmittelbar die gewünschten Aussagen ablesen. Die einzige Ausnahme ist die Aussage  $\mathbb{Z}_p[\omega]/(1-g)\mathbb{Z}_p[\omega] \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , die in [CR81], Proposition 4.38 (i), zu finden ist.  $\square$

Ein paar Anmerkungen dazu:

- Die Tabelle und die zugehörigen Begründungen behalten ihre Richtigkeit, wenn wir  $\mathbb{Z}_p$  durch  $\mathbb{Z}$  ersetzen. Der einzige Unterschied ist, dass es über  $\mathbb{Z}$  eben noch mehr Isomorphietypen unzerlegbarer  $\mathbb{Z}G$ -Gitter gibt.
- Mit Folgerung 2.3.3 und Lemma 2.1.4 ist  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}_p G}^1(\mathbb{Z}_p[\omega], \mathbf{1}) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p G}^1(\mathbf{1}^*, \mathbb{Z}_p[\omega]^*) \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}_p G}^1(\mathbf{1}, \mathbb{Z}_p[\omega]) \cong H^1(G, \mathbb{Z}_p[\omega]) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Also gibt es mit Satz 2.1.2 genau  $p$  Äquivalenzklassen von Erweiterungen von  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  mit  $\mathbf{1}$ . Wir haben oben eine nichttriviale kurze exakte Sequenz  $0 \rightarrow \mathbf{1} \rightarrow \mathbb{Z}_p G \rightarrow \mathbb{Z}_p[\omega] \rightarrow 0$  hergeleitet. Mit Folgerung 2.1.3 kann daher jede nichttriviale Erweiterung von  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  mit  $\mathbf{1}$  als kurze exakte Sequenz mit  $\mathbb{Z}_p G$  in der Mitte dargestellt werden. Dies entspricht der im Beweis von Satz 2.3.2 getroffenen Aussage, dass der Isomorphietyp einer Erweiterung von  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  mit  $\mathbf{1}$  "von keiner Idealklasse mehr abhängt".
- Des Weiteren kann man an Folgerung 2.3.3 auch erkennen, dass  $\mathbb{Z}_p G$  das einzige projektive unzerlegbare  $\mathbb{Z}_p G$ -Gitter ist: Als freier  $\mathbb{Z}_p G$ -Modul ist  $\mathbb{Z}_p G$  projektiv, und da die anderen unzerlegbaren Gitter für bestimmte  $i > 0$  nicht kohomologiefrei sind, können sie mit Lemma 2.1.5 nicht projektiv sein.

Schließlich stellen wir zur späteren Verwendung noch fest:

**Folgerung 2.3.4** *Mit Lemma 2.1.5 sind  $\mathbb{Z}_p G \otimes \mathbb{Z}_p G$  und  $\mathbb{Z}_p G \otimes \mathbb{Z}_p[\omega]$  projektiv. Mit Lemma 2.1.7 (b) sind damit  $H^i(G, \mathbb{Z}_p G \otimes \mathbb{Z}_p G) = 0$  und  $H^i(G, \mathbb{Z}_p G \otimes \mathbb{Z}_p[\omega]) \cong H^i(G, \mathbb{Z}_p[\omega] \otimes \mathbb{Z}_p G) = 0$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Außerdem ist  $H^i(G, \mathbb{Z}_p[\omega] \otimes \mathbb{Z}_p[\omega]) \cong H^i(G, \mathbf{1})$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .*

*Beweis:* Zu zeigen ist nur die letzte Aussage. Wir betrachten die beiden kurzen exakten Sequenzen  $0 \rightarrow \mathbb{1} \rightarrow \mathbb{Z}_p G \rightarrow \mathbb{Z}_p[\omega] \rightarrow 0$  und  $0 \rightarrow \mathbb{Z}_p[\omega] \rightarrow \mathbb{Z}_p G \rightarrow \mathbb{1} \rightarrow 0$ . Der Modul  $\mathbb{Z}_p[\omega]$  ist als  $\mathbb{Z}_p$ -Modul frei, daher ist  $-\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\omega]$  ein exakter Funktor. Damit erhalten wir aus der zweiten kurzen exakten Sequenz durch Anwenden von  $-\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[\omega]$  die folgende:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\omega] \otimes \mathbb{Z}_p[\omega] \longrightarrow \mathbb{Z}_p G \otimes \mathbb{Z}_p[\omega] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\omega] \longrightarrow 0.$$

Jetzt benötigen wir folgenden Satz:

**Satz 2.3.5 ([CR81], 2.24 Schanuel's Lemma)** *Gegeben seien zwei kurze exakte Sequenzen von  $RG$ -Moduln  $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow V \rightarrow 0$  und  $0 \rightarrow M' \rightarrow P' \rightarrow V \rightarrow 0$ , wobei  $P$  und  $P'$  projektiv seien. Dann sind  $M' \oplus P$  und  $M \oplus P'$  isomorph als  $RG$ -Moduln.*

Mit diesem Satz folgt  $(\mathbb{Z}_p[\omega] \otimes \mathbb{Z}_p[\omega]) \oplus \mathbb{Z}_p G \cong \mathbb{1} \oplus (\mathbb{Z}_p G \otimes \mathbb{Z}_p[\omega])$ . Daher ist  $\mathbb{Z}_p[\omega] \otimes \mathbb{Z}_p[\omega]$  eine direkte Summe aus  $\mathbb{1}$  und projektiven Moduln, also Kopien von  $\mathbb{Z}_p G$ , aus Gründen des Rangs  $p-2$  Stück, da  $(p-1)^2 = p(p-2) + 1 = 1 + p(p-1) - p$  ist. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

## 2.4 Das Zassenhaus-Verfahren

Die grundlegenden Ideen dieses Abschnitts wurden ursprünglich von Hans Zassenhaus zur Bestimmung von Raumgruppen entwickelt ([Zas48]). Hier sehen wir uns an, wie sich sein Verfahren in der Sprache der Kohomologie ausnimmt. Außerdem betrachten wir einige verwandte Verfahren.

Es wurde bereits erwähnt, dass jede Derivation von  $G$  mit Werten in  $V$  durch die Bilder der Elemente einer Erzeugermenge von  $G$  eindeutig festgelegt ist. Falls  $G$  nicht gerade eine freie Gruppe ist, definiert eine beliebige Wahl von Bildern der Erzeuger nicht zwangsläufig eine Derivation; die Bilder müssen bestimmte Relationen erfüllen. Hier schauen wir uns ein Verfahren an, das die rechnerische Überprüfung dieser Relationen ermöglicht. Dabei verwenden wir folgende Voraussetzungen und Begriffe.

- Die Gruppe  $G := \langle g_1, \dots, g_l \rangle$  sei von  $l$  Elementen erzeugt. Es sei  $F$  die freie Gruppe auf  $x_1, \dots, x_l$ , und für  $G$  sei eine endliche Präsentation  $G \cong \langle x_1, \dots, x_l \mid r_1, \dots, r_m \rangle$  gegeben, wobei die  $g_i \in G$  den Erzeugern  $x_i$  der Präsentation entsprechen und die  $r_j$  Wörter in  $F$  sind.
- Es sei  $V$  ein  $RG$ -Gitter vom Rang  $k \in \mathbb{N}$  mit Basis  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ , und  $\Phi : RG \rightarrow R^{k \times k}$  sei die zugehörige Matrixdarstellung. Die  $R$ -lineare Abbildung  $\varphi : RF \rightarrow RG$  sei definiert durch  $x_i \mapsto g_i$ . Dann wird  $V$  zu einem  $RF$ -Modul via  $f.v := \varphi(f).v$  für alle  $f \in F$  und  $v \in V$ .
- Für  $1 \leq j \leq l$  sei die *Fox-Derivation*  $\delta_j \in Z^1(F, RF)$  definiert durch  $\delta_j(x_i) = \delta_{i,j}$  (Kronecker-Delta) für alle  $1 \leq i \leq l$ .
- Die Matrizen  $Z \in R^{km \times kl}$  und  $B \in R^{kl \times k}$  seien gegeben durch

$$Z := \begin{pmatrix} (\Phi \circ \varphi)(\delta_1(r_1)) & \cdots & (\Phi \circ \varphi)(\delta_l(r_1)) \\ \vdots & & \vdots \\ (\Phi \circ \varphi)(\delta_1(r_m)) & \cdots & (\Phi \circ \varphi)(\delta_l(r_m)) \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \Phi(g_1 - 1) \\ \vdots \\ \Phi(g_l - 1) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $Z$  nennen wir *Zassenhaus-Matrix*.

- Für eine Matrix  $A$  über  $R$  bezeichne  $\text{col}_R(A)$  den von den Spalten von  $A$  erzeugten  $R$ -Modul. Für jeden Integritätsbereich  $R'$ , der  $R$  als Teilring enthält, bezeichne  $\text{Kern}_{R'}(A)$  den Kern von  $A$  als Matrix über  $R'$ .

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass wir, wie in der Einleitung von Kapitel 2 angekündigt,  $V$  und  $R^k$  miteinander identifizieren wollen.

**Lemma 2.4.1** *Es ist  $H^0(G, V) \cong \text{Kern}_R(B)$ .*

*Beweis:* Mit (2.4) ist  $H^0(G, V) \cong \text{Fix}_G(V)$ . Es ist  $v \in \text{Fix}_G(V)$  genau dann, wenn  $(g_i - 1)v = 0$  ist für alle  $1 \leq i \leq l$ . Letzteres trifft genau dann zu, wenn  $v \in \text{Kern}_R(B)$  ist.  $\square$

**Satz 2.4.2** *Es sind  $Z^1(G, V) \cong \text{Kern}_R(Z)$ ,  $B^1(G, V) \cong \text{col}_R(B) \leq \text{Kern}_R(Z)$  und damit  $H^1(G, V) \cong \text{Kern}_R(Z)/\text{col}_R(B)$  (als abelsche Gruppen).*

*Beweis:* Für die Details sei auf Abschnitt 7.6 in [HEO05] verwiesen (wo im Gegensatz zu hier mit Rechtsoperation und Zeilenvektoren gearbeitet wird). Hier nur so viel: Wir lesen jedes Element  $v \in R^{kl}$  als  $l$  Elemente  $v_1, \dots, v_l \in R^k$  untereinandergeschrieben. Die gewünschten Isomorphismen erhalten wir dann aus

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_l \end{pmatrix} \longleftrightarrow \delta : G \rightarrow R^k, g_i \mapsto v_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq l. \quad \square$$

Das bedeutet insbesondere: Falls  $R$  ein Körper der Charakteristik 0 ist, ist  $\text{Kern}_R(Z) = \text{col}_R(B)$ , da dann mit Lemma 2.1.7 (a)  $H^1(G, V) = 0$  ist.

Ab jetzt bis zum Ende des Abschnitts sei  $R = \mathbb{Z}$ . Wir schreiben  $\mathbb{Q}V := \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} V$  und identifizieren  $V$  mit  $1 \otimes_{\mathbb{Z}} V \leq \mathbb{Q}V$ . Dann sind  $\mathbb{Q}V$  und  $\mathbb{Q}V/V$  zwar keine  $\mathbb{Z}G$ -Gitter, aber immer noch  $\mathbb{Z}G$ -Moduln. Außerdem ist  $\mathbb{Q}V$  ein  $\mathbb{Q}G$ -Gitter, für das jede  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $V$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis ist, das heißt, wir können als Matrizen  $Z$  und  $B$  für  $\mathbb{Q}V$  die gleichen wählen wie für  $V$ . Wir betrachten die zur kurzen exakten Sequenz  $0 \rightarrow V \rightarrow \mathbb{Q}V \rightarrow \mathbb{Q}V/V \rightarrow 0$  gehörige exakte Kohomologiesequenz. Da mit Lemma 2.1.7 (a) für  $i \in \mathbb{N}$  die  $i$ -te Kohomologie eines  $\mathbb{Q}G$ -Moduls trivial ist, erhalten wir aus

$$0 = H^i(G, \mathbb{Q}V) \longrightarrow H^i(G, \mathbb{Q}V/V) \longrightarrow H^{i+1}(G, V) \longrightarrow H^{i+1}(G, \mathbb{Q}V) = 0,$$

dass  $H^{i+1}(G, V) \cong H^i(G, \mathbb{Q}V/V)$  ist. Für  $i = 0$  ist die Sache etwas komplizierter. Hier haben wir nur die exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow H^0(G, V) \longrightarrow H^0(G, \mathbb{Q}V) \longrightarrow H^0(G, \mathbb{Q}V/V) \\ &\longrightarrow H^1(G, V) \longrightarrow H^1(G, \mathbb{Q}V) = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

zur Verfügung. Nur wenn  $\mathbb{Q}V$  fixpunktfrei ist, sind wir in der gleichen Situation wie für  $i > 0$ : Dann ist  $H^1(G, V) \cong H^0(G, \mathbb{Q}V/V)$ . Was im Allgemeinen passiert, sehen wir im Teil (a) des folgenden Satzes.

**Satz 2.4.3** (a) *Es sei  $q$  der Rang von  $B$  und  $d_1, \dots, d_q$  die Invariantenteiler von  $B$ . Dann ist*

$$H^1(G, V) \cong \bigoplus_{i=1}^q \mathbb{Z}/d_i \mathbb{Z}.$$

(b) *Es sei  $r$  der Rang von  $Z$  und  $e_1, \dots, e_r$  die Invariantenteiler von  $Z$ . Dann ist*

$$H^2(G, V) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/e_i \mathbb{Z}.$$

*Beweis:*

(a) Mit Lemma 2.4.1 ist  $H^0(G, V) \cong \text{Kern}_{\mathbb{Z}}(B)$  und  $H^0(G, \mathbb{Q}V) \cong \text{Kern}_{\mathbb{Q}}(B)$ . Ein Element  $v+V \in \mathbb{Q}V/V$  ist ein Fixpunkt unter  $G$  genau dann, wenn  $Bv \in V$  ist. Nun seien  $S \in GL_{kl}(\mathbb{Z})$  und  $T \in GL_k(\mathbb{Z})$  so gewählt, dass die Invariantenteilerform von  $B$  gegeben ist durch



$$\cong \{v \in \mathbb{Q}^{kl} \mid Mv \in \mathbb{Z}^{km}\} / (\text{Kern}_{\mathbb{Q}}(M) + \mathbb{Z}^{kl}) \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}/e_i\mathbb{Z}. \quad \square$$

Als Anwendungsbeispiel für das Zassenhaus-Verfahren betrachten wir die zyklischen Gruppen.

**Beispiel 2.4.4** *Es sei  $G = \langle g \rangle$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist eine endliche Präsentation von  $G$  gegeben durch  $G \cong \langle x \mid x^n \rangle$ . Es ist also  $l = m = 1$ . Weiter sei  $X \in GL_k(\mathbb{Z})$ , so dass durch  $\Phi : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}^{k \times k}, g \mapsto X$  eine Darstellung von  $G$  gegeben ist. Dann ist  $B = X - 1$  (wobei 1 hier für die Einheitsmatrix steht) und*

$$Z = \Phi \circ \varphi(\delta_1(x^n)) = \Phi \circ \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i \delta_1(x)\right) = \Phi \circ \varphi\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} X^i.$$

Hier sieht man sofort, dass  $ZB = 0$  und damit  $\text{col}_{\mathbb{Z}}(B) \leq \text{Kern}_{\mathbb{Z}}(Z)$  ist. Auch der Zusammenhang zu Satz 2.3.1 liegt auf der Hand: Es ist  $\text{Kern}_{\mathbb{Z}^k}(N) = \text{Kern}_{\mathbb{Z}}(Z)$  und  $(1-g)\mathbb{Z}^k = \text{col}_{\mathbb{Z}}(B)$ .

Nun schauen wir uns noch an, wie man konkret am Rechner überprüfen kann, ob in dieser Situation eine gegebene Derivation  $\delta \in Z^1(G, \mathbb{Q}V/V)$  eine innere Derivation ist (unter der Voraussetzung, dass die Matrix  $X$  konkret vorliegt). Wir wählen ein  $w \in \mathbb{Q}V$  mit  $\delta(g) = w + V$ . Dann gelten folgende Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} \delta \in B^1(G, \mathbb{Q}V/V) &\iff w + V \in (\text{col}_{\mathbb{Q}}(B) + V)/V \\ \iff w \in \text{col}_{\mathbb{Q}}(B) + V = \text{Kern}_{\mathbb{Q}}(Z) + V &\iff \exists z \in V \text{ mit } Z(w - z) = 0 \\ &\iff Zw \in \text{col}_{\mathbb{Z}}(Z). \end{aligned}$$

Nun sei  $\tilde{Z}$  die Hermite-Normalform von  $Z^{\text{tr}}$ . Dann ist  $\text{col}_{\mathbb{Z}}(Z) = \text{col}_{\mathbb{Z}}(\tilde{Z}^{\text{tr}})$ . Die Aussage  $Zw \in \text{col}_{\mathbb{Z}}(\tilde{Z}^{\text{tr}})$  lässt sich dann algorithmisch leicht überprüfen. Am Rechner wird man eher mit Zeilen statt mit Spalten arbeiten, das heißt, man wird testen, ob  $(Zw)^{\text{tr}}$  im  $\mathbb{Z}$ -Zeilenerzeugnis von  $\tilde{Z}$  liegt.

## 2.5 Kohomologie von Spechtmoduln

In diesem Abschnitt stellen wir zusammen, welche Aussagen wir mit den bisher eingeführten Mitteln über die Kohomologie von Spechtmoduln treffen können. In den nachfolgenden Kapiteln wird dann dieses Grundgerüst mit mehr Details angereichert werden.

Optimalerweise möchten wir gern wissen, welche Kohomologie ein Spechtmodul genau hat. Oft ist allerdings nur die Information erhältlich, ob die Kohomologie trivial ist oder nicht. Andererseits ist diese Information in vielen Zusammenhängen schon ausreichend. Aus diesem und anderen Gründen lohnt es sich, Spechtmoduln mit nichttrivialer Kohomologie mit Hilfe von Teilgraphen des Young-Graphen zu beschreiben.

Für  $i \in \mathbb{N}_0$  definieren wir den  $i$ -ten *Kohomologie-Graphen* über  $R$  als

$$\mathcal{C}^i(R) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \{\lambda \vdash n \mid H^i(S_n, S_R^\lambda) \neq 0\} \subseteq \mathcal{Y}.$$

Dabei sollen uns im Folgenden die Fälle  $R \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p\}$  für  $p \in \mathbb{P}$  interessieren. Insbesondere schreiben wir kurz  $\mathcal{C}_p^i := \mathcal{C}^i(\mathbb{Z}_p)$  für  $i \in \mathbb{N}_0$ .

In Anlehnung an die Notation aus Abschnitt 2.2 sei für  $i \in \mathbb{N}$  mit  $x_i^\lambda$  der  $p$ -Rang von  $H^i(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  (bzw. von  $H^i(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)$ ) bezeichnet, und für  $i \in \mathbb{N}_0$  sei  $d_i^\lambda$  die  $\mathbb{F}_p$ -Dimension von  $H^i(S_n, S_{\mathbb{F}_p}^\lambda)$ . Mit Lemma 2.2.1 ist  $d_i^\lambda = x_i^\lambda + x_{i+1}^\lambda$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ . Weiterhin wissen wir:

**Lemma 2.5.1** ([Web09a], Lemma 2.3) (a) *Es ist  $H^0(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \begin{cases} \cong \mathbb{Z} & \text{für } \lambda = (n), \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$*

(b) *Für  $\lambda = (n)$  ist  $d_0^\lambda = 1$  und  $x_1^\lambda = 0$ , und für  $\lambda \neq (n)$  ist  $d_0^\lambda = x_1^\lambda$ .*



Daraus folgt mit Lemma 2.2.1 per Induktion:

**Folgerung 2.5.2** ([Web09a], Corollary 2.4) *Für  $i \in \mathbb{N}$  ist*

$$x_i^\lambda = \begin{cases} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} d_j^\lambda & \text{für } \lambda \neq (n), \\ \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-1-j} d_j^\lambda & \text{für } \lambda = (n). \end{cases}$$

Außerdem erhalten wir daraus Informationen darüber, wie die Kohomologie-Graphen zueinander in Verbindung stehen.

**Folgerung 2.5.3** (a) *Mit Folgerung 2.2.3 ist  $\mathcal{C}^i(\mathbb{Z}) = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{C}_p^i$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ .*

(b) *Mit Lemma 2.2.1 ist  $\mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p) = \mathcal{C}_p^i \cup \mathcal{C}_p^{i+1}$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .*

(c) *Mit Lemma 2.5.1 ist  $\mathcal{C}^0(\mathbb{F}_p) = \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}) \cup \mathcal{C}_p^1$ .*

(d) *Mit (a) und (b) ist  $\mathcal{C}^i(\mathbb{Z}) \cup \mathcal{C}^{i+1}(\mathbb{Z}) = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} \mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p)$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .*

Einige dieser Kohomologie-Graphen sind bereits bekannt. Mit Lemma 2.5.1 (a) besteht  $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z})$  nur aus den trivialen Partitionen. Auch die Fixpunkt-Untermoduln von Spechtmoduln über  $\mathbb{F}_p$  sind bereits bekannt: Für  $k \in \mathbb{N}_0$  definieren wir

$$l_p(k) := \min\{x \in \mathbb{N}_0 \mid k < p^x\}. \quad (2.7)$$

Wir sagen, eine Partition  $\lambda$  erfüllt das *James-Kriterium*, wenn  $\lambda_i \equiv -1 \pmod{p^{l_p(\lambda_{i+1})}}$  ist für alle  $i \in \mathbb{N}$ . (Für  $i \geq \ell(\lambda)$  gilt diese Kongruenz immer, da dann  $l_p(\lambda_{i+1}) = 0$  ist.)

**Satz 2.5.4** *Es ist  $H^0(S_n, S_{\mathbb{F}_p}^\lambda) \cong \mathbb{F}_p$ , wenn  $\lambda$  das James-Kriterium erfüllt, und ansonsten 0.*

*Beweis:* Da der Fixpunkt-Untermodul von  $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda$  auch ein Untermodul von  $M_{\mathbb{F}_p}^\lambda$  ist, ist er höchstens eindimensional. In [Jam78], Theorem 24.4, wird gezeigt, dass  $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda$  genau dann einen zum trivialen Modul isomorphen Untermodul besitzt, wenn  $\lambda$  das James-Kriterium erfüllt. Da die 0-te Kohomologie für den Fixpunkt-Untermodul steht, folgt die Behauptung.  $\square$

**Folgerung 2.5.5** *Mit Satz 2.5.4 und Folgerung 2.5.3 (c) ist  $\lambda \in \mathcal{C}_p^1$  genau dann, wenn  $\lambda \neq (n)$  ist und das James-Kriterium erfüllt. Außerdem folgt mit Satz 2.5.4 und Folgerung 2.5.2, dass  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  für jedes  $\lambda \vdash n$  eine zyklische Gruppe ist.*

Eine weitere wertvolle Eigenschaft der Kohomologie-Graphen ist, dass nicht nur  $\mathcal{C}_p^i \subseteq \mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p) \subseteq \mathcal{B}_0(p)$  ist für alle  $i \in \mathbb{N}$ , sondern dass die  $\mathcal{C}_p^i$  und  $\mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p)$  außerdem noch eine den Hauptblock-Graphen vergleichbare Struktur haben, wie sie in Satz 1.5.3 beschrieben wird.

**Satz 2.5.6** ([Web09a], Theorem 1.3) *Es sei  $i \in \mathbb{N}$  und  $\lambda \in \mathcal{C}_p^i$  (bzw.  $\mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p)$ ).*

(a) *Es existiert ein Nachfolger von  $\lambda$  in  $\mathcal{C}_p^i$  (bzw.  $\mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p)$ ).*

(b) *Falls  $\lambda \vdash n$  mit  $p \nmid n$  ist, so existiert auch ein Vorgänger von  $\lambda$  in  $\mathcal{C}_p^i$  (bzw.  $\mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p)$ ).*

*Beweis:* Die Aussage für  $\mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p)$  ergibt sich mit Folgerung 2.5.3 (b) aus der für  $\mathcal{C}_p^i$ . Der Beweis für  $\mathcal{C}_p^i$  wird in Abschnitt 3 von [Web09a] ausgeführt. Hier sei nur so viel gesagt, dass einerseits die Verzweigungsregeln für Spechtmoduln einfließen (Satz 1.4.1), andererseits das Eckmann-Shapiro-Lemma (Satz 2.1.12) für Teil (a) sowie die Komposition aus Restriktion und Transfer (Lemma 2.1.14) für Teil (b).  $\square$

Wenn wir nun alle Partitionen aus  $\mathcal{C}_p^i$  (bzw.  $\mathcal{C}^i(\mathbb{F}_p)$ ) kennen würden, die keinen Vorgänger haben, und außerdem zu jeder gegebenen Partition aus dem entsprechenden Kohomologie-Graphen alle Nachfolger bestimmen könnten, dann wäre im Prinzip der gesamte Graph bekannt. Von solch paradisischen Zuständen sind wir allerdings noch weit entfernt. Nichtsdestoweniger werden wir einige nützliche Schritte in diese Richtung gehen.

Zuvor jedoch sehen wir uns an, wie wir das Zassenhaus-Verfahren gewinnbringend für die symmetrischen Gruppen anwenden können. Als erstes benötigen wir eine geeignete Präsentation. Die bekannteste Präsentation der  $S_n$  ist sicher die *Coxeter-Präsentation*, gegeben durch

$$H_n := \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{ll} s_i^2 & \forall 1 \leq i \leq n-1, \\ (s_i s_{i+1})^3 & \forall 1 \leq i \leq n-2, \\ (s_i s_j)^2 & \forall 1 \leq i, j \leq n-1, j-i \geq 2 \end{array} \rangle.$$

Dabei entsprechen die  $s_i$  den Nachbartranspositionen  $(i, i+1)$ . Hier haben die Relationen eine verhältnismäßig einfache Struktur. In gewissen Situationen ist dadurch  $H_n$  tatsächlich die erste Wahl. Nun ist es aber so, dass die Größe der Zassenhaus-Matrizen von den Anzahlen der Erzeuger und der Relationen abhängt. In dieser Beziehung schneidet  $H_n$  mit  $n-1$  Erzeugern und  $\binom{n}{2}$  Relationen eher schlecht ab. Deutlich besser ist da schon die folgende Präsentation für  $n \geq 3$  ([CM72], 6.2):

$$G_n := \langle a, b \mid a^2, b^n, (ab)^{n-1}, (ab^j ab^{n-j})^2 \text{ für alle } 2 \leq j \leq n/2 \rangle. \quad (2.8)$$

Sie hat unabhängig von  $n$  immer nur 2 Erzeuger, und die Anzahl der Relationen ist  $r := \lfloor n/2 \rfloor + 2$ . Der Erzeuger  $a$  entspricht der Transposition  $(1, 2)$  und der Erzeuger  $b$  dem  $n$ -Zykel  $(1, \dots, n)$ .

Für  $n \in \{0, 1\}$  gibt es nur den trivialen Spechtmodul, für  $n = 2$  zusätzlich nur den alternierenden. In diesem niedrigen Bereich lohnt es sich nicht, Zassenhaus anzuwerfen. Daher sei im Folgenden  $n \geq 3$ , und wir verwenden die Präsentation  $G_n$ .

Als Nächstes brauchen wir eine Matrixdarstellung von  $S_n$ . Für bestimmte einfache Typen von Partitionen werden wir im weiteren Verlauf Darstellungen von Hand bestimmen. Zum konkreten Rechnen kann man für  $n \leq 20$  zum Beispiel auf die GAP-Bibliothek `spechtmats.g` zurückgreifen. Sie liefert Matrizen  $A, B \in GL_k(\mathbb{Z})$ , die den Erzeugern  $a$  und  $b$  entsprechen, wobei  $k$  die Dimension des entsprechenden Spechtmoduls ist. (Die darstellenden Matrizen dieser Bibliothek basieren übrigens auf Linksoperation.)

Die Zassenhaus-Matrix zum Spechtmodul  $S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}$  bezeichnen wir mit  $Z_{\lambda} \in \mathbb{Z}^{rk \times 2k}$ , und für die zugehörige Matrix  $B$ , wie sie in Abschnitt 2.4 definiert wurde, schreiben wir jetzt entsprechend  $B_{\lambda} \in \mathbb{Z}^{2k \times k}$ . (Im Folgenden steht  $B$  immer für die Matrix, die  $b = (1, \dots, n)$  repräsentiert.) Die beiden Matrizen sind gegeben durch

$$B_{\lambda} = \begin{pmatrix} A-1 \\ B-1 \end{pmatrix},$$

$$Z_{\lambda} = \left( \begin{array}{c|c} 1+A & 0 \\ \hline 0 & \sum_{i=0}^{n-1} B^i \\ \hline \sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i & \sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i A \\ \hline (1+AB^j AB^{n-j})(1+AB^j) & (1+AB^j AB^{n-j})A \left( \sum_{i=0}^{j-1} B^i + B^j A \sum_{i=0}^{n-j-1} B^i \right) \end{array} \right).$$

$2 \leq j \leq n/2$   $2 \leq j \leq n/2$

Dabei sind die unteren beiden Blöcke so zu lesen, dass es für jedes  $2 \leq j \leq n/2$  eine Blockzeile dieser Gestalt gibt.

Obschon  $Z_\lambda$  bei gegebener Präsentation und gegebener Matrixdarstellung eindeutig festgelegt ist, kann die Darstellung der einzelnen Blöcke mit Hilfe von  $A$  und  $B$  sehr wohl variieren; durch Anwenden der Relationen aus  $G_n$  lassen sich beliebig viele andere Schreibweisen finden. Die hier gewählte Darstellung folgt dem Bestreben nach bestmöglicher Übersichtlichkeit. Details zur Herleitung finden sich in [Web06] vor Lemma 2.1.3.

Über die Ränge dieser Matrizen wissen wir Folgendes:

**Folgerung 2.5.7** (a) Wegen  $\text{Kern}_{\mathbb{Q}}(Z_\lambda) = \text{col}_{\mathbb{Q}}(B_\lambda)$  und  $r > 2$  ist  $\text{Rang}(Z_\lambda) + \text{Rang}(B_\lambda) = 2k$ .

(b) Mit Lemma 2.4.1 und Lemma 2.5.1 (a) ist  $B_{(n)} = 0$  und  $\text{Rang}(B_\lambda) = k$  für  $\lambda \neq (n)$ .

(c) Mit (a) und (b) ist  $\text{Rang}(Z_{(n)}) = 2k = 2$  und  $\text{Rang}(Z_\lambda) = k$  für  $\lambda \neq (n)$ .

Die Bestimmung des Isomorphietyps von  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  ist nun gemäß Satz 2.4.3 im Prinzip leicht zu programmieren: Man nimmt sich, wie gesagt, aus `spechtmats.g` die Matrizen  $A$  und  $B$ , konstruiert daraus wie oben angegeben  $B_\lambda$  und  $Z_\lambda$  und bestimmt deren Invariantenteiler. Das klingt allerdings einfacher als es ist, denn die Bestimmung der Invariantenteiler sehr großer Matrizen ist ein nichttriviales Problem. Die Matrizen  $B_\lambda$  bleiben relativ handlich, doch die Zassenhaus-Matrizen werden sehr schnell sehr groß, selbst bei der Präsentation  $G_n$ . Um nur ein Beispiel zu nennen: Um festzustellen, dass die Partition  $(5, 2^2, 1^3) \vdash 12$  in  $\mathcal{C}_3^2$  liegt, müssen wir eine  $29568 \times 7392$ -Zassenhaus-Matrix auswerten.

Die Standard-GAP-Funktion `ElementaryDivisorsMat` ([GAP08]) ist nicht stark genug. Mit der Funktion `ElementaryDivisorsPPartRk` aus dem GAP-Paket EDIM ([Lüb06]), die eine  $p$ -adische Methode verwendet, erzielen wir bessere Ergebnisse. Doch selbst dann ist das Ende der Fahnenstange bald erreicht. Die bisher berechneten Beispiele für  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  können in [Web09b] eingesehen werden. Dort sind für  $n \leq 11$  die Ergebnisse für alle Partitionen enthalten, für  $12 \leq n \leq 20$  nur solche, bei denen die jeweilige Zassenhaus-Matrix nicht zu groß ist. Für  $n = 20$  sind das nur 14 von insgesamt 627.

Es gibt aber auch ein paar Beispiele, die von Hand zu bewältigen sind, allen voran  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{(n)})$ : Die erste Kohomologie des trivialen  $S_n$ -Moduls über  $\mathbb{Z}$  ist trivial, weil  $B_{(n)} = 0$  ist. (Das gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$ ; für  $n \leq 2$  hat  $B_{(n)}$  nur nicht die Gestalt von oben, sondern ist eine  $1 \times 1$ -Matrix.) Diese Kohomologie kannten wir allerdings schon vorher, zum Beispiel mit Lemma 2.5.1 (b) und Folgerung 2.5.3 (a). Schauen wir uns daher noch ein paar aussagekräftigere Beispiele an.

An dieser Stelle bietet es sich an, für die in dieser Arbeit am häufigsten auftauchenden Partitionen eine abkürzende Notation zu etablieren. Es handelt sich dabei um die nach der trivialen Partition sechs lexikografisch größten. Für jeweils hinreichend großes  $n$  sei

$$\begin{aligned} \alpha &:= (n-1, 1), & \zeta &:= (n-3, 3), \\ \beta &:= (n-2, 2), & \vartheta &:= (n-3, 2, 1), \\ \gamma &:= (n-2, 1^2), & \kappa &:= (n-3, 1^3). \end{aligned}$$

Falls  $\lambda$  eine dieser Partitionen ist, bezeichnet  $\lambda+1$  (definiert wie in Abschnitt 1.1) die entsprechende Partition von  $n+1$ . Analog dazu sei  $\lambda-1$  die entsprechende Partition von  $n-1$ , sofern diese existiert. (Zum Beispiel ist  $\zeta-1$  für  $n=6$  nicht definiert.)

**Lemma 2.5.8** (a) Für  $n \geq 2$  ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\alpha) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

(b) Es sei  $n \geq 3$  und  $2 \leq j \leq n-1$ . Dann ist

$$H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{(n-j, 1^j)}) \cong \begin{cases} 0, & \text{falls } n-j \text{ gerade ist,} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{falls } n-j \text{ ungerade ist.} \end{cases}$$

*Beweis:*

(a) Die Aussage wird im Anhang A.1 mit Hilfe des Zassenhaus-Verfahrens aus Satz 2.4.3 (a) ausgerechnet.

- (b) Die Partition  $\lambda := (n - j, 1^j)$  erfüllt für  $j \geq 2$  das James-Kriterium genau dann, wenn  $p = 2$  und  $n - j$  ungerade ist. Also ist mit Folgerung 2.5.5  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\lambda)$  trivial für gerades  $n - j$ , und für ungerades  $n - j$  genügt es, die erste Kohomologie von  $S_{\mathbb{Z}_2}^\lambda$  zu bestimmen. Für  $j = 2$ , also  $\lambda = \gamma$ , verwenden wir wieder Satz 2.4.3 (a). Dies wird im Anhang A.3 ausgeführt. Sobald wir das haben, können wir eine Induktion über  $n$  durchführen. Für  $n = 3$  ist  $\gamma = (1^3)$  die einzige zu betrachtende Partition, und dafür haben wir die erste Kohomologie schon bestimmt. Nun sei  $n > 3$  und  $n - j$  ungerade. Wir wollen  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\lambda)$  bestimmen. Für  $j = 2$  wissen wir bereits Bescheid, daher betrachten wir nur den Fall  $j > 2$ . Da  $(n - 1) - (j - 1) = n - j$  ungerade ist, gilt nach Induktionsvoraussetzung und mit Eckmann-Shapiro  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{(n-j, 1^{j-1})} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Der induzierte Spechtmodul hat die Spechtreihe

$$S_{\mathbb{Z}_2}^{(n-j, 1^{j-1})} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow S_{\mathbb{Z}_2}^\lambda \mid S_{\mathbb{Z}_2}^{(n-j, 2, 1^{j-2})} \mid S_{\mathbb{Z}_2}^{(n-j+1, 1^{j-1})}.$$

Die beiden Partitionen  $(n - j, 2, 1^{j-2})$  und  $(n - j + 1, 1^{j-1})$  erfüllen das James-Kriterium nicht. Somit erhalten wir eine exakte Kohomologie-Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\lambda) \longrightarrow H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{(n-j, 1^{j-1})} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \longrightarrow 0$$

und daraus das gewünschte Ergebnis.  $\square$

### Lemma 2.5.9

$\lambda$	$n$	$H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong$
$(n)$	$\geq 2$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$(1^n)$	$\geq 2, \quad n \in \{3, 4\}$	$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$
	$n \notin \{3, 4\}$	0
$\alpha$	$\geq 3, \quad \text{ungerade}$	0
	$\text{gerade}$	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

*Beweis:* Die Beweise werden in Abschnitt 2.2 sowie Anhang C von [Web06] ausgeführt. Sie basieren wie in Lemma 2.5.8 darauf, die Zassenhaus-Matrizen explizit hinzuschreiben und auf Invariantenteilerform zu bringen. Dabei wurde für Teil (c) die Coxeter-Präsentation  $H_n$  zugrunde gelegt. Das vergrößert zwar, wie gesagt, die Zassenhaus-Matrizen immens, aber die einfachere Struktur der Relationen ermöglicht es hier überhaupt erst, eine Zassenhaus-Matrix in Abhängigkeit von  $n$  explizit anzugeben.  $\square$

Was die Bestimmung der ersten und zweiten Kohomologie von Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}$  zu Partitionen von einem bestimmten von  $n$  abhängenden Typ mit Hilfe des Zassenhaus-Verfahrens angeht, sind wir mittlerweile an die Grenzen des Machbaren gelangt. Ab jetzt werden wir also anders vorgehen müssen. Zum Schluss dieses Abschnitts befassen wir uns noch mit der zweiten Kohomologie von  $S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  sowie der ersten und zweiten Kohomologie von  $S_{\mathbb{Z}}^\beta$ . Dazu sind geringe Vorgriffe auf die Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 erforderlich sowie die folgende Hilfsaussage.

**Lemma 2.5.10** *Es sei  $n \geq 4$  und  $R$  ein Integritätsbereich.*

- (a) *Es gibt einen  $RS_n$ -Modul-Homomorphismus  $\varphi : S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \rightarrow M^\beta$  mit  $\text{Kern}(\varphi) \cong S^\gamma$  und  $M^\beta / \text{Bild}(\varphi) \cong \mathbf{1}$ .*
- (b) *Es ist  $S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} \cong \text{Bild}(\varphi)$ . Mit Teil (a) existiert also ein surjektiver  $RS_n$ -Modul-Homomorphismus  $S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \rightarrow S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}$ , dessen Kern isomorph zu  $S^\gamma$  ist.*
- (c) *Für  $R = \mathbb{Z}$  ist  $H^1(S_n, \text{Bild}(\varphi)) \cong \mathbb{Z}/\binom{n}{2}\mathbb{Z}$ .*

*Beweis:* Der Beweis wird mit Hilfe explizit gewählter  $R$ -Basen geführt und ist daher wieder mit einem gewissen Rechenaufwand verbunden. Er findet sich im Anhang B.  $\square$

Im Folgenden werden wir mit den exakten Kohomologie-Sequenzen arbeiten, die sich aus den exakten Sequenzen

$$0 \longrightarrow S^\beta \longrightarrow S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} \longrightarrow S^\alpha \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} \longrightarrow M^\beta \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow S^\gamma \longrightarrow S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} \longrightarrow 0$$

(für  $R = \mathbb{Z}$  oder  $R = \mathbb{Z}_p$ ) ergeben. Die Kohomologie-Sequenzen werden wir öfters in der in (2.5) eingeführten Tabellen-Notation festhalten. Die erste Kohomologie von  $M_{\mathbb{Z}}^\beta$  kennen wir aus Beispiel 2.1.13, und die zweite ergibt sich aus Beispiel 2.1.17:

$$H^2(S_n, M_{\mathbb{Z}}^\beta) \cong (\mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (0 \otimes 0) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{Z}) \cong \mathbb{F}_2^2.$$

Die übrigen Tabelleneinträge ergeben sich, sofern nicht anders angegeben, aus den Lemmata 2.5.8 und 2.5.9. Dabei verwenden wir gegebenenfalls das Eckmann-Shapiro-Lemma und Folgerung 2.2.3.

**Lemma 2.5.11** Für  $n \geq 4$  ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2n\mathbb{Z} & \text{für ungerades } n, \\ \mathbb{Z}/\frac{n}{2}\mathbb{Z} & \text{für gerades } n. \end{cases}$

*Beweis:* Wir betrachten die exakten Kohomologie-Sequenzen:

$n$ ungerade:				$n$ gerade:			
$i$	$S_{\mathbb{Z}}^\gamma$	$S_{\mathbb{Z}}^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}$	$S_{\mathbb{Z}}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}$	$i$	$S_{\mathbb{Z}}^\gamma$	$S_{\mathbb{Z}}^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}$	$S_{\mathbb{Z}}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}$
0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/\frac{n(n-1)}{2}\mathbb{Z}$	1	0	$\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/\frac{n(n-1)}{2}\mathbb{Z}$
2		$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$		2		0	

Für gerades  $n$  folgt mit der Exaktheit der Sequenz bereits, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \cong \mathbb{Z}/\frac{n}{2}\mathbb{Z}$  ist. Für ungerades  $n$  hat die Kohomologie-Sequenz die Form

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{Z}/\frac{n(n-1)}{2}\mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_3} H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \xrightarrow{\varphi_4} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Wegen der Exaktheit ist erstens  $\text{Kern}(\varphi_2) \cong \text{Bild}(\varphi_1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , zweitens  $\text{Kern}(\varphi_3) \cong \text{Bild}(\varphi_2) \cong \mathbb{Z}/\frac{n-1}{2}\mathbb{Z}$  und drittens  $\text{Kern}(\varphi_4) \cong \text{Bild}(\varphi_3) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ . Da  $n$  ungerade ist, ist  $\text{Bild}(\varphi_4)$  entweder trivial oder isomorph zu  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , also ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma)$  zyklisch von Ordnung  $n$  oder  $2n$ .

Es bleibt also nur die Frage zu klären, ob die Gruppe einen 2-Anteil hat. Mit den entsprechenden Tabellen auf Seite 115 und Folgerung 2.5.2 erhalten wir für ungerades  $n$  und  $p = 2$ , dass  $x_2^2 = d_1^\gamma - d_0^\gamma = 2 - 1 = 1$  ist. Damit hat  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma)$  für ungerades  $n$  tatsächlich einen 2-Anteil, und die Behauptung folgt.  $\square$

**Lemma 2.5.12** Es sei  $n \geq 4$ .

(a) Es ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\beta) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/\frac{n-1}{2}\mathbb{Z} & \text{für ungerades } n, \\ \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z} & \text{für gerades } n. \end{cases}$

(b) Für ungerades  $n$  ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\beta) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Für gerades  $n$  ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\beta)$  zyklisch von Ordnung 2 oder 4.

*Beweis:* Zunächst stellen wir fest, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\beta) = 0$  für  $2 < p \in \mathbb{P}$  ist: Die Partition  $\beta$  liegt genau dann im  $p$ -Hauptblock, wenn  $n \equiv 1 \pmod{p}$  ist. Die Vorgänger von  $\beta$  in  $\mathcal{Y}$  sind  $\beta - 1$  und  $\alpha - 1$ . Falls also  $n \equiv 1 \pmod{p}$  ist, liegt  $\beta - 1$  nicht im Hauptblock, und mit Lemma 2.5.9 ist  $H^2(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}_p}^{\alpha-1}) = 0$ . Darum kann  $\beta$  keinen Vorgänger in  $\mathcal{C}_p^2$  haben und liegt daher mit Satz 2.5.6 (b) selbst auch nicht in  $\mathcal{C}_p^2$ .

Wir bleiben beim ungeraden  $p$  und betrachten die exakte Kohomologie-Sequenz:

$$\begin{array}{c|ccc} i & S_{\mathbb{Z}_p}^\beta & S_{\mathbb{Z}_p}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} & S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & & \mathbb{Z}/[\frac{n(n-1)}{2}]_p \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/[n]_p \mathbb{Z} \\ 2 & 0 & & 0 \end{array}$$

Daraus ergibt sich, dass  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\beta) \cong \mathbb{Z}/[n-1]_p \mathbb{Z}$  ist (und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}) = 0$ , was allerdings hier nicht weiter relevant ist).

Mit dem James-Kriterium wissen wir, dass  $H^0(S_n, S_{\mathbb{F}_2}^\beta) \cong \mathbb{F}_2$  ist, falls  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ist, und ansonsten trivial. Darum besitzt  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)$  mit 2.5.2 nur für  $n \equiv 1 \pmod{4}$  einen 2-Anteil. Da  $\alpha$  für ungerades  $n$  nicht in  $\mathcal{B}_0(2)$  liegt, gilt in diesem Fall mit Lemma 2.5.10, dass

$$H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta) \cong H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}) \cong \mathbb{Z}/[\frac{n(n-1)}{2}]_2 \mathbb{Z} = \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{2}]_2 \mathbb{Z}$$

ist. (Für  $n \equiv 3 \pmod{4}$  ist das gleich 0.) Insgesamt ergibt sich aus diesen Überlegungen Teil (a).

Für Teil (b) bleibt noch der 2-Anteil von  $|H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\beta)|$  zu untersuchen. Wir betrachten die exakten Kohomologie-Sequenzen

$$\begin{array}{c} n \text{ ungerade:} \\ \begin{array}{c|ccc} i & S_{\mathbb{Z}_2}^\beta & S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} & S_{\mathbb{Z}_2}^\alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{2}]_2 \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{2}]_2 \mathbb{Z} & 0 \\ 2 & & & 0 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} n \text{ gerade:} \\ \begin{array}{c|ccc} i & S_{\mathbb{Z}_2}^\beta & S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} & S_{\mathbb{Z}_2}^\alpha \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \mathbb{Z}/[\frac{n}{2}]_2 \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/[n]_2 \mathbb{Z} \\ 2 & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc} i & S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} & M_{\mathbb{Z}_2}^\beta & \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_2} S_n \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 1 & \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{2}]_2 \mathbb{Z} & 0 & 0 \\ 2 & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc} i & S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}} & M_{\mathbb{Z}_2}^\beta & \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_2} S_n \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{Z}_2 & \mathbb{Z}_2 \\ 1 & \mathbb{Z}/[\frac{n}{2}]_2 \mathbb{Z} & 0 & 0 \\ 2 & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array} \end{array}$$

Mit den entsprechenden Tabellen von Seite 114 und Folgerung 2.5.2 erhalten wir für  $p = 2$ , dass  $x_2^\beta = d_1^\beta - d_0^\beta = 1$ , also  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)$  zyklisch von nichttrivialer 2-Potenz-Ordnung ist. Für ungerades  $n$  ergibt sich aus der oberen Tabelle, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}) \cong H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)$  zyklisch von 2-Potenz-Ordnung ist, also wegen der unteren Tabelle von Ordnung 2.

Für gerades  $n$  ist die Situation komplizierter. Mit den entsprechenden Tabellen von Seite 115 erhalten wir für gerades  $n$  und  $p = 2$ , dass  $x_3^\gamma = d_2^\gamma - d_1^\gamma + d_0^\gamma = 1$ , also  $H^3(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\gamma)$  zyklisch ist. Aus der exakten Kohomologie-Sequenz

$$0 = H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \longrightarrow H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}) \longrightarrow H^3(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\gamma)$$

ergibt sich daher, dass auch  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}})$  zyklisch ist. Wegen der unteren Tabelle hat  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}})$  dann Ordnung 2. Mit der oberen Tabelle können wir daraus (nur) schließen, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)$  Ordnung 2 oder 4 hat.  $\square$

Die Aussage über  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\beta)$  für gerades  $n$  ist so noch nicht zufriedenstellend. Berechnungen in GAP mittels Zassenhaus-Verfahren legen nahe:

**Vermutung 2.5.13** Für alle  $n \geq 4$  ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\beta}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Für  $n \leq 20$  ist das nachgerechnet (siehe [Web09b]). Mit den bisherigen Mitteln kann es allerdings noch nicht allgemein gezeigt werden.

Dies soll an dieser Stelle zur Kohomologie von Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}$  genügen. Nachdem wir in den folgenden beiden Kapiteln (unter anderem) die Kohomologie von Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}_p$  genauer unter die Lupe genommen haben, werden wir uns in Abschnitt 5.1 noch um die Kohomologie von  $S_{\mathbb{Z}}^{\zeta}$  und  $S_{\mathbb{Z}}^{\vartheta}$  kümmern.





## Kapitel 3

# Kohomologie über $\mathbb{F}_p$ und $\mathbb{Z}_p$ für ungerades $p$

Wie in Abschnitt 2.2 angekündigt, wollen wir nun von der Kohomologie über  $\mathbb{Z}$  auf die Kohomologie von  $\mathbb{Z}_p$  ausweichen. Dabei sind für  $p = 2$  einerseits und ungerades  $p$  andererseits gänzlich unterschiedliche Vorgehensweisen erforderlich, wie sich bereits vorhin bei der Bestimmung der Kohomologie von  $S^\beta$  angedeutet hat. In diesem Kapitel befassen wir uns mit dem Fall  $p \in \mathbb{P} \setminus \{2\}$ .

Der Abschnitt 3.1 ist im Wesentlichen eine Zusammenstellung von Ergebnissen aus [BKM96] und [Web09a], die aber an manchen Stellen durch neue Informationen ergänzt werden. In Abschnitt 3.2 wird das Hauptergebnis aus [Hem09] vorgestellt und weiterentwickelt. Abschnitt 3.3 befasst sich intensiver mit den Besonderheiten des Spechtmoduls zur Partition  $\gamma$ , insbesondere mit dem Nachweis, dass für  $n = p\iota$  die Partition  $\gamma$   $(p, \iota)$ -speziell ist. In Abschnitt 3.4 schließlich werden die Möglichkeiten erörtert, wie man aus der  $(p, \iota)$ -Spezialität von  $\gamma$  auf die  $(p, \iota)$ -Spezialität anderer Partitionen schließen kann.

### 3.1 Kohomologie von einfachen $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduln und Spechtmoduln

Die meisten der folgenden Aussagen werden, wie gesagt, nur zitiert. Die Beweise für die neuen Aussagen erfolgen aus Gründen der Übersicht nicht an Ort und Stelle, sondern am Ende des Abschnitts in einer Gesamtbetrachtung.

Zunächst betrachten wir die Hakenpartitionen. Es sei  $0 \leq j \leq n-1$ ,  $\lambda := (n-j, 1^j)$  und  $h_{n,j}$  definiert wie in 1.3.6. Dann gilt offensichtlich

$$H^0(S_n, h_{n,j}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{für } j = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für die erste und zweite Kohomologie der  $h_{n,j}$  gilt:

**Proposition 3.1.1** ([BKM96], Proposition 5.2) *Es ist  $H^1(S_n, h_{n,j}) = 0$ , außer in den Fällen*

- (a)  $p \mid n$  und  $j = 1$ ,
- (b)  $p = 3$  und  $j = 3$ .

*In den Ausnahmefällen ist  $H^1(S_n, h_{n,j}) \cong \mathbb{F}_p$ .*

**Proposition 3.1.2** ([BKM96], Proposition 5.3) (a) *Für  $p > 3$  ist*

$$H^2(S_n, h_{n,j}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{für } p \mid n \text{ und } j = 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Für  $p = 3$  ist außerhalb der folgenden drei Fälle  $H^2(S_n, h_{n,j}) = 0$ :

- (i)  $n = 3$  und  $j = 1$ ,
- (ii)  $3 \mid n$  und  $j \in \{2, 4\}$ ,
- (iii)  $j \in \{3, 6\}$ .

Für den Fall  $3 \mid n$  und  $j = 3$  ist bisher nur bekannt, dass  $\dim(H^2(S_n, h_{n,j})) \leq 1$  ist, in allen anderen Ausnahmefällen ist  $H^2(S_n, h_{n,j}) \cong \mathbb{F}_3$ .

Dabei ist die Aussage  $\dim(H^2(S_n, h_{n,j})) \leq 1$  für  $p = j = 3 \mid n$  noch nicht in Proposition 5.3 aus [BKM96] enthalten. Der Beweis dafür wird, wie gesagt, unten nachgereicht.

Aus diesen beiden Propositionen wurden in Abschnitt 4 von [Web09a] mit Hilfe exakter Kohomologie-Sequenzen die  $d_i^\lambda$  für  $i = 1, 2$  und bestimmte Hakenpartitionen  $\lambda$  bestimmt. Im Fall  $p = 3$  blieben dort allerdings noch mehrere Lücken, die hier zwar nicht vollständig, aber doch weitgehend geschlossen werden sollen.

Die einfachen Spechtmoduln brauchen wir nicht mehr zu betrachten. Daher sei im Folgenden  $p \mid n$  und  $1 \leq j \leq n-2$ . Für die 0-te Kohomologie von Spechtmoduln gilt mit dem James-Kriterium (Satz 2.5.4):

$$d_0^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Lemma 3.1.3** ([Web09a], Corollary 4.4) (a) Für  $p > 3$  ist

$$d_1^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } j \in \{1, 2\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Für  $p = 3$  ist

$$d_1^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } j \in \{1, 2, 4\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei ist die Aussage  $d_1^\lambda = 0$  für  $p = j = 3$  noch nicht in Corollary 4.4 aus [Web09a] enthalten.

**Lemma 3.1.4** ([Web09a], Corollary 4.5) (a) Für  $p > 3$  ist

$$d_2^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } j \in \{2, 3\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Für  $p = 3$  ist

$$d_2^\lambda \begin{cases} = 1 & \text{für } j \in \{2, 4, 5, 7\}, \\ \leq 1 & \text{für } j = 3, \\ = 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bei diesem Lemma sind noch die Aussagen für  $p = 3$  und  $j \in \{3, 4, 6\}$  bzw. für  $p = 3 = n$  und  $j = 1$  zu beweisen.

Nach den Hakenpartitionen werfen wir einen Blick auf die Zweiteil-Partitionen. Im Folgenden sei  $\mu := (n-j, j) \vdash n$  für  $1 \leq j \leq n/2$ . (Wir betrachten hier nur echte Zweiteil-Partitionen. Den Fall  $j = 0$  könnten wir theoretisch zulassen, aber über den trivialen Modul ist oben schon alles gesagt.) Da  $p$  ungerade ist, ist  $\mu$  auf jeden Fall  $p$ -regulär.

**Proposition 3.1.5** ([BKM96], Seite 176 (\*\*)) Es sei  $\sum_{i=1}^r c_i p^i$  die  $p$ -adische Darstellung von  $n+1$ . Dann ist

$$H^1(S_n, D^\mu) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_p, & \text{falls } j = c_i p^i \text{ ist für ein } i < r, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Proposition 3.1.6** ([BKM96], Proposition 5.4) *Für  $j < p$  ist  $H^2(S_n, D^\mu) = 0$ , außer in den Fällen*

- (a)  $p = 3, n = 3$  und  $j = 1$ ,
- (b)  $p = 3, n = 4$  und  $j = 2$ .

In den Ausnahmefällen ist  $\dim H^2(S_n, D^\mu) = 1$ .

**Proposition 3.1.7** ([BKM96], Proposition 5.5) *Für  $\mu = (n - p, p)$  ist*

$$H^2(S_n, D^\mu) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } p \mid n + 1, \\ \mathbb{F}_p & \text{sonst.} \end{cases}$$

In [Web09a] werden daraus mit Hilfe von Kompositionsreihen und exakten Kohomologie-Sequenzen folgende Aussagen gefolgert:

**Lemma 3.1.8** ([Web09a], Corollary 4.11) *Es sei  $n \geq 2p$  und  $\mu := (n - p, p)$ .*

- (a) *Falls  $n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$  ist, ist  $d_2^\mu = 0$  und*

$$d_0^\mu = d_1^\mu = \begin{cases} 1 & \text{für } n + 1 \equiv p \pmod{p^2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- (b) *Falls  $n + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$  ist, ist  $d_0^\mu = 0, d_1^\mu = 1$  und  $d_2^\mu \geq 1$ .*

Schließlich betrachten wir noch ein wichtiges Beispiel für die Kohomologie eines Spechtmoduls zu einer Partition, die weder Haken- noch Zweiteil-Partition ist, nämlich  $\vartheta = (n - 3, 2, 1)$ .

**Lemma 3.1.9** *Für  $p = 3, i \in \{0, 1, 2\}$  und  $n \geq 5$  ist  $d_i^\vartheta$  gegeben durch:*

$i$	$n \equiv 0 \pmod{3}$	$n \equiv 1 \pmod{3}$		$n \equiv 2 \pmod{3}$
		$n \equiv 1 \pmod{9}$	$n \not\equiv 1 \pmod{9}$	
0	0	0	0	1
1	0	1	0	1
2	1	$\geq 1$		

Kommen wir nun zu den Beweisen. Bestimmte Teile der Beweise sollen nicht im Detail ausgeführt werden. So soll im Falle der nullten Kohomologien von Spechtmoduln der Hinweis genügen, dass sich alle aus dem James-Kriterium (Satz 2.5.4) ergeben. Die Spechtreihen der induzierten Spechtmoduln ergeben sich aus den Verzweigungsregeln in Satz 1.4.1, und mit Hilfe der  $p$ -Kerne können wir die Spechtfaktoren nach Blöcken sortieren. Für die Kohomologie der induzierten Spechtmoduln verwenden wir jedes Mal das Eckmann-Shapiro-Lemma. Lange exakte Kohomologie-Sequenzen repräsentieren wir wieder mit den in (2.5) eingeführten Tabellen. Die Tabellen-Einträge für die bekannten Kohomologien ergeben sich aus den oben zitierten oder kurz vorher bewiesenen Aussagen und werden nicht mehr explizit referenziert. Sie sind normal gedruckt. Die kursiv gedruckten Einträge stehen für zuvor unbekannte Kohomologien, die sich jetzt aus der Exaktheit der jeweiligen Kohomologie-Sequenz ergeben.

Alle noch zu beweisenden Aussagen dieses Abschnitts betreffen Moduln über  $\mathbb{F}_3$ . Neben Lemma 3.1.9 sind noch folgende Aussagen für  $3 \mid n$  zu zeigen:

- (a)  $d_1^\kappa = 0$  (für  $n \geq 6$ ),
- (b)  $d_2^{(2,1)} = 0$ ,
- (c)  $\dim(H^2(S_n, D^\vartheta)) \leq 1$  (für  $n \geq 6$ ),
- (d)  $d_2^\kappa \leq 1$  (für  $n \geq 6$ ),
- (e)  $d_2^{(n-4, 1^4)} = 1$  (für  $n \geq 6$ ),
- (f)  $d_2^{(n-6, 1^6)} = 0$  (für  $n \geq 9$ ).

Es sei also  $3 \mid n$ . Dann liegen weder  $\beta$  noch  $\beta - 1$  im Hauptblock, und der zu  $\beta - 1$  gehörige induzierte Spechtmodul hat die Spechtreihe

$$S^{\beta-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow (S^\vartheta \mid S^\zeta) \oplus S^\beta.$$

Damit erhalten wir die Kohomologie-Tabelle:

$$\begin{array}{c|ccc} i & S^\vartheta & S^{\beta-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} & S^\zeta \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

Damit ist Lemma 3.1.9 für  $n \equiv 0 \pmod{3}$  gezeigt.

Die Partition  $\gamma - 1$  liegt nicht im Hauptblock, und der zugehörige induzierte Spechtmodul hat die Spechtreihe

$$S^{\gamma-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow S^\kappa \mid S^\vartheta \mid S^\gamma.$$

Es sei  $V \leq S^{\gamma-1}$  mit  $V \rightarrow S^\kappa \mid S^\vartheta$ . Dann erhalten wir die Kohomologie-Tabellen:

$$\begin{array}{c|cccc} i & V & S^{\gamma-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} & S^\gamma & S^\kappa & V & S^\vartheta \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0/1 & 1 & 1 \end{array}$$

Damit sind die Aussagen (a) und (d) gezeigt.

Die Aussage (b) ergibt sich aus:

$$\begin{array}{c|ccc} i & S^{(2,1)} & S^{(2)} \uparrow_{S_2}^{S_3} & S^{(3)} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Der zu  $\kappa - 1$  gehörige induzierte Spechtmodul hat die Spechtreihe

$$S^{\kappa-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow (S^{(n-4,1^4)} \mid S^\kappa) \oplus S^{(n-4,2,1^2)}.$$

Damit erhalten wir die Kohomologie-Tabelle:

$$\begin{array}{c|ccc} i & S^{(n-4,1^4)} & S^{\kappa-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} & S^\kappa \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0/1 \end{array}$$

Hierbei fließt neben der Exaktheit der Sequenz ein, dass mit Folgerung 2.5.2  $d_2^{(n-4,1^4)} \geq d_1^{(n-4,1^4)}$  ist. Damit ist die Aussage (e) gezeigt.

Das Wissen über die Kompositionsreihen von Spechtmoduln zu Hakenpartitionen liefert uns die Kohomologie-Tabelle:

$$\begin{array}{c|ccc} i & h_{n,3} = D^\vartheta & S^{(n-4,1^4)} & h_{n,4} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0/1 & 1 & 1 \end{array}$$

Damit ist die Aussage (c) gezeigt.

Die Partition  $(n-6, 1^5)$  liegt nicht im Hauptblock, und der zugehörige induzierte Spechtmodul hat die Spechtreihe

$$S^{(n-6, 1^5)} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow S^{(n-6, 1^6)} \mid S^{(n-6, 2, 1^4)} \mid S^{(n-5, 1^5)}.$$

Es sei  $V \leq S^{(n-6, 1^5)} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  mit  $V \rightarrow S^{(n-6, 1^6)} \mid S^{(n-6, 2, 1^4)}$ . Mit den Methoden, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden, (Folgerung 3.2.13) kann man zeigen, dass  $d_1^{(n-6, 2, 1^4)} = 0$  ist. Damit erhalten wir die Kohomologie-Tabellen:

$i$	$V$	$S^{(n-6, 1^5)} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}$	$S^{(n-5, 1^5)}$	$S^{(n-6, 1^6)}$	$V$	$S^{(n-6, 2, 1^4)}$
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	

Damit ist die Aussage (f) gezeigt.

Es bleibt noch der Rest von Lemma 3.1.9 zu zeigen. Für  $3 \nmid n$  hat der zu  $\gamma-1$  gehörige induzierte Spechtmodul die Spechtreihe

$$S^{\gamma-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow (S^\kappa \mid S^\vartheta) \oplus S^\gamma,$$

wobei  $S^\gamma$  im Gegensatz zu den anderen beiden Spechtfaktoren nicht im Hauptblock liegt.

Für  $n \equiv 1 \pmod{3}$  müssen wir wieder auf Informationen aus dem nächsten Abschnitt zurückgreifen. In Lemma 3.2.16 wird gezeigt werden, dass  $H^1(S_n, S^\vartheta) = 0$  für  $n \not\equiv 1 \pmod{9}$  ist. Das Lemma 3.2.20 beinhaltet die weniger genaue Aussage, dass  $H^1(S_n, S^\vartheta) \neq 0$  für  $n \equiv 1 \pmod{9}$  ist. Diese Information liefert im Fall  $n \equiv 1 \pmod{9}$  durch die Kohomologie-Tabelle

$i$	$S^\kappa$	$S^{\gamma-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}$	$S^\vartheta$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	1	1	

das gewünschte Ergebnis. Mit Folgerung 2.5.2 ist außerdem  $d_2^\vartheta \geq d_1^\vartheta = 1$ . Im Fall  $n \equiv 2 \pmod{3}$  bekommen wir die Kohomologie-Tabelle:

$i$	$S^\kappa$	$S^{\gamma-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}$	$S^\vartheta$
0	0	0	1
1	1	0	1
2	1	0	

Damit ist die Beweisführung dieses Abschnitts abgeschlossen.

## 3.2 Die Kombinatorik-Methode nach Hemmer

In seiner Arbeit [Hem09] führt David Hemmer eine kombinatorische Methode ein, mit der ermittelt werden kann, ob ein Spechtmodul über einem Körper ungerader Charakteristik erste Kohomologie hat oder nicht. Damit kann also der Kohomologiegraph  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  theoretisch vollständig bestimmt werden. Allerdings ist der Nachweis nichttrivialer erster Kohomologie in der Praxis zumeist mit enormem Rechenaufwand verbunden, der in zu wenigen Fällen wirklich zu bewältigen ist.

Mit dem Nachweis trivialer Kohomologie hingegen sieht es schon ganz anders aus. Wenn man Hemmers Methode in geeigneter Weise umformuliert, bekommt man ein Werkzeug an die Hand, mit Hilfe dessen man zwar nicht jeder, aber doch sehr vielen Partitionen außerhalb von  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  nahezu

unmittelbar ansehen kann, dass sie nicht in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  liegen. In Kombination mit den Hauptblock- und Kohomologie-Graphen sowie den Methoden aus Abschnitt 3.1 kommt man damit zu Ergebnissen, die jede dieser Herangehensweisen für sich allein genommen nicht liefern kann.

In diesem Abschnitt wird zunächst Hemmers Methode vorgestellt, dann die erwähnte praktikablere Variante daraus abgeleitet, und schließlich wird die Methode an einigen wichtigen Beispielen angewendet. Sofern nicht ausdrücklich etwas anderes behauptet wird, sind alle Moduln in diesem Abschnitt Moduln über  $\mathbb{F}_p$ .

Es sei  $\lambda \vDash n$  eine Komposition von  $n \in \mathbb{N}$ . Für  $\bar{t} \in \overline{T}(\lambda)$  und  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$  sei  $\bar{t}_i$  die Menge der Einträge der  $i$ -ten Zeile von  $\bar{t}$ . Damit schreiben wir in der Notation von (1.5)

$$\bar{t} =: \bar{t}_1 / \dots / \bar{t}_{\ell(\lambda)}.$$

Für  $i \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq v \leq \lambda_i + \lambda_{i+1}$  definieren wir die Komposition

$$\lambda(i, v) := (\lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + \lambda_{i+1} - v, v, \lambda_{i+2}, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) \vDash n.$$

Wir verteilen also die Knoten aus den Zeilen  $i$  und  $i+1$  so um, dass Zeile  $i+1$  genau  $v$  Knoten enthält und Zeile  $i$  den Rest. Im weiteren Verlauf werden wir uns darauf beschränken, Knoten aus Zeile  $i+1$  nach Zeile  $i$  hochzuschieben, das heißt, wir betrachten  $\lambda(i, v)$  nur für  $(i, v)$  aus der Menge

$$J(\lambda) := \{(i, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \mid i \leq \ell(\lambda) - 1, v \leq \lambda_{i+1} - 1\}.$$

Außerdem definieren wir für  $\bar{t} \in \overline{T}(\lambda)$ :

$$T(i, v, \bar{t}) := \{\bar{\tau} \in \overline{T}(\lambda(i, v)) \mid \bar{\tau}_j = \bar{t}_j \text{ für } j \notin \{i, i+1\} \text{ und } \bar{t}_i \subseteq \bar{\tau}_i\},$$

also alle  $\lambda(i, v)$ -Tabloide, die mit  $\bar{t}$  außerhalb der Zeilen  $i$  und  $i+1$  übereinstimmen, und bei denen die  $i$ -te Zeile die  $i$ -te Zeile von  $\bar{t}$  enthält. (Statt  $\bar{t}_i \subseteq \bar{\tau}_i$  kann man auch die äquivalente Bedingung  $\bar{\tau}_{i+1} \subseteq \bar{t}_{i+1}$  wählen.) James definiert in [Jam78], Definition 17.10, die  $\mathbb{F}_p S_n$ -Modul-Homomorphismen

$$\psi_{i,v} : M^\lambda \longrightarrow M^{\lambda(i,v)}, \quad \bar{t} \mapsto \sum_{\bar{\tau} \in T(i,v,\bar{t})} \bar{\tau}.$$

Falls  $v > \lambda_{i+1}$  ist, ist  $T(i, v, \bar{t}) = \emptyset$  und  $\psi_{i,v}$  damit die Nullabbildung. Falls  $v = \lambda_{i+1}$  ist, ist  $\lambda(i, v) = \lambda$ ,  $T(i, v, \bar{t}) = \{\bar{t}\}$  und  $\psi_{i,v}$  damit die Identität. Diese Fälle liefern keine Information, und das ist der Grund, warum wir uns im Folgenden auf  $(i, v) \in J(\lambda)$  beschränken.

Aus Gründen der Lesbarkeit ist es natürlich eine gute Idee, die  $\psi_{i,v}$  einfach auf einem Erzeuger des zyklischen  $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduls  $M^\lambda$  zu definieren. Für unsere Zwecke ist es allerdings von Vorteil, sich die lineare Fortsetzung nicht nur zu denken, sondern auch hinzuschreiben. Wir schreiben  $u \in M^\lambda$  als Linearkombination:

$$u := \sum_{\bar{t} \in \overline{T}(\lambda)} u_{\bar{t}} \bar{t}.$$

Für  $\bar{\tau} \in \overline{T}(\lambda(i, v))$  und  $A \subseteq \bar{\tau}_i$  mit  $|A| = \lambda_i$  sei das Tabloid  $\bar{t}(\bar{\tau}, A) \in \overline{T}(\lambda)$  definiert durch

$$\bar{t}(\bar{\tau}, A) := \bar{\tau}_1 / \dots / \bar{\tau}_{i-1} / A / (\bar{\tau}_{i+1} \cup (\bar{\tau}_i \setminus A)) / \bar{\tau}_{i+2} / \dots / \bar{\tau}_{\ell(\lambda)},$$

also dasjenige  $\lambda$ -Tabloid, das mit  $\bar{\tau}$  außerhalb der Zeilen  $i$  und  $i+1$  übereinstimmt, und dessen  $i$ -te Zeile gleich  $A$  ist. Dann gilt für alle  $\bar{t} \in \overline{T}(\lambda)$  und alle  $\bar{\tau} \in \overline{T}(\lambda(i, v))$ , dass  $\bar{\tau}$  genau dann in  $T(i, v, \bar{t})$  liegt, wenn  $\bar{t} = \bar{t}(\bar{\tau}, A)$  ist für ein  $A \subseteq \bar{\tau}_i$  mit  $|A| = \lambda_i$ . Das heißt, wir können in  $\psi_{i,v}(u) \in M^{\lambda(i,v)}$  die Summanden folgendermaßen umsortieren:

$$\psi_{i,v}(u) = \sum_{\bar{t} \in \overline{T}(\lambda)} \left( u_{\bar{t}} \sum_{\bar{\tau} \in T(i,v,\bar{t})} \bar{\tau} \right) = \sum_{\bar{\tau} \in \overline{T}(\lambda(i,v))} \left( \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} \right) \bar{\tau}. \quad (3.1)$$

Die Definition der Abbildungen  $\psi_{i,v}$  funktioniert über jedem beliebigen Integritätsbereich. Bei James sind sie über Körpern beliebiger Charakteristik definiert. Mit ihrer Hilfe konstruiert er in [Jam78], Kapitel 17, Spechtreihen bestimmter  $S_n$ -Moduln, für die  $M_{\mathbb{F}_p}^\lambda$  und  $S_{\mathbb{F}_p}^\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  (für echte Partitionen  $\lambda$ ) Spezialfälle sind. Für den Beweis von 3.2.2 ist folgende Anwendung wichtig:

**Satz 3.2.1 ([Jam78], Corollary 17.18)** *Falls  $\lambda \vdash n$  eine echte Partition ist, ist*

$$S_{\mathbb{F}_p}^\lambda = \bigcap_{(i,v) \in J(\lambda)} \text{Kern}(\psi_{i,v}).$$

Dies gilt, wie gesagt, auch über Charakteristik 0 und 2. Die Hemmersche Methode funktioniert allerdings nur über ungerader Charakteristik. Im weiteren Verlauf gilt also nach wie vor die Grundkonvention, dass  $p$  ungerade ist und die verwendeten Moduln  $\mathbb{F}_p S_n$ -Moduln sind. Des Weiteren sei  $\lambda \vdash n$  ab jetzt eine echte Partition. (Die  $\lambda(i,v)$  sind allerdings im Allgemeinen nach wie vor nur Kompositionen.) Schließlich sei noch einmal daran erinnert, dass wir die Spur von  $M^\lambda$  schreiben als  $f_\lambda = \sum_{\bar{i} \in \bar{T}(\lambda)} \bar{i}$ . Die Kernaussage von [Hem09] lautet nun (hier leicht umformuliert und abgekürzt):

**Satz 3.2.2 ([Hem09], Theorem 3.6)** *Es ist  $H^1(S_n, S^\lambda) \neq 0$  genau dann, wenn ein  $u \in M^\lambda$  existiert, für das die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:*

- (1) *Für alle  $(i,v) \in J(\lambda)$  existiert ein  $u_{i,v} \in \mathbb{F}_p$ , so dass  $\psi_{i,v}(u) = u_{i,v} f_{\lambda(i,v)}$ , wobei nicht alle  $u_{i,v} = 0$  sind.*
- (2) *Es existiert kein  $a \in \mathbb{F}_p^*$ , so dass  $\psi_{i,v}(af_\lambda - u) = 0$  ist für alle  $(i,v) \in J(\lambda)$ .*

Wenn ein  $u \in M^\lambda$  die beiden genannten Bedingungen erfüllt, sagen wir: “ $u$  genügt Hemmer“. Wenn es nur eine der beiden Bedingungen erfüllt, sagen wir: “ $u$  genügt Hemmer (1)“ bzw. “Hemmer (2)“.

Für die Details des Beweises sei auf [Hem09] verwiesen. Hier soll nur die Idee erläutert werden: Die Gruppe  $H^1(S_n, S^\lambda) \cong \text{Ext}_{\mathbb{F}_p S_n}^1(\mathbb{1}, S^\lambda)$  zählt mit Satz 2.1.2 die Äquivalenzklassen der Erweiterungen von  $\mathbb{1}$  mit  $S^\lambda$ . Wenn eine solche Erweiterung nichttrivial ist, kann sie in  $M^\lambda$  eingebettet werden ([Hem09], Theorem 3.2). (An dieser Stelle geht die Voraussetzung ein, dass  $p$  ungerade ist.) In Satz 3.2.2 wird nun ein  $u \in M^\lambda$  gesucht, so dass der von  $S^\lambda$  und  $u$  erzeugte Untermodul von  $M^\lambda$  eine nichttriviale Erweiterung von  $\mathbb{1}$  mit  $S^\lambda$  ist. Die dazu verwendete Methode mit den  $\psi_{i,v}$  leitet sich dabei aus Satz 3.2.1 ab.

Auf den ersten Blick ist nicht unbedingt zu erkennen, ob Satz 3.2.2 wirklich ein Problem löst, oder ob er es nur durch ein neues ersetzt. Es drängt sich die Frage auf: Wenn ein solches (nicht eindeutig bestimmtes)  $u \in M^\lambda$  existiert, wie findet man es dann? Hemmer führt in [Hem09] Beispiele für bestimmte Zweiteil-Partitionen vor, die diesbezügliche Befürchtungen durchaus bestätigen.

Wenn man hingegen zeigen will, dass *kein*  $u \in M^\lambda$  Hemmer genügt, hat man häufig deutlich bessere Karten. Es ist nämlich oft so, dass Hemmer (1) und Hemmer (2) nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Um diesen Sachverhalt herauszuarbeiten, werden wir Hemmer (2) durch eine einfachere zu handhabende Bedingung ersetzen.

Zunächst stellen wir fest, dass für alle  $(i,v) \in J(\lambda)$  gilt:

$$\begin{aligned} \psi_{i,v}(f_\lambda) &\stackrel{(3.1)}{=} \sum_{\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i,v))} \left( \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_i \\ |A| = \lambda_i}} 1 \right) \bar{\tau} = \sum_{\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i,v))} \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_i} \bar{\tau} \\ &= \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_i} f_{\lambda(i,v)} = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_{i+1} - v} f_{\lambda(i,v)}. \end{aligned}$$

Diese Binomialkoeffizienten werden noch eine wichtige Rolle spielen, darum verdienen sie eine kompaktere Notation:

$$b(i,v) := \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_i} = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_{i+1} - v}.$$

Nun sei  $u \in M^\lambda$  ein Element, das Hemmer (1) genügt. Dann gilt für  $(i, v) \in J(\lambda)$  und  $a \in \mathbb{F}_p$  (mit den  $u_{i,v} \in \mathbb{F}_p$  aus Satz 3.2.2):

$$\psi_{i,v}(af_\lambda - u) = a \cdot b(i, v)f_{\lambda(i,v)} - u_{i,v}f_{\lambda(i,v)} = (a \cdot b(i, v) - u_{i,v})f_{\lambda(i,v)}.$$

Dieser Ausdruck ist genau dann gleich 0, wenn  $a \cdot b(i, v) = u_{i,v}$  ist.

**Lemma 3.2.3** *Es sei  $\lambda \neq (n)$  und damit  $J(\lambda) \neq \emptyset$ . Wenn  $u \in M^\lambda$  Hemmer (1) genügt, dann ist Hemmer (2) äquivalent zu der Aussage: Es ist  $p \mid b(i, v)$  für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$ , oder aber es existieren  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$  mit  $b(i, v)u_{i',v'} \neq b(i', v')u_{i,v}$ .*

*Beweis:* Wir zeigen die Äquivalenz der negierten Aussagen:

(a) Es existiert ein  $a \in \mathbb{F}_p^*$ , so dass  $a \cdot b(i, v) = u_{i,v}$  ist für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$ .

(b) Es existiert ein Paar  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V)$ , und für alle  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$  ist  $b(i, v)u_{i',v'} = b(i', v')u_{i,v}$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b): Es sei  $a \in \mathbb{F}_p^*$  mit  $a \cdot b(i, v) = u_{i,v}$  für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$ . Wegen Hemmer (1) und  $J(\lambda) \neq \emptyset$  existiert ein Paar  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit  $u_{I,V} \neq 0$ . Damit ist  $a \cdot b(I, V) \neq 0$ , also  $p \nmid b(I, V)$ . Außerdem gilt für alle  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$ :

$$b(i, v)u_{i',v'} = a \cdot b(i, v)b(i', v') = b(i', v')u_{i,v}.$$

(b)  $\Rightarrow$  (a): Es sei  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V)$ , und für alle  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$  sei  $b(i, v)u_{i',v'} = b(i', v')u_{i,v}$ . Wir können  $b(I, V) \bmod p$  als invertierbares Element in  $\mathbb{F}_p$  interpretieren, das heißt, es existiert ein  $x \in \mathbb{F}_p$  mit  $b(I, V) \cdot x = 1$ .

Nun ist  $u_{I,V} \neq 0$ , da sonst  $u_{i,v} = x \cdot b(i, v)u_{I,V} = 0$  für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$  wäre, was im Widerspruch zu Hemmer (1) stünde. Also ist  $a := x \cdot u_{I,V} \in \mathbb{F}_p^*$ , und es gilt für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$ :

$$a \cdot b(i, v) = x \cdot b(i, v)u_{I,V} = x \cdot b(I, V)u_{i,v} = u_{i,v}.$$

□

An Stelle der Ausdrücke  $\psi_{i,v}(af_\lambda - u)$  können wir also die Gleichungen  $b(i, v)u_{i',v'} = b(i', v')u_{i,v}$  überprüfen. Das Gute daran ist, dass diese Gleichungen in vielen Fällen automatisch erfüllt sind. Das untersuchen wir im Folgenden. Zunächst stellen wir fest:

**Lemma 3.2.4** *Ein Element  $u \in M^\lambda$  genügt Hemmer (1) genau dann, wenn für alle für  $(i, v) \in J(\lambda)$  ein  $u_{i,v} \in \mathbb{F}_p$  existiert, so dass*

$$u_{i,v} = \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{\tau}(\bar{\tau}, A)}$$

ist für alle  $\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i, v))$ , wobei nicht alle  $u_{i,v} = 0$  sind.

*Beweis:* Dies ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung (3.1) von  $\psi_{i,v}(u)$ . □

**Lemma 3.2.5** *Es seien  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$  mit  $i' \notin \{i-1, i, i+1\}$ . Weiter sei  $u \in M^\lambda$  ein Element, das Hemmer (1) genügt. Dann gilt:*

$$b(i', v')u_{i,v} = b(i, v)u_{i',v'}.$$



*Beweis:* Ohne Einschränkung sei  $i' > i+1$ . Zunächst sind einige Vorüberlegungen erforderlich. Wir wählen ein beliebiges, aber festes  $\bar{w} \in \bar{T}(\lambda)$ , sodann ein beliebiges, aber festes  $\bar{w}(i, v) \in \bar{T}(i, v, \bar{w})$  sowie ein beliebiges, aber festes  $\bar{w}(i', v') \in \bar{T}(i', v', \bar{w})$ . Weiterhin setzen wir

$$A(i, v) := \{\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i, v)) \mid \bar{\tau}_j = \bar{w}(i, v)_j \text{ für } j \notin \{i', i'+1\} \text{ und } \bar{\tau}_{i'} \subseteq \bar{w}(i', v')_{i'}\}, \quad (3.2)$$

$$B(i, v) := \{\bar{\tau}' \in \bar{T}(\lambda(i', v')) \mid \bar{\tau}'_j = \bar{w}(i', v')_j \text{ für } j \notin \{i, i+1\} \text{ und } \bar{\tau}'_i \subseteq \bar{w}(i, v)_i\}. \quad (3.3)$$

Dann gilt:

$$|A(i, v)| = \binom{\lambda(i', v')_{i'}}{\lambda(i, v)_{i'}} = \binom{\lambda_{i'} + \lambda_{i'+1} - v'}{\lambda_{i'}} = b(i', v'), \quad (3.4)$$

$$|B(i, v)| = \binom{\lambda(i, v)_i}{\lambda(i', v')_i} = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_i} = b(i, v). \quad (3.5)$$

Als Nächstes setzen wir

$$\begin{aligned} M_1 &:= A(i, v) \times \{A \subseteq \bar{w}(i, v)_i \mid |A| = \lambda_i\}, \\ M_2 &:= B(i, v) \times \{B \subseteq \bar{w}(i', v')_{i'} \mid |B| = \lambda_{i'}\}. \end{aligned}$$

Zwischen diesen beiden Mengen gibt es eine Bijektion. Um diese nachzuweisen, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\ell(\lambda) = 4$ ,  $i = 1$  und  $i' = 3$  ist. Es ist nämlich so, dass alle beteiligten Tabloide, also  $\bar{w}(i, v)$  und  $\bar{w}(i', v')$  sowie die Elemente von  $A(i, v)$  und  $B(i, v)$ , außerhalb der Zeilen  $i, i+1, i'$  und  $i'+1$  mit dem Tabloid  $\bar{w}$  übereinstimmen, und diese Zeilen außerhalb haben keinen Einfluss auf die Beweisführung. Unter dieser Annahme können wir folgende Notation verwenden:

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &:= \bar{w}(i, v)_i / \bar{w}(i, v)_{i+1} / \bar{\tau}_{i'} / \bar{\tau}_{i'+1} \in A(i, v), \\ \bar{\tau}' &:= \bar{\tau}'_i / \bar{\tau}'_{i+1} / \bar{w}(i', v')_{i'} / \bar{w}(i', v')_{i'+1} \in B(i, v). \end{aligned}$$

Für  $\bar{\tau} \in A(i, v)$  und  $\bar{\tau}' \in B(i, v)$  gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}'_i \dot{\cup} \bar{\tau}'_{i+1} &= \bar{w}_i \dot{\cup} \bar{w}_{i+1} = \bar{w}(i, v)_i \dot{\cup} \bar{w}(i, v)_{i+1}, \\ \bar{\tau}_{i'} \dot{\cup} \bar{\tau}_{i'+1} &= \bar{w}_{i'} \dot{\cup} \bar{w}_{i'+1} = \bar{w}(i', v')_{i'} \dot{\cup} \bar{w}(i', v')_{i'+1}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Deswegen und wegen  $|\bar{\tau}_{i'}| = \lambda_{i'}$  und  $|\bar{\tau}'_i| = \lambda_i$  können wir die beiden Abbildungen

$$\Phi : M_1 \longrightarrow M_2,$$

$$(\bar{w}(i, v)_i / \bar{w}(i, v)_{i+1} / \bar{\tau}_{i'} / \bar{\tau}_{i'+1}, A) \mapsto (A / ((\bar{w}(i, v)_i \setminus A) \cup \bar{w}(i, v)_{i+1}) / \bar{w}(i', v')_{i'} / \bar{w}(i', v')_{i'+1}, \bar{\tau}_{i'}),$$

$$\Psi : M_2 \longrightarrow M_1,$$

$$(\bar{\tau}'_i / \bar{\tau}'_{i+1} / \bar{w}(i', v')_{i'} / \bar{w}(i', v')_{i'+1}, B) \mapsto (\bar{w}(i, v)_i / \bar{w}(i, v)_{i+1} / B / ((\bar{w}(i', v')_{i'} \setminus B) \cup \bar{w}(i', v')_{i'+1}), \bar{\tau}'_i)$$

definieren. Dabei ist  $\Psi$  analog zu  $\Phi$  gebildet; es sind nur die Rollen von  $i$  und  $i'$  vertauscht. Wegen

$$\begin{aligned} &\Psi \circ \Phi((\bar{w}(i, v)_i / \bar{w}(i, v)_{i+1} / \bar{\tau}_{i'} / \bar{\tau}_{i'+1}, A)) \\ &= \Psi((A / ((\bar{w}(i, v)_i \setminus A) \cup \bar{w}(i, v)_{i+1}) / \bar{w}(i', v')_{i'} / \bar{w}(i', v')_{i'+1}, \bar{\tau}_{i'})) \\ &= (\bar{w}(i, v)_i / \bar{w}(i, v)_{i+1} / \bar{\tau}_{i'} / \underbrace{((\bar{w}(i', v')_{i'} \setminus \bar{\tau}_{i'}) \cup \bar{w}(i', v')_{i'+1})}_{=\bar{\tau}'_{i'+1}}, A) \end{aligned}$$

ist  $\Psi \circ \Phi = \text{id}_{M_1}$ , und analog zeigt man, dass auch  $\Phi \circ \Psi = \text{id}_{M_2}$  ist. Damit ist  $\Phi$  bijektiv mit  $\Phi^{-1} = \Psi$ . Darüber hinaus gilt: Falls  $\Phi((\bar{\tau}, A)) = (\bar{\tau}', B)$  ist, ist  $A = \bar{\tau}'_i$  und  $B = \bar{\tau}_{i'}$  und damit

$$\begin{aligned} \bar{t}(\bar{\tau}, A) &= A / (\bar{w}(i, v)_{i+1} \cup (\bar{w}(i, v)_i \setminus A)) / \bar{\tau}_{i'} / \bar{\tau}_{i'+1} \\ &= \bar{\tau}'_i / \bar{\tau}'_{i+1} / B / (\bar{\tau}'_{i'+1} \cup (\bar{\tau}'_{i'} \setminus B)) = \bar{t}(\bar{\tau}', B). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Ab jetzt geben wir die Einschränkung auf  $\ell(\lambda) = 4$ ,  $i = 1$  und  $i' = 3$  wieder auf; zur Verallgemeinerung braucht man, wie gesagt, nur die beteiligten Tabloide durch Zeilen von  $\bar{w}$  zu "ergänzen". Als letzte Zutat für den Beweis benötigen wir die Tatsache, dass mit Lemma 3.2.4 gilt:

$$u_{i,v} = \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} \quad \text{für alle } \bar{\tau} \in A(i, v) \subseteq \bar{T}(\lambda(i, v)), \quad (3.8)$$

$$u_{i',v'} = \sum_{\substack{B \subseteq \bar{\tau}'_{i'} \\ |B| = \lambda_{i'}}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}', B)} \quad \text{für alle } \bar{\tau}' \in B(i, v) \subseteq \bar{T}(\lambda(i', v')) \quad (3.9)$$

Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen folgt nun die gewünschte Aussage:

$$\begin{aligned} b(i', v')u_{i,v} &\stackrel{(3.4)}{=} |A(i, v)|u_{i,v} = \sum_{\bar{\tau} \in A(i, v)} u_{i,v} \stackrel{(3.8)}{=} \sum_{\bar{\tau} \in A(i, v)} \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \sum_{\bar{\tau} \in A(i, v)} \sum_{\substack{A \subseteq \bar{w}(i, v)_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} = \sum_{(\bar{\tau}, A) \in M_1} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} \\ &\stackrel{(3.7)}{=} \sum_{(\bar{\tau}', B) \in M_2} u_{\bar{t}(\bar{\tau}', B)} = \sum_{\bar{\tau}' \in B(i, v)} \sum_{\substack{B \subseteq \bar{w}(i', v')_{i'} \\ |B| = \lambda_{i'}}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}', B)} \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \sum_{\bar{\tau}' \in B(i, v)} \sum_{\substack{B \subseteq \bar{\tau}'_{i'} \\ |B| = \lambda_{i'}}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}', B)} \stackrel{(3.9)}{=} \sum_{\bar{\tau}' \in B(i, v)} u_{i', v'} = |B(i, v)|u_{i', v'} \stackrel{(3.5)}{=} b(i, v)u_{i', v'}. \end{aligned}$$

□

**Folgerung 3.2.6** *Es sei  $u \in M^\lambda$  ein Element, das Hemmer (1) genügt, und  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit der Eigenschaft, dass  $p \nmid b(I, V)$  ist. Dann erhalten wir mit Lemma 3.2.5:*

(a) *Für  $(i, v), (i, v') \in J(\lambda)$  mit  $i \notin \{I-1, I, I+1\}$  gilt:*

$$b(I, V)b(i, v)u_{i, v'} = b(i, v)b(i, v')u_{I, V} = b(I, V)b(i, v')u_{i, v}.$$

*Also ist  $b(i, v)u_{i, v'} = b(i, v')u_{i, v}$ .*

(b) *Für  $(i, v), (i+1, v') \in J(\lambda)$  mit  $\{i, i+1\} \cap \{I-1, I, I+1\} = \emptyset$ :*

$$b(I, V)b(i, v)u_{i+1, v'} = b(i, v)b(i+1, v')u_{I, V} = b(I, V)b(i+1, v')u_{i, v}.$$

*Also ist  $b(i, v)u_{i+1, v'} = b(i+1, v')u_{i, v}$ .*

(c) *Für  $(I-2, v) \in J(\lambda)$  gilt  $b(I-2, v)u_{I, V} = b(I, V)u_{I-2, v}$ .*

- *Falls  $p \mid b(I-2, v)$  ist, folgt daraus  $u_{I-2, v} = 0$ . In diesem Fall gilt also für alle  $(I-1, v') \in J(\lambda)$ :*

$$b(I-2, v)u_{I-1, v'} = 0 = b(I-1, v')u_{I-2, v}.$$

- *Falls  $p \nmid b(I-2, v)$  ist, gilt für alle  $(I-1, v') \in J(\lambda)$  folgende Äquivalenz:*

$$\begin{aligned} &b(I-2, v)u_{I-1, v'} = b(I-1, v')u_{I-2, v} \\ \iff &b(I, V)b(I-2, v)u_{I-1, v'} = b(I, V)b(I-1, v')u_{I-2, v} \\ \iff &b(I, V)b(I-2, v)u_{I-1, v'} = b(I-2, v)b(I-1, v')u_{I, V} \\ \iff &b(I, V)u_{I-1, v'} = b(I-1, v')u_{I, V}. \end{aligned}$$

(d) Für  $(I+2, v) \in J(\lambda)$  gilt  $b(I+2, v)u_{I,V} = b(I, V)u_{I+2, v}$ .

- Falls  $p \mid b(I+2, v)$  ist, folgt daraus  $u_{I+2, v} = 0$ . In diesem Fall gilt also für alle  $(I+1, v') \in J(\lambda)$ :

$$b(I+2, v)u_{I+1, v'} = 0 = b(I+1, v')u_{I+2, v}.$$

- Falls  $p \nmid b(I+2, v)$  ist, gilt für alle  $(I+1, v') \in J(\lambda)$  folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} b(I+2, v)u_{I+1, v'} &= b(I+1, v')u_{I+2, v} \\ \iff b(I, V)b(I+2, v)u_{I+1, v'} &= b(I, V)b(I+1, v')u_{I+2, v} \\ \iff b(I, V)b(I+2, v)u_{I+1, v'} &= b(I+2, v)b(I+1, v')u_{I, V} \\ \iff b(I, V)u_{I+1, v'} &= b(I+1, v')u_{I, V}. \end{aligned}$$

Wenn wir also ein  $u \in M^\lambda$  gegeben haben, das Hemmer (1) genügt, können wir uns bei der Überprüfung der Gleichungen  $b(i, v)u_{i', v'} = b(i', v')u_{i, v}$  sozusagen auf die unmittelbare Umgebung eines beliebigen Paares  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V)$  beschränken. Mit den Lemmata 3.2.3, 3.2.4 und 3.2.5 sowie Folgerung 3.2.6 können wir Hemmers Kriterium nun folgendermaßen formulieren:

**Satz 3.2.7** Für  $\lambda \neq (n)$  ist  $H^1(S_n, S^\lambda) \neq 0$  genau dann, wenn ein  $u \in M^\lambda$  existiert, für das die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1\*) Für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$  existiert ein  $u_{i, v} \in \mathbb{F}_p$ , so dass

$$u_{i, v} = \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{\tau}(A)}$$

ist für alle  $\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i, v))$ , wobei nicht alle  $u_{i, v} = 0$  sind.

(2\*) Falls ein Paar  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V)$  existiert, so existieren zwei Paare  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$  mit

- $i = i' \in \{I-1, I, I+1\}$  oder
- $i \in \{I-1, I\}$ ,  $i' = i+1$

und  $b(i, v)u_{i', v'} \neq b(i', v')u_{i, v}$ .

Um Lemma 3.2.3 anwenden zu können, müssen wir die triviale Partition ausschließen. Für  $\lambda = (n)$  wären Hemmer (1\*) und (2\*) trivialerweise erfüllt, aber es ist  $H^1(S_n, \mathbb{1}_{\mathbb{F}_p S_n}) = 0$ .

Bei der Überprüfung, ob ein Element  $u \in M^\lambda$  Hemmer genügt, kann man auch Hemmer (1) zusammen mit Hemmer (2\*) bzw. Hemmer (1\*) zusammen mit Hemmer (2) verwenden.

Die Formulierung von Hemmer (2\*) bringt es mit sich, dass die Bedingung trivialerweise erfüllt ist, wenn  $p \mid b(i, v)$  ist für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$ . Genauer gesagt, gilt:

**Lemma 3.2.8** Es ist  $H^0(S_n, S^\lambda) \neq 0$  genau dann, wenn  $p \mid b(i, v)$  ist für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$ .

Insofern spiegelt sich in Satz 3.2.7 die bekannte Tatsache wider, dass für  $\lambda \neq (n)$  aus  $H^0(S_n, S^\lambda) \neq 0$  folgt, dass auch  $H^1(S_n, S^\lambda) \neq 0$  ist (siehe zum Beispiel Folgerung 2.5.2). Das Lemma sagt allerdings noch nichts darüber aus, wie man in diesem Fall ein  $u \in M^\lambda$  findet, das Hemmer (1) genügt. Dieses Problem (in [Hem09] als ‘‘Problem 6.3‘‘ formuliert) bleibt auch hier ungelöst. Hier begnügen wir uns damit, das Lemma 3.2.8 zu beweisen. Dazu benötigen wir zwei Hilfsaussagen. Die erste geht auf Ernst Kummer zurück:

**Satz 3.2.9** ([Kum52], S. 115 f.) Es seien  $m, k \in \mathbb{N}$ . Der Exponent der höchsten  $p$ -Potenz, die  $\binom{m+k}{k}$  teilt, ist gleich der Anzahl der Überträge, die man bei Addition von  $m$  und  $k$  in  $p$ -adischer Darstellung macht.

Wir erinnern uns an die Definition (2.7):  $l_p(k) := \min\{x \in \mathbb{N}_0 \mid k < p^x\}$  für  $k \in \mathbb{N}_0$ . Damit formulieren wir folgende Aussage:

**Lemma 3.2.10** *Es seien  $m, k \in \mathbb{N}$ . Dann sind äquivalent:*

- (a)  $m \equiv -1 \pmod{p^{l_p(k)}}$ ,
- (b)  $p \mid \binom{m+k-v}{k-v}$  für alle  $0 \leq v \leq k-1$ .

*Beweis:*

- (a)  $\Rightarrow$  (b): Wenn  $m \equiv -1 \pmod{p^{l_p(k)}}$  ist, dann sind die Stellen 0 bis  $l_p(k) - 1$  in der  $p$ -adischen Darstellung von  $m$  alle gleich  $p-1$ . Wegen  $0 < k-v \leq k < p^{l_p(k)}$  hat  $k-v$  mindestens eine und höchstens  $l_p(k)$  Stellen. Darum gibt es bei der  $p$ -adischen Addition von  $m$  und  $k-v$  mindestens einen Übertrag. Mit Satz 3.2.9 folgt dann Aussage (b).
- (b)  $\Rightarrow$  (a): Wenn  $p \mid \binom{m+k-v}{k-v}$  für alle  $0 \leq v \leq k-1$  gilt, gilt es insbesondere auch für  $v = k-p^x$  mit  $0 \leq x \leq l_p(k) - 1$ , das heißt,  $p \mid \binom{m+p^x}{p^x}$ . Daher gibt es für  $0 \leq x \leq l_p(k) - 1$  mit Satz 3.2.9 bei der  $p$ -adischen Addition von  $m$  und  $p^x$  mindestens einen Übertrag, das heißt, die  $x$ -te  $p$ -adische Stelle von  $m$  ist gleich  $p-1$ , und es folgt Aussage (a).  $\square$

Damit kann nun Lemma 3.2.8 bewiesen werden: Mit dem James-Kriterium (Satz 2.5.4) ist  $H^0(S_n, S^\lambda) \neq 0$  genau dann, wenn  $\lambda_i \equiv -1 \pmod{p^{l_p(\lambda_{i+1})}}$  ist für alle  $1 \leq i \leq \ell(\lambda)$ . Nun erhält man Lemma 3.2.8, indem man für alle  $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 1$  in Lemma 3.2.10  $m := \lambda_i$  und  $k := \lambda_{i+1}$  setzt.

Wenn nun  $H^0(S_n, S^\lambda) = 0$  ist, existiert ein Paar  $(i, v) \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(i, v)$ . Die Suche nach einem solchen Paar ist besonders schnell abgeschlossen, wenn ein  $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 1$  existiert mit  $p \nmid \lambda_i + 1$ . Denn dann ist  $b(i, \lambda_{i+1} - 1) = \binom{\lambda_i + 1}{1} = \lambda_i + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Zur späteren Verwendung wollen wir diese Feststellung im Fall  $p \mid \lambda_i$  weiter präzisieren. Dazu zunächst eine allgemeinere Aussage:

**Lemma 3.2.11** *Es sei  $q \in \mathbb{P}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$  und  $k := m \bmod q$ . Dann ist  $\binom{m}{k} \equiv 1 \pmod{q}$ .*

*Beweis:* Die Aussage folgt per Induktion über  $m$ : Falls  $m \leq q-1$  ist, ist  $k = m$  und somit  $\binom{m}{k} = 1$ . Jetzt gelte die Behauptung für ein  $m \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq q$ . (Dann ist  $k+1 \leq m$ .) Falls  $k = q-1$  ist, ist  $m+1 \equiv 0 \pmod{q}$ , und wir haben  $\binom{m+1}{0} = 1$ . Falls  $k < q-1$  ist, ist  $k+1 \leq q-1$  und  $m+1 \bmod q = k+1$ . Weiter ist  $\binom{m+1}{k+1} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1}$ . Nun ist  $\binom{m}{k} \equiv 1 \pmod{q}$  nach Induktionsvoraussetzung, und

$$\binom{m}{k+1} = \frac{m(m-1) \cdots (m-k)}{(k+1)k \cdots 1}.$$

Da  $k+1 > 0$  ist, sind die Produkte in Zähler und Nenner nicht leer. Der Zähler ist ein Vielfaches von  $q$ , da  $q \mid m-k$ . Da  $k+1 \leq q-1$  ist, taucht  $q$  im Nenner nicht als Primfaktor auf. (An dieser Stelle geht ein, dass  $q$  eine Primzahl ist.) Damit ist  $\binom{m}{k+1} \equiv 0 \pmod{q}$ , und die Behauptung folgt per Induktion.  $\square$

**Folgerung 3.2.12** *Es sei  $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 1$  mit  $p \mid \lambda_i$  und  $(i, v) \in J(\lambda)$  mit  $v \geq \lambda_{i+1} - p + 1$ . Dann ist  $0 \leq \lambda_{i+1} - v \leq p-1$  und  $\lambda_i + \lambda_{i+1} - v \equiv \lambda_{i+1} - v \pmod{p}$ . Das heißt, es gilt mit Lemma 3.2.11:*

$$b(i, v) = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_{i+1} - v} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Nun ist es bei der Überprüfung von Hemmer ( $2^*$ ) nicht zwangsläufig erforderlich, ein Paar  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V)$  explizit zu bestimmen. Im Prinzip genügt es, zwei Paare  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$  mit  $b(i, v)u_{i',v'} \neq b(i', v')u_{i,v}$  zu finden. Wenn man aus theoretischen Gründen von deren Existenz weiß, ist es zweitrangig, in der Nähe welchen Paares  $(I, V)$  die beiden liegen.

Solche theoretischen Gründe sind allerdings eher selten bekannt. Darum ist es in der Praxis meist hilfreich, mit der Bestimmung der  $(I, V) \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V)$  zu beginnen. Das ist mit wenig Aufwand zu erledigen und reicht in vielen Fällen schon aus, um zu zeigen, dass Hemmer ( $2^*$ ) nicht erfüllt ist:

**Folgerung 3.2.13** *Es sei  $u \in M^\lambda$  ein Element, das Hemmer (1) genügt.*

- (a) *Es seien  $(I, V), (I', V') \in J(\lambda)$  mit  $I' \geq I + 3$  und  $p \nmid b(I, V), b(I', V')$ . Dann gilt mit Lemma 3.2.5 und Folgerung 3.2.6, dass  $b(i, v)u_{i',v'} = b(i', v')u_{i,v}$  für alle  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$ . Damit genügt  $u$  nicht Hemmer ( $2^*$ ), also ist  $H^1(S_n, S^\lambda) = 0$ .*
- (b) *Es seien  $(I, V), (I + 2, V') \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V), b(I + 2, V')$ . Mit Folgerung 3.2.6 (a) gilt dann  $b(I, v)u_{I',v'} = b(I, v')u_{I,v}$  für alle  $(I, v), (I, v') \in J(\lambda)$  sowie  $b(I + 2, v)u_{I+2,v'} = b(I + 2, v')u_{I+2,v}$  für alle  $(I + 2, v), (I + 2, v') \in J(\lambda)$ . Mit Folgerung 3.2.6 (b) erhalten wir, dass  $b(i, v)u_{i+1,v'} = b(i + 1, v')u_{i,v}$  ist für  $(i, v), (i + 1, v') \in J(\lambda)$  mit  $i \in \{I - 2, I - 1\}$ . In diesem Fall genügt  $u$  also genau dann Hemmer ( $2^*$ ), wenn zwei Paare  $(I, v), (i', v') \in J(\lambda)$  existieren mit  $i' \in \{I, I + 1\}$  und  $b(I, v)u_{i',v'} \neq b(i', v')u_{I,v}$ .*

Die Verbesserungen im Fall, dass  $(I, V), (I + 1, V') \in J(\lambda)$  mit  $p \nmid b(I, V), b(I + 1, V')$  existieren, sind derart geringfügig, dass es sich nicht lohnt, sie hier auszuformulieren.

In Teil (a) von Folgerung 3.2.13 zeigen sich jetzt die beachtlichen Vorzüge der Hemmerschen Methode: Der Nachweis trivialer Kohomologie gelingt hier mit wenigen einfachen Rechnungen, basierend lediglich auf der Information, die unmittelbar in der Partition  $\lambda$  gespeichert ist. Und 3.2.13 (a) ist sehr häufig anwendbar. Als Beispiel nehmen wir die Partition  $(n - 6, 2, 1^4)$ , von der auf Seite 77 behauptet wurde, für  $p = 3 \mid n \geq 9$  sei  $d_1^{(n-6,2,1^4)} = 0$ . Dies ergibt sich daraus, dass  $b(1, 0) = \binom{n-4}{2} \not\equiv 0 \pmod{3}$  und  $b(5, 0) = \binom{2}{1} \not\equiv 0 \pmod{3}$  ist.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit von Folgerung 3.2.13 ist natürlich, dass die betreffende Partition genügend Teile hat. Falls Folgerung 3.2.13 nicht weiterhilft, hilft unter Umständen noch das folgende Lemma.

**Lemma 3.2.14** *Es sei  $u \in M^\lambda$  ein Element, das Hemmer (1) genügt, und  $1 \leq i \leq \ell(\lambda) - 2$ . Dann gilt:*

$$\binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}} u_{i,0} = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i} u_{i+1,0}.$$

*Falls einer der folgenden Fälle eintritt, gilt außerdem  $b(i + 1, 0)u_{i,0} = b(i, 0)u_{i+1,0}$ :*

- (a)  $p \mid b(i, 0), b(i + 1, 0)$ ,
- (b)  $p \nmid \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i}$  oder  $p \nmid \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}}$ .

*Beweis:* Es sei  $\bar{w} \in \bar{T}(\lambda)$  ein beliebiges, aber festes  $\lambda$ -Tabloid und  $W := \bar{w}_i \cup \bar{w}_{i+1} \cup \bar{w}_{i+2}$ . Weiterhin setzen wir

$$C := \{\bar{t} \in \bar{T}(\lambda) \mid \bar{t}_j = \bar{w}_j \text{ für } 1 \leq j \leq \ell(\lambda), j \notin \{i, i + 1, i + 2\}\}.$$

Für  $B \subseteq W$  mit  $|B| = \lambda_i$  sei  $\bar{\tau}(B) \in T(i + 1, 0, \bar{w})$  das (eindeutig bestimmte) Tabloid mit  $\bar{\tau}(B)_i = B$ . Dann gilt:

$$\{\bar{t}(A, \bar{\tau}(B)) \mid A \subseteq \bar{\tau}(B)_{i+1} = W \setminus B, |A| = \lambda_{i+1}\} = \{\bar{t} \in C \mid \bar{t}_i = B\}.$$

Analog sei für  $B' \subseteq W$  mit  $|B'| = \lambda_{i+2}$  durch  $\bar{\tau}(B') \in T(i, 0, \bar{w})$  das (eindeutig bestimmte) Tabloid mit  $\bar{\tau}(B')_{i+2} = B$  bezeichnet. So erhalten wir:

$$\{\bar{t}(A, \bar{\tau}(B')) \mid A \subseteq \bar{\tau}(B')_i = W \setminus B', |A| = \lambda_i\} = \{\bar{t} \in C \mid \bar{t}_{i+2} = B'\}.$$

Durch Aufsummieren aller  $u_{\bar{t}}$  mit  $\bar{t} \in C$  erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}} u_{i,0} &= \sum_{\substack{B' \subseteq W \\ |B'| = \lambda_{i+2}}} u_{i,0} \\ &= \sum_{\substack{B' \subseteq W \\ |B'| = \lambda_{i+2}}} \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}(B')_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{t}(A, \bar{\tau}(B'))} = \sum_{\substack{B' \subseteq W \\ |B'| = \lambda_{i+2}}} \sum_{\substack{\bar{t} \in C \\ \bar{t}_{i+2} = B'}} u_{\bar{t}} \\ &= \sum_{\bar{t} \in C} u_{\bar{t}} = \sum_{\substack{B \subseteq W \\ |B| = \lambda_i}} \sum_{\substack{\bar{t} \in C \\ \bar{t}_i = B}} u_{\bar{t}} = \sum_{\substack{B \subseteq W \\ |B| = \lambda_i}} \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}(B)_{i+1} \\ |A| = \lambda_{i+1}}} u_{\bar{t}(A, \bar{\tau}(B))} \\ &= \sum_{\substack{B \subseteq W \\ |B| = \lambda_i}} u_{i+1,0} = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i} u_{i+1,0}. \end{aligned}$$

Nun sehen wir uns noch die Spezialfälle an, in denen  $b(i+1, 0)u_{i,0} = b(i, 0)u_{i+1,0}$  gelten soll. Falls  $p$  sowohl  $b(i, 0)$  als auch  $b(i+1, 0)$  teilt, sind beide Seiten der Gleichung 0. Wegen

$$\binom{a+b+c}{c} \binom{a+b}{a} = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!} = \binom{a+b+c}{a} \binom{b+c}{c}.$$

für alle  $a, b, c \in \mathbb{N}_0$  gilt:

$$\binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}} b(i, 0) = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i} b(i+1, 0).$$

Indem wir nun die Gleichung

$$\binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}} u_{i,0} = \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i} u_{i+1,0}$$

mit  $b(i, 0)$  bzw. mit  $b(i+1, 0)$  multiplizieren, erhalten wir die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i} b(i+1, 0) u_{i,0} &= \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i} b(i, 0) u_{i+1,0}, \\ \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}} b(i+1, 0) u_{i,0} &= \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}} b(i, 0) u_{i+1,0}. \end{aligned}$$

Falls also  $p \nmid \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_i}$  oder  $p \nmid \binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2}}{\lambda_{i+2}}$  ist, können wir in der entsprechenden Gleichung diesen Binomialkoeffizienten wegekürzen und erhalten somit die gewünschte Aussage.  $\square$

Mit diesem Handwerkszeug ausgestattet, werden wir jetzt ein paar wichtige Beispiele in Angriff nehmen. Ab jetzt sei  $p \mid n$ . In Definition 1.5.5 wurde die Menge  $\mathcal{P}_p(n)$  definiert als die Menge der Partitionen

- $(n-2, j, 1)$  für  $1 \leq j \leq p-2$ ,
- $(n-2, p-2, 1^2)$ ,

- $(n-1, p-2, j, 1)$  für  $1 \leq j \leq p-2$ ,
- $(n-1, (p-2)^2, 1^2)$ ,
- $(n-1, (p-1)^x, p-2, j, 1)$  für  $x \in \mathbb{N}$  und  $1 \leq j \leq p-2$ ,
- $(n-1, (p-1)^x, (p-2)^2, 1^2)$  für  $x \in \mathbb{N}$ .

In Lemma 1.5.6 wurde bereits ermittelt, dass  $\mathcal{P}_p(n)$  ein Pfad im Hauptblockgraphen  $\mathcal{B}_0(p)$  ist. Es gilt aber noch mehr:

**Lemma 3.2.15** *Für  $p^2 \nmid n$  ist  $\mathcal{P}_p(n) \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$ . Falls  $(n-2, p-2, 1^2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  ist für  $p^2 \mid n$ , dann ist  $\mathcal{P}_p(n)$  auch für  $p^2 \mid n$  ein Pfad in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$ .*

Die Tatsache, dass  $\mathcal{P}_p(n) \subseteq \mathcal{B}_0(p)$  ist, ermöglicht uns, für den Beweis von Lemma 3.2.15 eine Induktion entlang des Pfades durchzuführen. Mit dieser Methode kann man allerdings nicht zeigen, dass  $(n-2, p-2, 1^2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  ist für  $p^2 \mid n$ . Für  $p=3$  stimmt diese Aussage mit 3.1.1 (b), denn dann ist  $(n-2, p-2, 1^2) = (n-2, 1^3) \vdash n+1$  und  $S^{(n-2, 1^3)} = h_{n+1, 3}$ . Für  $p > 3$  steht der Beweis dieser Aussage noch aus und wird auch in dieser Arbeit nicht geliefert. Darum muss Lemma 3.2.15 mit diesem Vorbehalt formuliert werden.

Aus Lemma 3.1.3 wissen wir, dass die Wurzel des Pfades  $\mathcal{P}_p(n)$ , nämlich  $(n-2, 1^2)$ , in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  liegt. Das ist unser Induktionsanfang. Der Induktionsschluss funktioniert folgendermaßen: Es sei  $\mu \in \mathcal{P}_p(n)$ , und wir nehmen an, dass  $\mu$  auch in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  liegt. Mit Satz 2.5.6 hat  $\mu$  einen Nachfolger in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$ . Falls  $\mu$  einen eindeutig bestimmten Nachfolger in  $\mathcal{B}_0(p)$  hat, muss dieser auch der Nachfolger in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p) \subseteq \mathcal{B}_0(p)$  sein. In diesem Fall ist also nichts zu tun.

Falls  $\mu$  mehrere Nachfolger in  $\mathcal{B}_0(p)$  hat, wissen wir bereits, dass es genau zwei sind. Dabei haben wir jeweils den Nachfolger, der nicht in  $\mathcal{P}_p(n)$  liegt, als ‘böse’ Partition bezeichnet. Die ‘bösen’ Partitionen wurden auch bereits vollständig bestimmt (Lemma 1.5.7). Wenn man nun ausschließen kann, dass die ‘bösen’ Partitionen in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  liegen, dann muss der ‘gute’ Nachfolger von  $\mu$  auch in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  liegen, und Lemma 3.2.15 folgt per Induktion.

Die einzige Stelle, an der diese Argumentation nicht greift, ist  $\mu := (n-1, p-2, 1) \vdash n+p-2$  für  $p^2 \mid n$ . Der ‘böse’ Nachfolger von  $\mu$  ist  $(n-1, p-1, 1)$ . Für  $p=3$  kann mit Hilfe von Hemmers Methode gezeigt werden, dass er in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  liegt (Lemma 3.2.20). Eine Verallgemeinerung dieses Beweises auf beliebiges ungerades  $p$  scheint allerdings nur schwer zu realisieren. Vermutlich sind für alle ungeraden  $p$  beide  $\mathcal{B}_0(p)$ -Nachfolger auch Nachfolger in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$ . Wie dies jedoch zu beweisen ist, ist, wie gesagt, derzeit noch unklar.

Die übrigen ‘bösen’ Partitionen bereiten keine Probleme:

**Lemma 3.2.16** *Es sei  $\lambda$  eine der zu  $\mathcal{P}_p(n)$  gehörigen ‘bösen’ Partitionen. Dann liegt  $\lambda$  nicht in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$ , außer möglicherweise im Fall, dass  $\lambda \vdash n+p-2$  und  $p^2 \mid n$  ist.*

*Beweis:* Es existiert genau dann eine ‘böse’ Partition von  $m \in \mathbb{N}$ , wenn  $m$  eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

- $n \neq p$  und  $m = n+p-2$
- $m > n$  und  $p \mid m$ ,
- $n \neq p$ ,  $m > n+p$  und  $m \equiv -1 \pmod{p}$ .

**1. Fall:**  $m = n+p-2$ .

Es sei  $n \neq p$ ,  $p^2 \nmid n$  und  $m = n+p-2$ . Dann ist die zu  $m$  gehörige ‘böse’ Partition  $\lambda := (n-2, p-1, 1) \vdash m$ . Es sei  $u \in M^\lambda$  ein Element, das Hemmer (1) genügt, und  $\vec{t} \in \vec{T}(\lambda)$ . Dann gilt für alle  $(i, v) \in J(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}
|T(i, v, \bar{t}')| \sum_{\bar{i} \in \bar{T}(\lambda)} u_{\bar{i}} &= \sum_{\bar{i} \in \bar{T}(\lambda)} |T(i, v, \bar{t})| u_{\bar{i}} = \sum_{\bar{i} \in \bar{T}(\lambda)} \left( u_{\bar{i}} \sum_{\bar{\tau} \in T(i, v, \bar{i})} 1 \right) \\
&\stackrel{\circledast}{=} \sum_{\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i, v))} \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_i \\ |A| = \lambda_i}} u_{\bar{i}(\bar{\tau}, A)} = \sum_{\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i, v))} u_{i, v} = |\bar{T}(\lambda(i, v))| \cdot u_{i, v}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Der Schritt  $\circledast$  funktioniert dabei wie in (3.1). Für  $i = 1$  und  $0 \leq v \leq p - 2$  gilt:

$$\begin{aligned}
|T(1, v, \bar{t}')| &= \binom{\lambda_2}{v} = \binom{p-1}{v} \not\equiv 0 \pmod{p}, \\
|T(\lambda(1, v))| &= \frac{m!}{(m-v-1)!v!1!} \\
&= \frac{(n-2)(n-3) \cdots (n-2-v)}{v(v-1) \cdots 1} \begin{cases} \equiv 0 \pmod{p} & \text{für } v = p-2, \\ \not\equiv 0 \pmod{p} & \text{für } v < p-2. \end{cases}
\end{aligned}$$

Für  $(i, v) = (1, p-2)$  erhalten wir damit aus (3.10)

$$\sum_{\bar{i} \in \bar{T}(\lambda)} u_{\bar{i}} = 0.$$

Für  $v < p - 2$  folgt daraus wiederum  $u_{1, v} = 0$ . Wegen  $p^2 \nmid n$  ist

$$|T(\lambda(2, 0))| = \binom{n+p-2}{p} = \frac{(n+p-2)(n+p-3) \cdots n(n-1)}{p(p-1) \cdots 2 \cdot 1} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Damit ist auch  $u_{2, 0} = 0$ . Des Weiteren gilt für  $0 \leq v \leq p - 3$ :

$$\begin{aligned}
b(1, v) &= \binom{\lambda_1 + \lambda_2 - v}{\lambda_2 - v} = \binom{n+p-3-v}{p-1-v} \\
&= \frac{(n+p-3-v) \cdots n(n-1)}{(p-1-v) \cdots 2 \cdot 1} \equiv 0 \pmod{p}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt auch

$$b(2, 0) = \binom{\lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3} = \binom{p}{1} = p \equiv 0 \pmod{p}.$$

Daher gilt für alle  $(i, v), (i', v') \in J(\lambda)$ , dass  $b(i, v)u_{i', v'} = b(i', v')u_{i, v}$  ist, denn außer im Fall  $(i, v) = (i', v') = (1, p-2)$  sind beide Seiten gleich 0. Das heißt, Hemmer (2\*) ist nicht erfüllt, und damit ist  $H^1(S_n, S^\lambda) = 0$ .

**2. Fall:**  $p \mid m$ .

Zunächst setzen wir  $m := n + p > n$ . Dann ist die zu  $m$  gehörige “böse“ Partition  $\lambda := (n, p-2, 1^2) \vdash m$ . Zunächst bestimmen wir die Kongruenz modulo  $p$  aller  $b(i, v)$ :

- $i = 1, 0 \leq v \leq p - 3$ : Mit Folgerung 3.2.12 erhalten wir:

$$b(1, v) \equiv 1 \pmod{p}.$$

- $i = 2, v = 0$ :

$$b(2, 0) = \binom{p-2+1-0}{1-0} = p-1 \equiv -1 \pmod{p}.$$



- $i = 3, v = 0$ :

$$b(3, 0) = \binom{2}{1} = 2 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Es sei  $u \in M^\lambda$  ein Element, das Hemmer (1) genügt. Mit Lemma 3.2.5 erhalten wir für alle  $0 \leq v \leq p-3$ :

$$u_{3,0} = b(1, v)u_{3,0} = b(3, 0)u_{1,v} = 2u_{1,v}.$$

Damit gilt insbesondere, dass  $u_{1,v} = u_{1,0}$  ist für alle  $0 \leq v \leq p-3$ . Mit Lemma 3.2.14 und Lemma 3.2.11 erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} -u_{1,0} &= (n+p-1)u_{1,0} = \binom{n+p-1}{1}u_{1,0} = \binom{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_3}u_{1,0} \\ &= \binom{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_1}u_{2,0} = \binom{n+p-1}{n}u_{2,0} = \binom{n+p-1}{p-1}u_{2,0} = u_{2,0}. \end{aligned}$$

Es ist also

$$\begin{aligned} b(1, v)u_{2,0} &= u_{2,0} = -u_{1,0} = -u_{1,v} = b(2, 0)u_{1,v} \quad \text{für alle } 0 \leq v \leq p-3, \\ b(2, 0)u_{3,0} &= -u_{3,0} = -2u_{1,0} = 2u_{2,0} = b(3, 0)u_{2,0}. \end{aligned}$$

Also genügt  $u$  nicht Hemmer ( $2^*$ ), und damit ist  $H^1(S_n, S^\lambda) = 0$ .

Nun sei  $p \mid m > n + p$ . Zwischen  $n$  und  $n + 2p - 1$  wurden im Pfad schon zwei Mal (für  $p = 3$  sogar drei Mal) Knoten unterhalb der jeweiligen Partition ergänzt. Darum ist  $\ell(\lambda) \geq 5$ .

Des Weiteren ist  $\lambda_1 = n, \lambda_2 = p - 1, 1 \leq \lambda_{\ell(\lambda)-1} \leq p - 2$  und  $\lambda_{\ell(\lambda)} = 1$ . Mit Folgerung 3.2.12 ist daher  $b(1, 0) \equiv 1 \pmod{p}$ . Außerdem gilt:

$$b(\ell(\lambda) - 1, 0) = \binom{\lambda_{\ell(\lambda)-1} + 1}{1} = \lambda_{\ell(\lambda)-1} + 1 \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Wegen  $\ell(\lambda) - 1 \geq 4 = 1 + 3$  ist mit Folgerung 3.2.13 (a)  $H^1(S_n, S^\lambda) = 0$ .

### 3. Fall: $m \equiv -1 \pmod{p}$ .

Die ‘‘bösen‘‘ Partitionen im Fall  $n \neq p$  und  $m \equiv -1 \pmod{p}$  entstehen dadurch, dass man bei der guten Partition von  $m - 1$  durch den neuen Knoten die zweite Zeile auf die Länge  $p$  verlängert. Es sei nun  $\lambda \vdash m$  eine solche Partition. Dann ist

$$\mu := (\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) \vdash m - (n - 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

eine ‘‘böse‘‘ Partition, die von  $\mathcal{P}_p(p)$  abzweigt, also mit  $\mu_1 = \lambda_2 = p$ . Daher verläuft hier die Argumentation komplett analog zum Fall  $p \mid m$ . Das einzige, was man tun muss, ist, die relevanten Zeilenindizes jeweils um 1 zu erhöhen.  $\square$

Bisher haben wir  $\mathcal{P}_p(n)$  in Hinblick auf ‘‘Abzweigungen nach unten‘‘ in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  untersucht. Für die Überlegungen in Abschnitt 3.4 ist es darüber hinaus wichtig zu wissen, dass  $\mathcal{P}_p(n)$  keine ‘‘Abzweigungen nach oben‘‘ in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  besitzt. Letzteres gilt übrigens auch für den Fall  $p^2 \mid n$ , unbeschadet der Tatsache, dass noch gar nicht bewiesen ist, dass  $\mathcal{P}_p(n)$  auch für  $p^2 \mid n$  ein Pfad in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  ist.

**Lemma 3.2.17** Für  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$  mit  $\lambda \vdash m + 1$  gibt es keinen Vorgänger  $\mu \vdash m$  in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p) \setminus \mathcal{P}_p(n)$ .

*Beweis:* Das Vorgehen ist ähnlich wie bei den ‘‘Abzweigungen nach unten‘‘: Mit Hilfe der Endresiduen wurde in Abschnitt 1.5 alle ‘‘bösen‘‘ Vorgänger ermittelt. Die Partition  $\lambda \vdash m + 1 > n$  besitzt genau dann einen ‘‘bösen‘‘ Vorgänger  $\mu \vdash m$ , wenn  $n > p$  ist und

- $m = n + p - 3$ ,
- $m > n + p$ ,  $m \equiv -2 \pmod{p}$ .

Im ersten Fall ist ein kleiner Umweg erforderlich, da die “böse“ Partition  $\mu = (n - 3, p - 2, 1^2) \vdash n + p - 3$  mit der Hemmerschen Methode nicht leicht in den Griff zu bekommen ist. Darum machen wir es anders: In (1.19) haben wir alle Pfade aus  $\mathcal{B}_0(p)$  gesehen, die in  $\mu$  zusammenlaufen. Neben  $\mathcal{P}_p(n)$  sind das noch zwei Pfade, die auf der Höhe  $n$  die Partitionen  $(n - 3, 1^3)$  bzw.  $(n - p, p - 2, 1^2)$  enthalten. Von der Hakenpartition  $(n - 3, 1^3)$  wissen wir aus Lemma 3.1.3, dass sie keine erste Kohomologie über  $\mathbb{F}_p$  hat. Von der Partition  $(n - p, p - 2, 1^2)$  wissen wir wegen  $p \mid n - p$  aus dem zweiten Fall des Beweises von Lemma 3.2.16, dass sie keine erste Kohomologie hat. Also liegt  $\mu$  nicht in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$ , weil  $\mu$  per Induktion keinen Vorgänger in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  haben kann.

Im zweiten Fall können wir die “böse“ Partition  $\mu$  direkt betrachten: Wie wir in (1.18) gesehen haben, handelt es sich um  $\mu = (n - 2, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell(\lambda)}) \vdash m$ . Damit gilt:

$$\begin{aligned} b(1, \lambda_2 - 1) &= b(1, p - 2) = \binom{n - 1}{1} \equiv -1 \pmod{p}, \\ b(\ell(\mu) - 1, 0) &= b(\ell(\lambda) - 1, 0) = \binom{\mu_{\ell(\lambda)-1} + 1}{1} \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Wie wir eben im zweiten Fall des Beweises von Lemma 3.2.16 gesehen haben, ist  $\ell(\mu) = \ell(\lambda) \geq 5$  für  $m > n + p$ . Wegen  $1 + 3 = 5 - 1 \leq \ell(\mu) - 1$  folgt mit Folgerung 3.2.13 (a), dass  $\mu \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  ist.  $\square$

**Folgerung 3.2.18** *Es sei  $p \mid n$ .*

(a) *Falls  $p^2 \nmid n$  ist, so gilt:*

- (i) *Es ist  $H^1(S_m, S^\lambda) \cong \mathbb{F}_p$  für alle  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$ ,  $\lambda \vdash m$ .*
- (ii) *Es ist  $\mathcal{P}_p(n)$  ein Pfad in  $\mathcal{C}_p^2$ . Keine Partition aus  $\mathcal{P}_p(n)$  hat einen Vorgänger oder Nachfolger in  $\mathcal{C}_p^2 \setminus \mathcal{P}_p(n)$ .*
- (iii) *Es ist  $H^2(S_m, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für alle  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$ ,  $\lambda \vdash m$ .*

(b) *Falls  $p^2 \mid n$  ist, so gilt:*

(i) *Für  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$  mit  $\lambda \vdash m$  gilt:*

$$H^1(S_m, S^\lambda) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_p & \text{für } m \leq n + p - 3, \\ H^1(S_{n+p-2}, S^{(n-2, p-2, 1^2)}) & \text{für } m \geq n + p - 2. \end{cases}$$

(ii) *Falls  $(n - 2, p - 2, 1^2) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  ist, ist  $\mathcal{P}_p(n)$  ein Pfad in  $\mathcal{C}_p^2$ . Keine Partition aus  $\mathcal{P}_p(n)$  hat einen Vorgänger in  $\mathcal{C}_p^2 \setminus \mathcal{P}_p(n)$ , und außer möglicherweise  $(n - 2, p - 2, 1) \vdash n + p - 3$  hat keine Partition aus  $\mathcal{P}_p(n)$  einen Nachfolger in  $\mathcal{C}_p^2 \setminus \mathcal{P}_p(n)$ .*

(iii) *Für  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$  mit  $\lambda \vdash m$  gilt:*

$$H^2(S_m, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/[n]_p\mathbb{Z} & \text{für } m \leq n + p - 3, \\ H^2(S_{n+p-2}, S_{\mathbb{Z}_p}^{(n-2, p-2, 1^2)}) & \text{für } m \geq n + p - 2. \end{cases}$$

*Beweis:* Für alle Partitionen in  $\mathcal{P}_p(n)$ , darüber hinaus für alle “bösen“ Vorgänger sowie für alle “bösen“ Nachfolger mit Ausnahme  $(n - 2, p - 1, 1)$  ist  $\lambda_{\ell(\lambda)-1} \not\equiv -1 \pmod{p}$ . Damit erfüllen diese Partitionen das James-Kriterium aus Satz 2.5.4 nicht. Die “böse“ Partition  $(n - 2, p - 1, 1)$  erfüllt das James-Kriterium nicht, weil  $n - 2 \not\equiv -1 \pmod{p}$  ist. Das heißt, für alle beteiligten Partitionen ist  $H^0(S_n, S^\lambda) = 0$ . Damit folgen bereits beide Teile (ii), denn mit Folgerung 2.5.2 ist  $x_2^\lambda = d_1^\lambda + d_0^\lambda$ .

Nun sei  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$ , wobei wir im Fall  $p^2 \mid n$  voraussetzen, dass  $\lambda \neq (n-2, p-2, 1) \vdash n+p-3$  ist. Weiter sei  $\mu$  der Nachfolger von  $\lambda$  in  $\mathcal{P}_p(n)$ . Dann ist  $S^\mu \hookrightarrow S^{\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}}$ : Falls  $\mu$  der einzige Nachfolger von  $\lambda$  in  $\mathcal{B}_0(p)$  ist, ist  $S^\mu$  sogar ein direkter Summand; falls es noch einen ‘‘bösen‘‘ Nachfolger  $\xi$  gibt, ist  $\mu$  lexikografisch kleiner (da der Knoten weiter unten ergänzt wurde), und damit besitzt der Hauptblockanteil von  $S^{\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}}$  eine Spechtreihe  $S^\mu \mid S^\xi$ . Nun sei  $F$  der Faktormodul zu  $S^\mu$  in  $S^{\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}}$ . Dann erhalten wir die exakte Kohomologie-Sequenz

$$0 = H^0(S_{n+1}, F) \longrightarrow H^1(S_{n+1}, S^\mu) \xrightarrow{\cong} H^1(S_{n+1}, S^{\lambda \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}}}) \longrightarrow H^1(S_{n+1}, F) = 0.$$

Daher gilt induktiv mit dem Eckmann-Shapiro-Lemma und Lemma 3.1.3, dass  $d_1^\lambda = d_1^{\lambda'} = 1$  ist für  $p^2 \nmid n$  oder  $\lambda \vdash m \leq n+p-3$ . Mit der gleichen Argumentation gilt für  $p^2 \mid n$  und  $\lambda \vdash m \geq n+p-2$ , dass  $d_1^\lambda = d_1^{(n-2, p-2, 1^2)}$  ist. Damit sind beide Aussagen (i) gezeigt.

Mit Lemma 2.5.11 und Folgerung 2.2.3 wissen wir, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)$  zyklisch von Ordnung  $[n]_p$  ist. Falls  $p^2 \nmid n$  ist, ist gerade  $[n]_p = p$ . Die beiden Aussagen (iii) folgen jetzt analog zu den Teilen (i) induktiv mit dem Eckmann-Shapiro-Lemma.  $\square$

Es bleibt die Frage zu klären, was bei der ‘‘Problemstelle‘‘ in  $\mathcal{P}_p(n)$  für  $p^2 \mid n$  passiert: Was ist die Kohomologie der beiden  $\mathcal{B}_0(p)$ -Nachfolger von  $(n-2, p-2, 1) \vdash n+p-3$ ?

**Vermutung 3.2.19** Für  $p^2 \mid n$  und  $m := n+p-2$  gilt:

$\lambda$	$H^1(S_m, S^\lambda) \cong$	$H^2(S_m, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \cong$
$(n-2, p-2, 1^2)$	$\mathbb{F}_p$	$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$
$(n-2, p-1, 1)$	$\mathbb{F}_p$	$\mathbb{Z}/[\frac{n}{p}]_p\mathbb{Z}$

Dabei ist zu beachten, dass die Kohomologien in der ersten Spalte sich aus denen in der zweiten Spalte ergeben: Beide Partitionen  $\lambda$  erfüllen wegen  $\lambda_1 = n-2 \not\equiv -1 \pmod{p}$  das James-Kriterium nicht, das heißt, es ist  $d_0^\lambda = 0$ . Wenn dann  $H^2(S_m, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)$  zyklisch ist, ist  $d_1^\lambda = x_2^\lambda + d_0^\lambda = 1$ .

Wenn Vermutung 3.2.19 zutrifft, räumt sie den Vorbehalt aus Lemma 3.2.18 (b)(ii) aus, das heißt,  $\mathcal{P}_p(n)$  wäre für  $p \mid n$  auf jeden Fall ein Pfad in  $\mathcal{C}_p^2$ . Außerdem wäre  $H^2(S_m, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für alle  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$  mit  $\lambda \vdash m \geq n+p-2$ .

Wie die Vermutung allgemein zu beweisen ist, ist bislang noch unklar. Motiviert ist sie durch den Fall  $p = 3$ . Was genau in diesem Fall passiert, damit werden wir uns in Lemma 5.1.2 beschäftigen. Aus diesem Lemma ergibt sich jedenfalls, dass Vermutung 3.2.19 für  $p = 3$  und  $27 \nmid n$  wahr ist. Beim Beweis wird ausgenutzt, dass  $(n-2, p-2, 1^2)$  für  $p = 3$  eine Hakenpartition ist. Für  $p > 3$  fällt diese Option flach, und die Hemmersche Methode erweist sich als schwierig anzuwenden. Letzteres gilt auch für  $(n-2, p-1, 1)$ , aber für  $p = 3$  ist es gerade eben noch machbar.

**Lemma 3.2.20** Es sei  $n \equiv 1 \pmod{9}$  und  $\vartheta := (n-3, 2, 1)$ . Dann ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{F}_3}^\vartheta) \neq 0$ .

Dazu müssen wir ein  $u \in M_{\mathbb{F}_3}^\vartheta$  angeben, das Hemmer genügt. Das tun wir folgendermaßen: Es sei  $X := \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \underline{n}$  mit  $x_1 < x_2 < x_3$ . Dann setzen wir für  $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\bar{i}(X, i) := (\underline{n} \setminus X) / (X \setminus \{x_i\}) / \{x_i\}.$$

Bei der Belegung der Koeffizienten  $u_{\bar{i}}$  von  $u$  betrachten wir jetzt für jedes solche  $X$  die drei Koeffizienten  $u_{\bar{i}(X, i)}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , simultan.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_{\bar{i}(X,1)}$	$u_{\bar{i}(X,2)}$	$u_{\bar{i}(X,3)}$	
(1)	$> 1$			0	0	1	außer in Fall (2)
(2)	2	3	$\equiv 1 \pmod{3}$	0	1	0	
(3)	1		$\equiv 0 \pmod{3}$	1	0	0	
(4)	1	2		1	0	0	
(5)	1	3	$\equiv 1 \pmod{3}$	-1	-1	0	
(6)	1	$> 3$		-1	0	-1	
(7)	1		$\equiv 2 \pmod{3}$	0	0	1	

Ein leeres Feld bedeutet, dass es (außer der Grundvoraussetzung  $x_1 < x_2 < x_3$ ) keine einschränkenden Bedingungen ans jeweilige  $x_i$  gibt.

Die Idee von dieser Wahl von  $u$  basiert lediglich auf Beispielrechnungen in GAP und scharfem Hinsehen. Die Beispielrechnungen geben auch Grund zur Annahme, dass schwerlich ein Hemmer genügendes  $u$  mit einfacherer Darstellung gefunden werden kann.

Der Beweis von Lemma 3.2.20 beschränkt sich nun darauf, die Bedingungen aus Satz 3.2.7 direkt nachzuprüfen. Die Details dazu finden sich in Anhang F.

### 3.3 Die Partition $(n - 2, 1^2)$

Wir haben bereits gesehen, dass der Partition  $\gamma = (n - 2, 1^2)$  im Hinblick auf die ungeraden Primzahlen eine besondere Bedeutung zukommt: Mit Lemma 3.2.15 wissen wir, dass  $\gamma$  für  $p \mid n$  die Wurzel eines Pfades in  $\mathcal{C}^1(\mathbb{F}_p)$  bildet, und in Folgerung 3.2.18 haben wir gesehen, dass die betreffenden Pfade auch Pfade in  $\mathcal{C}_p^2$  sind. Im aktuellen Abschnitt wollen wir das Wissen um die Partition  $\gamma$  weiter vertiefen.

Im ganzen Abschnitt sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p \mid n$  und  $\iota := n/p \in \mathbb{N}$ . In der symmetrischen Gruppe  $S_n$  zeichnen wir folgende Elemente aus:

$$a := (1, 2), \quad b := (1, 2, \dots, n), \quad g := b^\iota = \prod_{k=1}^{\iota} (k, \iota + k, 2\iota + k, \dots, (p-1)\iota + k).$$

Das Ziel des Abschnitts ist der Nachweis, dass  $\gamma$   $(p, \iota)$ -speziell ist, also dass gemäß Definition 2.1.20  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n} (H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma)) \neq 0$  ist. Für  $n = 3$  sieht man das sehr schnell: Dann ist  $\gamma = (1^3)$ ,  $p = 3$ ,  $\iota = 1$  und  $g = b = (1, 2, 3)$ . Mit Lemma 2.5.9 ist  $H^2(S_3, S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , und wegen  $[S_3 : \langle g \rangle] = 2$  und Lemma 2.1.14 (c) ist  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_3}$  injektiv und damit ungleich 0. Im Rest des Abschnitts sei  $n \geq 4$ .

Bevor wir zur  $(p, \iota)$ -Spezialität kommen, sollen ein wenig die tieferen Ursachen dafür ausgeleuchtet werden, warum gerade die Partition  $\gamma$  für ungerades  $p$  eine so besondere Rolle spielt. Und zwar hängt dies im weiteren Sinne damit zusammen, dass der Spechtmodul  $S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma$  der schiefsymmetrische Anteil des Tensorprodukts  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  ist. Genauer gesagt, gilt:

**Lemma 3.3.1** *Es ist  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \cong M_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \oplus S_{\mathbb{Z}_p}^\beta \oplus S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma$ .*

*Beweis:* Dies kann man auf sehr elementare Weise zeigen, indem man in  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  bestimmte Untermoduln identifiziert, die isomorph zu  $M_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$ ,  $S_{\mathbb{Z}_p}^\beta$  bzw.  $S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma$  sind, paarweise trivialen Schnitt haben und zusammen ganz  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  aufspannen. Der Beweis findet sich im Anhang C.  $\square$

Ersetzt man  $\mathbb{Z}_p$  in Lemma 3.3.1 durch  $\mathbb{Z}_2$  oder  $\mathbb{Z}$ , gilt die Aussage übrigens nicht mehr.

**Folgerung 3.3.2** *Es ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha) \cong H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma)$ .*

*Beweis:* Gemäß Beispiel 2.1.13, Lemma 2.5.9 und Folgerung 2.2.3 ist

$$H^2(S_n, M_{\mathbb{Z}_p}^\alpha) \cong H^2(S_{n-1}, \mathbf{1}_{\mathbb{Z}_p S_{n-1}}) \cong \mathbb{Z}/[2]_p \mathbb{Z} = 0.$$

Des Weiteren ist  $\beta \notin \mathcal{B}_0(p)$ . Damit folgt die Behauptung aus Lemma 3.3.1.  $\square$



*Beweis:* Entsprechend der Notation in Abschnitt 2.3 sei  $N := \sum_{i=0}^{n-1} b^i$ . Im Anhang A.3 wird gezeigt, dass  $N \cdot S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$  isomorph ist zum Spaltenerzeugnis der Matrix

$$\tilde{N} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & & -1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & -1 & x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor \times \lfloor (n-1)/2 \rfloor}.$$

Dabei sind mit (A.5) und (A.7) die Spalten von  $\tilde{N}$  Koeffizientenspalten bezüglich einer  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\text{Fix}_{\langle b \rangle}(S_{\mathbb{Z}}^{\gamma})$ , wovon  $N \cdot S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$  ein  $\mathbb{Z}S_n$ -Untermodul ist. Auf Seite 165 wird dann gezeigt, dass die Invariantenteilerform von  $\tilde{N}$  gegeben ist durch  $\text{diag}(1, \dots, 1, n/x_n)$ . Insgesamt folgt daraus und aus Satz 2.3.1:

$$H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}}^{\gamma} \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n}) \cong \text{Fix}_{\langle b \rangle}(S_{\mathbb{Z}}^{\gamma})/N \cdot S_{\mathbb{Z}}^{\gamma} \cong \mathbb{Z}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} / \text{col}_{\mathbb{Z}}(\tilde{N}) \cong \mathbb{Z} / \frac{n}{x_n} \mathbb{Z}.$$

Damit ist Teil (a) gezeigt, und Teil (b) folgt mit Folgerung 2.2.3.  $\square$

**Lemma 3.3.5** (a) Es ist  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{(b)} \left( H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma} \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n}) \right) \neq 0$ .

(b) Es ist  $H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma} \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

(c) Es ist  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{(b)} : H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma} \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n}) \rightarrow H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma} \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n})$  surjektiv, und für  $p^2 \nmid n$  sogar bijektiv.

*Beweis:* Auf den ersten Blick könnte man geneigt sein, Teil (a) als eine Folgerung aus den Teilen (b) und (c) zu betrachten. Wir müssen aber umgekehrt vorgehen und die Teile (b) und (c) aus Teil (a) folgern.

(a) Mit Lemma 2.1.14 (a) ist

$$\text{tr}_{\langle g \rangle}^{(b)} \circ \text{res}_{\langle g \rangle}^{(b)} = [\langle b \rangle : \langle g \rangle] \cdot \text{id} = \iota \cdot \text{id}.$$

Da  $H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma} \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  mit Lemma 3.3.4 ein Element der Ordnung  $[n]_p = p[\iota]_p$  enthält, ist  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{(b)}$  mit Lemma 2.1.14 (b) nicht die Nullabbildung.

(b) Mit Lemma 3.3.3 ist  $(S_{\mathbb{Z}_p}^{\alpha} \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^{\alpha}) \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n}$  als  $\mathbb{Z}_p \langle g \rangle$ -Modul isomorph zu

$$(\iota - 1)^2 \cdot (\mathbb{Z}_p \langle g \rangle \otimes \mathbb{Z}_p \langle g \rangle) \oplus 2(\iota - 1) \cdot (\mathbb{Z}_p \langle g \rangle \otimes \mathbb{Z}_p[\omega]) \oplus (\mathbb{Z}_p[\omega] \otimes \mathbb{Z}_p[\omega]).$$

Zusammen mit Teil (a), Lemma 3.3.1, Folgerung 2.3.4 und Folgerung 2.3.3 folgt daraus Teil (b):

$$\begin{aligned} 0 &\neq H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma} \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n}) \hookrightarrow H^2(\langle g \rangle, M_{\mathbb{Z}_p}^{\alpha} \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n} \oplus S_{\mathbb{Z}_p}^{\beta} \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n} \oplus S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma} \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n}) \\ &\cong H^2(\langle g \rangle, (S_{\mathbb{Z}_p}^{\alpha} \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^{\alpha}) \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n}) \cong H^2(\langle g \rangle, \mathbf{1}) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(c) Mit den Teilen (a) und (b) ist  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{(b)}$  surjektiv. Für  $p^2 \nmid n$ , ist  $p \nmid \iota$ , und mit Lemma 2.1.14 (c) erhalten wir in diesem Fall zusätzlich Injektivität.  $\square$

**Lemma 3.3.6** (a) Die Restriktion  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}) \rightarrow H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}}^{\gamma} \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  ist surjektiv.

(b) Die Restriktion  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma) \rightarrow H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  ist bijektiv.

*Beweis:* Aufgrund der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^\gamma/S_{\mathbb{Z}}^\gamma) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} & \circlearrowleft & \downarrow \text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Q}}^\gamma/S_{\mathbb{Z}}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(für  $\mathbb{Z}_p$  und  $\mathbb{Q}_p$  analog) können wir statt der beiden obigen die jeweils äquivalenten Aussagen zeigen:

(a) Die Restriktion  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^\gamma/S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \rightarrow H^1(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Q}}^\gamma/S_{\mathbb{Z}}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  ist surjektiv.

(b) Die Restriktion  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}_p}^\gamma/S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma) \rightarrow H^1(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Q}_p}^\gamma/S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  ist bijektiv.

Die Surjektivität kann in beiden Fällen analog auf sehr elementare Weise gezeigt werden: Man findet einen Erzeuger von  $H^1(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Q}}^\gamma/S_{\mathbb{Z}}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  bzw.  $H^1(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Q}_p}^\gamma/S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  sowie ein Element, das durch die Restriktion darauf abgebildet wird. Letzteres kann man mit Hilfe des Zassenhaus-Verfahrens überprüfen (Anhang D).

In Teil (a) erhalten wir keine Injektivität. Für die Injektivität in Teil (b) verfolgen wir ebenfalls einen elementaren Ansatz: Wir zeigen, dass der Kern der Restriktion trivial ist, und zwar wiederum unter Verwendung des Zassenhaus-Verfahrens. Die Rechnungen dazu finden sich in Anhang E.  $\square$

Damit erhalten wir schließlich die gewünschte Aussage:

**Satz 3.3.7** *Es ist  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}(H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma)) \neq 0$ .*

*Beweis:* Die Aussage folgt aus den Lemmata 3.3.5 (a) und 3.3.6 (b), da mit diesen  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n} = \text{res}_{\langle g \rangle}^{(b)} \circ \text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} \neq 0$  ist.  $\square$

Es sei noch angemerkt, dass in die beiden im Beweis zitierten Aussagen die vorangegangenen Hilfslemmata nicht mit einfließen. Insbesondere brauchen wir  $H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}}^\gamma \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n})$  streng genommen nicht zu kennen. Die ausführlichere Beschäftigung mit den Hintergründen mag als dadurch gerechtfertigt gelten, dass sie Anhaltspunkte dafür liefert, warum wir für  $p = 2$  und die Partition  $(n - 2, 2)$  keinen analogen Ansatz verfolgen können. Wir werden in Abschnitt 4.3 noch einmal darauf zurückkommen.

### 3.4 Vererbung von $(p, \iota)$ -Spezialität

Wir übernehmen die Voraussetzungen aus dem vorangegangenen Abschnitt. Das Ziel ist, für  $m \geq n = p\iota$  die Existenz einer  $(p, \iota)$ -speziellen Partition  $\lambda \vdash m$  nachzuweisen. Der Verdacht liegt nahe, dass wir vorgehen könnten wie bisher: Nachdem wir den Young-Graphen  $\mathcal{Y}$  zunächst auf  $\mathcal{B}_0(p)$  und dann  $\mathcal{B}_0(p)$  auf  $\mathcal{C}_p^2$  eingeschränkt haben, könnten wir jetzt  $\mathcal{C}_p^2$  in Abhängigkeit von  $\iota$  auf die  $(p, \iota)$ -speziellen Partitionen einschränken und zeigen, dass diese neuen Teilgraphen bezüglich der Existenz von Vorgängern und Nachfolgern eine vergleichbare Struktur haben.

Das erste Problem ist, dass das nicht stimmt. Es gibt  $(p, \iota)$ -spezielle Partitionen  $\lambda \vdash m$  mit  $p \nmid m$ , die keinen  $(p, \iota)$ -speziellen Vorgänger haben. Dazu sehen wir uns die folgende Tabelle an. Sie enthält alle  $(3, \iota)$ -speziellen Partitionen für  $n \leq 10$ . Diese wurden mit dem Algorithmus 4.3.2 bestimmt. (Dieser Algorithmus wird erst im Zusammenhang mit der Ermittlung  $(2, \iota)$ -spezieller Elemente vorgestellt, da er dort eine wichtigere Rolle spielt als hier.)

Tabelle 3.4.1

$n$	$\iota = 1$	$\iota = 2$	$\iota = 3$
3	$(1^3)$		
4	$(1^4)$		
5	$(2, 1^3)$		
6	$(2, 1^4)$	$(4, 1^2), (3^2)$	
7	$(4, 1^3), (2^2, 1^3)$	$(4, 3), (4, 1^3)$	
8	$(5, 1^3), (2^2, 1^4)$	$(5, 1^3), (4, 3, 1)$	
9	$(5, 1^4), (2^3, 1^3)$	$(5, 1^4), (4, 3, 2)$	$(7, 1^2), (6, 3), (2^3, 1^3)$
10	$(7, 1^3), (5, 2, 1^3), (2^3, 1^4)$	$(7, 1^3), (5, 2, 1^3), (4, 3^2), (4, 3, 2, 1)$	$(7, 3), (7, 1^3), (4, 3^2), (2^3, 1^4)$

Man sieht, dass die Partition  $(4, 1^3) \vdash 7$  zwar  $(3, 1)$ -speziell ist, aber keinen  $(3, 1)$ -speziellen Vorgänger besitzt, obwohl  $3 \nmid 7$  ist. Die Partition  $(7, 1^3) \vdash 10$  ist  $(3, 1)$ - und  $(3, 2)$ -speziell, hat aber weder einen  $(3, 1)$ -speziellen noch einen  $(3, 2)$ -speziellen Vorgänger. Schließlich hat auch die  $(3, 3)$ -spezielle Partition  $(4, 3^2) \vdash 10$  keinen  $(3, 3)$ -speziellen Vorgänger.

Nun ist das noch nicht weiter tragisch, da die Existenz von Vorgängern uns eigentlich nicht interessiert. Wenn wir zeigen könnten, dass jede  $(p, \iota)$ -spezielle Partition einen  $(p, \iota)$ -speziellen Nachfolger hat, könnten wir schon zufrieden sein. Aber auch dies stimmt im Allgemeinen nicht: In Tabelle 4.3.3 werden wir sehen, dass die Partition  $(4^2) \vdash 8$  zwar  $(2, 4)$ -speziell ist, aber keinen  $(2, 4)$ -speziellen Nachfolger besitzt. Genauer gesagt, ist der einzige Nachfolger in  $\mathcal{C}_2^2$ , nämlich  $(5, 4)$ , für kein  $\iota \leq 4$   $(2, \iota)$ -speziell. Ob dieses Phänomen der Nachfolgerlosigkeit eine Besonderheit von  $p = 2$  ist, oder ob es auch bei ungeradem  $p$  auftreten kann, ist aufgrund der geringen zur Verfügung stehenden Datenmenge schwer abzuschätzen.

Daher schrauben wir unsere Erwartungen noch eine Stufe zurück und behaupten lediglich, dass alle Partitionen im Pfad  $\mathcal{P}_p(n)$   $(p, \iota)$ -speziell sind. Die Tatsache, dass dieser Pfad in  $\mathcal{C}_p^2$ , abgesehen von der bekannten Problemstelle, nach oben und unten abzweigungsfrei ist, könnte es ermöglichen, die  $(p, \iota)$ -Spezialität von  $\gamma$  mit Hilfe geeigneter kommutativer Diagramme entlang des Pfades "weiterzureichen".

Doch selbst das gelingt in der vorliegenden Arbeit leider noch nicht. Es ist allerdings der bislang vielversprechendste Ansatz. Daher soll er hier vorgeführt werden, soweit er funktioniert, um durch das Benennen der verbleibenden Lücken das Problem des Auffindens  $(p, \iota)$ -spezieller Partitionen auf ein Minimum zu reduzieren.

Es seien  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $\lambda \vdash n + i$  sowie  $\mu \vdash n + i + 1$  beides Elemente in  $\mathcal{P}_p(n)$ , das heißt,  $\lambda$  ist der eindeutige Vorgänger von  $\mu$  in  $\mathcal{P}_p(n)$ . Des Weiteren setzen wir voraus, dass  $p^2 \nmid n$  ist.

Zunächst schreiben wir  $S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}} =: H \oplus K$  als direkte Summe, wobei  $H$  der Hauptblock-Anteil von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}$  ist und  $K$  dessen Komplement. Mit den Verzweigungsregeln hat  $H$  eine Spechtreihe, bestehend aus den Vorgängern von  $\mu$  in  $\mathcal{B}_0(p)$ , die lexikografisch aufsteigend geordnet sind. Außerdem ist

$$H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) \cong H^2(S_{n+i}, H \oplus K) \cong H^2(S_{n+i}, H).$$

Daraus erhalten wir auf kanonische Weise das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S_{n+i}, H) \oplus \underbrace{H^2(S_{n+i}, K)}_{=0} \\
\downarrow \text{res}_{(g)}^{S_{n+i}} & \circlearrowleft & \downarrow (\text{res}_{(g)}^{S_{n+i}}, \text{res}_{(g)}^{S_{n+i}}) \\
H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i+1}}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(\langle g \rangle, H \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}) \oplus H^2(\langle g \rangle, K \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}).
\end{array}$$



Darüber, ob  $H^2(\langle g \rangle, K \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}})$  trivial ist oder nicht, wissen wir zunächst einmal nichts. Aber wir können die beiden Isomorphismen durch Projektionen auf den jeweils ersten direkten Summanden ersetzen. Der Isomorphismus in der oberen Diagrammzeile wird durch diese Änderung nicht berührt, und die Kommutativität des Diagramms bleibt erhalten.

$$\begin{array}{ccc} H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) & \twoheadrightarrow & H^2(S_{n+i}, H) \\ \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} & \circlearrowleft & \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} \\ H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i+1}}) & \twoheadrightarrow & H^2(\langle g \rangle, H \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}). \end{array}$$

**Lemma 3.4.2** *Unter den gegebenen Voraussetzungen gilt:*

- (a) *Es ist  $H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) \cong H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)$ .*
- (b) *Für  $p \nmid i+1$  ist  $\text{res}_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}} : H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu) \rightarrow H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}})$  bijektiv.*
- (c) *Für geeignete Homomorphismen kommutiert das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \\ \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} & & \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} \\ H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i+1}}) & \longrightarrow & H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}). \end{array}$$

*Beweis:* Zunächst halten wir fest, dass mit Folgerung 3.2.18 gilt:

$$H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda).$$

Außerdem halten wir fest: Falls  $p \nmid i+1$  ist, folgt mit Lemma 2.1.14 (c) aus

$$\text{ggT}([S_{n+i+1} : S_{n+i}], |H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu)|) = \text{ggT}(n+i+1, p) = 1,$$

dass die Abbildung  $\text{res}_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}$  injektiv ist.

- (a) Falls  $i \neq p-3$  ist und  $i \not\equiv -2 \pmod{p}$  für  $i > p$ , ist  $\lambda$  der einzige Vorgänger von  $\mu$  im Hauptblock und damit  $H \cong S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda$ . In diesem Fall ist die Behauptung mit den Überlegungen von oben offensichtlich wahr.

Falls  $i = p-3$  ist oder  $p < i \equiv -2 \pmod{p}$ , gibt es einen weiteren Vorgänger  $\xi \vdash n+i$  im Hauptblock, aber außerhalb des Pfades. Dieser wird von  $\lambda$  dominiert, das heißt, wir haben eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow S_{\mathbb{Z}_p}^\xi \longrightarrow H \longrightarrow S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda \longrightarrow 0.$$

Daraus erhalten wir die exakte Kohomologiesequenz

$$\underbrace{H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\xi)}_{=0} \longrightarrow H^2(S_{n+i}, H) \longrightarrow \underbrace{H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)}_{\cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}.$$

Da hier  $p \nmid i+1$  gilt, ist  $\text{res}_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}$  injektiv, das heißt, wir haben folgende (nicht exakte) Folge von Homomorphismen:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} &\cong H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu) \hookrightarrow H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) \\ &\cong H^2(S_{n+i}, H) \hookrightarrow H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Damit sind alle beteiligten Kohomologiegruppen zyklisch von Ordnung  $p$ , also ist insbesondere  $H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) \cong H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)$ .

- (b) Da Teil (a) nun für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  nachgewiesen wurde, wissen wir jetzt für  $p \nmid i + 1$ , dass  $\text{res}_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}$  nicht nur injektiv, sondern aus Ordnungsgründen sogar bijektiv ist.
- (c) Falls  $i \neq p - 3$  ist und  $i \not\equiv -2 \pmod{p}$  für  $i > p$ , ist wie in Teil (a)  $H \cong S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda$  und damit die Behauptung mit den Überlegungen von oben wahr. Anderenfalls setzen wir das kommutative Diagramm aus der Vorüberlegung zusammen mit dem kommutativen Diagramm, das wir aus der kurzen exakten Sequenz  $0 \rightarrow S_{\mathbb{Z}_p}^\xi \rightarrow H \rightarrow S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda \rightarrow 0$  erhalten:

$$\begin{array}{ccccc} H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S_{n+i}, H) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \\ \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} & \circlearrowleft & \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} & \circlearrowleft & \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} \\ H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i+1}}) & \longrightarrow & H^2(\langle g \rangle, H \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}) & \longrightarrow & H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}). \end{array}$$

Dieses können wir zu dem gewünschten kommutativen Diagramm zusammenfallen.  $\square$

**Vermutung 3.4.3** *Auch für  $p \mid i + 1$  ist  $\text{res}_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}} : H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu) \rightarrow H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}})$  injektiv (und damit bijektiv).*

Dies ist die erste der oben angesprochenen Lücken. Um diese Vermutung zu beweisen, braucht man stärkere Methoden als die Standardtricks aus Lemma 2.1.14. Wenn aber der Beweis gelingt, dann haben wir - zumindest im Fall  $p^2 \nmid n$  - gewonnen:

**Folgerung 3.4.4** *Falls Vermutung 3.4.3 wahr ist, sind unter den gegebenen Voraussetzungen alle Partitionen in  $\mathcal{P}_p(n)$   $(p, \iota)$ -speziell.*

*Beweis:* Zu zeigen ist, dass  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} : H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \rightarrow H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}})$  für jede Partition  $\lambda \in \mathcal{P}_p(n)$  ungleich 0 ist. Das tun wir induktiv.

Der Induktionsanfang ist Satz 3.3.7: Die Partition  $\gamma = (n-2, 1^2)$  ist  $(p, \iota)$ -speziell. Jetzt nehmen wir an, die Aussage sei für die Partition  $\lambda \vdash n+i$  aus dem Pfad gezeigt. Es sei  $\mu \vdash n+i+1$  der Nachfolger von  $\lambda$  in  $\mathcal{P}_p(n)$ . Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu) & & \\ \cong \downarrow \text{res}_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}} & & \\ H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}}) & \xrightarrow{\cong} & H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda) \\ \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} & \circlearrowleft & \downarrow \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}} \\ H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i+1}}) & \longrightarrow & H^2(\langle g \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}). \end{array}$$

Die beiden Isomorphismen kommen aus Lemma 3.4.2 (a) und (b) sowie Vermutung 3.4.3, und die Kommutativität des Diagramms ergibt sich aus Lemma 3.4.2 (c). Da  $H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ist und gemäß Induktionsvoraussetzung  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i}}(H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)) \neq 0$ , folgt aus der Kommutativität des Diagramms, dass auch  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_{n+i+1}}(H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^\mu)) \neq 0$  ist. Also gilt die Behauptung per Induktion.  $\square$

Es bleibt zu klären, was im Fall  $p^2 \mid n$  passiert. Die Folgerung 3.2.18 deutet darauf hin, dass wir gar nicht so weit von der obigen Situation entfernt sind. Tatsächlich gilt Lemma 3.4.2 auch

im Fall  $p^2 \mid n$ , sofern wir  $i \neq p - 3$  voraussetzen. Der Unterschied besteht in den Isomorphietypen der betrachteten Kohomologiegruppen: Es ist  $H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^\lambda)$  für  $i \leq p - 3$  zyklisch von Ordnung  $[n]_p > p$ . Für  $i \geq p - 2$  ist der genaue Isomorphietyp zwar noch nicht nachgewiesen, aber wir wissen, dass er konstant ist, und das genügt.

Damit können wir für  $p^2$  im Prinzip eine ähnliche Induktion wie in Folgerung 3.4.4 durchführen, sobald geklärt ist, wie wir von  $n + p - 3$  nach  $n + p - 2$  schließen. Für den Moment schließen wir diese Lücke provisorisch mit einer Vermutung, die als Erweiterung von Vermutung 3.2.19 gesehen werden kann:

**Vermutung 3.4.5** *Für  $p^2 \mid n$  ist die Partition  $(n - 2, p - 2, 1^2) \vdash n + p - 2$   $(p, \iota)$ -speziell.*

**Folgerung 3.4.6** *Unter der Voraussetzung, dass die Vermutungen 3.4.3 und 3.4.5 wahr sind, folgt analog zu Folgerung 3.4.4, dass auch für  $p^2 \mid n$  alle Partitionen in  $\mathcal{P}_p(n)$   $(p, \iota)$ -speziell sind.*

Damit haben wir für ungerades  $p$  das vorläufige Ende der Fahnenstange erreicht und wenden uns nunmehr dem Fall  $p = 2$  zu.



## Kapitel 4

# Kohomologie über $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{Z}_2$

Dieses Kapitel liefert einen Überblick über Informationen bezüglich Aufbau und Kohomologie von Permutations-, Young-, Specht- und irreduziblen Moduln über  $\mathbb{F}_2 S_n$ . Dabei handelt es sich teils um altbekannte Aussagen, teils um neue. Bei den bereits zuvor bekannten Aussagen habe ich mich bemüht, auf entsprechende Quellen zu verweisen. Ich möchte allerdings nicht ausschließen, dass möglicherweise die eine oder andere Aussage, deren Beweis hier ausformuliert wird, ebenfalls schon vorher bekannt war.

Das Hauptaugenmerk liegt wieder auf den sechs nach  $(n)$  lexikografisch größten Partitionen

$$\begin{aligned}\alpha &:= (n-1, 1), & \zeta &:= (n-3, 3), \\ \beta &:= (n-2, 2), & \vartheta &:= (n-3, 2, 1), \\ \gamma &:= (n-2, 1^2), & \kappa &:= (n-3, 1^3).\end{aligned}$$

Über Kohomologie von  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln weiß man insgesamt nicht allzu viel. In [KP93] zum Beispiel bestimmen Kleshchev und Premet unter anderem die erste und zweite Kohomologie von  $D^\alpha$ ,  $S^\alpha$  und  $(S^\alpha)^*$ . Außerdem haben Martin und Russell in [MR97]  $\text{Ext}_{kS_n}^1(D^\lambda, D^\mu)$  für gewisse Zweiteilpartitionen  $\lambda$  und  $\mu$  und einen algebraisch abgeschlossenen Körper  $k$  der Charakteristik 2 untersucht. Wesentlicher Berührungspunkt jener Arbeit mit diesem Kapitel ist die Kohomologiegruppe  $H^1(S_n, D^\beta)$  bzw. die dazu isomorphe Ext-Gruppe  $\text{Ext}_{kS_n}^1(D^{(n)}, D^\beta)$ . Bei der Untersuchung von  $H^1(S_n, D^\beta)$  mit den Methoden aus Abschnitt 4.2.6 stellt sich allerdings heraus, dass sich in [MR97] ein Fehler eingeschlichen hat. Wir werden zu gegebener Zeit kurz darauf eingehen.

Bei der Angabe von Kompositions- und Spechtreihen verwenden wir die in Abschnitt 1.3 vereinbarten Konventionen. Das bedeutet insbesondere, dass die Angabe einer Kompositionsreihe immer Uniserialität impliziert. Bei nicht uniserialen Moduln beschreiben wir deren Untermodulverbände mit Hilfe von sogenannten *Hasse-Diagrammen* (siehe [Aig75], Seite 10). Ganz allgemein ist ein Hasse-Diagramm ein gerichteter Graph, der eine partiell geordnete endliche Menge  $(M, \leq)$  repräsentiert. Dabei bestehen die Knoten aus den Elementen der Menge  $M$ , und es zeigt eine Kante von  $m_1 \in M$  nach  $m_2 \in M$  genau dann, wenn  $m_1 < m_2$  ist und kein weiteres Element von  $M$  dazwischen liegt, das heißt, wenn für  $m \in M$  aus  $m_1 < m \leq m_2$  folgt, dass  $m = m_2$  ist. Die Richtung einer Kante wird grafisch dadurch angezeigt, dass der Knoten  $m_2$  höher liegt als der Knoten  $m_1$ . (Das Höhenverhältnis zwischen zwei Knoten ist nur dann von Bedeutung, wenn sie durch einen Pfad miteinander verbunden sind.)

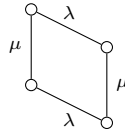
Wir betrachten nun speziell die (endliche) Menge der Untermoduln eines endlich-dimensionalen  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduls  $V$ , welche bezüglich der Teilmengenrelation partiell geordnet ist und sich somit durch ein Hasse-Diagramm darstellen lässt. Für die einzelnen Untermoduln haben wir zumeist keine konkrete Bezeichnungen zur Hand, abgesehen von willkürlich gewählten. Darum verzichten wir in der grafischen Darstellung auf eine konkrete Benennung der Knoten. Nützlicher ist es, die Kanten zu beschriften: Wenn eine Kante von  $V_1 \leq V$  nach  $V_2 \leq V$  zeigt, bedeutet das erstens, dass  $V_1$  ein  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Untermodul von  $V_2$  ist, und zweitens, dass  $V_2/V_1$  einfach ist. Daher können wir jede Kante

im Diagramm mit dem Isomorphietyp von  $V_2/V_1$  versehen. Im Folgenden verwenden wir dazu die entsprechenden Partitionen bzw. "1" für den trivialen Modul.

Unabhängig von der gewählten grafischen Darstellung besitzt das Hasse-Diagramm einen eindeutigen tiefsten Knoten, nämlich den 0-Modul, und einen eindeutigen höchsten Knoten, nämlich den Modul  $V$  selbst. Jeder Pfad im Graphen, der vom tiefsten Knoten aufwärts zum höchsten läuft, liefert eine Kompositionsreihe von  $V$ . Das Hasse-Diagramm zu einem Untermodul  $W \leq V$  ist ein Teildiagramm vom Diagramm zu  $V$ : Es besteht aus allen Knoten und allen Kanten zwischen 0 und  $W$ . Entsprechend besteht das Hasse-Diagramm zu  $V/W$  aus allen Knoten und allen Kanten zwischen  $W$  und  $V$ .

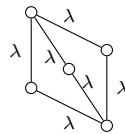
Aus Lemma 1.3.3 ergibt sich, dass wir ein Hasse-Diagramm zum dualen Modul  $V^*$  erhalten, wenn wir ein Diagramm zu  $V$  "auf den Kopf stellen". Falls  $V$  selbstdual ist, sind die zugehörigen Hasse-Diagramm gewissermaßen symmetrisch, in dem Sinne, dass ein auf den Kopf gestelltes Hasse-Diagramm von  $V$  wieder ein Hasse-Diagramm von  $V$  ist. Ob ein solches Diagramm auch optisch symmetrisch ist, hängt natürlich von der gewählten grafischen Darstellung ab.

Die direkte Summe zweier einfacher  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln zu verschiedenen 2-regulären Partitionen  $\lambda$  und  $\mu$  entspricht einem Hasse-Diagramm der Form



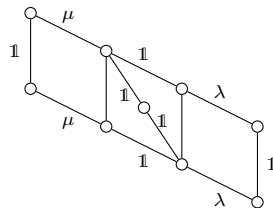
Solche Parallelogramme werden, eingebettet in größere Diagramme, im Folgenden häufig auftauchen. Da zwei parallele Kanten zwangsläufig für den gleichen Isomorphietyp einfacher  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln stehen, können wir gelegentlich auf die explizite Beschriftung jeder einzelnen Kante verzichten. Bei größeren Diagrammen trägt dieses Vorgehen zur besseren Übersicht bei.

Nun sei  $(D^\lambda)'$  eine Kopie von  $D^\lambda$ , und für  $v$  in  $D^\lambda$  bezeichne  $v'$  das entsprechende Element in  $(D^\lambda)'$ . Die direkte Summe  $D^\lambda \oplus (D^\lambda)'$  hat nun drei Untermoduln isomorph zu  $D^\lambda$ , nämlich  $D^\lambda \oplus 0$ ,  $0 \oplus (D^\lambda)'$  und  $\{(v, v') \mid v \in D^\lambda\}$ . Damit hat  $D^\lambda \oplus (D^\lambda)'$  ein Hasse-Diagramm der Form



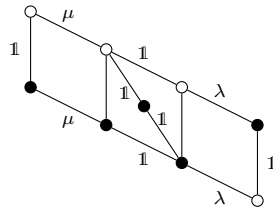
(Hier benutzen wir, dass wir Moduln über  $\mathbb{F}_2$  betrachten. Allgemeiner gilt: Wenn  $D^\lambda$  ein irreduzibler  $S_n$ -Modul über einem beliebigen Körper  $k$  von Primcharakteristik ist, dann sind die zu  $D^\lambda$  isomorphen Untermoduln von  $D^\lambda \oplus (D^\lambda)'$  gegeben durch  $0 \oplus (D^\lambda)'$  und  $\{(v, x \cdot v') \mid v \in D^\lambda\}$  für  $x \in k$ .)

Wenn wir zwei  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln  $V$  und  $W$  gegeben haben, dann ist für jeden Untermodul  $V' \leq V$  und jeden Untermodul  $W' \leq W$  die direkte Summe  $V' \oplus W'$  ein Untermodul von  $V \oplus W$ . Zusammen mit dem Wissen über die Hasse-Diagramme zu direkten Summen aus einfachen Moduln können wir damit aus den Hasse-Diagrammen von  $V$  und  $W$  ein Hasse-Diagramm zu  $V \oplus W$  konstruieren. Wenn beispielsweise  $V$  uniserial mit Kompositionsreihe  $D^\lambda \mid \mathbb{1} \mid D^\mu$  ist, dann hat  $V \oplus \mathbb{1}$  folgendes Hasse-Diagramm:



Bei den besonderen Hasse-Diagrammen, die wir hier betrachten, bietet es sich an, zusätzliche Informationen durch die grafische Darstellung der Knoten auszudrücken. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die Knotenform ihre Bedeutung im Allgemeinen verliert, wenn wir aus Hasse-Diagrammen die Hasse-Diagramme zu Unter-, Faktor- und dualen Moduln herleiten.

Zunächst repräsentieren wir *lokale Untermoduln*, also Untermoduln mit irreduziblem Kopf, durch ausgefüllte Knoten, alle anderen Untermoduln durch leere Knoten. Ob ein Untermodul lokal ist oder nicht, lässt sich zwar auch ohne gesonderte Kennzeichnung aus einem Hasse-Diagramm ablesen, aber wenn man zum Beispiel alle lokalen Untermoduln mit einem bestimmten Kopf sucht, ist es praktisch, diese zusätzliche Markierung zur Hand zu haben. Das obige Diagramm sieht in der neuen Notation so aus:



Des Weiteren ist es so, dass die Hasse-Diagramme, die wir im Folgenden betrachten, zum größten Teil zu Youngmoduln gehören. Wie wir sehen werden, hat jeder dieser Youngmoduln eine Spechtreihe, die sich zur Standard-Spechtreihe von  $M^\lambda$  aus Lemma 1.3.1 ergänzen lässt. Diese Spechtreihe markieren wir durch eckige Knoten im Diagramm. Das bedeutet insbesondere, dass der niedrigste eckige Knoten im Hasse-Diagramm zu  $Y^\lambda$  für den Spechtmodul  $S^\lambda$  steht.

Bei uniseriellen Moduln ist die Darstellung der Untermodulverbände mit Hilfe von Hasse-Diagrammen nicht praktikabel. Hier verwenden wir einfach die in Abschnitt 1.3 eingeführte Notation. Eine Kennzeichnung von lokalen Untermoduln ist hier überflüssig, und die eben erwähnten Spechtreihen der Youngmoduln markieren wir jetzt durch Doppelstriche.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, dass es für die Isomorphie zweier  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln zwar eine notwendige, aber keineswegs hinreichende Voraussetzung ist, dass die Hasse-Diagramme zu ihren Untermodulverbänden übereinstimmen.

### 4.1 Aufbau und Kohomologie bestimmter $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln

Um die Zusammenstellung einigermaßen übersichtlich zu gestalten, verzichten wir zunächst auf die zugehörigen Beweise und liefern diese in Abschnitt 4.2 nach. Das erschwert zugegebenermaßen ein wenig die Zuordnung zwischen Aussage und Beweis. Allerdings lässt sich eine systematische Anordnung der Beweise wegen der vielen Querverbindungen schwer mit einer systematischen Anordnung der Aussagen in Einklang bringen. Daher scheint mir die gewählte Strukturierung alles in allem am praktikabelsten.

Auch so ist eine übersichtliche Präsentation der Informationen noch schwer genug. Die gewählte Anordnung soll erreichen, dass man beim Vergleich von Informationen, die in Zusammenhang miteinander stehen, möglichst wenig blättern muss. Ganz kann das Blättern allerdings nicht vermieden werden.

Zur trivialen Partition gibt es nicht allzu viel zu sagen. Daher betrachten wir sie vorab.

$$\mathbb{1} := \mathbb{1}_{S_n} = D^{(n)} = S^{(n)} = Y^{(n)} = M^{(n)},$$

$$\mathbb{1} \downarrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong \mathbb{1}_{S_{n-1}}, \quad \mathbb{1} \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \cong M^{(n,1)}.$$

Für gerades  $n$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, \mathbb{1}) \cong H^i(S_{n+1}, \mathbb{1}_{S_{n+1}})$ . Für  $i \in \{0, 1, 2\}$  ist  $\dim(H^i(S_n, \mathbb{1}))$  gegeben durch:

$i$	$n = 1$	$n \in \{2, 3\}$	$n \geq 4$
0	1	1	1
1	0	1	1
2	0	1	2

Kommen wir nun zu den Partitionen  $\alpha$  bis  $\kappa$ . Zu den folgenden fünf Tabellen seien vorab folgende Erläuterungen gegeben:

**Tabelle 4.1.1 -  $\mathbb{F}_2$ -Dimensionen:**

Im aktuellen Zusammenhang betrachten wir zwar nur  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln, die hier angegebenen Dimensionsformeln gelten aber allgemeiner. Die Dimensionen der Permutations- und Spechtmoduln hängen nur von der zugehörigen Partition ab ((1.4) und (1.9)). Die Dimensionen der irreduziblen Moduln und der Youngmoduln gelten über jedem Körper der Charakteristik 2. Das liegt daran, dass die irreduziblen Moduln mit Satz 1.2.4 (a) absolut irreduzibel sind, und dass mit Satz 1.2.6 die  $p$ -Kostka-Zahlen nur von der Charakteristik  $p$  des jeweiligen Körpers abhängen und nicht vom Körper selbst.

Wir setzen überall stillschweigend voraus, dass  $n$  genügend groß ist, dass also  $\lambda$  immer eine Partition von  $n$  ist. In einzelnen Fällen (nämlich bei  $\alpha \vdash 2$ ,  $\beta \vdash 4$ ,  $\vartheta \vdash 5$  und  $\zeta \vdash 6$ ) ist die jeweilige Partition  $\lambda$  nicht 2-regulär; damit ist  $D^\lambda$  in diesen Fällen eigentlich nicht definiert. Die entsprechenden Formeln liefern in diesen Fällen jeweils die Dimension 0. Daher verzichten wir darauf, diese Fälle separat zu betrachten.

**Tabelle 4.1.2 - Spechtreihen von Permutationsmoduln und Youngmoduln, Zerlegung von Permutationsmoduln in Youngmoduln:**

Die Standard-Spechtreihe von  $M^\kappa$  lassen wir wegen ihrer Länge hier aus, ebenso die Spechtreihe von  $Y^\kappa$  für gerades  $n > 4$ . Sie werden auch im weiteren Verlauf nicht benötigt.

**Tabelle 4.1.3 und 4.1.4 - Einschränkung und Induktion:**

Wir schränken immer auf die symmetrische Gruppe vom nächstkleineren Grad ein und induzieren zur symmetrischen Gruppe vom nächsthöheren Grad. Der kompakteren Notation wegen kennzeichnen wir Einschränkung einfach durch  $V \downarrow$  und Induktion durch  $V \uparrow$ .

Die Einträge der Tabellen resultieren aus den jeweiligen Verzweigungsregeln für Permutationsmoduln ((1.15) und (1.16)), Spechtmoduln (Satz 1.4.1) und Youngmoduln (Folgerung 1.4.2). Bei induzierten und eingeschränkten irreduziblen Moduln ist der genaue Isomorphietyp angegeben, sofern er bekannt ist. Andernfalls beschränken wir uns auf eine Kompositionsreihe. Manche der Aussagen ergeben sich direkt aus den modularen Verzweigungsregeln (Satz 1.4.4), bei anderen sind zusätzliche Überlegungen nötig.

Bei der Induktion betrachten wir nur die Partitionen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ , da für  $\zeta$ ,  $\vartheta$  und  $\kappa$  Partitionen von  $n + 1$  benötigt werden, die lexikografisch kleiner als  $\kappa + 1$  sind.

**Tabelle 4.1.5 - Untermodulverbände von Spechtmoduln  $S^\lambda$ :**

Wie in der Einleitung des Kapitels angekündigt, soll die Angabe einer Kompositionsreihe Uniserialität implizieren. Die Untermodulverbände der entsprechenden dualen Spechtmoduln erhält man durch Umkehren der Hasse-Diagramme bzw. Kompositionsreihen.



Tabelle 4.1.1 -  $\mathbb{F}_2$ -Dimensionen

$\lambda$	$\dim(M^\lambda)$	$\dim(S^\lambda)$	$\dim(D^\lambda)$	$\dim(Y^\lambda)$	$n$
$\alpha$	$n$	$n-1$	$n-1$	$n-1$	<i>ungerade</i>
			$n-2$	$n$	<i>gerade</i>
$\beta$	$n^2/2 - n/2$	$n^2/2 - 3n/2$	$n^2/2 - 3n/2 - 1$	$n^2/2 - 3n/2 + 1$	$\equiv 1 \pmod{4}$
			$n^2/2 - 5n/2 + 1$	$n^2/2 - n/2 - 1$	$\equiv 2 \pmod{4}$
			$n^2/2 - 3n/2$	$n^2/2 - 3n/2$	$\equiv 3 \pmod{4}$
			$n^2/2 - 5n/2 + 2$	$n^2/2 - n/2$	$\equiv 0 \pmod{4}$
$\gamma$	$n^2 - n$	$n^2/2 - 3n/2 + 1$	–	$n^2 - 3n + 2$	<i>ungerade</i>
				$n^2 - 2n$	<i>gerade</i>
$\zeta$	$n^3/6 - n^2/2 + n/3$	$n^3/6 - n^2 + 5n/6$	$n^3/6 - n^2 + 5n/6$	$n^3/6 - n^2 + 5n/6$	$\equiv 1 \pmod{4}$
			$n^3/6 - 3n^2/2 + 10n/3 - 2$	$n^3/6 - n^2/2 + n/3$	$\equiv 2 \pmod{4}$
			$n^3/6 - n^2 - n/6 + 1$	$n^3/6 - n^2 + 11n/6 - 1$	$\equiv 3 \pmod{4}$
			$n^3/6 - 3n^2/2 + 7n/3$	$n^3/6 - n^2/2 - 2n/3$	$\equiv 0 \pmod{4}$
$\vartheta$	$n^3/2 - 3n^2/2 + n$	$n^3/3 - 2n^2 + 8n/3$	$n^3/3 - 5n^2/2 + 25n/6$	$n^3/3 - n^2 - n/3 + 1$	$\equiv 1 \pmod{4}$
			$n^3/3 - 5n^2/2 + 25n/6 - 1$		$\equiv 3 \pmod{4}$
			$n^3/3 - 2n^2 + 8n/3$	$n^3/3 - 2n^2 + 8n/3$	<i>gerade</i>
$\kappa$	$n^3 - 3n^2 + 2n$	$n^3/6 - n^2 + 11n/6 - 1$	–	$n^3/3 - 2n^2 + 11n/3 - 2$	<i>ungerade</i>
				$n^3/3 - n^2 + 2n/3$	<i>gerade</i>

Tabelle 4.1.2 - Spechtreihen von Permutationsmoduln und Youngmoduln, Zerlegung von Permutationsmoduln in Youngmoduln

$\lambda$	$M^\lambda \rightarrow$	$M^\lambda \cong$	$Y^\lambda \rightarrow$	$n$
$\alpha$	$S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$Y^\alpha \oplus \mathbf{1}$	$S^\alpha$	<i>ungerade</i>
			$S^\alpha \mid \mathbf{1}$	<i>gerade</i>
$\beta$	$S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$ und $S^\gamma \mid S^\alpha$	$Y^\beta \oplus Y^\alpha$	$S^\beta \mid \mathbf{1}$	$\equiv 1 \pmod{4}$
			$S^\beta \mid S^\alpha$	$\equiv 2 \pmod{4}$
			$S^\beta$	$\equiv 3 \pmod{4}$
			$S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$\equiv 0 \pmod{4}$
$\gamma$	$S^\gamma \mid S^\alpha \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$Y^\gamma \oplus 2 \cdot Y^\alpha$	$S^\gamma \mid \mathbf{1}$	$= 3$
			$S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$> 3$ , <i>ungerade</i>
$\zeta$	$S^\zeta \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$ und $S^\kappa \mid S^\gamma$	$Y^\zeta \oplus Y^\beta \oplus Y^\alpha$	$S^\zeta$	$\equiv 1 \pmod{4}$
			$S^\zeta \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$\equiv 2 \pmod{4}$
			$S^\zeta \mid S^\alpha$	$\equiv 3 \pmod{4}$
			$S^\zeta \mid S^\beta$	$\equiv 0 \pmod{4}$
$\vartheta$	$S^\vartheta \mid S^\beta \mid S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$(Y^\vartheta \oplus Y^\beta) \oplus (Y^\alpha \oplus Y^\alpha)$	$S^\vartheta \mid S^\gamma \mid S^\beta$	$= 5$
			$S^\vartheta \mid S^\beta \mid S^\gamma \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$> 5$ , $\equiv 1 \pmod{4}$
			$S^\vartheta$	$\equiv 2 \pmod{4}$
			$S^\vartheta \mid S^\gamma \mid S^\beta$	$\equiv 3 \pmod{4}$
$\kappa$	$S^\kappa \mid S^\beta \mid S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\gamma$	$S^\kappa \mid S^\gamma \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$	$= 4$
			$S^\kappa \mid S^\alpha$	$= 5$
			$S^\kappa \mid S^\zeta \mid S^\alpha$	$> 5$ , <i>ungerade</i>
		$Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\vartheta \oplus 2 \cdot Y^\gamma$		$> 4$ , <i>gerade</i>

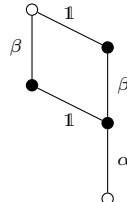
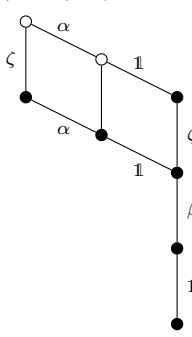
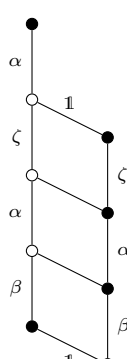
Tabelle 4.1.3 - Einschränkung

$\lambda$	$M^\lambda \downarrow \cong$	$S^\lambda \downarrow \rightarrow$	$Y^\lambda \downarrow \cong$	$D^\lambda \downarrow$	$n$
$\alpha$	$\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$	$\mathbb{1}$	$\mathbb{1} \oplus \mathbb{1}$	$\cong \mathbb{1}$	$= 2$
	$M^{\alpha-1} \oplus \mathbb{1}$	$S^{\alpha-1} \mid \mathbb{1}$	$Y^{\alpha-1}$	$\cong Y^{\alpha-1}$	<i>ungerade</i>
			$Y^{\alpha-1} \oplus 2 \cdot \mathbb{1}$	$\rightarrow D^{\beta+1} \mid D^{\beta+1}$ $\rightarrow D^{\beta+1} \mid \mathbb{1} \mid D^{\beta+1}$	$> 2, \equiv 2 \pmod{4}$ $\equiv 0 \pmod{4}$
$\beta$	$2 \cdot M^{\alpha-1}$	$S^{\alpha-1}$	$2 \cdot Y^{\alpha-1} \oplus 2 \cdot \mathbb{1}$	–	$= 4$
	$M^{\beta-1} \oplus M^{\alpha-1}$	$S^{\beta-1} \mid S^{\alpha-1}$	$Y^{\beta-1}$	$\rightarrow D^{\alpha-1} \mid D^{\alpha-1}$	$= 5$
			$Y^{\beta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}$	$\rightarrow D^{\alpha-1} \mid D^{\beta-1} \mid D^{\alpha-1}$ $\cong D^{\beta-1}$	$> 5, \equiv 1 \pmod{4}$ $\equiv 2 \pmod{4}$
$\gamma$	$3 \cdot M^{\alpha-1}$	$S^{\alpha-1}$	$Y^{\alpha-1}$	–	$= 3$
	$M^{\gamma-1} \oplus 2 \cdot M^{\alpha-1}$	$S^{\gamma-1} \mid S^{\alpha-1}$	$Y^{\gamma-1} \oplus Y^{\alpha-1}$	–	$> 3, \textit{ungerade}$
			$Y^{\gamma-1} \oplus 3 \cdot Y^{\alpha-1}$	–	<i>gerade</i>
$\zeta$	$2 \cdot M^{\beta-1}$	$S^{\beta-1}$	$2 \cdot Y^{\beta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}$	–	$= 6$
	$M^{\zeta-1} \oplus M^{\beta-1}$	$S^{\zeta-1} \mid S^{\beta-1}$	$Y^{\zeta-1}$	$\cong Y^{\zeta-1}$	$\equiv 1 \pmod{4}$
			$Y^{\zeta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\beta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}$	$\cong D^{\zeta-1}$ $\rightarrow D^{\beta-1} \mid D^{\zeta-1} \mid D^{\beta-1}$ $\cong D^{\zeta-1}$	$> 6, \equiv 2 \pmod{4}$ $\equiv 3 \pmod{4}$ $\equiv 0 \pmod{4}$
$\vartheta$	$2 \cdot M^{\gamma-1} \oplus M^{\beta-1}$	$S^{\gamma-1} \mid S^{\beta-1}$	$2 \cdot Y^{\gamma-1}$	–	$= 5$
	$M^{\vartheta-1} \oplus M^{\gamma-1} \oplus M^{\beta-1}$	$S^{\vartheta-1} \mid S^{\gamma-1} \mid S^{\beta-1}$	$Y^{\vartheta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1}$	$\cong D^{\vartheta-1} \oplus D^{\beta-1}$ $\cong Y^{\vartheta-1}$	$> 5, \textit{ungerade}$ <i>gerade</i>
$\kappa$	$4 \cdot M^{\gamma-1}$	$S^{\gamma-1}$	$2 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}$	–	$= 4$
	$M^{\kappa-1} \oplus 3 \cdot M^{\gamma-1}$	$S^{\kappa-1} \mid S^{\gamma-1}$	$Y^{\kappa-1} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1}$	–	<i>ungerade</i>
			$Y^{\kappa-1} \oplus Y^{\gamma-1}$	–	$> 4, \textit{gerade}$

Tabelle 4.1.4 - Induktion

$\lambda$	$M^{\lambda} \cong$	$S^{\lambda} \rightarrow$	$Y^{\lambda} \cong$	$D^{\lambda}$	$n$
$\alpha$	$M^{(1^3)}$	$S^{(1^3)} \mid S^{\alpha+1}$	$Y^{(1^3)} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}$	–	$= 2$
	$M^{\gamma+1}$	$S^{\gamma+1} \mid S^{\beta+1} \mid S^{\alpha+1}$	$Y^{\gamma+1}$	$\cong Y^{\gamma+1}$	<i>ungerade</i>
			$Y^{\gamma+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}$	$\rightarrow D^{\beta+1} \mid D^{\beta+1}$	$> 2, \equiv 2 \pmod{4}$
$\beta$			$Y^{\gamma+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}$	$\rightarrow D^{\beta+1} \mid \mathbf{1} \mid D^{\beta+1}$	$\equiv 0 \pmod{4}$
	$M^{(2^2,1)}$	$S^{(2^2,1)} \mid S^{\beta+1}$	$Y^{(2^2,1)} \oplus Y^{\beta+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}$	–	$= 4$
	$M^{\theta+1}$	$S^{\theta+1} \mid S^{\zeta+1} \mid S^{\beta+1}$	$Y^{\theta+1} \oplus Y^{\zeta+1}$	$\rightarrow (D^{\beta+1} \mid D^{\beta+1}) \oplus D^{\theta+1}$	$= 5$
			$Y^{\theta+1} \oplus Y^{\zeta+1} \oplus Y^{\beta+1}$	$\rightarrow (D^{\beta+1} \mid D^{\zeta+1} \mid D^{\beta+1}) \oplus D^{\theta+1}$	$> 5, \equiv 1 \pmod{4}$
			$Y^{\theta+1} \oplus Y^{\zeta+1} \oplus Y^{\beta+1}$	$\cong D^{\zeta+1} \oplus D^{\theta+1}$	$\equiv 2 \pmod{4}$
$\gamma$	$M^{(1^4)}$	$S^{(1^4)} \mid S^{\gamma+1}$	$Y^{(1^4)}$	–	$= 4$
	$M^{\kappa+1}$	$S^{\kappa+1} \mid S^{\vartheta+1} \mid S^{\gamma+1}$	$Y^{\kappa+1} \oplus 2 \cdot Y^{\theta+1}$	–	$> 4$
			$Y^{\theta+1} \oplus Y^{\zeta+1} \oplus Y^{\beta+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}$	$\cong D^{\zeta+1} \oplus D^{\theta+1}$	$> 4, \equiv 0 \pmod{4}$

Tabelle 4.1.5 - Untermodulverbände von Spechtmoduln  $S^\lambda$

$\lambda$	$n \equiv 1 \pmod{4}$	$n \equiv 2 \pmod{4}$	$n \equiv 3 \pmod{4}$	$n \equiv 0 \pmod{4}$
$\alpha$	$D^\alpha$	$n = 2 : \mathbb{1}$ $n > 2 : \mathbb{1} \mid D^\alpha$	$D^\alpha$	$\mathbb{1} \mid D^\alpha$
$\beta$	$\mathbb{1} \mid D^\beta$	$D^\alpha \mid \mathbb{1} \mid D^\beta$	$D^\beta$	$n = 4 : D^\alpha$ $n > 4 : D^\alpha \mid D^\beta$
$\gamma$	$\mathbb{1} \mid D^\beta \mid \mathbb{1}$	$D^\alpha \mid \mathbb{1} \mid D^\beta \mid \mathbb{1}$	$n = 3 : \mathbb{1}$ $n > 3 : \mathbb{1} \oplus D^\beta$	$n = 4 : D^\alpha \mid \mathbb{1}$ $n > 4 :$ 
$\zeta$	$D^\zeta$	$n = 6 : \mathbb{1} \mid D^\beta$ $n > 6 : \mathbb{1} \mid D^\beta \mid D^\zeta$	$D^\alpha \mid D^\zeta$	$D^\beta \mid D^\alpha \mid D^\zeta$
$\vartheta$	$n = 5 : D^\beta \mid \mathbb{1}$ $n > 5 : D^\beta \mid \mathbb{1} \mid D^\vartheta$	$D^\vartheta$	$D^\beta \mid \mathbb{1} \mid D^\vartheta$	$D^\vartheta$
$\kappa$	$n = 5 : D^\alpha$ $n > 5 : D^\alpha \oplus D^\zeta$	$n = 6 : \mathbb{1} \mid D^\beta \mid \mathbb{1} \mid D^\alpha$ $n > 6 :$ 	$D^\alpha \mid D^\zeta \mid D^\alpha$	$n = 4 : \mathbb{1}$ $n > 4 :$ 

Zusatzinformationen

$n = 2$	$S^\alpha = \text{sgn}_{2, \mathbb{F}_2}$	$n = 4$	$\gamma = \alpha' \Rightarrow S^\gamma \cong S^{\alpha^*}$	$n \geq 4$	$S^\gamma \rightarrow S^\beta \mid \mathbb{1}$
$n = 3$	$S^\gamma = \text{sgn}_{3, \mathbb{F}_2}$	$n = 5$	$\vartheta = \beta' \Rightarrow S^\vartheta \cong S^{\beta^*}$	$n \geq 6$	$S^\kappa \rightarrow S^\zeta \mid S^\alpha$
$n = 4$	$S^\kappa = \text{sgn}_{4, \mathbb{F}_2}$	$n = 6$	$\kappa = \gamma' \Rightarrow S^\kappa \cong S^{\gamma^*}$		

$n$ ungerade	$n \equiv 2 \pmod{4}$	$n \equiv 0 \pmod{4}$
$S^{\beta^*} \hookrightarrow S^\vartheta$	$S^{\alpha^*} \hookrightarrow S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$	$S^{\alpha^*} \hookrightarrow S^\gamma$
$S^\gamma \cong S^{\gamma^*}$	$S^\beta / D^\alpha \hookrightarrow S^{\gamma^*} \hookrightarrow S^\kappa$	$S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$
$S^\kappa \cong S^{\kappa^*}$	$S^\beta / D^\alpha \hookrightarrow S^\zeta$ ( $n = 6 : S^\beta / D^\alpha \cong S^\zeta$ )	$S^{\beta^*} \hookrightarrow S^\zeta$

Als Nächstes werden die Untermodulverbände der hier betrachteten Youngmoduln  $Y^\lambda$  beschrieben. Die Spechtreihen der Youngmoduln aus Tabelle 4.1.2 werden noch einmal angegeben und im Untermodulverband markiert: im Hasse-Diagramm durch eckige Knoten und (bei Uniserialität) in der Kompositionsreihe durch Doppelstriche. Eine Markierung der zugehörigen dualen Spechtreihe wird der Übersichtlichkeit wegen unterlassen. Sie kann aber durch Umkehren des Diagramms bzw. der Kompositionsreihe problemlos identifiziert werden und gibt so Aufschluss über die genauen Isomorphietypen weiterer Unter-Faktormoduln. Informationen über Unter-Faktormoduln, die dadurch noch nicht abgedeckt sind, werden gegebenenfalls ergänzt. Dabei werden verschiedene Informationen aus Tabelle 4.1.5 über Untermoduln von Spechtmoduln noch einmal wiederholt.

**Die Struktur von  $Y^\alpha$**

$n$ ungerade	$Y^\alpha = S^\alpha = D^\alpha$
$n$ gerade	$Y^\alpha = M^\alpha \rightarrow \begin{cases} \mathbb{1} \parallel \mathbb{1} & \text{für } n = 2, \\ \mathbb{1} \mid D^\alpha \parallel \mathbb{1} & \text{für } n > 2. \end{cases}$

**Die Struktur von  $Y^\beta$**

$n \bmod 4$	Spechtreihe	Verband	Sonstiges
1	$S^\beta \mid \mathbb{1}$	$\mathbb{1} \mid D^\beta \parallel \mathbb{1}$	$Y^\beta \cong S^\gamma$
2	$S^\beta \mid S^\alpha$	$D^\alpha \mid \mathbb{1} \mid D^\beta \parallel \mathbb{1} \mid D^\alpha$	$S^{\alpha*} \hookrightarrow S^\beta \hookrightarrow S^\gamma \hookrightarrow Y^\beta$
3	$S^\beta$	$D^\beta$	
0	$S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbb{1}$		$Y^\beta = M^\beta$ $S^{\alpha*} \hookrightarrow S^\gamma \hookrightarrow Y^\beta$

$\alpha = (n - 1, 1), \beta = (n - 2, 2), \gamma = (n - 2, 1^2), \zeta = (n - 3, 3), \vartheta = (n - 3, 2, 1), \kappa = (n - 3, 1^3).$

**Die Struktur von  $Y^\gamma$**

Für  $n = 3$  ist  $S^\gamma = \text{sgn}_3 \cong \mathbf{1}$  und  $Y^\gamma \rightarrow \mathbf{1} \parallel \mathbf{1}$ . Für  $n > 3$  gilt:

$n \bmod 4$	Spechtreihe	Verband	Sonstiges
1	$S^\gamma \mid S^\beta \mid \mathbf{1}$	$\mathbf{1} \mid D^\beta \mid \mathbf{1} \parallel \mathbf{1} \mid D^\beta \parallel \mathbf{1}$	$S^\gamma \cong Y^\beta$ $S^{\alpha-1} \uparrow / D^\alpha \cong Y^\gamma / \mathbf{1}$ $D^{\alpha-1} \uparrow \hookrightarrow Y^\gamma / \mathbf{1}$
2	$S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha$	$D^\alpha \mid \mathbf{1} \mid D^\beta \mid \mathbf{1} \parallel D^\alpha \mid \mathbf{1} \mid D^\beta \parallel \mathbf{1} \mid D^\alpha$	$S^{\alpha*} \hookrightarrow S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$ $S^\gamma \hookrightarrow Y^\beta \hookrightarrow Y^\gamma$ $S^\beta / D^\alpha \hookrightarrow S^{\gamma*}$ $Y^\alpha \not\hookrightarrow Y^\gamma / S^\beta$
3	$S^\gamma \mid S^\beta \mid \mathbf{1}$		$S^{\alpha-1} \uparrow / D^\alpha \cong Y^\gamma / \mathbf{1}$ $D^{\alpha-1} \uparrow \hookrightarrow Y^\gamma / \mathbf{1}$
0	$S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha$		$S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$ $S^{\alpha*} \hookrightarrow S^\gamma$ $S^\beta \hookrightarrow D^{\beta+1} \downarrow \hookrightarrow Y^\gamma$

**Die Struktur von  $Y^\zeta$**

$n \bmod 4$	Spechtreihe	Verband	Sonstiges
1	$S^\zeta$	$D^\zeta$	
3	$S^\zeta \mid S^\alpha$	$D^\alpha \mid D^\zeta \parallel D^\alpha$	$Y^\zeta \cong S^\kappa$
0	$S^\zeta \mid S^\beta$	$D^\beta \mid D^\alpha \mid D^\zeta \parallel D^\alpha \mid D^\beta$	$S^{\beta*} \hookrightarrow S^\zeta$ $S^\kappa / \mathbf{1} \hookrightarrow Y^\zeta$

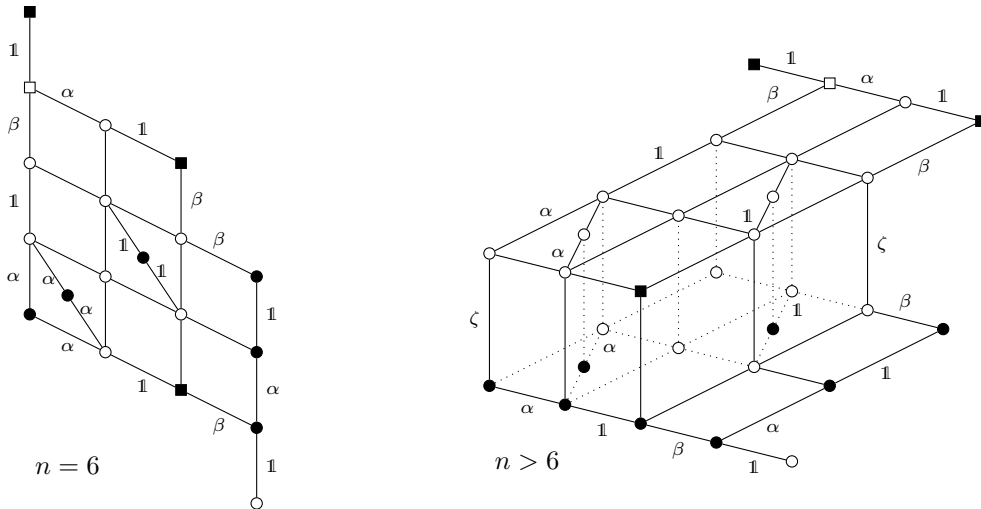
Den Fall  $n \bmod 4 = 2$  betrachten wir aus Platzgründen separat: Wir erhalten wegen  $Y^\zeta = M^\zeta$  die Spechtreihen

$$Y^\zeta \rightarrow \begin{cases} S^\zeta \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1} \\ S^\kappa \mid S^\gamma \end{cases}$$

sowie die zugehörigen dualen Spechtreihen. Darüber hinaus wissen wir Folgendes:

- $S^\beta/D^\alpha \hookrightarrow S^\zeta$
- $S^{\beta-1}\uparrow/D^\vartheta \hookrightarrow Y^\zeta$
- $Y^\zeta/(S^{\beta-1}\uparrow/D^\vartheta) \cong Y^\alpha$
- $Y^\alpha \hookrightarrow Y^\zeta$
- $S^\zeta/\mathbb{1} \hookrightarrow D^{\beta-1}\uparrow/D^\vartheta \hookrightarrow Y^\zeta/Y^\alpha$

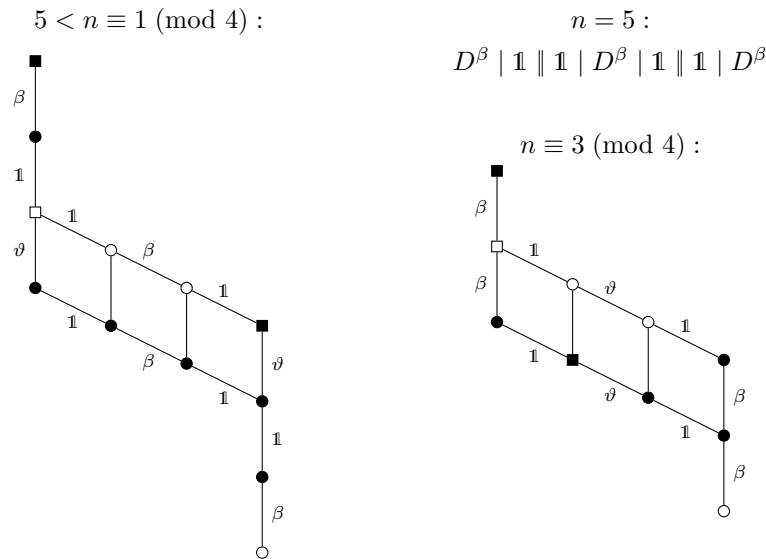
Der Untermodulverband von  $Y^\zeta$  hat die folgende Gestalt:



(Die gepunkteten Linien im Hasse-Diagramm für  $n > 6$  haben keine andere Bedeutung als die durchgezogenen. Auch die dadurch erzeugte dreidimensionale Wirkung hat keine inhaltliche Bedeutung. Dadurch soll lediglich die Lesbarkeit verbessert werden.)

### Die Struktur von $Y^\vartheta$

Für gerades  $n$  ist  $Y^\vartheta \cong S^\vartheta \cong D^\vartheta$ . Der Untermodulverband von  $Y^\vartheta$  bei ungeradem  $n$  ist gegeben durch:



Die markierten Spechtreihen sind  $Y^\vartheta \rightarrow S^\vartheta | S^\gamma | S^\beta$ . Des Weiteren gibt es für ungerades  $n$  eine Einbettung  $Y^\gamma/\mathbb{1} \hookrightarrow Y^\vartheta$ .

---

$\alpha = (n-1, 1)$ ,  $\beta = (n-2, 2)$ ,  $\gamma = (n-2, 1^2)$ ,  $\zeta = (n-3, 3)$ ,  $\vartheta = (n-3, 2, 1)$ ,  $\kappa = (n-3, 1^3)$ .



Die Struktur von  $Y^\kappa$

$n$	Spechtreihe	Verband
$= 4$	$S^\kappa \mid S^\gamma \mid S^\alpha \mid \mathbb{1}$	
$= 5$	$S^\kappa \mid S^\alpha$	$D^\alpha \parallel D^\alpha$
$\equiv 1 \pmod{4}, > 5$	$S^\kappa \mid S^\zeta \mid S^\alpha$	
$\equiv 3 \pmod{4}$		$D^\alpha \mid D^\zeta \mid D^\alpha \parallel D^\alpha \mid D^\zeta \parallel D^\alpha$

Die Struktur von  $Y^\kappa$  für gerades  $n > 4$  ist deutlich komplexer, darum übergehen wir sie hier.

Bei den hier betrachteten Partitionen  $\lambda \vdash n$  konnten die Untermodulverbände der Youngmoduln in Abhängigkeit von der Kongruenz modulo 4 von  $n$  angegeben werden (bzw. für  $\lambda = \alpha$  Kongruenz modulo 2). An manchen Stellen war jedoch eine weitere Fallunterscheidung nötig: In gewissen Situationen hat  $Y^\lambda$  zwar für hinreichend großes  $n$  einer bestimmten Kongruenz immer das gleiche Hasse-Diagramm. Falls aber  $n$  zu klein ist, können im Vergleich zu größerem  $n$  von gleicher Kongruenz gewisse irreduzible Kompositionsfaktoren entfallen, weil sie schlicht nicht definiert sind. (Konkret betrifft das die Youngmoduln zu  $\alpha \vdash 2, \beta \vdash 4, \gamma \vdash 4, \zeta \vdash 6, \vartheta \vdash 5$  und  $\kappa \vdash 5$ .) In einer solchen Situation erhält man (zumindest bei den hier betrachteten Youngmoduln) das Hasse-Diagramm zum kleinen  $n$  aus dem zu den größeren  $n$  gleicher Kongruenz, indem man die nicht definierten Kanten entfernt und jeweils die beiden Knoten, die durch eine solche Kante verbunden sind, zu einem einzigen Knoten "verklebt".

Zu guter Letzt werden noch die Isomorphietypen der Kohomologiegruppen in den Graden  $i \in \{0, 1, 2\}$  angegeben, soweit sie bekannt sind. Die Zeilen der entsprechenden Tabellen sind durch  $i \in \{0, 1, 2\}$  gekennzeichnet und die Spalten durch  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln  $V$ . In Zeile  $i$  und Spalte  $V$  steht dann  $\dim_{\mathbb{F}_2}(H^i(S_n, V))$ . Manche Einträge sind kursiv gedruckt, andere normal. Ein normaler Eintrag deutet darauf hin, dass die betreffende Kohomologie schon vorher bekannt war, oder dass sie zumindest durch "einfache" Isomorphismen (beispielsweise via Eckmann-Shapiro) mehr oder weniger direkt auf bekannte Kohomologien zurückgeführt kann. Bei den kursiven Einträgen erfolgt die Bestimmung der Kohomologie über die geschickte Vernetzung geeigneter exakter Kohomologie-Sequenzen. Fehlende Einträge bedeuten einfach, dass die entsprechende Kohomologie mit den hier verwendeten Methoden nicht ermittelt werden konnte.

**Kohomologie zur Partition  $\alpha$** 

Wegen  $H^i(S_n, M^\alpha) \cong H^i(S_{n-1}, \mathbb{1})$  für alle  $n \geq 2$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist die Kohomologie von  $M^\alpha$  für  $i \in \{0, 1, 2\}$  bekannt. Für ungerades  $n$  liegt  $\alpha$  nicht im Hauptblock. Für gerades  $n \geq 2$  sind folgende Kohomologien bekannt.

$n = 2 :$	$n = 4 :$	$n > 4 :$																																																				
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>S^\alpha</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\alpha</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> </tr> </tbody> </table>		$S^\alpha$	$Y^\alpha$	0	1	1	1	1	0	2	1	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>D^\alpha</math></th> <th style="border: none;"><math>S^\alpha</math></th> <th style="border: none;"><math>S^{\alpha*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\alpha</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> </tbody> </table>		$D^\alpha$	$S^\alpha$	$S^{\alpha*}$	$Y^\alpha$	0	0	1	0	1	1	1	2	1	1	2	1	2	2	1	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>D^\alpha</math></th> <th style="border: none;"><math>S^\alpha</math></th> <th style="border: none;"><math>S^{\alpha*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\alpha</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">3</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">2</td> </tr> </tbody> </table>		$D^\alpha$	$S^\alpha$	$S^{\alpha*}$	$Y^\alpha$	0	0	1	0	1	1	1	2	0	1	2	1	3	0	2
	$S^\alpha$	$Y^\alpha$																																																				
0	1	1																																																				
1	1	0																																																				
2	1	0																																																				
	$D^\alpha$	$S^\alpha$	$S^{\alpha*}$	$Y^\alpha$																																																		
0	0	1	0	1																																																		
1	1	2	1	1																																																		
2	1	2	2	1																																																		
	$D^\alpha$	$S^\alpha$	$S^{\alpha*}$	$Y^\alpha$																																																		
0	0	1	0	1																																																		
1	1	2	0	1																																																		
2	1	3	0	2																																																		

Dabei ist zu beachten: Für  $n = 2$  ist  $S^\alpha = \text{sgn}_{2, \mathbb{F}_2} \cong \mathbb{1} \cong S^{\alpha*}$ . Für jedes gerade  $n$  ist  $Y^\alpha = M^\alpha$ . Des Weiteren gilt für ungerades  $n$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$ , dass  $H^i(S_n, M^\alpha) \cong H^i(S_{n+1}, M^{\alpha+1})$  ist.

**Kohomologie zur Partition  $\beta$** 

$n = 4 :$	$n \equiv 1 \pmod{4} :$	$n \equiv 2 \pmod{4} :$																																																																		
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>S^\beta \cong S^{\beta*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\beta = M^\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">3</td> </tr> </tbody> </table>		$S^\beta \cong S^{\beta*}$	$Y^\beta = M^\beta$	0	0	1	1	1	2	2	1	3	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>D^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>S^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>S^{\beta*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>M^\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">2</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">3</td> <td style="border: none;">3</td> </tr> <tr> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">4</td> <td style="border: none;">4</td> </tr> </tbody> </table>		$D^\beta$	$S^\beta$	$S^{\beta*}$	$Y^\beta$	$M^\beta$	0	0	1	0	1	1	1	1	2	1	2	2	2	0	2	2	3	3					4	4	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>D^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>S^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>S^{\beta*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>M^\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">4</td> </tr> </tbody> </table>		$D^\beta$	$S^\beta$	$S^{\beta*}$	$Y^\beta$	$M^\beta$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2				2	4
	$S^\beta \cong S^{\beta*}$	$Y^\beta = M^\beta$																																																																		
0	0	1																																																																		
1	1	2																																																																		
2	1	3																																																																		
	$D^\beta$	$S^\beta$	$S^{\beta*}$	$Y^\beta$	$M^\beta$																																																															
0	0	1	0	1	1																																																															
1	1	2	1	2	2																																																															
2	0	2	2	3	3																																																															
				4	4																																																															
	$D^\beta$	$S^\beta$	$S^{\beta*}$	$Y^\beta$	$M^\beta$																																																															
0	0	0	0	0	1																																																															
1	1	1	1	1	2																																																															
2				2	4																																																															
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>D^\beta = S^\beta = Y^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>M^\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">4</td> </tr> </tbody> </table>		$D^\beta = S^\beta = Y^\beta$	$M^\beta$	0	0	1	1	1	2	2	2	4	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>D^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>S^\beta</math></th> <th style="border: none;"><math>S^{\beta*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\beta = M^\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;"></td> <td style="border: none;">4</td> </tr> </tbody> </table>		$D^\beta$	$S^\beta$	$S^{\beta*}$	$Y^\beta = M^\beta$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2				4																																			
	$D^\beta = S^\beta = Y^\beta$	$M^\beta$																																																																		
0	0	1																																																																		
1	1	2																																																																		
2	2	4																																																																		
	$D^\beta$	$S^\beta$	$S^{\beta*}$	$Y^\beta = M^\beta$																																																																
0	0	0	0	1																																																																
1	1	1	1	2																																																																
2				4																																																																

Für ungerades  $n$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, Y^\beta) \cong H^i(S_{n-1}, Y^{\beta-1})$ .

**Kohomologie zur Partition  $\gamma$** 

$n = 3 :$	$n = 4 :$																																				
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>S^\gamma \cong S^{\gamma*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\gamma</math></th> <th style="border: none;"><math>M^\gamma</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> </tr> </tbody> </table>		$S^\gamma \cong S^{\gamma*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$	0	1	1	1	1	1	0	0	2	1	0	0	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th style="border: none;"></th> <th style="border: none;"><math>S^\gamma</math></th> <th style="border: none;"><math>S^{\gamma*}</math></th> <th style="border: none;"><math>Y^\gamma</math></th> <th style="border: none;"><math>M^\gamma</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">1</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> <tr> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">2</td> <td style="border: none;">0</td> <td style="border: none;">1</td> </tr> </tbody> </table>		$S^\gamma$	$S^{\gamma*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$	0	0	1	0	1	1	1	2	0	1	2	2	2	0	1
	$S^\gamma \cong S^{\gamma*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$																																		
0	1	1	1																																		
1	1	0	0																																		
2	1	0	0																																		
	$S^\gamma$	$S^{\gamma*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$																																	
0	0	1	0	1																																	
1	1	2	0	1																																	
2	2	2	0	1																																	

$n \equiv 1 \pmod{4}$  :

	$S^\gamma \cong S^{\gamma^*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$	
0	1	1	1	
1	2	1	1	
2	3	1	1	$n = 5$
	4	2	2	$n > 5$

$n \equiv 2 \pmod{4}$  :

	$S^\gamma$	$S^{\gamma^*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$	
0	0	1	0	1	
1	0	2	0	1	
2	1	3	0	2	$n = 6$
	1		0	2	$n > 6$

$3 < n \equiv 3 \pmod{4}$  :

	$S^\gamma \cong S^{\gamma^*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$
0	1	1	1
1	2	1	1
2	4	2	2

$4 < n \equiv 0 \pmod{4}$  :

	$S^\gamma$	$S^{\gamma^*}$	$Y^\gamma$	$M^\gamma$
0	0	1	0	1
1	1	2	0	1
2	2		0	2

Dabei ist zu beachten: Für  $n = 3$  ist  $S^\gamma = \text{sgn}_{3, \mathbb{F}_2} \cong \mathbf{1} \cong S^{\gamma^*}$ . Für  $n = 4$  ist die Kohomologie von  $S^\gamma$  und  $S^{\gamma^*}$  wegen  $\gamma = \alpha'$  von oben bekannt.

Weiterhin gilt: Für gerades  $n$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, Y^\gamma) = 0$ .

### Kohomologie zur Partition $\zeta$

Die Kohomologie von  $M^\zeta$  ergibt sich aus Beispiel 2.1.17. Für ungerades  $n$  liegt  $\zeta$  nicht im Hauptblock. Für gerades  $n \geq 6$  sind folgende Kohomologien bekannt.

$n \equiv 2 \pmod{4}$  :

	$D^\zeta$	$S^\zeta$	$S^{\zeta^*}$	$Y^\zeta = M^\zeta$	
0	0	1	0	1	
1				2	
2	-	3	1	3	$n = 6$
				4	$n > 6$

$n \equiv 0 \pmod{4}$  :

	$D^\zeta$	$S^\zeta$	$S^{\zeta^*}$	$Y^\zeta$	$M^\zeta$
0	0	0	0	0	1
1		1		1	2
2				2	4

Für  $n = 6$  ist zu beachten, dass  $D^\zeta$  nicht definiert ist. Für gerades  $n$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, Y^\zeta) \cong H^i(S_{n-1}, Y^{\beta-1})$ .

### Kohomologie zur Partition $\vartheta$

Die Kohomologie von  $M^\vartheta$  ist wegen  $H^i(S_n, M^\vartheta) \cong H^i(S_{n-1}, M^{\beta-1})$  für alle  $n \geq 5$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  von oben bekannt. Für gerades  $n$  liegt  $\vartheta$  nicht im Hauptblock. Für ungerades  $n \geq 5$  sind folgende Kohomologien bekannt.

$n = 5$  :

	$S^\vartheta$	$S^{\vartheta^*}$	$Y^\vartheta$	$M^\vartheta$
0	0	1	0	1
1	1	2	0	2
2	2	2	0	3

$n > 5$  :

	$D^\vartheta$	$S^\vartheta$	$S^{\vartheta^*}$	$Y^\vartheta$	$M^\vartheta$
0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	0	2
2		2		0	4

Für ungerades  $n$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, D^\vartheta) \cong H^i(S_{n-1}, D^{\beta-1})$  und  $H^i(S_n, Y^\vartheta) = 0$ .

### Kohomologie zur Partition $\kappa$

Wegen  $H^i(S_n, M^\kappa) \cong H^i(S_{n-3}, \mathbb{1})$  für alle  $n \geq 4$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist die Kohomologie von  $M^\kappa$  für  $i \in \{0, 1, 2\}$  bekannt. Für ungerades  $n$  liegt  $\kappa$  nicht im Hauptblock. Für gerades  $n \geq 4$  sind folgende Kohomologien bekannt.

$n = 4 :$	$n = 6 :$
$\begin{array}{c c c c} S^\kappa \cong S^{\kappa^*} & Y^\kappa & M^\kappa \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} S^\kappa & S^{\kappa^*} & Y^\kappa & M^\kappa \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}$
$4 < n \equiv 0 \pmod{4} :$	$6 < n \equiv 2 \pmod{4} :$
$\begin{array}{c c c c} S^\kappa & S^{\kappa^*} & Y^\kappa & M^\kappa \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & 2 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{c c c c} S^\kappa & S^{\kappa^*} & Y^\kappa & M^\kappa \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & & 1 & 1 \\ \hline 2 & & & 2 & 2 \end{array}$

Dabei ist zu beachten: Für  $n = 4$  ist  $S^\kappa = \text{sgn}_{4, \mathbb{F}_2} \cong \mathbb{1} \cong S^{\kappa^*}$ . Für  $n = 6$  ist die Kohomologie von  $S^\kappa$  und  $S^{\kappa^*}$  wegen  $\kappa = \gamma'$  von oben bekannt.

Weiterhin gilt: Für gerades  $n \geq 4$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, Y^\kappa) \cong H^i(S_n, M^\kappa)$ , und für gerades  $n \geq 6$  ist  $H^1(S_n, S^{\kappa^*}) \cong H^1(S_n, S^{\zeta^*})$ .

## 4.2 Beweise

Die Beweise folgen, wie angekündigt, einer anderen Chronologie als die Aussagen in Abschnitt 4.1. Wir werden immer wieder auf gewisse Standard-Argumente zurückgreifen, die auf mehr oder weniger bekannten Aussagen basieren. Diese sollen hier zu Anfang in einer Zusammenfassung vorgestellt werden. Im weiteren Verlauf sollte ihre Anwendung selbsterklärend sein, so dass sie nicht jedes Mal ausdrücklich zitiert oder referenziert werden müssen.

Es sei  $G$  eine endliche Gruppe und  $R$  ein Integritätsbereich. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass  $V$  und  $W$  zwei  $RG$ -Moduln sind, schreiben wir kurz:

$$\text{Hom}(V, W) \quad := \quad \text{Hom}_{RG}(V, W).$$

Da wir ausschließlich Gruppenalgebren-Homomorphismengruppen betrachten, sollte diese Abkürzung zu keinen Missverständnissen führen.

- **Frobenius-Reziprozität** [[CR81], Theorem 10.8, Proposition 10.21]:

Es sei  $U \leq G$  eine Untergruppe. Für jeden  $RG$ -Modul  $V$  und jeden  $RU$ -Modul  $W$  existieren  $R$ -Modul-Homomorphismen

$$\text{Hom}(W, V \downarrow_U) \cong \text{Hom}(W \uparrow^G, V),$$

$$\text{Hom}(V \downarrow_U, W) \cong \text{Hom}(V, W \uparrow^G).$$

- Es seien  $V$  und  $W$  zwei  $RG$ -Gitter. Mit dem Homomorphiesatz gilt für  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ , dass  $V/\text{Kern}(\varphi) \cong \text{Bild}(\varphi)$  ist. Umgekehrt gilt: Wenn  $V$  ein reines Untergitter  $V'$  besitzt, so dass  $V/V'$  isomorph zu einem Untergitter  $W'$  von  $W$  ist, so lässt sich dieser Isomorphismus kanonisch fortsetzen zu einem  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$ . Daraus folgt:

$$\text{Hom}(V/V', W') \quad \leftrightarrow \quad \text{Hom}(V, W).$$

Notwendige Voraussetzung dafür, dass ein Untergitter von  $W$  das Bild eines  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  ist, ist, dass sein Hasse-Diagramm mit dem eines Faktormoduls von  $V$  übereinstimmt. Entsprechend ist eine notwendige Voraussetzung dafür, dass ein Untergitter von  $V$  der Kern eines  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  ist, dass das Hasse-Diagramm des zugehörigen Faktormoduls mit dem eines Untergitters von  $W$  übereinstimmt. Daraus ergibt sich: Wenn ein  $W' \leq W$  und ein  $V' \leq V$  existieren, so dass einerseits jedes Untergitter von  $W$ , dessen Hasse-Diagramm mit dem eines Faktormoduls von  $V$  übereinstimmt, in  $W'$  liegt und andererseits jedes Untergitter von  $V$ , bei dem das Hasse-Diagramm des Faktormoduls mit dem eines Untergitters von  $W$  übereinstimmt,  $V'$  enthält, dann ist sogar  $\text{Hom}(V/V', W') \cong \text{Hom}(V, W)$ .

- Es seien  $U, V$  und  $W$   $RG$ -Moduln. Dann existieren kanonische  $R$ -Modul-Homomorphismen

$$\text{Hom}(V \oplus U, W) \cong \text{Hom}(V, W) \oplus \text{Hom}(U, W),$$

$$\text{Hom}(V, W \oplus U) \cong \text{Hom}(V, W) \oplus \text{Hom}(V, U).$$

- Es sei  $(K, R, k)$  ein  $p$ -modulares System, und für  $\Theta \in \{R, k\}$  seien  $V$  und  $W$  zwei  $\Theta G$ -Moduln, die in unterschiedlichen  $p$ -Blöcken liegen. Dann ist  $\text{Hom}(V, W) = 0$ . Das ergibt sich aus dem Homomorphiesatz und der Tatsache, dass alle Untermoduln und alle Faktormoduln eines unzerlegbaren Moduls zum gleichen Block gehören wie der Modul selbst.
- Es seien  $U$  und  $H$  endliche Gruppen mit  $U \leq G \leq H$  und  $V$  ein  $RG$ -Gitter. Aus der Definition von Einschränkung und Induktion ergibt sich unmittelbar:

$$\text{Rang}_R(V \downarrow_U^G) = \text{Rang}_R(V), \quad \text{Rang}_R(V \uparrow_G^H) = [H : G] \cdot \text{Rang}_R(V).$$

Für jedes reine  $RG$ -Untergitter  $W \leq V$  existieren ein kanonischer  $RU$ - sowie ein kanonischer  $RH$ -Modul-Isomorphismus

$$(V/W) \downarrow_U^G \cong V \downarrow_U^G / W \downarrow_U^G, \quad (V/W) \uparrow_G^H \cong V \uparrow_G^H / W \uparrow_G^H.$$

Mit [CR81], Proposition 10.28, gibt es einen  $RH$ -Modul-Isomorphismus  $(V \uparrow_G^H)^* \cong (V^*) \uparrow_G^H$ . Ebenso gibt es einen kanonischen  $RU$ -Modul-Isomorphismus  $(V \downarrow_U^G)^* \cong (V^*) \downarrow_U^G$ .

- Es sei  $R$  ein Zerfällungskörper für  $G$ , und  $S$  sei ein einfacher  $RG$ -Modul. Mit [CR81], Proposition 7.15, ist dann  $\text{End}_{RG}(S) \cong \langle \text{id}_S \rangle_R$ , das heißt, es ist  $\dim_R(\text{Hom}(S, S)) = 1$ . Daraus folgt für jeden  $RG$ -Modul  $V$ , dass einerseits  $\dim_R(\text{Hom}(S, V)) = [\text{soc}(V) : S]$  ist und andererseits  $\dim_R(\text{Hom}(V, S)) = [\text{hd}(V) : S]$ . Daraus wiederum folgt: Wenn  $A$  und  $B$  zwei  $RG$ -Moduln sind mit  $\text{hd}(A) \cong S \cong \text{soc}(B)$  und  $\dim(\text{Hom}(A, B)) > 1$ , dann gibt es einen nichttriviale  $\varphi \in \text{Hom}(A, B)$  mit  $\text{Bild}(\varphi) \not\cong S$ .

Außerdem werden wir regelmäßig die Aussagen zu Spechtreihen, dualen Spechtreihen und Kompositionsreihen aus Abschnitt 1.3 verwenden, ebenso die Verzweigungsregeln aus Abschnitt 1.4. Bei den Spechtreihen von eingeschränkten und induzierten Spechtmoduln werden wir häufig die Spechtfaktoren nach Blöcken sortiert zusammenfassen, also zum Beispiel:

$$S^{\beta-1} \uparrow \longrightarrow S^\vartheta \mid S^\zeta \mid S^\beta \longrightarrow \begin{cases} S^\vartheta \oplus (S^\zeta \mid S^\beta) & \text{für gerades } n, \\ S^\zeta \oplus (S^\vartheta \mid S^\beta) & \text{für ungerades } n. \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, dass damit lediglich Spechtreihen der einzelnen Blockanteile angegeben sind. Es ist noch keine Aussage über die Anzahl der direkten Summanden des betreffenden eingeschränkten oder induzierten Spechtmoduls getroffen.

Schließlich sei noch einmal daran erinnert, dass mit Satz 1.2.7 jeder Youngmodul selbstdual ist. Dieser Sachverhalt wird im Folgenden immer wieder verwendet werden.

### 4.2.1 Der triviale Modul und die Partition $\alpha$

Viele der späteren Argumentationsgänge basieren darauf, neue Aussagen über eine Partition auf bereits bekannte Aussagen über lexikografisch größere Partitionen zurückzuführen. Dabei dienen  $(n)$  und  $\alpha$  gewissermaßen als “Induktionsanfang“, darum behandeln wir sie vorab. Viele Standard-Argumente greifen zwar auch hier, aber gerade was die Kohomologie angeht, muss man teilweise noch auf andere Methoden zurückgreifen. Die betreffenden Aussagen sind allerdings schon länger bekannt, so dass wir hier nur noch zu zitieren brauchen.

Über den Aufbau des trivialen Moduls gibt es nichts zu sagen, auch Einschränkung und Induktion sind klar. Es bleibt nur festzuhalten, woher wir seine Kohomologie kennen. Für  $n = 1$  ist  $S_n$  die triviale Gruppe, und die Kohomologie ergibt sich aus [Wei94], Example 6.1.3. Nun sei  $n \geq 2$ . Die 0-te Kohomologie ist klar, und die erste Kohomologie können wir zum Beispiel mit Lemma 2.2.1 und der Kohomologie über  $\mathbb{Z}$  begründen: Es ist  $d_1^{(n)} = x_1^{(n)} + x_2^{(n)} = 0 + 1 = 1$ . Für  $n = 2$  ist  $S_n$  zyklisch, und wir erhalten die zweite Kohomologie aus Satz 2.3.1. In [KP93], Proposition 2, ist die zweite Kohomologie von  $\mathbb{1}$  unter der globalen Voraussetzung  $n \geq 5$  angegeben. Mit den Isomorphismen, die wir gleich in (4.1) herleiten werden, ist dann auch die zweite Kohomologie für  $n \in \{3, 4\}$  klar.

Kommen wir nun zur Partition  $\alpha$ . Die Strukturaussagen zu Specht-, Young- und Permutationsmoduln ergeben sich praktisch unmittelbar aus den entsprechenden Aussagen aus den Abschnitten 1.2 und 1.3. Auch die Verzweigung von Specht- und Permutationsmoduln ist mit den entsprechenden Regeln klar. Die Verzweigung der einfachen und der Youngmoduln kann man ebenfalls rasch herleiten, aber das werden wir später erledigen. Jetzt gilt es hauptsächlich, die Kohomologietabellen zu begründen.

Für ungerades  $n > 2$  ist der 2-Kern von  $\alpha$  wie auch von  $\alpha'$  gleich  $(2, 1)$ . Damit liegen  $\alpha$  und  $\alpha'$  nicht im Hauptblock, das heißt, die Kohomologie von  $D^\alpha$ ,  $S^\alpha$ ,  $S^{\alpha*}$  und  $Y^\alpha$  ist trivial. Mit Eckmann-Shapiro erhalten wir für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  und ungerades  $n$ :

$$\begin{aligned} H^i(S_{n-1}, \mathbb{1}_{S_{n-1}}) &\cong H^i(S_n, \mathbb{1}_{S_{n-1}}\uparrow) \cong H^i(S_n, M^\alpha) \\ &\cong H^i(S_n, D^\alpha \oplus \mathbb{1}) \cong H^i(S_n, \mathbb{1}) \cong H^i(S_{n+1}, \mathbb{1}\uparrow) \cong H^i(S_{n+1}, M^{\alpha+1}). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Es bleibt also nur noch die Kohomologie von einfachen, Specht- und dualen Spechtmoduln für gerades  $n$  zu begründen. Für  $n = 2$  ist wegen  $S^\alpha = \text{sgn}_2 \cong \mathbb{1}$  nichts zu tun. Die 0-te Kohomologie ist für jedes gerade  $n$  mit dem James-Kriterium klar. Die Aussagen für  $n > 4$  finden sich alle in [KP93]: Lemma 1 für  $H^1(S_n, S^{\alpha*}) = 0$ , Theorem 1 für  $H^2(S_n, S^{\alpha*}) = 0$ , Corollary 2 für  $H^2(S_n, D^\alpha) \cong \mathbb{F}_2$ , Corollary 6 für  $H^1(S_n, S^\alpha) \cong \mathbb{F}_2^2$  sowie  $H^2(S_n, S^\alpha) \cong \mathbb{F}_2^3$  und schließlich Remark 1 für  $H^1(S_n, D^\alpha) \cong \mathbb{F}_2$ .

Die Ergebnisse im Fall  $n = 4$  erhält man zum Beispiel mit Hilfe der GAP-Funktionen `FirstCohomologyDimension` und `SecondCohomologyDimension` aus dem GAP-Paket `cohomolo`. Außerdem kann man die erste Kohomologie auch mit Satz 2.4.2 leicht von Hand nachrechnen.

### 4.2.2 Permutationsmoduln und Youngmoduln

Die Kohomologie der hier betrachteten Permutationsmoduln ergibt sich praktisch unmittelbar aus den Beispielen 2.1.13 und 2.1.17. (Die 0-te Kohomologie ist ohnehin klar.)

- Für  $n \geq 3$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, M^\gamma) \cong H^i(S_{n-2}, \mathbb{1})$ .
- Für  $n \geq 4$  und alle  $i \in \mathbb{N}_0$  ist  $H^i(S_n, M^\kappa) \cong H^i(S_{n-3}, \mathbb{1})$ .
- Für  $n \geq 4$  gilt:

$$\begin{aligned} H^1(S_n, M^\beta) &\cong (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2^2, \\ H^2(S_n, M^\beta) &\cong \begin{cases} (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2^3 & \text{für } n \in \{4, 5\}, \\ (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2^2 \otimes \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2^4 & \text{für } n \geq 6. \end{cases} \end{aligned}$$

- Für  $n \geq 6$  gilt:

$$H^1(S_n, M^\zeta) \cong (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2^2,$$

$$H^2(S_n, M^\zeta) \cong \begin{cases} (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) & \cong \mathbb{F}_2^3 & \text{für } n = 6, \\ (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2 \otimes \mathbb{F}_2) \oplus (\mathbb{F}_2^2 \otimes \mathbb{F}_2) & \cong \mathbb{F}_2^4 & \text{für } n \geq 7. \end{cases}$$

- Für alle  $i \in \mathbb{N}_0$  und alle  $n \geq 5$  ist  $H^i(S_n, M^\vartheta) \cong H^i(S_{n-1}, M^{\beta-1})$ .

Die Zerlegungen der Permutationsmoduln in direkte Summen aus Youngmoduln wurde in den Beispielen 1.2.10 und 1.2.13 bereits weitestgehend erledigt. Das einzige, was noch fehlt, ist die Zerlegung von  $M^\vartheta$  für  $\vartheta \vdash n \equiv 2 \pmod{4}$ : Die Standard-Spechtreihe von  $M^\vartheta$  ist gegeben durch

$$M^\vartheta \longrightarrow S^\vartheta \mid S^\zeta \mid S^\beta \mid S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}.$$

Da außer  $\vartheta$  alle vorkommenden Partitionen im Hauptblock liegen, ist  $S^\vartheta = Y^\vartheta = D^\vartheta$ . Mit (1.16) und den bereits bekannten Kostka-Zahlen wissen wir:

$$M^\vartheta \cong M^{\beta-1\uparrow} \cong Y^{\beta-1\uparrow} \oplus Y^{\alpha-1\uparrow}.$$

Ebenso wissen wir mit

$$Y^{\alpha-1\uparrow} \oplus M^\alpha \cong (Y^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1})\uparrow \cong M^{\alpha-1\uparrow} \cong M^\gamma \cong Y^\gamma \oplus Y^\alpha \cong Y^\gamma \oplus M^\alpha$$

für gerades  $n$ , dass  $Y^{\alpha-1\uparrow} \cong Y^\gamma$  ist. Damit ist  $Y^\gamma$  ein direkter Summand von  $M^\vartheta$ . Da die Standard-Spechtreihe von  $M^\vartheta$  den Spechtmodul  $S^\zeta$  enthält, ist für  $n > 6$  der irreduzible Modul  $D^\zeta$  ein Kompositionsfaktor von  $M^\vartheta$ . Darum muss  $Y^\zeta$  als direkter Summand auftauchen: Es können einerseits nur Youngmoduln zu Partitionen vorkommen, die lexikografisch größer oder gleich  $\vartheta$  sind. Andererseits kann  $D^\zeta$  nur als Kompositionsfaktor eines Youngmoduln zu einer Partition auftreten, die lexikografisch kleiner oder gleich  $\zeta$  ist. Da  $Y^\vartheta \cong D^\vartheta$  ausscheidet, muss  $Y^\zeta$  ein direkter Summand sein. Mit Folgerung 1.2.12 taucht  $Y^\zeta$  dann auch für  $n = 6$  auf.

Aus Dimensionsgründen kann  $M^\vartheta$  keine weiteren direkten Summanden haben. Das sieht man folgendermaßen: Mit Beispiel 1.2.10 (c) ist  $Y^\zeta = M^\zeta$ , und  $M^\zeta$  hat die Standard-Spechtreihe  $S^\zeta \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$ . Mit Beispiel 1.2.13 (a) ist  $M^\gamma \cong Y^\gamma \oplus Y^\alpha$ , und  $M^\gamma$  hat die Standard-Spechtreihe  $S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}$ . Mit Beispiel 1.2.10 (a) ist  $Y^\alpha = M^\alpha$ , und  $M^\alpha$  hat die Standard-Spechtreihe  $S^\alpha \mid \mathbf{1}$ . Ein Vergleich der Spechtreihen liefert:

$$\dim(Y^\vartheta) + \dim(Y^\zeta) + \dim(Y^\gamma) = \dim(S^\vartheta) + \dim(M^\zeta) + (\dim(M^\gamma) - \dim(Y^\alpha)) = \dim(M^\vartheta).$$

Insgesamt ist also  $M^\vartheta \cong Y^\vartheta \oplus Y^\zeta \oplus Y^\gamma$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

Mit (1.4) sind die Dimensionen der Permutationsmoduln bekannt. Da nun alle vorkommenden Kostka-Zahlen bekannt sind, können wir sukzessive die Dimensionen aller vorkommenden Youngmoduln daraus herleiten. Das soll hier nicht vorgeführt werden. Ebenso können wir sukzessive die Kohomologie aller vorkommenden Youngmoduln ermitteln, indem wir die Kohomologie der zugehörigen Permutationsmoduln "auf die einzelnen direkten Summanden verteilen". Zum Beispiel folgt für  $4 \leq n \equiv 3 \pmod{4}$  aus

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2^2 &\cong H^1(S_n, M^\beta) \cong H^1(S_n, Y^\beta \oplus Y^\alpha \oplus \mathbf{1}) \\ &\cong H^1(S_n, Y^\beta) \oplus H^1(S_n, Y^\alpha) \oplus H^1(S_n, \mathbf{1}) \cong H^1(S_n, Y^\beta) \oplus 0 \oplus \mathbb{F}_2, \end{aligned}$$

dass  $H^1(S_n, Y^\beta) \cong \mathbb{F}_2$  ist. Das Vorgehen erfolgt für jeden Youngmodul analog und birgt keinerlei Überraschungen, daher verzichten wir auch hier auf eine vollständige Ausformulierung.

Außerdem können wir jetzt mit Hilfe der Methode aus Folgerung 1.4.2 die Verzweigung der hier vorkommenden Youngmoduln weitgehend bestimmen. Die Moduln  $Y^{\alpha\downarrow}$ ,  $Y^{\beta\downarrow}$  und  $Y^{\zeta\downarrow}$  wurden

bereits in Beispiel 1.4.3 zerlegt. Für  $Y^\zeta\uparrow$ ,  $Y^\vartheta\uparrow$  und  $Y^\kappa\uparrow$  müssten wir Youngmoduln zu Partitionen einbeziehen, die lexikografisch kleiner sind als  $\kappa + 1$ , darum verzichten wir darauf. Wir müssen also nur noch die folgenden Fälle betrachten:

$Y^\alpha\uparrow$ :

- $n$  ungerade:

$$\boxed{Y^\alpha\uparrow} \oplus Y^{\alpha+1} \cong (Y^\alpha \oplus \mathbf{1})\uparrow \cong M^\alpha\uparrow \cong M^{\gamma+1} \cong \boxed{Y^{\gamma+1}} \oplus Y^{\alpha+1}.$$

- $n$  gerade:

$$Y^\alpha\uparrow = M^\alpha\uparrow \cong M^{\gamma+1} \cong Y^{\gamma+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}$$

$Y^\beta\uparrow$ :

- $n \equiv 1 \pmod{4}$ :

$$\boxed{Y^\beta\uparrow} \oplus Y^{\gamma+1} \cong (Y^\beta \oplus Y^\alpha)\uparrow \cong M^\beta\uparrow \cong M^{\vartheta+1} \cong \boxed{Y^{\vartheta+1} \oplus Y^{\zeta+1}} \oplus Y^{\gamma+1}$$

- $n \equiv 2 \pmod{4}$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\beta\uparrow} \oplus Y^{\alpha+1} \oplus \mathbf{1} &\cong (Y^\beta \oplus \mathbf{1})\uparrow \cong M^\beta\uparrow \\ &\cong M^{\vartheta+1} \cong \boxed{Y^{\vartheta+1} \oplus Y^{\zeta+1} \oplus Y^{\beta+1}} \oplus Y^{\alpha+1} \oplus \mathbf{1} \end{aligned}$$

- $n \equiv 3 \pmod{4}$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\beta\uparrow} \oplus Y^{\gamma+1} \oplus Y^{\alpha+1} &\cong (Y^\beta \oplus Y^\alpha \oplus \mathbf{1})\uparrow \cong M^\beta\uparrow \\ &\cong M^{\vartheta+1} \cong \boxed{Y^{\vartheta+1} \oplus Y^{\zeta+1}} \oplus Y^{\gamma+1} \oplus Y^{\alpha+1} \end{aligned}$$

- $n \equiv 0 \pmod{4}$ :

$$Y^\beta\uparrow = M^\beta\uparrow \cong M^{\vartheta+1} \cong Y^{\vartheta+1} \oplus Y^{\zeta+1} \oplus Y^{\beta+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}$$

$Y^\gamma\downarrow$ :

- $n$  ungerade:

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\gamma\downarrow} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1} &\cong (Y^\gamma \oplus 2 \cdot Y^\alpha)\downarrow \cong M^\gamma\downarrow \\ &\cong \begin{cases} 3M^{\alpha-1} & \cong \boxed{Y^{\alpha-1}} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1} & \text{für } n = 3, \\ M^{\gamma-1} \oplus 2M^{\alpha-1} & \cong \boxed{Y^{\gamma-1} \oplus Y^{\alpha-1}} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1} & \text{für } n > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

- $n$  gerade:

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\gamma\downarrow} \oplus Y^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} &\cong (Y^\gamma \oplus Y^\alpha)\downarrow \cong M^\gamma\downarrow \\ &\cong M^{\gamma-1} \oplus 2M^{\alpha-1} \cong \boxed{Y^{\gamma-1} \oplus 3Y^{\alpha-1}} \oplus Y^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1} \end{aligned}$$

$Y^\gamma\uparrow$ :

- $n$  ungerade:

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\gamma\uparrow} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma+1} &\cong (Y^\gamma \oplus 2 \cdot Y^\alpha)\uparrow \cong M^\gamma\uparrow \\ &\cong \begin{cases} M^{(1^4)} & \cong \boxed{Y^{(1^4)}} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma+1} & \text{für } n = 3, \\ M^{\kappa+1} & \cong \boxed{Y^{\kappa+1} \oplus 2 \cdot Y^{\vartheta+1}} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma+1} & \text{für } n > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

- $n$  gerade:

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\gamma\uparrow} \oplus Y^{\gamma+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1} &\cong Y^\gamma\uparrow \oplus M^{\gamma+1} \cong (Y^\gamma \oplus M^\alpha)\uparrow \cong (Y^\gamma \oplus Y^\alpha)\uparrow \\ &\cong M^\gamma\uparrow \cong M^{\kappa+1} \cong \boxed{Y^{\kappa+1} \oplus 2 \cdot Y^{\vartheta+1}} \oplus Y^{\gamma+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1} \end{aligned}$$



$Y^\vartheta \downarrow$ :

- $n \equiv 1 \pmod{4}$ : (Für  $n = 5$  sind  $Y^\zeta$  und  $Y^{\zeta-1}$  ersatzlos zu streichen.)

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\vartheta \downarrow} \oplus Y^{\zeta-1} \oplus Y^{\beta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1} &\cong (Y^\vartheta \oplus Y^\zeta \oplus Y^\beta \oplus 2 \cdot Y^\alpha) \downarrow \cong M^\vartheta \downarrow \\ &\cong M^{\vartheta-1} \oplus M^{\gamma-1} \oplus M^{\beta-1} \cong \boxed{Y^{\vartheta-1}} \oplus Y^{\zeta-1} \oplus \boxed{2 \cdot Y^{\gamma-1}} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1} \oplus Y^{\beta-1} \end{aligned}$$

- $n \equiv 2 \pmod{4}$ : (Für  $n = 6$  ist  $Y^{\zeta-1}$  ersatzlos zu streichen.)

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\vartheta \downarrow} \oplus (Y^{\zeta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\beta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}) \oplus (Y^{\gamma-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}) &\cong (Y^\vartheta \oplus Y^\zeta \oplus Y^\gamma) \downarrow \\ &\cong M^\vartheta \downarrow \cong M^{\vartheta-1} \oplus M^{\gamma-1} \oplus M^{\beta-1} \\ &\cong (\boxed{Y^{\vartheta-1}} \oplus Y^{\zeta-1} \oplus Y^{\beta-1} \oplus Y^{\alpha-1}) \oplus (Y^{\gamma-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}) \oplus (Y^{\beta-1} \oplus Y^{\alpha-1}) \end{aligned}$$

- $n \equiv 3 \pmod{4}$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\vartheta \downarrow} \oplus Y^{\zeta-1} \oplus Y^{\beta-1} \oplus Y^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1} &\cong (Y^\vartheta \oplus Y^\zeta \oplus Y^\beta \oplus Y^\alpha \oplus \mathbf{1}) \downarrow \cong M^\vartheta \downarrow \\ &\cong M^{\vartheta-1} \oplus M^{\gamma-1} \oplus M^{\beta-1} \cong \boxed{Y^{\vartheta-1}} \oplus Y^{\zeta-1} \oplus \boxed{2 \cdot Y^{\gamma-1}} \oplus Y^{\alpha-1} \oplus Y^{\beta-1} \oplus \mathbf{1} \end{aligned}$$

- $n \equiv 0 \pmod{4}$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\vartheta \downarrow} \oplus (Y^{\zeta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\beta-1}) \oplus (Y^{\gamma-1} \oplus 3Y^{\alpha-1}) \oplus (Y^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1} \oplus \mathbf{1}) \\ &\cong (Y^\vartheta \oplus Y^\zeta \oplus Y^\gamma \oplus Y^\alpha) \downarrow \cong M^\vartheta \downarrow \cong M^{\vartheta-1} \oplus M^{\gamma-1} \oplus M^{\beta-1} \\ &\cong (\boxed{Y^{\vartheta-1}} \oplus Y^{\zeta-1} \oplus Y^{\beta-1} \oplus Y^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1}) \oplus (Y^{\gamma-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}) \oplus (Y^{\beta-1} \oplus Y^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1}) \end{aligned}$$

$Y^\kappa \downarrow$ :

- $n = 4$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\kappa \downarrow} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 6 \cdot Y^{\alpha-1} &\cong (Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\gamma) \downarrow \cong M^\kappa \downarrow \\ &\cong 4 \cdot M^{\gamma-1} \cong \boxed{2 \cdot Y^{\gamma-1}} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus \boxed{2 \cdot Y^{\alpha-1}} \oplus 6 \cdot Y^{\alpha-1} \end{aligned}$$

- $n$  gerade,  $n > 4$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\kappa \downarrow} \oplus 2 \cdot Y^{\vartheta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 6 \cdot Y^{\alpha-1} &\cong (Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\vartheta \oplus 2 \cdot Y^\gamma) \downarrow \cong M^\kappa \downarrow \\ &\cong M^{\kappa-1} \oplus 3 \cdot M^{\gamma-1} \cong \boxed{Y^{\kappa-1}} \oplus 2 \cdot Y^{\vartheta-1} \oplus \boxed{Y^{\gamma-1}} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 6 \cdot Y^{\alpha-1} \end{aligned}$$

- $n = 5$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\kappa \downarrow} \oplus 3 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 3 \cdot Y^{\alpha-1} &\cong (Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\vartheta \oplus Y^\gamma \oplus 2 \cdot Y^\alpha) \downarrow \cong M^\kappa \downarrow \\ &\cong M^{\kappa-1} \oplus 3 \cdot M^{\gamma-1} \cong \boxed{Y^{\kappa-1} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1}} \oplus 3 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 3 \cdot Y^{\alpha-1} \end{aligned}$$

- $n$  ungerade,  $n > 5$ :

$$\begin{aligned} \boxed{Y^\kappa \downarrow} \oplus 2 \cdot Y^{\vartheta-1} \oplus 3 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 3 \cdot Y^{\alpha-1} &\cong (Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\vartheta \oplus Y^\gamma \oplus 2 \cdot Y^\alpha) \downarrow \cong M^\kappa \downarrow \\ &\cong M^{\kappa-1} \oplus 3 \cdot M^{\gamma-1} \cong \boxed{Y^{\kappa-1}} \oplus 2 \cdot Y^{\vartheta-1} \oplus \boxed{2 \cdot Y^{\gamma-1}} \oplus 3 \cdot Y^{\gamma-1} \oplus 3 \cdot Y^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Die Spechtreihen der Permutationsmoduln zu Zweiteil-Partitionen wurden in Beispiel 1.3.2 und Lemma 1.3.5 angegeben. Bei den Spechtreihen der übrigen Permutationsmoduln möge der Hinweis genügen, dass es sich um die Standard-Spechtreihen handelt, die mit dem in Lemma 1.3.1 angesprochenen Algorithmus aus [Jam78] bestimmt wurden.

Im Vorspann des Kapitels wurde darauf hingewiesen, dass wir zu jedem Youngmodul  $Y^\lambda$  eine Spechtreihe angeben, die sich zur Standard-Spechtreihe von  $M^\lambda$  fortsetzen lässt. (Mit "fortsetzen"

ist gemeint, dass man die Spechtreihe des Youngmoduls erhält, indem man aus besagter Standard-Spechtreihe gewisse Spechtfaktoren streicht. Es ist nicht zwangsläufig so, dass die Spechtreihe des Youngmoduls ein zusammenhängender Ausschnitt der Spechtreihe des Permutationsmoduls ist.) Bei der Ermittlung dieser Spechtreihen könnte man versucht sein, ähnlich wie bei der Kohomologie vorzugehen und die Standard-Spechtreihen der Permutationsmoduln sukzessive auf die einzelnen direkten Summanden zu "verteilen". Allerdings ist nicht ohne Weiteres klar, warum das möglich sein sollte. Da wir hier nur eine überschaubare Anzahl von Youngmoduln betrachten, verzichten wir auf den Versuch, eine solche Gesetzmäßigkeit nachzuweisen, und begründen statt dessen die Spechtreihen anders. Das ist ohne größeren Aufwand möglich.

Wenn  $Y^\lambda$  einfach und damit gleich  $S^\lambda$  ist, ist nichts zu tun. Wenn  $Y^\lambda$  der einzige direkte Summand von  $M^\lambda$  in seinem Block ist, erhalten wir eine Spechtreihe von  $Y^\lambda$  tatsächlich so, wie eben beschrieben, nämlich indem wir aus der Standard-Spechtreihe von  $M^\lambda$  alle Spechtfaktoren aus den anderen Blöcken streichen. Dann gibt es noch Fälle, in denen wir die gewünschte Spechtreihe mit Hilfe der Verzweigungsregeln für Spechtmoduln ermitteln können:

$n$	$\lambda$	$Y^\lambda \cong$	$Y^\lambda \rightarrow$
$\equiv 2 \pmod{4}$	$\beta$	$Y^{\beta+1}\downarrow \cong S^{\beta+1}\downarrow$	$S^\beta \mid S^\alpha$
$\equiv 0 \pmod{4}$	$\zeta$	$Y^{\zeta+1}\downarrow \cong S^{\zeta+1}\downarrow$	$S^\zeta \mid S^\beta$
ungerade	$\vartheta$	$Y^{\vartheta+1}\downarrow \cong S^{\vartheta+1}\downarrow$	$S^\vartheta \mid S^\gamma \mid S^\beta$
gerade	$\gamma$	$Y^{\alpha-1}\uparrow \cong S^{\alpha-1}\uparrow$	$S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha$

Jetzt fehlen nur noch die Spechtreihen von  $Y^\kappa$  für  $n = 4$  und ungerades  $n$ . (Die für gerades  $n > 4$  betrachten wir hier nicht.) Diese werden wir in Abschnitt 4.2.5 ermitteln.

### 4.2.3 Die Untermodulverbände von $S^\lambda$ , $Y^\lambda$ , $D^\lambda\downarrow$ und $D^\lambda\uparrow$

Die Struktur von  $S^\alpha$  und  $Y^\alpha$  haben wir bereits in Abschnitt 4.2.1 angesprochen. Die Struktur von  $S^\beta$  ist in Folgerung 1.3.9 angegeben, und die Struktur von  $S^\gamma$  wird in [MO11], (2.4) c), bestimmt. Außerdem werden in den Abschnitten 3 und 4 von [MO11] die Untermodulverbände von  $Y^\beta$  und  $Y^\gamma$  hergeleitet.

Nun betrachten wir die Partition  $\zeta$ . Die Kompositionsfaktoren von  $S^\zeta$  ergeben sich aus Satz 1.3.8. Für ungerades  $n$  erhält man daraus zusammen mit der Spechtreihe von  $Y^\zeta$ :

$n \equiv$	$S^\zeta \rightarrow$	$Y^\zeta \rightarrow$
$1 \pmod{4}$	$D^\zeta$	$D^\zeta$
$3 \pmod{4}$	$D^\alpha \mid D^\zeta$	$D^\alpha \mid D^\zeta \mid D^\alpha$

Nun sei  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Dann ist  $S^\zeta \rightarrow \mathbb{1} + D^\beta + D^\zeta$  (in der Notation aus (1.14)), wobei  $D^\zeta$  für  $n = 6$  entfällt, da  $\zeta$  dann nicht 2-regulär ist. Mit dem James-Kriterium (Satz 2.5.4) ist  $\mathbb{1}$  im Sockel. Der Youngmodul  $Y^\zeta$  hat wegen  $\dim(H^0(S_n, Y^\zeta)) = 1$  genau eine  $\mathbb{1}$  im Sockel. Außerdem könnten höchstens noch  $\alpha, \beta \triangleright \zeta$  in  $\text{soc}(Y^\zeta)$  auftauchen. Für jeden  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Modul  $V$ , der im Hauptblock liegt, gilt:

$$\text{Hom}(V, Y^\zeta) \cong \text{Hom}(V, Y^\zeta \oplus Y^\vartheta) \cong \text{Hom}(V, Y^{\beta-1}\uparrow) \cong \text{Hom}(V\downarrow, Y^{\beta-1}).$$

Mit Satz 1.4.5 (b) ist  $D^\beta\downarrow \cong D^{\beta-1}$  und  $D^\alpha\downarrow \cong D^{\alpha-1}$ . Somit erhalten wir aus dem obigen Isomorphismus:

$$\text{Hom}(D^\beta, Y^\zeta) \cong \text{Hom}(D^{\beta-1}, Y^{\beta-1}) = 0, \quad \text{Hom}(D^\alpha, Y^\zeta) \cong \text{Hom}(D^{\alpha-1}, Y^{\beta-1}) = 0.$$

Darum können im Sockel von  $Y^\zeta$  keine weiteren irreduziblen Moduln auftauchen, also folgt  $\text{soc}(Y^\zeta) \cong \text{hd}(Y^\zeta) \cong \mathbb{1}$ . Wegen  $S^\zeta \leq Y^\zeta$  erhalten wir damit auch

$$S^\zeta \rightarrow \begin{cases} \mathbb{1} \mid D^\beta, & n = 6, \\ \mathbb{1} \mid D^\beta \mid D^\zeta, & n > 6. \end{cases}$$

Für die genaue Untermodulstruktur von  $Y^\zeta$  müssen wir noch mehr Informationen zusammentragen. Das Ergebnis wird in Abschnitt 4.2.5 nachgereicht.

Für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  ist mit Satz 1.3.8  $S^\zeta \rightarrow D^\alpha + D^\beta + D^\zeta$ . Wegen  $D^{\zeta+1} \downarrow = Y^{\zeta+1} \downarrow \cong Y^\zeta$  ist mit Satz 1.4.4  $\text{soc}(Y^\zeta) \cong \text{hd}(Y^\zeta) \cong D^\beta$ . Damit ist  $S^\zeta \rightarrow D^\beta \mid D^\alpha \mid D^\zeta$ . Wegen  $Y^\zeta \rightarrow S^\zeta \mid S^\beta$  ist  $Y^\zeta \rightarrow 2 \cdot D^\alpha + 2 \cdot D^\beta + D^\zeta$ . Da  $Y^\zeta$  selbstdual ist und  $S^\zeta \leq Y^\zeta$  ein Untermodul, folgt

$$Y^\zeta \longrightarrow D^\beta \mid D^\alpha \mid D^\zeta \mid D^\alpha \mid D^\beta.$$

Kommen wir nun zur Partition  $\vartheta$ . Für gerades  $n$  ist aus Gründen des Blocks  $D^\vartheta = S^\vartheta = Y^\vartheta$ . Für ungerades  $n$  ist  $S^\vartheta \rightarrow \mathbb{1} + D^\beta + D^\vartheta$ . Dies erhält man durch etwas Rechenarbeit aus Theorem 7.1 von [Jam76], in dem die Kompositionsfaktoren der Spechtmoduln über  $\mathbb{F}_2$  zu Partitionen vom Typ  $(\lambda_1, \lambda_2, 1)$  vollständig bestimmt werden. (Da die Notation in [Jam76] relativ stark von unserer abweicht, sei alternativ auf den Appendix von [JW00] verwiesen. Dort wird die entsprechende Aussage auf beliebiges  $p$  verallgemeinert. In [Wil06] wird das Verfahren weiter verallgemeinert auf Dreiteil-Partitionen, deren dritter Teil kleiner als  $p$  ist.) Mit dem James-Kriterium hat  $S^\vartheta$  keine  $\mathbb{1}$  im Sockel, und damit ist für ungerades  $n$

$$S^\vartheta \longrightarrow D^\beta \mid \mathbb{1} \mid D^\vartheta.$$

Die Bestimmung der Struktur von  $Y^\vartheta$  verschieben wir auf Abschnitt 4.2.5.

Als Nächstes beschäftigen wir uns mit eingeschränkten und induzierten irreduziblen Moduln. Dabei werden wir gelegentlich mit den Dimensionen der irreduziblen Moduln argumentieren. Dazu soll der Hinweis genügen, dass diese Dimensionen mit Bekanntwerden der Kompositionsreihen der Spechtmoduln sukzessive ausgerechnet werden können, da die Dimensionen der Spechtmoduln mit der Hakenformel (1.9) bekannt sind. Damit sind dann auch die Dimensionen der eingeschränkten und induzierten irreduziblen Moduln bekannt.

Die Strukturen von  $D^\alpha \downarrow$  und  $D^\beta \downarrow$  wurden in [MO11], (2.5), ermittelt. Auf  $D^\zeta \uparrow$  und  $D^\vartheta \uparrow$  verzichten wir, da wir dazu Partitionen benötigen würden, die lexikografisch kleiner als  $\kappa + 1$  sind. Die Partitionen  $\gamma$  und  $\kappa$  brauchen wir nicht zu betrachten, weil sie nicht 2-regulär sind. Es fehlen also nur noch die folgenden.

$D^{\alpha\uparrow}$  : Für ungerades  $n$  ist die Induktion wegen  $D^\alpha = Y^\alpha$  von oben bekannt.

Nun sei  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Mit den modularen Verzweigungsregeln aus Satz 1.4.4 ist  $D^\alpha \uparrow$  unzerlegbar mit Sockel und Kopf isomorph zu  $D^{\beta+1}$ , aber nicht halbeinfach. Aus Dimensionsgründen ist nun  $D^{\alpha\uparrow} \rightarrow D^{\beta+1} \mid D^{\beta+1}$ .

Schließlich sei  $n \equiv 0 \pmod{4}$ . Mit den bisherigen Informationen wissen wir:

$$Y^{\alpha\uparrow} \cong Y^{\gamma+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1} \longrightarrow (\mathbb{1} \mid D^{\beta+1} \mid \mathbb{1} \mid \mathbb{1} \mid D^{\beta+1} \mid \mathbb{1}) \oplus 2 \cdot D^{\alpha+1}.$$

Mit Verzweigungsregeln und Blockzugehörigkeit ist  $S^{\alpha\uparrow} \rightarrow (S^{\gamma+1} \mid S^{\beta+1}) \oplus S^{\alpha+1}$ . Wegen  $S^{\alpha\uparrow} \hookrightarrow Y^{\alpha\uparrow}$  und  $S^{\alpha+1} = D^{\alpha+1}$  gilt daher:

$$S^{\alpha\uparrow} \longrightarrow (\mathbb{1} \mid D^{\beta+1} \mid \mathbb{1} \mid \mathbb{1} \mid D^{\beta+1}) \oplus D^{\alpha+1}.$$

Damit wiederum folgt:

$$\begin{aligned} D^{\alpha\uparrow} &\cong (S^\alpha / \mathbb{1})^\uparrow \cong S^{\alpha\uparrow} / \mathbb{1}^\uparrow \cong S^{\alpha\uparrow} / M^{\alpha+1} \\ &\cong S^{\alpha\uparrow} / (\mathbb{1} \oplus D^{\alpha+1}) \longrightarrow D^{\beta+1} \mid \mathbb{1} \mid \mathbb{1} \mid D^{\beta+1}. \end{aligned}$$

$D^{\beta\uparrow}$  : Für gerades  $n$  ergibt sich die Aussage  $D^{\beta\uparrow} \cong D^{\zeta+1} \oplus D^{\vartheta+1}$  direkt mit Satz 1.4.4 (e). Für  $n \equiv 3 \pmod{4}$  ist die Induktion wegen  $D^\beta = Y^\beta$  von oben bekannt. Nun sei  $n \equiv 1 \pmod{4}$ . Mit Satz 1.4.4 ist  $D^{\beta\uparrow}$  selbstdual mit Sockel und Kopf isomorph zu  $D^{\beta+1} \oplus D^{\vartheta+1}$ , aber nicht halbeinfach. Aus Dimensionsgründen kann  $D^{\vartheta+1}$  nur einmal vorkommen, also muss  $D^{\beta+1}$  mindestens zwei Mal vorkommen. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(S^{\zeta+1}, D^{\beta\uparrow}) &\cong \text{Hom}(S^{\zeta+1\downarrow}, D^\beta) \\ &\cong \text{Hom}(S^\zeta \oplus S^\beta, D^\beta) \cong \text{Hom}(S^\beta, D^\beta) \cong \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Wegen  $S^{\zeta+1} \rightarrow \mathbb{1} \mid D^{\beta+1} \mid D^{\zeta+1}$  und aus Dimensionsgründen folgt

$$D^{\beta\uparrow} \longrightarrow (D^{\beta+1} \mid D^{\zeta+1} \mid D^{\beta+1}) \oplus D^{\vartheta+1}.$$

$D^{\zeta\downarrow}$  : Für  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ist  $D^\zeta = Y^\zeta$  und damit  $D^{\zeta\downarrow} \cong Y^{\zeta-1}$ ; diesen Fall haben wir vorhin schon betrachtet. Anderenfalls ergibt sich die Gestalt von  $D^{\zeta\downarrow}$  unmittelbar aus Satz 1.4.5.

$D^{\vartheta\downarrow}$  : Für gerades  $n$  ist die Aussage mit  $D^\vartheta = Y^\vartheta$  von oben bekannt. Für ungerades  $n$  ergibt sich die Gestalt von  $D^{\vartheta\downarrow}$  unmittelbar aus Satz 1.4.4 (c).

Damit sind wir mit dem Programm dieses Abschnitts am Ende. Es fehlen, wie gesagt, noch die Untermodulverbände von  $Y^\zeta$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$  und  $Y^\vartheta$  für ungerades  $n$ , außerdem die von  $S^\kappa$  und  $Y^\kappa$ . Dies alles wird in Abschnitt 4.2.5 geliefert, nachdem wir die Informationen aus dem folgenden Abschnitt zur Verfügung haben.

#### 4.2.4 Diverse Einbettungen und Isomorphismen

Um später bei der Ermittlung der Kohomologien genügend geeignete exakte Sequenzen zur Verfügung zu haben, decken wir im Folgenden gewisse Isomorphismen auf und identifizieren verschiedene Moduln als Unter- oder Faktormoduln von verschiedenen anderen. Das Vorgehen folgt zumeist dem folgenden Prinzip: Man hat zwei  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln  $V$  und  $W$  mit dem gleichen Untermodulverband gegeben (eventuell  $V$  als Faktormodul eines anderen Moduln und  $W$  als Untermodul eines anderen Moduln). Um zu zeigen, dass die beiden isomorph sind, bestimmt man die  $\mathbb{F}_2$ -Dimension von  $\text{Hom}(V, W)$ ; so kann man Rückschlüsse ziehen, welche Untermoduln von  $W$  als Bild einer Abbildung  $\varphi \in \text{Hom}(V, W)$  in Frage kommen. Für die Dimensionsbestimmung sucht man mit Hilfe der Aussagen vom Anfang des Kapitels 4.2 zwei  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln  $A$  und  $B$  mit  $\text{Hom}(V, W) \cong \text{Hom}(A, B)$ , für die die Dimension von  $\text{Hom}(A, B)$  bekannt ist.

(a)  $Y^\beta \cong S^\gamma$  und  $S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$  für  $n \equiv 1 \pmod{4}$ :

Die zweite Aussage folgt unmittelbar aus der ersten, und die erste ergibt sich zusammen mit Lemma 1.3.5 und der Blockzugehörigkeit aus

$$Y^\beta \oplus S^\alpha \cong Y^\beta \oplus Y^\alpha \cong M^\beta \cong S^\gamma \oplus S^\alpha.$$

(b)  $S^{\alpha*} \hookrightarrow S^\beta \hookrightarrow S^\gamma \hookrightarrow Y^\beta \hookrightarrow Y^\gamma$ ,  $S^\beta/D^\alpha \hookrightarrow S^{\gamma*}$  und  $Y^\alpha \not\hookrightarrow Y^\gamma/S^\beta$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ :

Die (eindeutigen) Kompositionsreihen und die (Standard-)Spechtreihen von  $Y^\gamma$  und  $Y^\beta$  sind gegeben durch

$$Y^\beta \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \mid \mathbb{1} \mid D^\beta \parallel \mathbb{1} \mid D^\alpha, \\ S^\beta \mid S^\alpha, \end{array} \right. \quad Y^\gamma \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} D^\alpha \mid \mathbb{1} \mid D^\beta \mid \mathbb{1} \parallel D^\alpha \mid \mathbb{1} \mid D^\beta \parallel \mathbb{1} \mid D^\alpha, \\ S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha. \end{array} \right.$$

Die Aussage  $S^{\alpha*} \hookrightarrow S^\beta$  erhält man, wenn man die obige Spechtreihe von  $Y^\beta$  mit der zugehörigen dualen Spechtreihe vergleicht.

Wegen  $D^{\alpha-1}\uparrow \cong Y^\gamma$  gilt für jeden  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Modul  $V$ :

$$\mathrm{Hom}(V, Y^\gamma) \cong \mathrm{Hom}(V, D^{\alpha-1}\uparrow) \cong \mathrm{Hom}(V\downarrow, D^{\alpha-1}).$$

Für  $V := S^\beta$  erhalten wir daraus:

$$\mathrm{Hom}(S^\beta, Y^\gamma) \cong \mathrm{Hom}(S^{\beta-1} \oplus S^{\alpha-1}, D^{\alpha-1}) \cong \mathrm{Hom}(D^{\alpha-1}, D^{\alpha-1}) \cong \mathbb{F}_2.$$

Aus den Kompositionsreihen der betrachteten Moduln folgt  $S^\beta \hookrightarrow Y^\gamma$  und wegen der Uniserialität von  $Y^\gamma$  auch  $S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$ . Für  $V := Y^\beta$  wiederum erhalten wir:

$$\mathrm{Hom}(Y^\beta, Y^\gamma) \cong \mathrm{Hom}(Y^{\beta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha-1}, D^{\alpha-1}) \cong \mathrm{Hom}(D^{\alpha-1} \oplus D^{\alpha-1}, D^{\alpha-1}).$$

Damit ist  $\mathrm{Hom}(Y^\beta, Y^\gamma)$  zweidimensional, und mit den Kompositionsreihen folgt  $Y^\beta \hookrightarrow Y^\gamma$ . Daraus wiederum folgt wegen  $S^\gamma \leq Y^\gamma$  und der Uniserialität, dass  $S^\gamma \hookrightarrow Y^\beta$  ist. Aus den Kompositionsreihen und Selbstdualität von  $Y^\gamma$  und  $Y^\beta$  ergibt sich schließlich, dass  $Y^\gamma/Y^\beta \cong S^{\gamma*}$  bzw.  $Y^\gamma/S^\gamma \cong Y^\beta$  ist.

Mit Hilfe von bis zum jetzigen Zeitpunkt bekannten Aussagen (insbesondere der soeben nachgewiesenen) werden wir in Teil (d) von Abschnitt 4.2.6 zeigen, dass  $H^1(S_n, D^\beta) \cong \mathbb{F}_2$  ist. Es ist also  $\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2 S_n}^1(\mathbb{1}, D^\beta) \cong \mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2 S_n}^1(D^\beta, \mathbb{1}) \cong \mathbb{F}_2$ , das heißt, es gibt nur eine Äquivalenzklasse nichttrivialer Erweiterungen von  $D^\beta$  mit  $\mathbb{1}$ . Damit sind alle uniserialen Moduln mit Kompositionsreihe  $\mathbb{1} \mid D^\beta$  isomorph. Insbesondere folgt  $S^\beta/D^\alpha \hookrightarrow S^{\gamma*}$ .

Wegen  $S^\beta \hookrightarrow Y^\gamma$  können wir  $Y^\gamma/S^\beta$  betrachten:

$$\begin{aligned} (Y^\gamma/S^\beta)\downarrow &\cong Y^\gamma\downarrow/S^\beta\downarrow \cong (Y^{\gamma-1} \oplus 3 \cdot D^{\alpha-1})/(S^{\beta-1} \oplus D^{\alpha-1}) \\ &\cong (Y^{\gamma-1}/S^{\beta-1}) \oplus 2 \cdot D^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Mit Teil (a) ist  $Y^{\gamma-1}/S^{\beta-1} \rightarrow \mathbb{1} \mid \mathbb{1} \mid D^{\beta-1} \mid \mathbb{1}$ . Daraus erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(Y^\alpha, Y^\gamma/S^\beta) &\cong \mathrm{Hom}(M^\alpha, Y^\gamma/S^\beta) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{1}\uparrow, Y^\gamma/S^\beta) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, (Y^\gamma/S^\beta)\downarrow) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, (Y^{\gamma-1}/S^{\beta-1}) \oplus 2 \cdot D^{\alpha-1}) \cong \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Das bedeutet:  $Y^\gamma/S^\beta$  hat zwar einen selbstdualen uniserialen Untermodul mit Kompositionsreihe  $\mathbb{1} \mid D^\alpha \mid \mathbb{1}$ , dieser ist aber nicht isomorph zu  $Y^\alpha$ , da es nur einen nichttrivialen Homomorphismus von  $Y^\alpha$  nach  $Y^\gamma/S^\beta$  gibt (der das Bild  $\mathbb{1}$  hat). Das sollte nicht zu sehr überraschen, schließlich ist

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{F}_2 S_n}^1(\mathbb{1}, S^\alpha) \cong H^1(S_n, S^\alpha) \cong \mathbb{F}_2^2.$$

Also muss es nichttriviale Erweiterungen von  $\mathbb{1}$  mit  $S^\alpha$  geben, die nicht äquivalent und damit möglicherweise auch nicht isomorph zu  $Y^\alpha$  sind. Hier haben wir eine solche gefunden.

(c)  $\mathrm{soc}(Y^\vartheta) \cong \mathrm{hd}(Y^\vartheta) \cong D^\beta$  für ungerades  $n$ :

Dies folgt mit  $D^{\vartheta+1}\downarrow = Y^{\vartheta+1}\downarrow \cong Y^\vartheta$  aus den modularen Verzweigungsregeln.

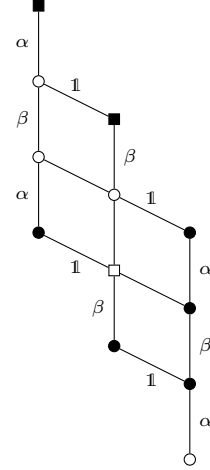
(d)  $S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$ ,  $S^{\alpha^*} \hookrightarrow S^\gamma$  und  $S^\beta \hookrightarrow D^{\beta+1} \downarrow \hookrightarrow Y^\gamma$  für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ :

Rechts ist noch einmal der Untermodulverband von  $Y^\gamma$  angegeben. Die eckigen Knoten markieren die Spechtreihe  $Y^\gamma \rightarrow S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha$ .

Die Einbettung  $S^\beta \hookrightarrow S^\gamma$  folgt analog zum Fall  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Die Einbettung  $S^{\alpha^*} \hookrightarrow S^\gamma$  ist aufgrund der Untermodulstruktur äquivalent zu  $S^{\alpha^*} \hookrightarrow Y^\gamma$ . Dies wiederum ergibt sich aus der dualen Spechtreihe von  $Y^\gamma$ . Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(D^{\beta+1} \downarrow, Y^\gamma) &\cong \text{Hom}(D^{\beta+1}, Y^\gamma \uparrow) \\ &\cong \text{Hom}(D^{\beta+1}, Y^{\kappa+1} \oplus 2 \cdot Y^{\vartheta+1}) \\ &\cong \text{Hom}(D^{\beta+1}, Y^{\vartheta+1} \oplus Y^{\vartheta+1}). \end{aligned}$$

Wegen  $\text{soc}(Y^{\vartheta+1}) \cong D^{\beta+1}$  ist letzteres zweidimensional. Daher muss es wegen  $D^{\beta+1} \downarrow \rightarrow D^\alpha \mid D^\beta \mid D^\alpha$  und der Struktur von  $Y^\gamma$  neben dem Homomorphismus  $\varphi \in \text{Hom}(D^{\beta+1} \downarrow, Y^\gamma)$  mit  $\text{Bild}(\varphi) \cong D^\alpha$  auch noch einen injektiven Homomorphismus geben. Da es genau einen Untermodul von  $Y^\gamma$  isomorph zu  $S^\beta$  gibt, ist dieser auch ein Untermodul des Bildes von besagtem injektivem Homomorphismus, und damit ist  $S^\beta \hookrightarrow D^{\beta+1} \downarrow$ .



(e) Diverse Unter- und Faktormoduln von  $Y^\zeta$  und  $S^\zeta$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ :

Es ist  $Y^\zeta \cong M^\zeta$ . Die Spechtreihe von  $M^\zeta$  aus Lemma 1.3.5 liefert daher  $S^\kappa \hookrightarrow Y^\zeta$  und  $Y^\zeta/S^\kappa \cong S^\gamma$ ; die zugehörige duale Spechtreihe liefert dementsprechend  $S^{\gamma^*} \hookrightarrow Y^\zeta$  und  $Y^\zeta/S^{\gamma^*} \cong S^{\kappa^*}$ .

Mit den Verzweigungsregeln ist  $S^{\beta-1} \uparrow \rightarrow S^\vartheta \oplus (S^\zeta \mid S^\beta)$ , wobei  $S^\vartheta$  als einziger Spechtfaktor nicht im Hauptblock liegt. Es sei  $H$  der Hauptblockanteil von  $S^{\beta-1} \uparrow$ . Wegen  $S^{\beta-1} \leq Y^{\beta-1}$  und  $Y^{\beta-1} \uparrow \cong Y^\vartheta \oplus Y^\zeta$  folgt  $H \hookrightarrow Y^\zeta$ . Außerdem gilt wegen  $D^\vartheta = S^\vartheta = Y^\vartheta$ :

$$Y^\zeta/H \cong (Y^{\beta-1} \uparrow)/(S^{\beta-1} \uparrow) \cong (Y^{\beta-1}/S^{\beta-1}) \uparrow \cong \mathbb{1} \uparrow \cong M^\alpha \cong Y^\alpha.$$

Aus der Selbstdualität der Youngmoduln folgt dann  $Y^\alpha \hookrightarrow Y^\zeta$  und  $Y^\zeta/Y^\alpha \cong S^{\beta-1} \uparrow / D^\vartheta$ . Wegen  $D^\vartheta \hookrightarrow D^{\beta-1} \uparrow \hookrightarrow S^{\beta-1} \uparrow \cong H^* \oplus D^\vartheta$  ist  $D^{\beta-1} \uparrow / D^\vartheta \hookrightarrow Y^\zeta/Y^\alpha$ . Aus

$$\text{Hom}(S^\zeta, D^{\beta-1} \uparrow) \cong \text{Hom}(S^\zeta \downarrow, D^{\beta-1}) \cong \text{Hom}(S^{\zeta-1} \oplus S^{\beta-1}, D^{\beta-1}) \cong \mathbb{F}_2$$

erhalten wir schließlich wegen

$$S^\zeta \longrightarrow \begin{cases} \mathbb{1} \mid D^\beta & \text{für } n = 6, \\ \mathbb{1} \mid D^\beta \mid D^\zeta & \text{für } n > 6, \end{cases} \quad D^{\beta-1} \uparrow \longrightarrow \begin{cases} D^\beta \oplus D^\vartheta & \text{für } n = 6, \\ (D^\beta \mid D^\zeta \mid D^\beta) \oplus D^\vartheta & \text{für } n > 6, \end{cases}$$

dass  $S^\zeta/\mathbb{1} \hookrightarrow D^{\beta-1} \uparrow / D^\vartheta$  ist.

Die Aussage  $S^\beta/D^\alpha \hookrightarrow S^\zeta$  folgt mit der Argumentation aus Teil (b): Alle uniseriellen Moduln mit Kompositionsreihe  $\mathbb{1} \mid D^\beta$  sind isomorph. Für  $n = 6$  ist damit sogar  $S^\beta/D^\alpha \cong S^\zeta$ .

(f)  $S^{\beta^*} \hookrightarrow S^\zeta$  für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ :

Dies folgt unmittelbar daraus, dass  $Y^\zeta$  uniseriell ist und die beiden Spechtreihen  $S^\zeta \mid S^\beta$  und  $S^{\beta^*} \mid S^{\zeta^*}$  besitzt.

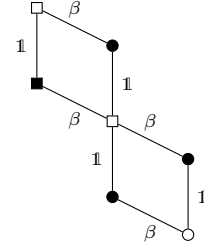
(g)  $S^{\beta^*} \hookrightarrow S^\vartheta$  für  $n \equiv 1 \pmod{4}$ :

Hier greift wieder eine ähnliche Argumentation wie in Teil (b): Auf Basis von Strukturaussagen, die zum jetzigen Zeitpunkt schon nachgewiesen sind, wird in Teil (c) von Abschnitt 4.2.6 gezeigt, dass  $H^1(S_n, D^\beta) \cong \mathbb{F}_2$  ist. Wegen  $\text{Ext}_{\mathbb{F}_2 S_n}^1(\mathbb{1}, D^\beta) \cong H^1(S_n, D^\beta)$  gibt es nur eine Äquivalenzklasse nichttrivialer Erweiterungen von  $\mathbb{1}$  mit  $D^\beta$ . Damit sind alle uniserialen Moduln mit Kompositionsreihe  $D^\beta \mid \mathbb{1}$  isomorph zu  $S^{\beta^*}$ , und die Behauptung folgt. (Für  $n = 5$  sieht man auch direkt:  $S^\vartheta = S^{\beta'} \cong S^{\beta^*}$ .)

(h)  $D^{\alpha-1}\uparrow \hookrightarrow S^{\alpha-1^*}\uparrow / D^\alpha \cong Y^\gamma / \mathbb{1} \hookrightarrow Y^\vartheta$  für ungerades  $n \geq 5$ :

Für  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ergeben sich mit der Selbstdualität von  $D^{\alpha-1}\uparrow$  und  $Y^\gamma$  die Aussagen  $D^{\alpha-1}\uparrow \hookrightarrow S^{\alpha-1^*}\uparrow / D^\alpha$  und  $S^{\alpha-1^*}\uparrow / D^\alpha \cong Y^\gamma / \mathbb{1}$  aus der Argumentation, mit der in Abschnitt 4.2.3 die Kompositionsreihe des uniserialen  $D^{\alpha-1}\uparrow$  ermittelt wurde.

Nun sei  $n \equiv 3 \pmod{4}$ . Dann ist  $D^{\alpha-1}\uparrow \rightarrow D^\beta \mid D^\beta$ . Nebenstehend ist noch einmal der Untermodulverband von  $Y^\gamma$  angegeben. Jetzt verwenden wir:



$$\begin{aligned} D^{\alpha-1}\uparrow &\hookrightarrow S^{\alpha-1^*}\uparrow \cong (M^{\alpha-1}/\mathbb{1})\uparrow \cong M^{\alpha-1}\uparrow / \mathbb{1}\uparrow \\ &\cong M^\gamma / M^\alpha \cong (Y^\gamma \oplus 2 \cdot D^\alpha) / (D^\alpha \oplus \mathbb{1}) \cong (Y^\gamma / \mathbb{1}) \oplus D^\alpha. \end{aligned}$$

(Diese Isomorphiekette gilt übrigens für alle ungeraden  $n$ .) Damit folgt zunächst die Aussage  $S^{\alpha-1^*}\uparrow / D^\alpha \cong Y^\gamma / \mathbb{1}$ , und aus den Untermodulverbänden ergibt sich daraus auch  $D^{\alpha-1}\uparrow \hookrightarrow S^{\alpha-1^*}\uparrow / D^\alpha$ .

Für beliebiges ungerades  $n$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(Y^\gamma, Y^\vartheta) &\cong \text{Hom}(Y^\gamma \oplus 2 \cdot Y^\alpha, Y^\vartheta) \cong \text{Hom}(M^\gamma, Y^\vartheta) \\ &\cong \text{Hom}(M^{\alpha-1}\uparrow, Y^\vartheta) \cong \text{Hom}(M^{\alpha-1}, Y^\vartheta\downarrow) \\ &\cong \text{Hom}(Y^{\alpha-1}, Y^{\vartheta-1} \oplus 2 \cdot Y^{\gamma-1}) \cong \text{Hom}(Y^{\alpha-1}, Y^{\gamma-1} \oplus Y^{\gamma-1}). \end{aligned}$$

(Dabei entfällt für  $n = 5$  im vorletzten Schritt der direkte Summand  $Y^{\vartheta-1}$ .) Der Youngmodul  $Y^{\gamma-1}$  hat keine  $\mathbb{1}$  im Sockel, und mit (b) und (d) besitzt er einen Untermodul isomorph zu  $S^{\alpha-1^*}$ . Aufgrund der Gestalt von  $Y^{\alpha-1}$  ist Letzterer das einzig mögliche Bild eines nichttrivialen Homomorphismus aus  $\text{Hom}(Y^{\alpha-1}, Y^{\gamma-1})$ . Damit ist dieser Homomorphismenmodul eindimensional, und die Homomorphismenmoduln aus der obigen Isomorphiekette sind zweidimensional. Mit (c) ist  $\text{soc}(Y^\vartheta) \cong D^\beta$ . Daher ist  $\text{Hom}(Y^\gamma, Y^\vartheta) \cong \text{Hom}(Y^\gamma / \mathbb{1}, Y^\vartheta)$ . Nun hat  $Y^\gamma / \mathbb{1}$  genau zwei Kompositionsfaktoren isomorph zu  $D^\beta$ , wobei insbesondere  $\text{soc}(Y^\gamma / \mathbb{1}) \cong D^\beta$  ist. Daher muss es einen injektiven Homomorphismus von  $Y^\gamma / \mathbb{1}$  nach  $Y^\vartheta$  geben.

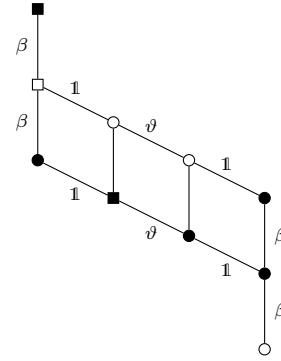
#### 4.2.5 Nachtrag: $Y^\vartheta, Y^\kappa, S^\kappa, Y^\zeta$

Die Struktur von  $Y^\vartheta$  ist noch für ungerades  $n$  zu bestimmen. Wir kennen eine Spechtreihe von  $Y^\vartheta$  und die Kompositionsreihen der beteiligten Spechtmoduln. Damit kennen wir die Kompositionsfaktoren von  $Y^\vartheta$ . Wir wissen bereits, dass  $\text{soc}(Y^\vartheta) \cong \text{hd}(Y^\vartheta) \cong D^\beta$  ist. Daher brauchen wir nur noch die Struktur von  $B := \text{rad}(Y^\vartheta) / \text{soc}(Y^\vartheta)$  zu bestimmen.

$n \equiv 3 \pmod{4}$  : Hier sind diese Kompositionsfaktoren  $Y^\vartheta$  gegeben durch  $Y^\vartheta \rightarrow D^\vartheta + 3 \cdot D^\beta + 2 \cdot \mathbb{1}$ , und damit ist  $B \rightarrow D^\vartheta + D^\beta + 2 \cdot \mathbb{1}$ . Mit der Argumentation aus 4.2.4 (h) ist

$$D^\beta \oplus \mathbb{1} \cong Y^\vartheta / (D^\beta \oplus \mathbb{1}) \hookrightarrow B.$$

Da  $B$  selbstdual ist und nur einen Kompositionsfaktor isomorph zu  $D^\beta$  hat, muss dieser sowohl im Sockel als auch im Kopf liegen, also ist er ein direkter Summand von  $B$  mit einem selbstdualen Komplement. Letzteres hat die Kompositionsfaktoren  $D^\vartheta + 2 \cdot \mathbb{1}$  und wegen  $S^\vartheta \leq Y^\vartheta$  einen uniseriellen Untermodul mit Kompositionsreihe  $\mathbb{1} \mid D^\vartheta$ . Damit ist die Struktur so, wie sie im nebenstehenden Hasse-Diagramm beschrieben wird.

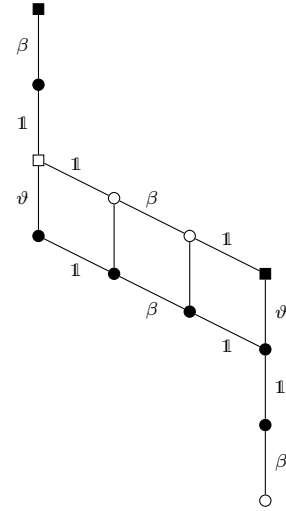


$5 < n \equiv 1 \pmod{4}$  : Hier sind die Kompositionsfaktoren von  $Y^\vartheta$  gegeben durch  $Y^\vartheta \rightarrow D^\vartheta + 3 \cdot D^\beta + 4 \cdot \mathbb{1}$ , und damit ist  $B \rightarrow D^\vartheta + D^\beta + 4 \cdot \mathbb{1}$ . Dabei können  $D^\vartheta$  und  $D^\beta$  nicht im Sockel von  $B$  liegen: Da sie beide mit Vielfachheit 1 vorkommen, müssten sie beide wegen der Selbstdualität von  $B$  direkte Summanden von  $B$  sein. Dies stünde im Widerspruch zu den Aussagen  $S^\vartheta \hookrightarrow Y^\vartheta$  und  $D^{\alpha-1} \uparrow \hookrightarrow Y^\vartheta$ , denn es ist  $S^\vartheta \rightarrow D^\beta \mid \mathbb{1} \mid D^\vartheta$  und  $D^{\alpha-1} \uparrow \rightarrow D^\beta \mid \mathbb{1} \mid \mathbb{1} \mid D^\beta$ . Weiterhin erhalten wir im Vorgriff auf die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2.6 die exakte Kohomologiesequenz:

$$\begin{aligned} \underbrace{H^0(S_n, Y^\vartheta)}_{=0} &\longrightarrow H^0(S_n, Y^\vartheta / D^\beta) \\ \cong &\longrightarrow \underbrace{H^1(S_n, D^\beta)}_{\cong \mathbb{F}_2} \longrightarrow \underbrace{H^1(S_n, Y^\vartheta)}_{=0}. \end{aligned}$$

Damit und mit der Selbstdualität von  $B$  ist  $\text{soc}(B) \cong \mathbb{1} \cong \text{hd}(B)$ . Also brauchen wir nur noch die Struktur von  $B' := \text{rad}(B) / \text{soc}(B) \rightarrow D^\vartheta + D^\beta + 2 \cdot \mathbb{1}$  zu bestimmen.

Wir wissen, dass  $B'$  selbstdual ist und  $D^\vartheta$  in Kopf und Sockel hat. Also ist  $D^\vartheta$  ein direkter Summand von  $B'$  mit einem selbstdualen Komplement. Letzteres hat einen uniseriellen Untermodul  $\mathbb{1} \mid D^\beta$ , der von  $D^{\alpha-1} \uparrow \hookrightarrow Y^\vartheta$  herrührt. Damit ergibt sich insgesamt die Struktur, wie sie im nebenstehenden Hasse-Diagramm beschrieben wird.



$n = 5$  : Hier kann man analog zum Fall  $5 < n \equiv 1 \pmod{4}$  argumentieren, nur dass der Kompositionsfaktor  $D^\vartheta$  entfällt. Dadurch ist  $B'$  uniseriell und somit auch  $Y^\vartheta$ .  $\square$

Kommen wir nun zu  $Y^\kappa$  und  $S^\kappa$ . Zunächst sei  $n$  ungerade. Wegen der Blockzugehörigkeit sind alle Kompositionsfaktoren von  $Y^\kappa$  isomorph zu  $D^\alpha$  oder  $D^\zeta$ , und mit Lemma 1.3.5 ist  $M^\zeta \cong S^\kappa \oplus S^\gamma$ .

$n \equiv 1 \pmod{4}$  : Für  $n = 5$  ist  $S^\kappa \cong S^{\alpha*} \cong D^\alpha$ , und aus Dimensionsgründen ist  $Y^\kappa \rightarrow D^\alpha \mid D^\alpha$ . Für  $n > 5$  erhalten wir mit  $Y^\zeta \cong D^\zeta$ ,  $Y^\beta \cong S^\gamma$  und  $Y^\alpha \cong D^\alpha$

$$D^\zeta \oplus S^\gamma \oplus D^\alpha \cong Y^\zeta \oplus Y^\beta \oplus Y^\alpha \cong M^\zeta \cong S^\kappa \oplus S^\gamma$$

und damit  $S^\kappa \cong D^\zeta \oplus D^\alpha$ . Da  $Y^\kappa$  unzerlegbar ist, ist  $\text{soc}(Y^\kappa) \leq \text{rad}(Y^\kappa)$ . Damit und aus Dimensionsgründen ist  $Y^\kappa \rightarrow 2 \cdot D^\alpha + 2 \cdot D^\zeta$  und  $\text{rad}(Y^\kappa) \cong \text{hd}(Y^\kappa) \cong D^\zeta \oplus D^\alpha$ .

---

$\alpha = (n - 1, 1)$ ,  $\beta = (n - 2, 2)$ ,  $\gamma = (n - 2, 1^2)$ ,  $\zeta = (n - 3, 3)$ ,  $\vartheta = (n - 3, 2, 1)$ ,  $\kappa = (n - 3, 1^3)$ .



$n \equiv 3 \pmod{4}$  : Wegen

$$Y^\zeta \oplus S^\gamma \cong Y^\zeta \oplus D^\beta \oplus \mathbf{1} \cong M^\zeta \cong S^\kappa \oplus S^\gamma$$

ist  $S^\kappa \cong Y^\zeta$ . Für  $\lambda \in \{\alpha, \zeta\}$  gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(D^\lambda, Y^\kappa) &\cong \text{Hom}(D^\lambda, Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\vartheta) \\ &\cong \text{Hom}(D^\lambda, Y^{\gamma-1}\uparrow) \cong \text{Hom}(D^\lambda\downarrow, Y^{\gamma-1}). \end{aligned}$$

Für  $\lambda = \alpha$  ist dies eindimensional, da  $D^\alpha\downarrow \cong Y^{\alpha-1}$  ist. Für  $\lambda = \zeta$  ist es 0 wegen  $D^\zeta\downarrow \rightarrow D^{\beta-1} \mid D^{\zeta-1} \mid D^{\beta-1}$ . Daher ist  $\text{soc}(Y^\kappa) = \text{soc}(S^\kappa) \cong D^\alpha$ .

Es sei  $B := \text{rad}(Y^\kappa)/\text{soc}(Y^\kappa)$ . Wegen  $S^\kappa \leq Y^\kappa$  liegt  $D^\zeta$  im Sockel von  $B$ . Aus Dimensionsgründen ist  $[B : D^\zeta] = [Y^\kappa : D^\zeta] \leq 2$  und  $[B : D^\alpha] = [Y^\kappa : D^\alpha] - 2 \geq 2$ . Wir wissen, dass  $S^{\alpha-1*} \hookrightarrow Y^{\gamma-1}$  ist. Wegen  $Y^{\gamma-1}\uparrow \rightarrow Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\vartheta$ ,  $S^{\alpha-1*}\uparrow \rightarrow S^{\alpha*} \oplus (S^{\beta*} \mid S^{\gamma*})$  und  $S^{\alpha*} \cong D^\alpha$  sowie der Blockzugehörigkeit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(D^\alpha, Y^\kappa/D^\alpha) &\cong \text{Hom}(D^\alpha, Y^{\gamma-1}\uparrow/S^{\alpha-1*}\uparrow) \cong \text{Hom}(D^\alpha, (Y^{\gamma-1}/S^{\alpha-1*})\uparrow) \\ &\cong \text{Hom}(D^\alpha\downarrow, Y^{\gamma-1}/S^{\alpha-1*}) \cong \text{Hom}(Y^{\alpha-1}, Y^{\gamma-1}/S^{\alpha-1*}) = 0. \end{aligned}$$

Damit ist  $\text{soc}(B) \cong D^\zeta$ . Wegen der Selbstdualität ist daher  $[B : D^\zeta] = [B : D^\alpha] = 2$ .

Nun sei  $B' := \text{rad}(B)/\text{soc}(B)$ . Dann ist  $B' \rightarrow 2 \cdot D^\alpha$ . Es gilt noch herauszufinden, ob  $B'$  uniserial oder eine direkte Summe ist. Es ist  $\text{soc}(B') \cong \text{soc}(Y^\kappa/S^\zeta)$ . Wir argumentieren analog zu oben: Wir wissen, dass  $S^{\beta-1} \hookrightarrow Y^{\gamma-1}$  ist. Wegen  $S^{\beta-1}\uparrow \rightarrow S^\zeta \oplus (S^\vartheta \mid S^\beta)$  sowie der Blockzugehörigkeit gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(D^\alpha, Y^\kappa/S^\zeta) &\cong \text{Hom}(D^\alpha, Y^{\gamma-1}\uparrow/S^{\beta-1}\uparrow) \cong \text{Hom}(D^\alpha, (Y^{\gamma-1}/S^{\beta-1})\uparrow) \\ &\cong \text{Hom}(D^\alpha\downarrow, Y^{\gamma-1}/S^{\beta-1}) \cong \text{Hom}(Y^{\alpha-1}, Y^{\gamma-1}/S^{\beta-1}). \end{aligned}$$

In 4.2.4 (b) haben wir festgestellt, dass Letzteres eindimensional ist. Also ist  $B'$  und damit auch  $Y^\kappa$  uniserial.

Nun sei  $n$  gerade. Dann ist die Struktur von  $Y^\kappa$  deutlich komplexer. Abgesehen vom Fall  $n = 4$  beschränken wir uns daher im Wesentlichen auf die Struktur von  $S^\kappa$ .

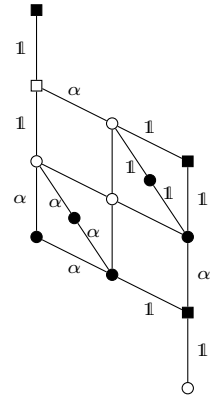
Für  $n = 4$  ist  $S^\kappa = \text{sgn}_4 \cong \mathbf{1}$ . Da  $\kappa$  außer durch (4) und  $\alpha$  von keiner 2-regulären Partitionen von 4 dominiert wird, sind alle Kompositionsfaktoren von  $Y^\kappa$  isomorph zu  $\mathbf{1}$  oder  $D^\alpha$ . Für alle  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln  $V$  gilt:

$$\text{Hom}(V, Y^\kappa) \cong \text{Hom}(V, Y^{\gamma-1}\uparrow) \cong \text{Hom}(V\downarrow, Y^{\gamma-1}).$$

Wegen  $Y^{\gamma-1} \rightarrow \mathbf{1} \mid \mathbf{1}$  gilt:

- (a)  $\text{Hom}(\mathbf{1}, Y^\kappa) \cong \text{Hom}(\mathbf{1}, Y^{\gamma-1}) \cong \mathbb{F}_2$ ,
- (b)  $\text{Hom}(D^\alpha, Y^\kappa) \cong \text{Hom}(D^{\alpha-1}, Y^{\gamma-1}) = 0$ ,
- (c)  $\text{Hom}(S^\alpha, Y^\kappa) \cong \text{Hom}(D^{\alpha-1} \oplus \mathbf{1}, Y^{\gamma-1}) \cong \mathbb{F}_2$ ,
- (d)  $\text{Hom}(Y^\alpha, Y^\kappa) \cong \text{Hom}(D^{\alpha-1} \oplus 2 \cdot \mathbf{1}, Y^{\gamma-1}) \cong \mathbb{F}_2^2$ ,
- (e)  $\text{Hom}(Y^\gamma, Y^\kappa) \cong \text{Hom}(Y^{\gamma-1} \oplus 3 \cdot D^{\alpha-1}, Y^{\gamma-1}) \cong \mathbb{F}_2^2$ .

Wegen (a) und (b) ist  $\text{soc}(Y^\kappa) \cong \text{hd}(Y^\kappa) \cong \mathbf{1}$ . Es sei  $B := \text{rad}(Y^\kappa)/\text{soc}(Y^\kappa)$ . Wegen (d) ist  $S^{\alpha*} \hookrightarrow B$ , und wegen (c) hat  $B$  genau ein  $D^\alpha$  im Sockel. (Hier fließt ein, dass es wegen  $H^1(S_4, D^\alpha) \cong \mathbb{F}_2$



nur eine nichttriviale Erweiterung von  $\alpha$  mit  $\mathbf{1}$  gibt; jedes  $D^\alpha$  in  $\text{soc}(B)$  muss daher Kopf eines zu  $S^\alpha$  isomorphen Untermoduls von  $Y^\kappa$  sein.) Es gibt genau zwei Faktormoduln von  $Y^\gamma$  mit Sockel isomorph zu  $\mathbf{1}$ , und beide sind uniseriell. Wegen (c) und (e) hat  $Y^\kappa$  einen Untermodul mit Kompositionsreihe  $\mathbf{1} \mid \mathbf{1} \mid D^\alpha$ , das heißt, es gilt  $S^\alpha \hookrightarrow B$ . Wegen der Selbstdualität von  $B$  und aus Dimensionsgründen ist daher  $B \cong S^\alpha \oplus S^{\alpha^*}$ . Damit ergibt sich der Untermodulverband von  $Y^\kappa$  wie im obigen Hasse-Diagramm angegeben. Die markierte Spechtreihe ist

$$Y^\kappa \longrightarrow S^\kappa \mid S^\gamma \mid S^\alpha \mid \mathbf{1}.$$

Für  $n = 6$  ist  $\kappa = \gamma'$  und  $S^\zeta \cong S^\beta/D^\alpha \rightarrow \mathbf{1} \mid D^\beta$ . Damit ist  $S^\kappa \cong S^{\gamma^*} \rightarrow S^\zeta \mid S^\alpha$ .

Ab jetzt sei  $n > 6$ . Aus Gründen des Blocks und der Dominanzordnung kann  $S^\kappa$  nur Kompositionsfaktoren vom Typ  $\mathbf{1}$ ,  $D^\alpha$ ,  $D^\beta$  oder  $D^\zeta$  enthalten. Mit dem James-Kriterium hat  $S^\kappa$  genau eine  $\mathbf{1}$  im Sockel, aber keine im Kopf, da  $S^{\kappa^*} \cong S^{(4,1^{n-4})}$  ist. Wegen  $S^{\gamma-1\uparrow} \rightarrow S^\vartheta \oplus (S^\kappa \mid S^\gamma)$  und  $S^{\kappa^*} \hookrightarrow S^{\kappa-1^*\uparrow} \cong S^{\kappa-1\uparrow}$  gilt für jeden  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Modul  $V$ :

$$\begin{aligned} \text{Hom}(V, S^\kappa) &\hookrightarrow \text{Hom}(V, S^{\gamma-1\uparrow}) \cong \text{Hom}(V\downarrow, S^{\gamma-1}), \\ \text{Hom}(V, S^{\kappa^*}) &\hookrightarrow \text{Hom}(V, S^{\kappa-1\uparrow}) \cong \text{Hom}(V\downarrow, S^{\kappa-1}). \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir:

$V$	$V\downarrow$	$\text{Hom}(V, S^\kappa) \hookrightarrow$		$\text{Hom}(V, S^{\kappa^*}) \hookrightarrow$	
		$n \equiv 2 \pmod{4}$	$n \equiv 0 \pmod{4}$	$n \equiv 2 \pmod{4}$	$n \equiv 0 \pmod{4}$
$D^\alpha$	$D^{\alpha-1}$	0	0	$\mathbb{F}_2$	$\mathbb{F}_2$
$D^\beta$	$D^{\beta-1}$	0	$\mathbb{F}_2$	0	0
$D^\zeta$	$D^{\zeta-1}$	0	0	$\mathbb{F}_2$	0

Damit ist  $\text{soc}(S^\kappa) \cong \mathbf{1}$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  kann  $\text{soc}(S^\kappa)$  gemäß der Tabelle neben der  $\mathbf{1}$  auch noch ein  $D^\beta$  enthalten. Dies ist auch tatsächlich der Fall: Wegen der Spechtreihe von  $S^{\gamma-1\uparrow}$  gilt

$$D^\vartheta \oplus \text{soc}(S^\kappa) \hookrightarrow \text{soc}(S^{\gamma-1\uparrow}) \hookrightarrow D^\vartheta \oplus \text{soc}(S^\kappa) \oplus \text{soc}(S^\gamma).$$

Da  $S^\gamma$  kein  $D^\beta$  im Sockel hat, ist auf jeden Fall  $[\text{soc}(S^{\gamma-1\uparrow}) : D^\beta] = [\text{soc}(S^\kappa) : D^\beta]$ , das heißt, die Einbettung  $\text{Hom}(D^\beta, S^\kappa) \hookrightarrow \text{Hom}(D^\beta, S^{\gamma-1\uparrow})$  ist sogar ein Isomorphismus. Somit ist  $\text{soc}(S^\kappa) \cong D^\beta \oplus \mathbf{1}$  für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ .

Da  $S^\gamma$  keinen Kompositionsfaktor  $D^\zeta$  enthält, gilt für  $V = S^\zeta$  die Isomorphie

$$\begin{aligned} \text{Hom}(S^\zeta, S^\kappa) &\cong \text{Hom}(S^\zeta\downarrow, S^{\gamma-1}) \cong \text{Hom}(S^{\zeta-1} \oplus S^{\beta-1}, S^{\gamma-1}) \cong \text{Hom}(S^{\beta-1}, S^{\gamma-1}) \\ &\cong \left\{ \begin{array}{ll} \text{Hom}(S^{\beta-1}, Y^{\beta-1}) & \text{für } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \text{Hom}(D^{\beta-1}, D^{\beta-1} \oplus \mathbf{1}) & \text{für } n \equiv 0 \pmod{4} \end{array} \right\} \cong \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Es gibt also nur einen nichttrivialen Homomorphismus von  $S^\zeta$  nach  $S^\kappa$ , und dieser ist eine Einbettung wegen

$n \pmod{4}$	$S^\zeta \rightarrow$	$\text{soc}(S^\kappa) \cong$
2	$\mathbf{1} \mid D^\beta \mid D^\zeta$	$\mathbf{1}$
0	$D^\beta \mid D^\alpha \mid D^\zeta$	$D^\beta \oplus \mathbf{1}$

Auf Basis der bisherigen Informationen können wir nicht überall entscheiden, ob die Einbettungen  $\text{Hom}(V, S^{\kappa^*}) \hookrightarrow \text{Hom}(V, S^{\kappa-1\uparrow})$  in den oben betrachteten Fällen für  $\text{Hom}(V, S^{\kappa-1\uparrow}) \neq 0$  Isomorphismen sind. Für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  und  $V = D^\alpha$  folgt es daraus, dass  $D^\alpha$  der einzig verbleibende Kandidat für den Sockel von  $S^{\kappa^*}$  ist. In diesem Fall ist also  $\text{hd}(S^\kappa) \cong \text{soc}(S^{\kappa^*}) \cong D^\alpha$ . Für  $n \equiv 2 \pmod{4}$  greift keine solche Argumentation.

Da (für beliebiges gerades  $n > 6$ )  $S^\kappa$  keine  $\mathbb{1}$  im Kopf hat, ist erstens

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(S^\kappa, S^\alpha) &\cong \mathrm{Hom}(S^\kappa, M^\alpha) \cong \mathrm{Hom}(S^\kappa, \mathbb{1}\uparrow) \cong \mathrm{Hom}(S^\kappa\downarrow, \mathbb{1}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(S^{\kappa-1} \oplus S^{\gamma-1}, \mathbb{1}) \cong \mathrm{Hom}(S^{\gamma-1}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{F}_2 \end{aligned}$$

und damit zweitens  $S^\alpha$  ein Faktormodul von  $S^\kappa$ . Insbesondere hat  $S^\kappa$  auf jeden Fall ein  $D^\alpha$  im Kopf.

Da  $S^\zeta$  und  $S^\alpha$  beide uniseriell sind und die Summe ihrer Dimensionen gleich der Dimension von  $S^\kappa$  ist, erhalten wir aus den obigen Berechnungen die Spechtreihe  $S^\kappa \rightarrow S^\zeta \mid S^\alpha$ . (An dieser Stelle sei noch einmal an das Beispiel 1.5.2 erinnert. Jene Aussage über Spechtreihen von Spechtmoduln über Charakteristik 2 zu Hakenpartitionen wurde für ungerades  $n$  bewiesen, und es wurde die Vermutung geäußert, dass sie auch bei geradem  $n$  zutrifft. Hier sehen wir jetzt, dass Letzteres im Fall  $m = 3$  tatsächlich zutrifft. Für  $m = 2$  haben wir es ebenfalls gesehen; dort ist die Aussage nur nicht so auffällig:  $S^\gamma \rightarrow S^\beta \mid \mathbb{1}$ .)

Damit kennen wir schon die Kompositionsfaktoren von  $S^\kappa$ :

$$S^\kappa \longrightarrow \begin{cases} D^\zeta + D^\beta + D^\alpha + 2 \cdot \mathbb{1} & \text{für } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ D^\zeta + D^\beta + 2 \cdot D^\alpha + \mathbb{1} & \text{für } n \equiv 0 \pmod{4}. \end{cases}$$

Für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  liegt damit die Struktur von  $S^\kappa$  bereits fest: Es muss einen Untermodul isomorph zu  $\mathbb{1} \oplus S^\zeta$  geben. Wenn man diesen herausfaktorisiert, bleibt nur noch der Kopf  $D^\alpha$  übrig.

Nun sei  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Da  $[S^\kappa, D^\alpha] = 1$  ist, gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(S^{\gamma*}, S^\kappa) &\cong \mathrm{Hom}(Y^\gamma, S^\kappa) \cong \mathrm{Hom}(D^{\alpha-1}\uparrow, S^\kappa) \\ &\cong \mathrm{Hom}(D^{\alpha-1}, S^\kappa\downarrow) \cong \mathrm{Hom}(D^{\alpha-1}, S^{\kappa-1} \oplus S^{\gamma-1}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(D^{\alpha-1}, D^{\alpha-1} \oplus D^{\zeta-1}) \cong \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

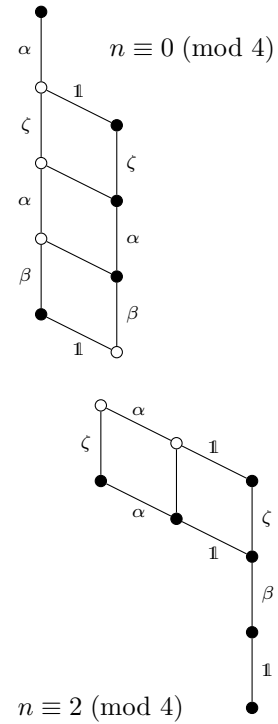
Da  $\mathrm{soc}(S^\kappa) \cong \mathbb{1}$  ist, ist das Bild des nichttrivialen Homomorphismus von  $S^{\gamma*}$  nach  $S^\kappa$  entweder isomorph zu  $S^{\gamma*}$  selbst oder zu  $S^\alpha$ . Letzteres kann aber kein Untermodul von  $S^\kappa$  sein, denn es gibt nur einen lokalen Untermodul von  $S^\kappa$ , dessen Kopf isomorph zu  $D^\alpha$  ist. Da  $S^\alpha$  erwiesenermaßen ein Faktormodul von  $S^\kappa$  ist, müsste es ein direkter Summand sein, aber  $S^\kappa$  ist unzerlegbar. Damit ist  $S^{\gamma*} \hookrightarrow S^\kappa$ . Nimmt man  $S^\zeta \hookrightarrow S^\kappa$  und die Kompositionsfaktoren von  $S^\kappa$  hinzu, dann liegt der Untermodulverband fest, wie er im nebenstehenden Hasse-Diagramm angegeben ist.

Schließlich stellen wir noch für  $n \equiv 0 \pmod{4}$  fest:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(S^\kappa, Y^\zeta) &\cong \mathrm{Hom}(S^\kappa, Y^\zeta \oplus Y^\vartheta) \cong \mathrm{Hom}(S^\kappa, Y^{\beta-1}\uparrow) \cong \mathrm{Hom}(S^\kappa\downarrow, Y^{\beta-1}) \\ &\cong \mathrm{Hom}(S^{\kappa-1} \oplus S^{\gamma-1}, Y^{\beta-1}) \cong \mathrm{Hom}(S^{\gamma-1}, Y^{\beta-1}) \cong \mathrm{Hom}(D^{\beta-1} \oplus \mathbb{1}, D^{\beta-1}) \cong \mathbb{F}_2. \end{aligned}$$

Daraus und aus der Gestalt von  $Y^\zeta$  und  $S^\kappa$  folgt, dass  $S^\kappa/\mathbb{1} \hookrightarrow Y^\zeta$  für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ .

Wie angekündigt, werden wir zum Abschluss noch den Untermodulverband zu  $Y^\zeta$  im Fall  $n \equiv 2 \pmod{4}$  vollständig herleiten. Im Fall  $n = 6$  kann man den Untermodulverband direkt mit der C-MeatAxe ausrechnen ([Rin09]). Da der Youngmodul gleich dem Permutationsmodul ist, kann man relativ leicht eine Matrixdarstellung hinschreiben. Die  $(3, 3)$ -Tabloide bilden eine  $\mathbb{F}_2$ -Basis; wir sortieren sie nach ihren aufsteigend geordneten ersten Zeilen lexikografisch (also  $\bar{1}, 2, 3/4, 5, 6 \leq \bar{1}, 2, 4/3, 5, 6 \leq \bar{1}, 2, 5/3, 4, 6 \leq \dots \leq 4, 5, 6/\bar{1}, 2, 3$ ). Damit erhalten wir folgende Matrixdarstellung:



Module: youngmodule.part33.f2

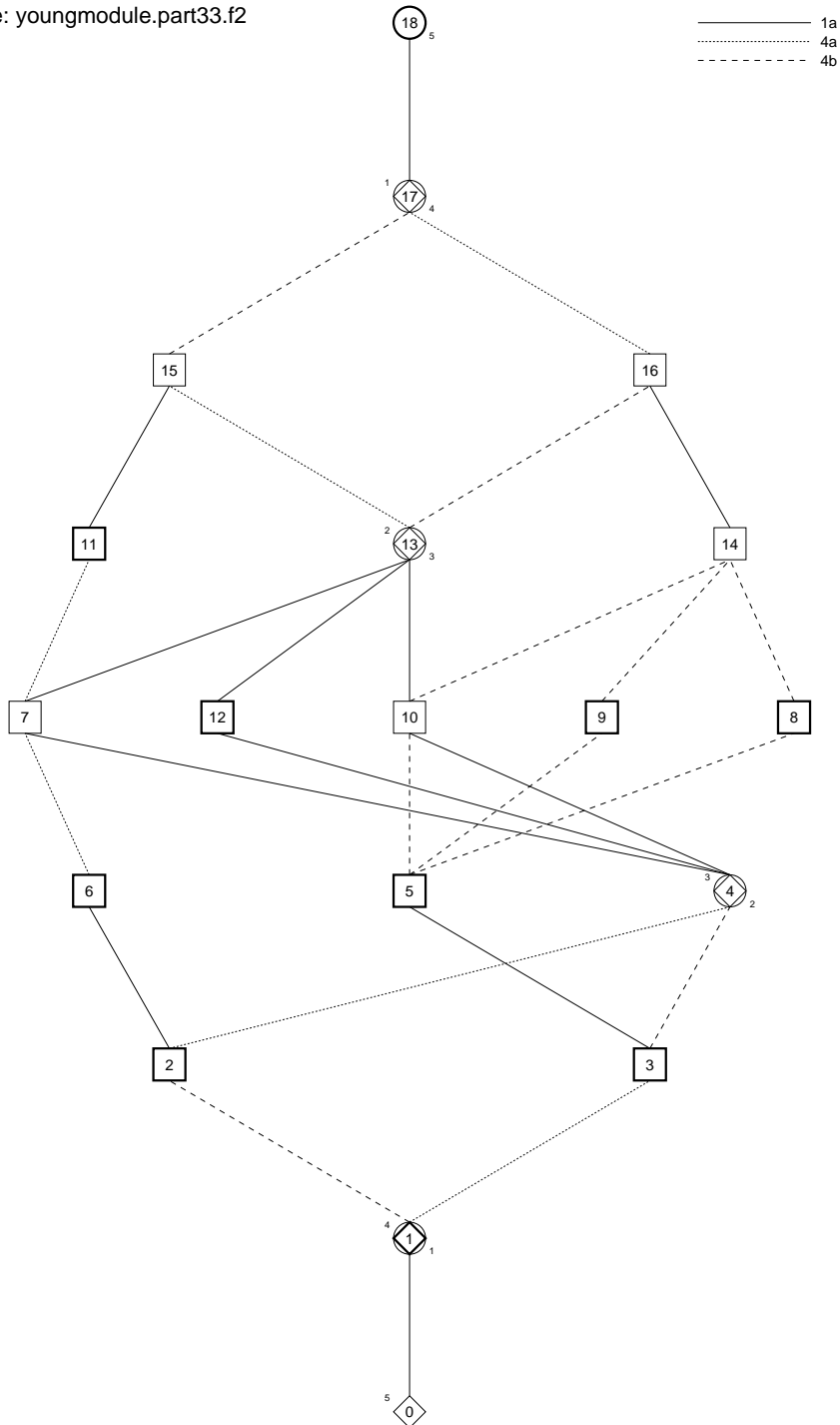
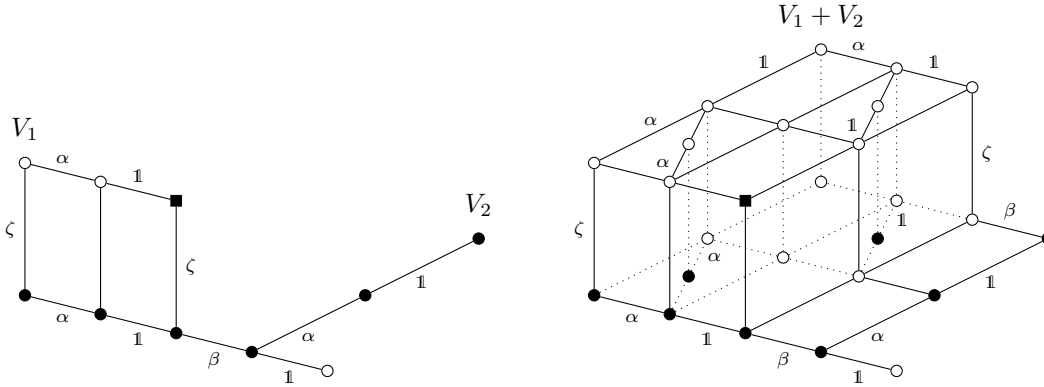


Abbildung 4.1: Der Untermodulverband von  $Y_{\mathbb{F}_2}^{(3,3)}$  gemäß der C-MeatAxe.

$\alpha = (n - 1, 1)$ ,  $\beta = (n - 2, 2)$ ,  $\gamma = (n - 2, 1^2)$ ,  $\zeta = (n - 3, 3)$ ,  $\vartheta = (n - 3, 2, 1)$ ,  $\kappa = (n - 3, 1^3)$ .



Spechtmoduln aus der Standard-Spechtreihe von  $M^\zeta = Y^\zeta$ . In Abschnitt 4.2.3 wurde bereits gezeigt, dass  $\text{soc}(Y^\zeta) \cong \text{hd}(Y^\zeta) \cong \mathbb{1}$  ist. Außerdem wissen wir mit Lemma 1.3.5, dass  $Y^\zeta$  einen Untermodul  $V_1 \cong S^\kappa$  besitzt, und aus Abschnitt 4.2.4 (e), dass  $Y^\zeta$  einen Untermodul  $V_2 \cong Y^\alpha$  besitzt. Bei beiden ist der Sockel isomorph zu  $\mathbb{1}$ , und es ist  $\text{soc}(S^\kappa/\mathbb{1}) \cong D^\beta$  und  $\text{soc}(Y^\zeta/\mathbb{1}) \cong D^\alpha$ . Also ist  $V_1 \cap V_2 \cong \mathbb{1}$ , und  $Y^\zeta/\mathbb{1}$  hat einen Untermodul der Form  $S^\kappa/\mathbb{1} \oplus Y^\alpha/\mathbb{1}$ . Damit können wir den Untermodulverband von  $V_1 + V_2$  folgendermaßen rekonstruieren:



(Der eckige Knoten steht für  $S^\zeta$ .) Wegen  $\text{hd}(Y^\zeta) \cong \mathbb{1}$  und der irreduziblen Kompositionsfaktoren von  $Y^\zeta$  ist  $Y^\zeta/(V_1 + V_2) \rightarrow D^\beta \mid \mathbb{1}$  uniserial. Insbesondere ist  $V_1 + V_2 \leq \text{rad}(Y^\zeta)$ .

Ab jetzt betrachten wir  $B := \text{rad}(Y^\zeta)/\text{soc}(Y^\zeta)$ . Sobald wir dessen Untermodulverband kennen, liegt wegen  $\text{soc}(Y^\zeta) \cong \text{hd}(Y^\zeta) \cong \mathbb{1}$  auch der von  $Y^\zeta$  fest. Der Plan ist folgender: Wir zeigen, dass  $B$  zwei maximale Untermoduln besitzt. Einer davon ist  $V := (V_1 + V_2)/\mathbb{1} \cong V_1/\mathbb{1} \oplus V_2/\mathbb{1}$ . Dessen Untermodulverband ist aus dem obigen Diagramm bekannt. Vom zweiten maximalen Untermodul bestimmen wir wiederum die maximalen Untermoduln. Wieder sind es zwei: Einer davon liegt in  $V$ , und der andere ist lokal, und sein Radikal liegt ebenfalls in  $V$ . Damit kann es keine weiteren Untermoduln von  $B$  geben, die nicht in  $V$  liegen, und die Struktur von  $B$  ist bekannt.

Dieses Vorgehen wird dadurch ermöglicht, dass  $Y^\zeta$  und damit auch  $B$  selbstdual ist. Zunächst bestimmen wir den Sockel (und damit auch den Kopf) von  $B$ . Dabei verwenden wir die folgende Aussage:

**Lemma 4.2.1** *Es sei  $M$  ein  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Modul und  $S$  ein Kompositionsfaktor von  $M$ . Falls  $[M : S] = 1$  ist, gibt es genau einen lokalen Untermodul von  $M$ , dessen Kopf isomorph zu  $S$  ist, und keinen Untermodul, dessen Kopf isomorph zu  $S \oplus S$  ist. Falls  $[M : S] = 2$  ist, tritt genau einer der beiden folgenden Fälle ein:*

- *Es gibt genau zwei lokale Untermoduln von  $M$ , deren Kopf isomorph zu  $S$  ist, und einer davon ist ein Untermodul des anderen.*
- *Es gibt genau drei lokale Untermoduln von  $M$ , deren Kopf isomorph zu  $S$  ist, und genau einen Untermodul, dessen Kopf isomorph zu  $S \oplus S$  ist.*

*Beweis:* Dies ist ein Spezialfall der Aussage aus [MO11] (2.7) b). □

Dieses Lemma können wir für  $M := B$  anwenden, da  $D^\zeta$  als Kompositionsfaktor von  $B$  mit Vielfachheit 1 auftritt und alle anderen (nämlich  $\mathbb{1}$ ,  $D^\alpha$  und  $D^\beta$ ) jeweils mit Vielfachheit 2. Für jeden dieser Kompositionsfaktoren bestimmen wir seine Vielfachheit im Sockel von  $B$ .

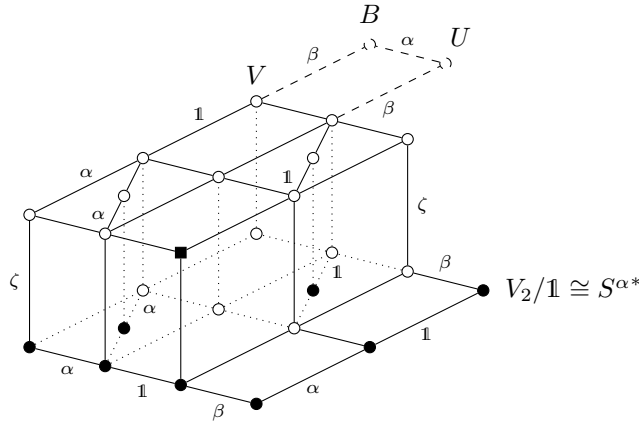
$D^\zeta$ : Es gibt nur einen lokalen Untermodul von  $B$  mit Kopf  $D^\zeta$ , und das ist  $S^\zeta/\mathbb{1}$ . Wegen  $S^\zeta/\mathbb{1} \rightarrow D^\beta \mid D^\zeta$  liegt der Kopf von  $S^\zeta/\mathbb{1}$  nicht im Sockel von  $B$ . Damit kann  $D^\zeta$  nicht in  $\text{soc}(B)$  vorkommen, sonst wäre dies ein zweiter lokaler Untermodul von  $B$  mit Kopf  $D^\zeta$ .

$D^\beta$ : Wegen  $D^\beta \leq V$  kommt  $D^\beta$  mindestens einmal in  $\text{soc}(B)$  vor. Da  $Y^\zeta = M^\zeta$  eine Spechtreihe  $S^\zeta \mid S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbb{1}$  besitzt, gibt es einen Untermodul  $U$  von  $Y^\zeta$  mit Spechtreihe  $S^\zeta \mid S^\beta$ . Wegen  $S^\zeta \rightarrow \mathbb{1} \mid D^\beta \mid D^\zeta$  und  $S^\beta \rightarrow D^\alpha \mid \mathbb{1} \mid D^\beta$  ist  $D^\beta \hookrightarrow \text{hd}(U) \hookrightarrow D^\beta \oplus D^\zeta$ . (Im Endeffekt wird sich herausstellen, dass  $\text{hd}(U) \cong D^\beta$  ist, aber im Moment kommen wir auch ohne diese Information aus.) Damit besitzt  $U$  einen lokalen Untermodul mit Kopf  $D^\beta$  (entweder sich selbst oder einen maximalen Untermodul mit Faktormodul  $D^\zeta$ ), der einen weiteren lokalen Untermodul mit Kopf  $D^\beta$  enthält (und aus der Kompositionsreihe von  $S^\zeta$  resultiert). Damit sind wir in Lemma 4.2.1 im ersten Fall, das heißt,  $U$  (und damit auch  $B$ ) kann keinen Untermodul mit Kopf  $D^\beta \oplus D^\beta$  enthalten. Also kommt  $D^\beta$  nur einmal in  $\text{soc}(B)$  vor.

$D^\alpha$ : Wegen  $D^\alpha \leq V$  kommt  $D^\alpha$  mindestens einmal in  $\text{soc}(B)$  vor. Am obigen Hasse-Diagramm von  $V_1 + V_2$  sieht man, dass  $V$  (und damit auch  $B$ ) drei lokale Untermoduln mit Kopf  $D^\alpha$  besitzt. Damit sind wir in Lemma 4.2.1 im zweiten Fall. Es kann in  $B$  keinen weiteren Untermodul mit Kopf  $D^\alpha$  geben; insbesondere kann  $\text{soc}(B)$  keinen zweiten direkten Summanden  $D^\alpha$  besitzen, da dieser lokal wäre.

$\mathbb{1}$ : Am obigen Hasse-Diagramm von  $V_1 + V_2$  sieht man, dass  $V$  (und damit auch  $B$ ) drei lokale Untermoduln mit Kopf  $\mathbb{1}$  besitzt. Damit sind wir in Lemma 4.2.1 wieder im zweiten Fall. Da  $B$  keinen weiteren Untermodul mit Kopf  $\mathbb{1}$  besitzen kann, gibt es insbesondere in  $\text{soc}(B)$  keine  $\mathbb{1}$ .

Damit ist  $\text{hd}(B) \cong \text{soc}(B) \cong D^\alpha \oplus D^\beta$ . Daraus ergibt sich, dass  $B$  zwei maximale Untermoduln besitzt: einerseits  $V$  (wobei  $B/V \cong D^\beta$  ist) und einen weiteren, nennen wir ihn  $U$ , mit  $B/U \cong D^\alpha$ . Wegen  $V/\text{rad}(B) \cong B/U \cong D^\alpha$  und  $\text{hd}(V) \cong D^\zeta \oplus D^\alpha \oplus \mathbb{1}$  gibt es nur einen Knoten im Hasse-Diagramm von  $V$ , der als  $\text{rad}(B)$  in Frage kommt.



(Dieses Diagramm dient nur zur Illustration und hat gewissermaßen vorläufigen Charakter. Das sollen die gestrichelten Linien außerhalb von  $V$  andeuten. Es impliziert nur Teilaussagen über die Struktur von  $B$  und  $U$ .)

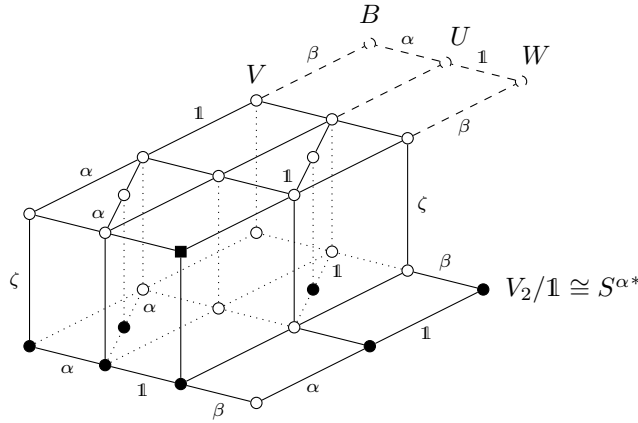
Wegen der Selbstdualität von  $B$  ist  $U \cong (B/D^\alpha)^*$ . Als Nächstes bestimmen wir  $\text{hd}(U) \cong \text{soc}(U^*) \cong \text{soc}(B/D^\alpha) \cong \text{soc}(Y^\zeta/S^\alpha)$ . In einer Vorüberlegung stellen wir fest, dass für jeden  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Modul  $M$  im Hauptblock gilt:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(M, Y^\zeta/V_2) &\cong \text{Hom}(M, (Y^\vartheta \oplus Y^\zeta)/Y^\alpha) \cong \text{Hom}(M, (Y^{\beta-1}\uparrow)/(\mathbb{1}_{S_{n-1}}\uparrow)) \\ &\cong \text{Hom}(M, (Y^{\beta-1}/\mathbb{1}_{S_{n-1}})\uparrow) \cong \text{Hom}(M\downarrow, Y^{\beta-1}/\mathbb{1}_{S_{n-1}}) \cong \text{Hom}(M\downarrow, (S^{\beta-1})^*). \end{aligned}$$

(Hierbei wurde verwendet, dass  $Y^\vartheta$  im Gegensatz zu  $Y^\zeta$  und  $Y^\alpha$  nicht im Hauptblock liegt, und dass  $Y^{\beta-1}/\mathbb{1} \cong (S^{\beta-1})^*$  ist.) Wir haben zuvor festgestellt, dass für  $\lambda \in \{(n), \alpha, \beta, \zeta\}$  der eingeschränkte Modul  $D^\lambda\downarrow$  isomorph zu  $D^{\lambda-1}$  ist. Somit erhalten wir wegen  $(S^{\beta-1})^* \rightarrow D^\beta \mid \mathbb{1}$ :

$$\text{Hom}(M, Y^\zeta/V_2) \cong \text{Hom}(M\downarrow, (S^{\beta-1})^*) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & \text{für } M = D^\beta, \\ 0 & \text{für } M \in \{\mathbb{1}, D^\alpha, D^\zeta\}. \end{cases}$$

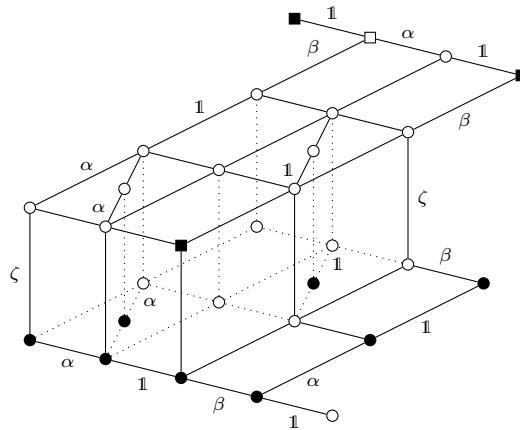
Damit ist  $\text{soc}(Y^\zeta/V_2) \cong D^\beta$ . Daraus und aus  $\text{soc}(Y^\zeta/\mathbb{1}) = \text{soc}(B) \cong D^\alpha \oplus D^\beta$  folgt, dass  $\text{soc}(Y^\zeta/S^\alpha)$  und damit auch  $\text{hd}(U)$  isomorph zu  $D^\beta \oplus \mathbb{1}$  ist. (Enthielte  $\text{soc}(Y^\zeta/S^\alpha)$  einen weiteren irreduziblen Modul, läge dieser auch in  $\text{soc}(Y^\zeta/V_2)$ .)



Damit besitzt  $U$  zwei maximale Untermoduln: einerseits  $\text{rad}(B) = V \cap U$  (wobei  $U/\text{rad}(B) \cong D^\beta$  ist) und einen weiteren, nennen wir ihn  $W$ , mit  $U/W \cong \mathbb{1}$ . Wegen der Selbstdualität von  $B$  ist  $W \cong (B/S^{\alpha^*})^*$ . Damit ist  $\text{hd}(W) \cong \text{soc}(W^*) \cong \text{soc}(B/S^{\alpha^*}) \cong \text{soc}(Y^\zeta/V_2) \cong D^\beta$ . (Letzteres wurde ja eben bereits ermittelt.) Damit hat  $W$  genau einen maximalen Untermodul, nämlich

$$\text{rad}(U) = \text{rad}(B) \cap W = (V \cap U) \cap W \leq V.$$

Es gibt also insgesamt nur drei Untermoduln von  $B$ , die  $V$  nicht enthalten, nämlich  $B$  selbst,  $U$  und  $W$ . Damit sind alle Untermoduln von  $B$  bekannt, und das Hasse-Diagramm von  $Y^\zeta$  hat die folgende Gestalt.



Das Diagramm ist symmetrisch, also ist tatsächlich Selbstdualität gegeben. Die Standard-Spechtreihe von  $Y^\zeta = M^\zeta$ , markiert durch die eckigen Knoten, liegt aufgrund der Kompositionserfolgen der beteiligten Spechtmoduln fest.

Die Argumentation für den Fall  $n > 6$  lässt sich größtenteils auf den Fall  $n = 6$  übertragen, aber nicht vollständig. Dadurch, dass für  $n = 6$  der Kompositionsfaktor  $D^\zeta$  entfällt, ist nicht ohne Weiteres klar, warum wir uns in Lemma 4.2.1 für  $M = Y^\zeta$  und  $S = D^\beta$  im ersten und nicht im zweiten Fall befinden. Daher verzichten wir hier auf einen theoretischen Beweis und belassen es bei der Berechnung durch die C-MeatAxe.

---

$\alpha = (n - 1, 1)$ ,  $\beta = (n - 2, 2)$ ,  $\gamma = (n - 2, 1^2)$ ,  $\zeta = (n - 3, 3)$ ,  $\vartheta = (n - 3, 2, 1)$ ,  $\kappa = (n - 3, 1^3)$ .



### 4.2.6 Kohomologie

Wir haben oben bereits die  $i$ -te Kohomologie aller vorkommenden Permutations- und Youngmoduln für  $i \in \{0, 1, 2\}$  ermittelt. Außerdem ist bei allen betrachteten Moduln der Fixpunkt-Untermodul und damit die 0-te Kohomologie bekannt. Nun werfen wir noch einen Blick auf die Aussagen, die sich auf beliebiges  $i$  beziehen. Zunächst wissen wir, dass Young-, Specht- und irreduzible  $\mathbb{F}_2 S_n$ -Moduln, die nicht im Hauptblock liegen, keine Kohomologie haben. Dies fließt in mehrere der folgenden Beweise mit ein.

**Folgerung 4.2.2** *Es sei  $i \in \mathbb{N}_0$  und  $n \in \mathbb{N}$ .*

(a) *In (4.1) wurde bereits gezeigt:*

$$\begin{aligned} H^i(S_n, \mathbb{1}) &\cong H^i(S_{n+1}, \mathbb{1}_{S_{n+1}}) && \text{für gerades } n, \\ H^i(S_n, M^\alpha) &\cong H^i(S_{n+1}, M^{\alpha+1}) && \text{für ungerades } n \geq 3. \end{aligned}$$

(b) *Wegen der Blockzugehörigkeit und des Eckmann-Shapiro-Lemmas gilt für gerades  $n \geq 4$ :*

$$H^i(S_n, Y^\gamma) \cong H^i(S_n, D^{\alpha-1}\uparrow) \cong H^i(S_{n-1}, D^{\alpha-1}) = 0.$$

(c) *Damit folgt für ungerades  $n \geq 5$ :*

$$\begin{aligned} 0 &= H^i(S_{n-1}, Y^{\gamma-1}) \cong H^i(S_n, Y^{\gamma-1}\uparrow) \\ &\cong H^i(S_n, 2 \cdot Y^\vartheta \oplus Y^\kappa) \cong H^i(S_n, Y^\vartheta) \oplus H^i(S_n, Y^\vartheta). \end{aligned}$$

*Damit ist  $H^i(S_n, Y^\vartheta) = 0$ .*

(d) *Damit wiederum folgt für gerades  $n \geq 4$ :*

$$\begin{aligned} H^i(S_n, Y^\beta) &\cong H^i(S_{n+1}, Y^{\beta}\uparrow) \\ &\cong \begin{cases} H^i(S_{n+1}, Y^{\vartheta+1} \oplus Y^{\zeta+1} \oplus Y^{\beta+1}) & \text{für } n \equiv 2 \pmod{4}, \\ H^i(S_{n+1}, Y^{\vartheta+1} \oplus Y^{\zeta+1} \oplus Y^{\beta+1} \oplus 2 \cdot Y^{\alpha+1}) & \text{für } n \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases} \\ &\cong H^i(S_{n+1}, Y^{\beta+1}). \end{aligned}$$

(e) *Außerdem gilt für gerades  $n \geq 4$ :*

$$H^i(S_n, M^\kappa) \cong H^i(S_n, Y^\kappa \oplus 2 \cdot Y^\vartheta \oplus 2 \cdot Y^\gamma) \cong H^i(S_n, Y^\kappa).$$

(f) *Für gerades  $n \geq 6$  gilt:*

$$H^i(S_n, Y^\zeta) \cong H^i(S_n, Y^\vartheta \oplus Y^\zeta) \cong H^i(S_n, Y^{\beta-1}\uparrow) \cong H^i(S_{n-1}, Y^{\beta-1}).$$

(g) *Schließlich erhalten wir für ungerades  $n \geq 5$ :*

$$H^i(S_n, D^\vartheta) \cong H^i(S_n, D^\vartheta \oplus D^\zeta) \cong H^i(S_n, D^{\beta}\uparrow) \cong H^i(S_{n-1}, D^{\beta-1}).$$

Die Kohomologie des trivialen Moduls und der Moduln zur Partition  $\alpha$  haben wir bereits in Abschnitt 4.2.1 angesprochen. Für  $n = 5$  wurde die zweite Kohomologie von  $D^\beta$ ,  $S^\beta$ ,  $S^{\beta*}$ ,  $S^\gamma$ ,  $S^{\gamma*}$ ,  $S^\vartheta$  und  $S^{\vartheta*}$  mit Hilfe der GAP-Funktion `SecondCohomologyDimension` aus dem GAP-Paket `cohomolo` errechnet, ebenso die von  $S^\gamma$ ,  $S^{\gamma*}$ ,  $S^\zeta$ ,  $S^{\zeta*}$ ,  $S^\kappa$  und  $S^{\kappa*}$  im Fall  $n = 6$ .

Über exakte Kohomologiesequenzen werden nun alle oben in den Tabellen kursiv gedruckten Kohomologie-Dimensionen ermittelt. Dabei nutzen wir die oben ermittelten Strukturaussagen aus, um geeignete kurze exakte Sequenzen zu finden. Wir verwenden im Folgenden wieder die Notation aus (2.5). Insbesondere sind die normal gedruckten Dimensionen aus früheren Berechnungen bekannt, und die kursiv gedruckten ergeben sich aus den anderen aufgrund der Exaktheit der Kohomologiesequenzen.

- (a) Für ungerades  $n$  kennen wir die Kohomologie von  $S^\gamma$  wegen dessen Isomorphie zu  $Y^\beta$  bzw.  $Y^\beta \oplus \mathbb{1}$ . Für  $n \equiv 2 \pmod{4}$  verwenden wir für die Kohomologie von  $S^\gamma$  und  $S^{\gamma^*}$ :

$i$	$S^\gamma$	$Y^\gamma$	$Y^\beta$	$Y^\beta$	$Y^\gamma$	$S^{\gamma^*}$
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	2
2	1	0	2	2	0	

- (b) Kohomologie von  $D^\beta$ ,  $S^\beta$ ,  $S^{\beta^*}$ ,  $S^\gamma$  und  $S^{\gamma^*}$  für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ :

Es existiert ein Untermodul  $V \leq Y^\gamma$ , der isomorph zu  $D^{\beta+1}$  und damit selbstdual ist. Weiter gilt  $S^\beta \hookrightarrow V$  und  $V/S^\beta \cong D^\alpha$ , außerdem ist  $\text{soc}(Y^\gamma/V) \cong \mathbb{1}$  und  $(Y^\gamma/V)/\mathbb{1} \cong S^{\gamma^*}$ . Damit erhalten wir Folgendes:

$i$	$S^\gamma$	$Y^\gamma$	$Y^\gamma/S^\gamma$	$S^{\alpha^*}$	$S^\gamma$	$D^\beta$
0	0	0	1	0	0	0
1	1	0		0	1	1
2		0		0		

$i$	$V$	$Y^\gamma$	$Y^\gamma/V$	$S^\beta$	$S^\gamma$	$\mathbb{1}$	$S^\beta$	$V$	$D^\alpha$
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0			1	1		1	1

Wegen der Exaktheit ist  $1 \leq \dim(H^1(S_n, S^\beta)) \leq 1$ .

$i$	$D^\alpha$	$V$	$S^{\beta^*}$	$D^\beta$	$S^{\beta^*}$	$D^\alpha$
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1		1		1
2		1				2

Wegen der Exaktheit ist  $1 \leq \dim(H^1(S_n, S^{\beta^*})) \leq 1$ .

Der Versuch, die Spechtreihe  $Y^\gamma/S^\gamma \rightarrow S^\beta | S^\alpha$  auszunutzen, liegt auf der Hand. Allerdings führt er beim jetzigen Stand der Dinge zu keinem neuen Ergebnis. Statt dessen verwenden wir

$$\mathbb{1} \oplus D^\alpha \hookrightarrow Y^\gamma/S^\gamma, \quad (Y^\gamma/S^\gamma)/(\mathbb{1} \oplus D^\alpha) \cong S^{\beta^*}, \quad (Y^\gamma/S^\gamma)/\mathbb{1} \cong V.$$

Dies liefert folgende Kohomologie-Tabellen:

$i$	$\mathbb{1} \oplus D^\alpha$	$Y^\gamma/S^\gamma$	$S^{\beta^*}$	$\mathbb{1}$	$Y^\gamma/S^\gamma$	$V$
0	1	1	0	1	1	0
1	2		1	1		1
2	3			2		

Wegen der Exaktheit ist  $2 \leq \dim(H^1(S_n, Y^\gamma/S^\gamma)) \leq 2$ . Damit erhalten wir:

$i$	$S^\gamma$	$Y^\gamma$	$Y^\gamma/S^\gamma$
0	0	0	1
1	1	0	2
2	2	0	

$i$	$\mathbb{1} \oplus D^\beta$	$S^{\gamma^*}$	$D^\alpha$	$\mathbb{1}$	$S^{\gamma^*}$	$S^{\beta^*}$
0	1	1	0	1	1	0
1	2		1	1		1

Wegen der Exaktheit ist  $2 \leq \dim(H^1(S_n, S^{\gamma^*})) \leq 2$ .

(c) Erste Kohomologie von  $D^\beta$ ,  $S^\beta$  und  $S^{\beta*}$  für  $n \equiv 1 \pmod{4}$ :

Einerseits ist  $H^1(S_n, D^\beta) \neq 0$  wegen der Exaktheit von

$$\underbrace{H^0(S_n, S^{\beta*})}_{\cong 0} \longrightarrow \underbrace{H^0(S_n, \mathbb{1})}_{\cong \mathbb{F}_2} \longrightarrow H^1(S_n, D^\beta).$$

Andererseits ist  $\text{res}_{S_{n-1}}^{S_n} : H^1(S_n, D^\beta) \rightarrow H^1(S_{n-1}, D^\beta \downarrow)$  injektiv, da  $n$  ungerade ist, und eben haben wir gesehen, dass  $H^1(S_{n-1}, D^\beta \downarrow) \cong \mathbb{F}_2$  ist (siehe Kohomologie von  $V$ ). Daher ist auch  $H^1(S_n, D^\beta) \cong \mathbb{F}_2$ .

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} i & S^\beta & Y^\beta & \mathbb{1} & \mathbb{1} & S^\beta & D^\beta \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 2 & 1 & 1 & & 1 \end{array}$$

Wegen der Exaktheit ist  $2 \leq \dim(H^1(S_n, S^\beta)) \leq 2$ .

$$\begin{array}{c|ccc|ccc} i & \mathbb{1} & Y^\beta & S^{\beta*} & D^\beta & S^{\beta*} & \mathbb{1} \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & & 1 & & 1 \end{array}$$

Wegen der Exaktheit ist  $1 \leq \dim(H^1(S_n, S^{\beta*})) \leq 1$ .

An dieser Stelle sollten wir kurz auf die in der Einleitung des Kapitels angesprochene Aussage aus [MR97] zu sprechen kommen. Sie lautet:

**Lemma 4.2.3** ([MR97], Lemma 5.2) *Es sei  $k$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik 2. Dann gilt für ungerades  $n > 5$ :*

$$\dim(\text{Ext}_{kS_n}^1(D^{(n)}, D^{(n-2,2)})) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv 3 \pmod{4} \text{ ist,} \\ 2, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod{4} \text{ ist.} \end{cases}$$

Wenn diese Aussage über  $k$  gilt, muss sie auch schon über  $\mathbb{F}_2$  gelten, und wegen  $\text{Ext}_{kS_n}^1(D^{(n)}, D^{(n-2,2)}) \cong H^1(S_n, D^\beta)$  steht sie im Widerspruch dazu, dass mit der Argumentation aus Teil (c) für  $n \equiv 1 \pmod{4}$  gilt, dass  $H^1(S_n, D^\beta) \cong \mathbb{F}_2$  ist.

Die Argumentation im Beweis von Lemma 4.2.3 läuft im Wesentlichen so: Es gibt einen uniserialen  $kS_n$ -Modul  $V$  mit Kompositionsreihe  $V \rightarrow D^\beta \mid D^\beta$ , von dem man aus Gründen, die hier nicht weiter ausgeführt werden sollen, die erste Kohomologie kennt. Jetzt wird geschlossen, dass  $H^1(S_n, V) \cong H^1(S_n, D^\beta)$  ist. Aber dieser Schluss ist so nicht zulässig. Dazu betrachten wir die exakte Kohomologie-Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(S_n, D^\beta) \longrightarrow H^1(S_n, V) \longrightarrow H^1(S_n, D^\beta).$$

Falls  $H^1(S_n, V)$  eindimensional ist, folgt daraus in der Tat, dass auch  $H^1(S_n, D^\beta)$  eindimensional ist. Falls aber  $H^1(S_n, V)$  eine höhere Dimension hat, kann man lediglich schließen, dass die Dimension von  $H^1(S_n, D^\beta)$  mindestens halb und höchstens genau so hoch ist. Da für  $n \equiv 1 \pmod{4}$   $H^1(S_n, V)$  zweidimensional ist, folgt in diesem Fall also nur, dass  $H^1(S_n, D^\beta)$  entweder Dimension 1 oder Dimension 2 hat. Und eben haben wir gesehen, dass die Dimension in der Tat gleich 1 ist und nicht, wie in Lemma 4.2.3 behauptet, gleich 2.

Als Folgefehler aus Lemma 4.2.3 ergibt sich in Theorem 5.1 von [MR97], dass auch für  $n \equiv 2 \pmod{4}$   $H^1(S_n, D^\beta)$  zweidimensional sein müsste. Im folgenden Beweis sehen wir, warum auch das nicht der Fall ist.

(d) Erste Kohomologie von  $S^{\beta^*}$ ,  $S^\beta$  und  $D^\beta$  für  $n \equiv 2 \pmod{4}$ :

$i$	$S^{\alpha^*}$	$Y^\beta$	$S^{\beta^*}$	$S^\beta$	$S^\gamma$	$\mathbf{1}$	$S^{\alpha^*}$	$S^\beta$	$D^\beta$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1
2	0	2			1	2	0		

(e) Erste Kohomologie von  $S^\zeta$  für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ :

$i$	$S^{\beta^*}$	$S^\zeta$	$D^\zeta$	$S^\zeta$	$Y^\zeta$	$S^\beta$
0	0	0	0	0	0	0
1	1				1	1

Wegen der Exaktheit ist  $1 \leq \dim(H^1(S_n, S^\zeta)) \leq 1$ .

(f) Wir betrachten die Partition  $\vartheta$  bei ungeradem  $n$ :

Für die erste Kohomologie von  $D^\vartheta$  verwenden wir  $H^1(S_n, D^\vartheta) \cong H^1(S_{n-1}, D^{\beta-1})$  aus Folgerung 4.2.2 (g).

Da  $\alpha$  nicht im Hauptblock liegt, gilt mit Eckmann-Shapiro für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ :

$$H^i(S_n, S^{\alpha-1^*} \uparrow / D^\alpha) \cong H^i(S_n, S^{\alpha-1^*} \uparrow) \cong H^i(S_{n-1}, S^{\alpha-1^*}).$$

Für  $i \in \{0, 1, 2\}$  ist diese Kohomologie trivial. Wir wissen, dass  $Y^\vartheta$  einen Untermodul  $V \cong S^{\alpha-1^*} \uparrow / D^\alpha$  besitzt, für den  $Y^\vartheta / V \cong S^{\vartheta^*}$  ist. Wegen der Selbstdualität ist dann  $Y^\vartheta / S^{\vartheta} \cong V^*$ , und es ist

$$H^i(S_n, V^*) \cong H^i(S_n, S^{\alpha-1} \uparrow) \cong H^i(S_{n-1}, S^{\alpha-1}).$$

Damit erhalten wir für  $n > 5$ :

$i$	$V$	$Y^\vartheta$	$S^{\vartheta^*}$	$S^\vartheta$	$Y^\vartheta$	$V^*$
0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	2
2	0	0		2	0	3

(g) Die Aussage  $H^1(S_n, S^{\kappa^*}) \cong H^1(S_n, S^{\zeta^*})$  für gerades  $n \geq 6$  ergibt sich aus:

$i$	$S^{\alpha^*}$	$S^{\kappa^*}$	$S^{\zeta^*}$
0	0	0	0
1	0		
2	0		

Für  $6 < n \equiv 2 \pmod{4}$  erhalten wir mit  $S^{\gamma-1} \uparrow \rightarrow (S^\kappa \mid S^\gamma) \oplus S^\vartheta$  und Eckmann-Shapiro die Aussage  $H^1(S_n, S^\kappa) \cong \mathbb{F}_2^2$  aus

$i$	$S^\kappa$	$S^{\gamma-1} \uparrow$	$S^\gamma$
0	1	1	0
1	2	2	0
2		4	1

Damit sind alle Aussagen aus Abschnitt 4.1 bewiesen.

### 4.3 Auf der Suche nach $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen

Das Ziel ist wieder, wie schon bei ungeradem  $p$ , für  $n \geq 2\iota$  die Existenz einer  $(2, \iota)$ -speziellen Partition  $\lambda \vdash n$  nachzuweisen. Für ungerades  $\iota$  wird dieses Problem gelöst, für gerades  $\iota$  bleibt es offen. Wir müssen hier anders vorgehen, als in Kapitel 3, da viele Aussagen und Techniken, die wir bei ungeradem  $p$  verwendet haben, für  $p = 2$  keine Gültigkeit besitzen. Der aktuelle Abschnitt befasst sich damit, was man mit den vorhandenen Mitteln tun kann und was nicht.

Für den Moment stellen wir den Spezialfall  $p = 2$  hintan und überlegen uns, wie man  $(p, \iota)$ -spezielle Elemente in  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  für beliebiges  $p \in \mathbb{P}$  findet. Dazu halten wir zunächst fest, dass es genügt, eine Erzeugermenge der Kohomologiegruppe zu testen.

**Lemma 4.3.1** *Es sei  $\lambda \vdash n$   $(p, \iota)$ -speziell und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) = \langle \bar{\alpha}_i \mid 1 \leq i \leq m \rangle$  für gewisse Nebenklassen  $\bar{\alpha}_i$  von Faktorensystemen. Dann ist für ein  $1 \leq k \leq n$  der Erzeuger  $\bar{\alpha}_k$   $(p, \iota)$ -speziell.*

*Beweis:* Da  $\lambda$   $(p, \iota)$ -speziell ist, enthält  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  ein  $(p, \iota)$ -spezielles Element  $\bar{\alpha}'$ . Dieses lässt sich schreiben als  $\sum_{i=1}^m t_i \cdot \bar{\alpha}_i$  für gewisse  $t_i \in \mathbb{Z}$ . Daher gilt für jedes Produkt  $g \in S_n$  aus  $\iota$  disjunkten  $p$ -Zykeln:

$$0 \neq \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}(\bar{\alpha}') = \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n} \left( \sum_{i=1}^m t_i \cdot \bar{\alpha}_i \right) = \sum_{i=1}^m t_i \cdot \text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}(\bar{\alpha}_i).$$

Daher ist  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}(\bar{\alpha}_k) \neq 0$  für mindestens ein  $1 \leq k \leq m$ , und die Behauptung folgt.  $\square$

Das ist insofern praktisch, als anscheinend für sehr viele, wenn nicht gar die meisten Partitionen  $\lambda$  die Gruppe  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  zyklisch ist, wie die in [Web09b] festgehaltenen Kohomologie-Berechnungen nahe legen. Das Lemma geht ein in den folgenden Algorithmus, mit dem man eine Partition  $\lambda$  auf  $(p, \iota)$ -Spezialität testen kann.

**Algorithmus 4.3.2** *Es sei  $p \in \mathbb{P}$ ,  $\iota \in \mathbb{N}$  und  $n \geq p\iota \geq 3$ . Weiter sei  $k := \text{Rang}(S^\lambda)$ . Die Präsentation  $G_n$  der  $S_n$  aus (2.8) hat 2 Erzeuger, und sie hat  $r := \lfloor n/2 \rfloor + 2$  Relationen. Die beiden Erzeuger sind  $a := (1, 2)$  und  $b := (1, 2, \dots, n)$ . Wir nehmen an, dass wir eine Matrixdarstellung der  $S_n$  gegeben haben (zum Beispiel aus der GAP-Bibliothek `spechtmats.g`).*

- Wir stellen die Zassenhaus-Matrix  $Z_\lambda \in \mathbb{Z}^{r \times 2k}$  zu dieser Präsentation auf, wie auf Seite 66 beschrieben.

Es sei  $k' := \text{Rang}(Z_\lambda)$ . Gemäß Folgerung 2.5.7 ist  $k' = k$  für  $\lambda \neq (n)$  und  $k' = 2$  für  $\lambda = (n)$ .

- Wir bringen  $Z_\lambda$  mit Hilfe geeigneter Matrizen  $S \in \text{GL}_{r \times k}(\mathbb{Z})$  und  $T \in \text{GL}_{2k}(\mathbb{Z})$  auf Invariantenteilerform  $SZ_\lambda T^{-1}$  mit Invariantenteilern  $e_1, \dots, e_{k'}$ .

Mit Satz 2.4.3 (b) ist dann  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \bigoplus_{j=1}^{k'} \mathbb{Z}/e_j\mathbb{Z}$ . Falls  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  ein  $(p, \iota)$ -spezielles Element enthält, kann dieses nur in einem der direkten Summanden liegen, dessen zugehöriger Invariantenteiler von  $p$  geteilt wird. Wir setzen  $k''$  auf die Anzahl der Invariantenteiler, die von  $p$  geteilt werden. Falls  $k'' = 0$  ist, sind wir fertig. Im Folgenden nehmen wir an, dass  $k'' \geq 1$  ist.

- Für  $1 \leq i \leq k''$  definieren wir  $w_a^{(i)}$  und  $w_b^{(i)} \in \mathbb{Q}^k$  durch

$$\begin{pmatrix} w_a^{(i)} \\ w_b^{(i)} \end{pmatrix} := T^{-1}(0, \dots, 0, \underbrace{1/e_{k'+1-i}}_{\text{Position } k'+1-i}, 0, \dots, 0)^{tr} \in \mathbb{Q}^{2k}.$$

Dies ist einfach das  $1/e_{k'+1-i}$ -fache der  $(k' + 1 - i)$ -ten Spalte von  $T^{-1}$ . Gemäß dem Beweis von Satz 2.4.3 (b) ist nun

$$H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^\lambda/S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \cong \langle \bar{\delta}^{(i)} \mid 1 \leq i \leq k'' \rangle,$$

wobei  $\delta^{(i)}$  für  $1 \leq i \leq k''$  definiert ist durch  $\delta^{(i)}(a) = w_a^{(i)} + \mathbb{Z}_{(p)}^k$  und  $\delta^{(i)}(b) = w_b^{(i)} + \mathbb{Z}_{(p)}^k$ . (Wie oben angesprochen, wird zumeist  $k'' = 1$  sein, so dass nur eine Derivation zu überprüfen ist.)

- Wir setzen

$$g := (1, 2, \dots, p)(p+1, p+2, \dots, 2p) \cdots ((\iota-1)p+1, (\iota-1)p+2, \dots, \iota p) \in S_n$$

und schreiben dieses Element als Wort in den Erzeugern  $a$  und  $b$ . Aus den Matrizen zu  $a$  und  $b$  bestimmen wir die zu  $g$  gehörige Matrix  $X$  sowie  $Z := \sum_{j=0}^{p-1} X^j$ , die zu  $S_{\mathbb{Z}}^{\lambda} \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n}$  gehörige Zassenhaus-Matrix.

Da sich die Restriktion  $\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}$  mit der Isomorphie zwischen  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}/S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  verträgt, soll nun überprüft werden, ob

$$\text{res}_{\langle g \rangle}^{S_n}(H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}/S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})) \cong \langle \overline{\delta^{(i)}|_{\langle g \rangle}} \mid 1 \leq i \leq k'' \rangle \neq 0$$

ist. Dies ist äquivalent dazu, dass  $\delta^{(i)}|_{\langle g \rangle} \notin B^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}/S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  ist für  $1 \leq i \leq k''$ .

- Mit Hilfe von  $w_a^{(i)}$  und  $w_b^{(i)}$  sowie der Darstellung von  $g$  als Wort in  $a$  und  $b$  ermitteln wir für  $1 \leq i \leq k''$  ein  $w_g^{(i)} \in \mathbb{Q}^k$  mit  $\delta^{(i)}(g) = w_g^{(i)} + \mathbb{Z}$ . Anschließend prüfen wir, ob  $Zw_g^{(i)} \in \text{col}_{\mathbb{Z}}(Z)$  ist.

Falls nun ein  $1 \leq i \leq k''$  existiert, so dass  $Zw_g^{(i)} \notin \text{col}_{\mathbb{Z}}(Z)$  ist, ist  $\delta^{(i)}|_{\langle g \rangle}$  gemäß Beispiel 2.4.4 keine innere Derivation. In diesem Fall ist  $\lambda$  also  $(p, \iota)$ -speziell. Falls kein solches  $i$  existiert, ist  $\lambda$  nicht  $(p, \iota)$ -speziell.

Im Anhang G finden sich einige GAP-Routinen, mit Hilfe derer man den Algorithmus 4.3.2 ausführen kann. Zur Bestimmung der Invariantenteilerform und der Matrix  $T^{-1}$  wird die GAP-Funktion `NormalFormIntMat` verwendet. Um eine Darstellung von  $g$  als Wort in  $a$  und  $b$  zu erhalten, wird  $g$  dort in natürlicher Weise als Produkt von Nachbartranspositionen  $(i, i+1) = b^{i-1}ab^{n-i+1}$  geschrieben. Insbesondere gilt für  $p = 2$ :

$$g = (1, 2)(3, 4) \cdots (2\iota - 1, 2\iota) = \prod_{k=0}^{\iota-1} (b^{2k}ab^{n-2k}) = (ab^2)^{\iota} \cdot b^{n-2\iota}. \quad (4.2)$$

Die Überprüfung, ob  $Zw$  in  $\text{col}_{\mathbb{Z}}(Z)$  liegt, wird, wie in Beispiel 2.4.4 angedeutet, mit Hilfe der Hermite-Normalform von  $Z$  bewerkstelligt.

Durch die Größe und Unhandlichkeit der beteiligten Matrizen ist dieser Algorithmus allerdings nur von eingeschränktem Nutzen, sowohl beim konkreten Rechnen als auch zum Beweisen theoretischer Aussagen. Für ungerades  $p$  bringt der Algorithmus nur um Weniges mehr an Erkenntnis, als wir in Kapitel 3 schon theoretisch nachgewiesen haben. Daher wenden wir uns nun wieder dem Fall  $p = 2$  zu.

Die Tabelle 4.3.3 enthält alle  $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen für  $n = 10$ . Alle Werte wurden mit den GAP-Routinen aus Anhang G zum Algorithmus 4.3.2 ausgerechnet. Weitere Beispiele finden sich im Anhang H.

**Tabelle 4.3.3**

$n$	$\iota = 1$	$\iota = 2$	$\iota = 3$	$\iota = 4$	$\iota = 5$
2	(2)				
3	(3)				
4	(4), (3, 1)	(2 <sup>2</sup> )			
5	(5), (3, 2), (3, 1 <sup>2</sup> )	(2 <sup>2</sup> , 1)			
6	(6), (5, 1), (3 <sup>2</sup> ), (3, 1 <sup>3</sup> )	(2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> )	(6), (4, 2)		
7	(7), (5, 2), (5, 1 <sup>2</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 1), (3, 1 <sup>4</sup> )	(5, 2), (2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> )	(7), (4, 2, 1), (3, 1 <sup>4</sup> )		
8	(8), (7, 1), (5, 3), (5, 1 <sup>3</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 2), (3, 1 <sup>5</sup> )	(5, 3), (4, 2 <sup>2</sup> ), (2 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> )	(8), (7, 1), (4, 2 <sup>2</sup> ), (4, 2, 1 <sup>2</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 2), (3, 1 <sup>5</sup> )	(6, 2), (4 <sup>2</sup> ), (4, 2 <sup>2</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> )	
9	(9), (7, 2), (7, 1 <sup>2</sup> ), (5, 3, 1), (5, 1 <sup>4</sup> ), (3 <sup>3</sup> ), (3, 1 <sup>6</sup> )	(5, 3, 1), (5, 2 <sup>2</sup> ), (2 <sup>2</sup> , 1 <sup>5</sup> )	(9), (7, 2), (7, 1 <sup>2</sup> ), (5, 2 <sup>2</sup> ), (5, 1 <sup>4</sup> ), (4, 2, 1 <sup>3</sup> ), (3 <sup>3</sup> ), (3, 1 <sup>7</sup> )	(6, 2, 1), (5, 2 <sup>2</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> )	
10	(10), (9, 1), (7, 3), (7, 1 <sup>3</sup> ), (5, 3, 2), (5, 3, 1 <sup>2</sup> ), (5, 1 <sup>5</sup> ), (3 <sup>3</sup> , 1), (3 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> ), (3, 1 <sup>7</sup> )	(6, 2 <sup>2</sup> ), (5, 3, 2), (5, 3, 1 <sup>2</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> ), (3, 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> ), (2 <sup>2</sup> , 1 <sup>6</sup> )	(10), (9, 1), (7, 3), (7, 1 <sup>3</sup> ), (6, 2 <sup>2</sup> ), (5, 3, 2), (5, 1 <sup>5</sup> ), (4, 2, 1 <sup>4</sup> ), (3 <sup>3</sup> , 1), (3 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> ), (3, 2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> ), (3, 1 <sup>7</sup> )	(6, 2 <sup>2</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> )	(10), (8, 2), (6, 4), (6, 2 <sup>2</sup> ), (4, 2, 1 <sup>4</sup> ), (3 <sup>2</sup> , 2, 1 <sup>2</sup> )

Es fällt auf, dass sehr viele triviale Partitionen auftauchen. Das ist gut, denn für die trivialen Partitionen sind die Zassenhaus-Matrizen so einfach, dass man Algorithmus 4.3.2 von Hand ausführen kann:

**Lemma 4.3.4** Für  $\iota \in \mathbb{N}$  und  $n \geq 2\iota$  ist die triviale Partition  $(n)$  genau dann  $(2, \iota)$ -speziell, wenn  $\iota$  ungerade ist.

*Beweis:* Für  $n = 2$  ist  $\text{res}_{\langle a \rangle}^{S_n} (H^2(S_n, \mathbb{1}_{\mathbb{Z}S_n}))$  trivialerweise ungleich 0, da  $H^2(S_2, S_{\mathbb{Z}}^{(2)}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $S_2 = \langle a \rangle$  ist. Also ist (2)  $(2, 1)$ -speziell. Im Folgenden sei  $n \geq 3$ . Wir verwenden die Bezeichnungen aus Algorithmus 4.3.2. Die Zassenhaus-Matrix zur trivialen Partition hat die Form

$$Z_{(n)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & n \\ n-1 & n-1 \\ 4 & 2n \\ \vdots & \vdots \\ 4 & 2n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{r \times 2}.$$

Die Invariantenteilerform dieser Zassenhaus-Matrix ist gegeben durch

$$SZ_{(n)}T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

für geeignetes  $S \in GL_r(\mathbb{Z})$  und

$$T^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \text{für ungerades } n, \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

(Details zur Berechnung finden sich in Lemma 2.2.2 von [Web06].) Wir setzen

$$\begin{pmatrix} w_a \\ w_b \end{pmatrix} := T^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{für ungerades } n, \\ \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

Damit ist  $H^1(S_n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  erzeugt von  $\bar{\delta}$ , wobei die Derivation  $\delta$  gegeben ist durch  $\delta(a) = w_a + \mathbb{Z}$  und  $\delta(b) = w_b + \mathbb{Z}$ . Mit Lemma 2.1.11 ist  $\delta$  ein Homomorphismus in eine abelsche Gruppe, das heißt, bei der Bestimmung von  $\delta(g)$  brauchen wir nur zu zählen, wie oft  $a$  und  $b$  in der Darstellung von  $g$  aus (4.2) vorkommen:

$$\begin{aligned} \delta(g) &= \iota \cdot \delta(a) + (2\iota + n - 2\iota) \cdot \delta(b) = (\iota \cdot w_a + n \cdot w_b) + \mathbb{Z} \\ &= \begin{cases} \iota \cdot 1/2 + \mathbb{Z} & \text{für ungerades } n, \\ (n + \iota) \cdot 1/2 + \mathbb{Z} & \text{für gerades } n, \end{cases} = \begin{cases} 1/2 + \mathbb{Z} & \text{für ungerades } \iota, \\ 0 + \mathbb{Z} & \text{für gerades } \iota. \end{cases} \end{aligned}$$

Für gerades  $\iota$  ist also  $\delta(g) = 0 + \mathbb{Z}$  und damit  $(n)$  nicht  $(2, \iota)$ -speziell. Nun sei  $\iota$  ungerade. Für  $w_g := 1/2$  ist  $\delta(g) = w_g + \mathbb{Z}$ . Das Element  $g$  wird (wie alle Elemente von  $S_n$ ) dargestellt durch die Matrix  $X = (1)$ . Damit ist  $Z = (1) + (1) = (2)$ , also  $Zw_g = (1) \notin \langle (2) \rangle_{\mathbb{Z}}$  und demzufolge  $(n)$  gemäß Algorithmus 4.3.2  $(2, \iota)$ -speziell.  $\square$

Wir brauchen also nur noch  $(2, \iota)$ -spezielle Partitionen für gerades  $\iota$ . Hierfür ist noch keine allgemeine Lösung bekannt. Die in Anhang H festgehaltenen Ergebnisse geben aber immerhin Hinweise, wo man am besten nach  $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen für gerades  $\iota$  sucht. Dabei sind sicher noch andere Ansätze denkbar als der, der im Folgenden vorgestellt wird. Aber dieser erscheint insofern am ehesten Erfolg zu versprechen, als er mit relativ wenigen Typen von Partitionen auskommt: Für die meisten Paare  $(2, \iota)$  mit  $2\iota \leq n$  und  $\iota$  gerade ist die Partition  $\beta' = (2^2, 1^{n-4}) \vdash n$  ein aussichtsreicher Kandidat.

**Vermutung 4.3.5** (a) Für  $n \geq 4$  ist die Partition  $\beta' \vdash n$   $(2, 2)$ -speziell.

(b) Es sei  $\iota > 2$  gerade und  $n \geq 2\iota + 3$ . Dann ist  $\beta' \vdash n$   $(2, \iota)$ -speziell.

Für  $n \leq 20$  wurde dies in GAP bestätigt. Außerdem wissen wir, dass die Partitionen  $\beta'$  die für Vermutung 4.3.5 notwendige Voraussetzung erfüllen, dass sie in  $\mathcal{C}_2^2$  liegen:

**Lemma 4.3.6** Für  $n \geq 4$  ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta'}) \cong \mathbb{Z}/2^j\mathbb{Z}$  für ein  $j \in \mathbb{N}$ .

*Beweis:* Wegen  $(S_{\mathbb{F}_2}^{\beta'})^* \cong S_{\mathbb{F}_2}^{\beta'}$  gilt mit den entsprechenden Tabellen auf Seite 114 für alle  $n \geq 4$ , dass  $x_2^{\beta'} = d_1^{\beta'} - d_0^{\beta'} = 1 - 0 = 1$  ist. Also ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta'})$  zyklisch von nichttrivialer 2-Potenz-Ordnung.  $\square$

Mittels Zassenhaus-Verfahren wurde in GAP errechnet, dass die Ordnung von  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\beta'})$  für  $n \in \{5, 6\}$  gleich 4 und für  $n \in \{4, 7, 8, \dots, 20\}$  gleich 2 ist (siehe [Web09b]). Das legt die Vermutung nahe, dass die Ordnung für  $n \geq 7$  immer gleich 2 ist. Bewiesen werden kann dies jedoch bisher noch nicht.

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass das Lemma 4.3.6 einen Spezialfall der folgenden Vermutung beweist:

**Vermutung 4.3.7** ([Web09a], **Conjecture 6.9**) Für  $m \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{N}_0$  ist  $(2m, 2, 1^q) \in \mathcal{C}_2^2$ .

Kommen wir zurück zu den  $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen. Falls sich Vermutung 4.3.5 bewahrheitet, fehlen also nur noch  $(2, \iota)$ -spezielle Partitionen für gerades  $\iota > 2$  von  $2\iota$ ,  $2\iota + 1$  und  $2\iota + 2$ . Die folgende Vermutung würde uns wenigstens teilweise aus dieser Bredouille helfen:

---

$\alpha = (n - 1, 1)$ ,  $\beta = (n - 2, 2)$ ,  $\gamma = (n - 2, 1^2)$ ,  $\zeta = (n - 3, 3)$ ,  $\vartheta = (n - 3, 2, 1)$ ,  $\kappa = (n - 3, 1^3)$ .



**Vermutung 4.3.8** (a) Es sei  $n \geq 4$ . Die Partition  $\beta \vdash n$  ist genau in den folgenden Fällen  $(2, \iota)$ -speziell:

- Für gerades  $n$  ist  $\beta$   $(2, n/2)$ -speziell.
- Falls  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ist, ist  $\beta$   $(2, 2k - 1)$ -speziell für  $1 \leq k \leq (n - 1)/4$ .
- Falls  $n \equiv 3 \pmod{4}$  ist, ist  $\beta$   $(2, \iota)$ -speziell für  $1 \leq \iota \leq (n - 3)/2$ .

(b) Es sei  $n \geq 5$ . Die Partition  $\vartheta$  ist für ungerades  $n$   $(2, (n - 1)/2)$ -speziell. Außer in dieser Situation ist  $\vartheta$  nie  $(2, \iota)$ -speziell.

(c) Für gerades  $\iota \in \mathbb{N}$  existiert eine  $(2, \iota)$ -spezielle Partition von  $2\iota + 2$ .

Der Teil (a) wurde mit Algorithmus 4.3.2 in GAP für  $n \leq 20$  bestätigt. Für Teil (b) braucht man nur die ungeraden  $n$  zu testen, da  $\vartheta$  für gerades  $n$  nicht im 2-Hauptblock liegt. Die obige Vermutung wurde für ungerades  $n \leq 17$  in GAP bestätigt, wobei die Berechnungen im Fall  $n = 17$  etwa 47 Stunden benötigten. Welche Partition genau man im Allgemeinen als  $(2, \iota)$ -spezielle Partition von  $2\iota + 2$  wählen sollte, darüber lässt sich auf Basis des vorhandenen Datenmaterials noch keine qualifizierte Vermutung abgeben.

Der erste Punkt von Teil (a) erinnert an Abschnitt 3.3, wo wir nachgewiesen haben, dass die Partition  $\gamma \vdash p\iota$  für ungerades  $p$   $(p, \iota)$ -speziell ist. Die Hoffnung, hier einen analogen Beweis formulieren zu können, wird jedoch im Keim erstickt: Für etliche Aussagen, die wir in Abschnitt 3.3 verwendet haben, gibt es keine analogen Entsprechungen im Fall  $p = 2$  und  $\beta \vdash n = 2\iota$ . Erstens besitzt das Tensorprodukt  $S_{\mathbb{Z}_2}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_2}^\alpha$  zwar einen Untermodul isomorph zu  $S_{\mathbb{Z}_2}^\beta$ , wie wir in Anhang C sehen werden, aber dieser ist kein direkter Summand. Zweitens kennen wir noch nicht einmal  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)$  genau, wir wissen mit Lemma 2.5.12 nur, dass es zyklisch von Ordnung 2 oder 4 ist. Und ein dritter Punkt, der für den Beweis zwar nicht entscheidend wäre, der aber zeigt, dass eine grundlegend andere Situation vorliegt, ist der, dass  $H^2(\langle b^\iota \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\beta \downarrow_{\langle b^\iota \rangle}^{S_n})$  nicht zyklisch ist. (Diese Behauptung soll hier nicht bewiesen werden; es möge der Hinweis genügen, dass man mit dem Zassenhaus-Verfahren leicht ausrechnen kann, dass zumindest für kleines  $\iota$  die Kohomologiegruppe  $H^2(\langle b^\iota \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\beta \downarrow_{\langle b^\iota \rangle}^{S_n}) \cong \mathbb{F}_2^\iota$  ist.)

Da auch der Versuch, den Algorithmus 4.3.2 für  $\beta$  oder gar für  $\vartheta$  in Abhängigkeit von  $n$  von Hand auszuführen, als aussichtslos einzustufen ist, müssen für einen Beweis von Vermutung 4.3.8 neue Methoden gefunden werden, die die vorliegende Arbeit noch nicht liefert. Sollte sich jedoch die Vermutung bewahrheiten, so können wir für gerades  $\iota > 2$  als  $(2, \iota)$ -spezielle Partition von  $2\iota$  die Partition  $\beta$  wählen und als  $(2, \iota)$ -spezielle Partition von  $2\iota + 1$  die Partition  $\vartheta$ . Welche Partition von  $2\iota + 2$  man wählen sollte, muss, wie gesagt, noch geklärt werden.



# Kapitel 5

## Fazit

Wie bereits in der Einleitung angesprochen, ist die vorliegende Arbeit eine Fortsetzung der Diplomarbeit [Web06] und des darauf aufbauenden Artikels [Web09a]. Ausgangspunkt war eine Vermutung von Szczepański über die Existenz bestimmter Bieberbachgruppen zu einer gegebenen endlichen Gruppe  $G$ . Das Ziel ist es, die Vermutung im Spezialfall  $G = S_n$  zu beweisen. Dieses Ziel wird auch in dieser Arbeit noch nicht erreicht, aber in Abschnitt 5.2 wird ein möglicher Weg aufgezeigt, der zu einem großen Teil schon durch die vorangegangenen Kapitel besprochen ist.

Die Arbeiten [Web06] und [Web09a] konzentrierten sich auf die Möglichkeiten, überhaupt Kohomologie von Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}$  zu bestimmen, insbesondere die zweite Kohomologie. In diesem Zusammenhang wurden diverse Vermutungen geäußert, die mittlerweile ganz oder teilweise bewiesen werden können. Am Ende von Abschnitt 2.5 haben wir damit bereits begonnen. Mit Hilfe der in den Kapiteln 3 und 4 gewonnenen Erkenntnisse knüpfen wir nun daran an.

### 5.1 Kohomologie von Spechtmoduln über $\mathbb{Z}$

Mit den Aussagen am Ende von Abschnitt 2.5 kennen wir die erste Kohomologie von  $S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}$ , falls  $\lambda$  eine Hakenpartition oder  $\lambda = \beta$  ist. Die zweite Kohomologie kennen wir für  $\lambda \in \{(n), (1^n), \alpha, \gamma\}$ . Insbesondere ist Conjecture 6.2 aus [Web09a] über die zweite Kohomologie von  $S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$  durch Lemma 2.5.11 nachgewiesen. Den Isomphietyp von  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\beta})$  konnten wir in Lemma 2.5.12 für ungerades  $n$  exakt bestimmen und für gerades  $n$  immerhin die Auswahl auf zwei Möglichkeiten einschränken. Jetzt nehmen wir noch die Partitionen  $\zeta$ ,  $\vartheta$  und  $\kappa$  ins Visier. Zwischen den Kohomologien der zugehörigen Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}_3$  besteht eine enge Verbindung:

**Lemma 5.1.1** *Es sei  $10 \leq n \equiv 1 \pmod{9}$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) *Es ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .*
- (b) *Es ist  $H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa+1}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .*
- (c) *Es ist  $H^1(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta+1}) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ .*
- (d) *Es ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta}) \cong \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{3}]_3\mathbb{Z}$ .*
- (e) *Es ist  $H^1(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\zeta+1}) \cong \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{3}]_3\mathbb{Z}$ .*

*Falls  $n \not\equiv 1 \pmod{27}$  ist, sind alle diese Aussagen wahr. Insbesondere sind in diesem Fall auch die beiden letzteren Kohomologiegruppen isomorph zu  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ , das heißt, die Vermutung 3.2.19 trifft für den Fall  $p = 3$  und  $m \not\equiv 1 \pmod{27}$  zu. (Das  $m$  in Vermutung 3.2.19 entspricht dem  $n$  hier.) Die Aussagen (a) bis (e) sind genau dann auch für  $n \equiv 1 \pmod{27}$  wahr, wenn die Vermutung 3.2.19 für den Fall  $p = 3$  zutrifft.*

*Beweis:* Da  $\kappa+1$  der einzige Nachfolger von  $\kappa$  in  $\mathcal{B}_0(3)$  ist, ist mit Eckmann-Shapiro  $H^i(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\kappa) \cong H^i(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa+1})$  für alle  $i \in \mathbb{N}_0$ . Insbesondere sind die beiden Aussagen (a) und (b) äquivalent.

Mit den Verzweigungsregeln erhalten wir die Spechtreihe

$$S_{\mathbb{Z}_3}^\gamma \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \longrightarrow (S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa+1} \mid S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta+1}) \oplus S_{\mathbb{Z}_3}^{\gamma+1},$$

wobei  $S_{\mathbb{Z}_3}^{\gamma+1}$  als einziger Spechtfaktor nicht im Hauptblock liegt. Da auch  $S_{\mathbb{Z}_3}^\gamma$  nicht im Hauptblock liegt, erhalten wir mit Eckmann-Shapiro eine exakte Kohomologiesequenz der Form

$$\underbrace{H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\gamma)}_{=0} \longrightarrow H^1(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta+1}) \longrightarrow H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa+1}) \longrightarrow \underbrace{H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\gamma)}_{=0}. \quad (5.1)$$

Damit sind die Aussagen (b) und (c) äquivalent. (Die gleiche Argumentation zeigt übrigens die Isomorphie von  $H^1(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta+1})$  und  $H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa+1})$  schon im Fall  $n \equiv 1 \pmod{3}$  statt modulo 9.) Nun betrachten wir die Spechtreihe

$$S_{\mathbb{Z}_3}^\beta \uparrow_{S_n}^{S_{n+1}} \longrightarrow (S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta+1} \mid S_{\mathbb{Z}_3}^{\zeta+1}) \oplus S_{\mathbb{Z}_3}^{\beta+1},$$

wobei  $S_{\mathbb{Z}_3}^{\beta+1}$  als einziger Spechtfaktor nicht im Hauptblock liegt. Der Spechtmodul  $S_{\mathbb{Z}_3}^{\zeta+1}$  hat keine Fixpunkte, und mit Lemma 3.1.9 ist  $x_2^{\vartheta+1} = d_1^{\vartheta+1} - d_0^{\vartheta+1} = 1 - 1 = 0$ . Mit Lemma 2.5.12 und mit Eckmann-Shapiro erhalten wir eine exakte Kohomologiesequenz der Form

$$\begin{aligned} \underbrace{H^0(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\zeta+1})}_{=0} &\longrightarrow H^1(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta+1}) \longrightarrow \underbrace{H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\beta)}_{\cong \mathbb{Z}/[n-1]_3\mathbb{Z}} \\ &\longrightarrow H^1(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\zeta+1}) \longrightarrow \underbrace{H^2(S_{n+1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta+1})}_{=0}. \end{aligned}$$

Damit sind die Aussagen (c) und (e) äquivalent. Schließlich betrachten wir noch die Spechtreihe

$$S_{\mathbb{Z}_3}^{\gamma-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \longrightarrow (S_{\mathbb{Z}_3}^\kappa \mid S_{\mathbb{Z}_3}^\vartheta) \oplus S_{\mathbb{Z}_3}^\gamma,$$

wobei  $S_{\mathbb{Z}_3}^\gamma$  als einziger Spechtfaktor nicht im Hauptblock liegt. Aus den Propositionen 3.1.1 und 3.1.2 folgt wegen  $S_{\mathbb{F}_3}^\kappa = h_{n,3}$ , dass  $d_0^\kappa = 0$  und  $d_1^\kappa = d_2^\kappa = 1$  ist. Damit ist  $x_2^\kappa = 1 - 0 = 1$  und  $x_3^\kappa = 1 - 1 + 0 = 0$ . Außerdem folgt mit Lemma 3.1.9, dass  $x_1^\vartheta = d_0^\vartheta = 0$  und  $x_2^\vartheta = d_1^\vartheta - d_0^\vartheta = 1 - 0 = 1$  ist. Mit Lemma 2.5.11 und mit Eckmann-Shapiro erhalten wir eine exakte Kohomologiesequenz der Form

$$\begin{aligned} \underbrace{H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\vartheta)}_{=0} &\longrightarrow \underbrace{H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\kappa)}_{\neq 0} \longrightarrow \underbrace{H^2(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}_3}^{\gamma-1})}_{\cong \mathbb{Z}/[n-1]_3\mathbb{Z}} \\ &\longrightarrow \underbrace{H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\vartheta)}_{\neq 0} \longrightarrow \underbrace{H^3(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^\kappa)}_{=0}. \end{aligned}$$

Damit sind die Aussagen (a) und (d) äquivalent. Falls  $n \not\equiv 1 \pmod{27}$  ist, ist  $[n-1]_3 = 9$ . In diesem Fall ergibt sich aus der obigen Kohomologie-Sequenz außerdem, dass die beiden Aussagen (a) und (d) wahr sind (und damit auch alle anderen). Falls  $n \equiv 1 \pmod{27}$  ist, können wir noch keine Aussage treffen außer der, dass Aussage (d) (und damit auch alle anderen) genau dann wahr ist, wenn die Vermutung 3.2.19 für  $p = 3$  zutrifft.  $\square$

Nun können wir die Isomorphietypen einiger weiterer Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}$  bestimmen.

**Lemma 5.1.2** *Im Fall  $n \equiv 1 \pmod{9}$  nehmen wir an, dass die Vermutung 3.2.19 für  $p = 3$  zutrifft. Dann gilt:*

---


$$\alpha = (n-1, 1), \beta = (n-2, 2), \gamma = (n-2, 1^2), \zeta = (n-3, 3), \vartheta = (n-3, 2, 1), \kappa = (n-3, 1^3).$$

$$(a) \text{ Für } n \geq 6 \text{ ist } H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\zeta}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(n-2)\mathbb{Z} & \text{für } 2, 3 \nmid n-2, \\ \mathbb{Z}/\frac{n-2}{2}\mathbb{Z} & \text{für } 2 \mid n-2, 3 \nmid n-2, \\ \mathbb{Z}/\frac{n-2}{3}\mathbb{Z} & \text{für } 3 \mid n-2, 2 \nmid n-2, \\ \mathbb{Z}/\frac{n-2}{6}\mathbb{Z} & \text{für } 6 \mid n-2. \end{cases}$$

$$(b) \text{ Für } n \geq 5 \text{ ist } H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\vartheta}) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } 3 \nmid n-2, \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} & \text{für } 3 \mid n-2. \end{cases}$$

(c) Es sei  $n \geq 5$ . Im Fall  $n \equiv 1 \pmod{4}$  nehmen wir an, dass  $|H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\vartheta})| \neq [(n-1)/2]_2$  ist. Dann gilt:

$$H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\vartheta}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z} & \text{für } 3 \nmid n-1, \\ \mathbb{Z}/\frac{n-1}{3}\mathbb{Z} & \text{für } 3 \mid n-1. \end{cases}$$

Unabhängig von der zusätzlichen Annahme gilt, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\vartheta})$  zyklisch ist.

(Die Isomorphie in Teil (c) wurde in [Web09a], Conjecture 6.6, vermutet.)

*Beweis:* Mit Folgerung 2.5.5 wissen wir einerseits, dass  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  für  $\lambda \vdash n$  immer zyklisch ist, und andererseits, dass wir mit Hilfe des James-Kriteriums entscheiden können, ob  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  für  $p \in \mathbb{P}$  trivial ist oder nicht. Nun überprüfen wir obige Aussagen primfaktorweise, das heißt, wir bestimmen von jeder der betrachteten Kohomologiegruppen für jedes  $p \in \mathbb{P}$  den  $p$ -Anteil.

$p > 3$ : Die Partition  $\vartheta$  liegt genau dann im Hauptblock, wenn  $n \equiv 1 \pmod{p}$  ist. In diesem Fall ist  $\vartheta$  der (eindeutige) Nachfolger von  $\gamma - 1$  in  $\mathcal{C}_p^2$  und damit

$$H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^{\vartheta}) \cong H^2(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma-1}) \cong \mathbb{Z}/[n-1]_p\mathbb{Z},$$

wie in Folgerung 3.2.18 nachgewiesen wurde. Andernfalls ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^{\vartheta}) = 0$  und  $[n-1]_p = 1$ .

Das James-Kriterium erfüllt die Partition  $\vartheta$  wegen  $\vartheta_2 = 2 \not\equiv -1 \pmod{p}$  nie, unabhängig von  $n$ . Das heißt, es ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^{\vartheta}) = 0$ .

Die Partition  $\zeta$  liegt genau dann in  $\mathcal{B}_0(p)$ , wenn  $n \equiv 2 \pmod{p}$  ist. (Genau dann erfüllt  $\zeta$  auch das James-Kriterium, denn dann ist  $\zeta_1 = n-3 \equiv -1 \pmod{p}$ .) In diesem Fall betrachten wir die Spechtreihe  $S_{\mathbb{Z}_p}^{\beta-1} \uparrow_{S_{n-1}} \rightarrow S_{\mathbb{Z}_p}^{\zeta} \oplus (S_{\mathbb{Z}_p}^{\vartheta} \mid S_{\mathbb{Z}_p}^{\beta})$ , wobei  $S_{\mathbb{Z}_p}^{\zeta}$  als einziger Spechtfaktor im Hauptblock liegt. Mit Eckmann-Shapiro und Lemma 2.5.12 ist daher

$$H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^{\zeta}) \cong H^1(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}_p}^{\beta-1}) \cong \mathbb{Z}/[n-2]_p\mathbb{Z}.$$

Andernfalls ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^{\zeta}) = 0$  und  $[n-2]_p = 1$ .

$p = 3$ : Da wir vorausgesetzt haben, dass Vermutung 3.2.19 zutrifft, können wir verwenden, dass die Aussagen (a) bis (e) aus Lemma 5.1.1 für  $10 \leq n \equiv 1 \pmod{9}$  wahr sind.

Die Partition  $\zeta$  erfüllt das James-Kriterium genau dann, wenn  $n \equiv 2 \pmod{9}$  ist. Mit Teil (e) von Lemma 5.1.1, angewendet auf  $n-1$ , ist dann  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\zeta}) \cong [(n-2)/3]_3$ . Andernfalls ist mit Folgerung 2.5.5  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\zeta}) = 0$  sowie  $[n-2]_3 = 1$  für  $n \not\equiv 2 \pmod{3}$  bzw.  $[(n-2)/3]_3 = 1$  für  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .

Für  $n \not\equiv 2 \pmod{3}$  erfüllt  $\vartheta$  wegen  $\vartheta_1 = n-3 \not\equiv -1 \pmod{3}$  das James-Kriterium nicht. Dann ist also  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta}) = 0$ . Nun sei  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Mit der Argumentation aus (5.1) im Beweis von Lemma 5.1.1, angewendet auf  $n-1$ , ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta})$  isomorph zu  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa})$ . Dass  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta})$  zyklisch von Ordnung 3 ist, ergibt sich für  $n \equiv 2 \pmod{9}$  aus Teil (e) von Lemma 5.1.1, angewendet auf  $n-1$ , und für  $n \not\equiv 2 \pmod{9}$  verwenden wir, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\kappa})$  mit Folgerung 3.2.18 zyklisch von Ordnung 3 ist.

Mit Lemma 3.1.9 wissen wir, dass für  $n \equiv 1 \pmod{9}$   $x_2^{\vartheta} = d_1^{\vartheta} - d_0^{\vartheta} = 1 - 0 = 1$  ist. Mit Teil (d) aus Lemma 5.1.1 ist in diesem Fall  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_3}^{\vartheta}) \cong \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{3}]_3\mathbb{Z}$ . Für  $n \not\equiv 1 \pmod{9}$  ist mit Lemma 3.1.9  $x_2^{\vartheta} = 0$ , und im Gegenzug ist  $[n-1]_3 = 1$  für  $n \not\equiv 1 \pmod{3}$  bzw.  $[(n-1)/3]_3 = 1$  für  $n \equiv 1 \pmod{3}$ .

$p = 2$ : Die Partition  $\zeta$  erfüllt das James-Kriterium für  $p = 2$  genau dann, wenn  $n \equiv 2 \pmod{4}$  ist. In diesem Fall ist  $S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \rightarrow S_{\mathbb{Z}_2}^\vartheta \oplus (S_{\mathbb{Z}_2}^\zeta \mid S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)$ , wobei  $S_{\mathbb{Z}_2}^\vartheta$  als einziger Spechtfaktor nicht im Hauptblock liegt. Die Partition  $\beta$  erfüllt das James-Kriterium nicht, und  $S_{\mathbb{Z}_2}^\beta$  hat keine Fixpunkte. Daher erhalten wir mit Eckmann-Shapiro die exakten Kohomologiesequenz

$$\underbrace{H^0(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)}_{=0} \longrightarrow H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\zeta) \longrightarrow H^1(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta-1}) \longrightarrow \underbrace{H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\beta)}_{=0}.$$

Da  $n - 1$  ungerade ist, folgt mit Lemma 2.5.12, dass  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\zeta) \cong H^1(S_{n-1}, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta-1}) \cong \mathbb{Z}/[\frac{n-2}{2}]_2\mathbb{Z}$  ist. Falls  $n \not\equiv 2 \pmod{4}$  ist, ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\zeta) = 0$  und  $[n-2]_2 = 1$  für ungerades  $n$  bzw.  $[(n-2)/2]_2 = 1$  für  $n \equiv 0 \pmod{4}$ .

Die Partition  $\vartheta$  erfüllt das James-Kriterium für  $p = 2$  wegen  $\vartheta_2 = 2 \not\equiv -1 \pmod{2}$  nie, das heißt, es ist  $x_1^\vartheta = 0$ . In  $\mathcal{B}_0(2)$  liegt  $\vartheta$  genau dann, wenn  $n$  ungerade ist. Andernfalls ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\vartheta) = 0$  und  $[n-1]_2 = 1$ . Für ungerades  $n$  ist  $S_{\mathbb{Z}_2}^{\gamma-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \rightarrow S_{\mathbb{Z}_2}^\kappa \oplus (S_{\mathbb{Z}_2}^\vartheta \mid S_{\mathbb{Z}_2}^\gamma)$ , wobei  $S_{\mathbb{Z}_2}^\kappa$  als einziger Spechtfaktor nicht im Hauptblock liegt. Indem wir in den Lemmata 2.5.8 und 2.5.11 die 2-Anteile der Kohomologien von  $S_{\mathbb{Z}_2}^\gamma$  (bzw.  $S_{\mathbb{Z}_2}^{\gamma-1}$ ) nehmen, erhalten wir daraus mit Eckmann-Shapiro die folgende Kohomologie-Tabelle.

$$\begin{array}{c|ccc} i & S_{\mathbb{Z}_2}^\vartheta & S_{\mathbb{Z}_2}^{\gamma-1} & S_{\mathbb{Z}_2}^\gamma \\ \hline 1 & 0 & 0 & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ 2 & & \mathbb{Z}/[\frac{n-1}{2}]_2\mathbb{Z} & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array}$$

Falls  $n \equiv 3 \pmod{4}$  ist, ist  $[(n-1)/2]_2 = 1$  und damit  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\vartheta) \cong H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\gamma) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/[n-1]_2\mathbb{Z}$ . Falls  $n \equiv 1 \pmod{4}$  ist, können wir aus der Tabelle lediglich schließen, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^\vartheta)$  zyklisch von Ordnung  $[(n-1)/2]_2$  oder  $[n-1]_2$  ist. (Zyklisch ist die Kohomologie wegen  $x_2^\vartheta = d_1^\vartheta - d_0^\vartheta = 1 - 0 = 1$ , wie sich aus der entsprechenden Tabelle auf Seite 115 ergibt.) Da wir momentan nichts in der Hand haben, um die erste Möglichkeit auszuschließen, müssen wir es bei der zusätzlichen Voraussetzung belassen.  $\square$

## 5.2 Szczepańskis Vermutung für $S_n$

Schlussendlich kommen wir zu der Fragestellung, die hinter allem steht. Dazu sei eine beliebige endliche Gruppe  $G$  gegeben.

**Vermutung 5.2.1 ([Szc03], Seite 164)** *Es existiert eine Bieberbachgruppe  $\Gamma$  mit Holonomiegruppe  $G$  und  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreier Holonomiedarstellung.*

Zunächst übersetzen wir diese Aussage in die Sprache der Kohomologie:

Eine *Bieberbachgruppe* ist eine torsionsfreie kristallografische Gruppe. Eine *kristallografische Gruppe (von Dimension  $k$ )* wiederum ist eine diskrete, kokompakte Untergruppe von Isometrien des Euklidischen Raumes  $\mathbb{R}^k$ . Jede kristallografische Gruppe  $\Gamma$  besitzt eine freie abelsche Untergruppe  $\mathbb{Z}^k$  von endlichem Index. Wir nennen  $\Gamma/\mathbb{Z}^k$  die *Holonomiegruppe* von  $\Gamma$ . Die Holonomiegruppe operiert via Konjugation treu auf  $\mathbb{Z}^k$ . Die zugehörige Darstellung  $\Gamma/\mathbb{Z}^k \rightarrow GL_k(\mathbb{Z})$  heißt *Holonomiedarstellung*.

Die Theorie dahinter soll hier nicht weiter vertieft werden. Entscheidend ist, dass nach einem Satz von Zassenhaus ([Zas48], Satz 1) kristallografische Gruppen durch die oben beschriebenen Eigenschaften charakterisiert sind. Genauer gesagt: Wenn  $\Gamma$  eine Erweiterung einer endlichen Gruppe  $G$  mit  $\mathbb{Z}^k$  ist, so dass  $G$  via Konjugation in  $\Gamma$  treu auf  $\mathbb{Z}^k$  operiert, dann ist  $\Gamma$  isomorph zu einer kristallografischen Gruppe mit Holonomiegruppe  $G$ . Mit dieser Charakterisierung kristallografischer Gruppen ist die Vermutung 5.2.1 äquivalent zu der Aussage:

*Es existiert ein  $k \in \mathbb{N}$ , so dass eine  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreie, treue Darstellung von  $G$  auf  $\mathbb{Z}^k$  existiert mit einer torsionsfreien Erweiterung  $\Gamma$  von  $G$  mit  $\mathbb{Z}^k$ .*

Eleganter wird die Formulierung, wenn wir  $\mathbb{Z}^k$  durch ein  $\mathbb{Z}G$ -Gitter ersetzen; in diesem Begriff ist die Operation von  $G$  schon mit enthalten. Dann lautet die Vermutung:

*Es existiert ein ein  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreies, treues  $\mathbb{Z}G$ -Gitter  $V$  mit einer torsionsfreien Erweiterung  $\Gamma$  von  $G$  mit  $V$ .*

Gemäß dem Hauptsatz der Erweiterungstheorie (Satz 2.1.10 (b)) werden die Äquivalenzklassen der Erweiterungen von  $G$  mit  $V$  durch  $H^2(G, V)$  parametrisiert. Damit ist der Bezug zur Kohomologie hergestellt. Als Nächstes bringen wir die speziellen Elemente ins Spiel:

**Lemma 5.2.2** *Es sei  $V$  ein  $\mathbb{Z}G$ -Gitter,  $\alpha \in H^2(G, V)$  und*

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \longrightarrow 1$$

*eine Erweiterung aus der zu  $\alpha$  gehörigen Äquivalenzklasse von Erweiterungen von  $G$  mit  $V$ . Dann ist  $\Gamma$  genau dann torsionsfrei, wenn  $\alpha$  ein spezielles Element ist.*

*Beweis:* Die Aussage ist in [Cha65] im Lemma nach Theorem 2.2 formuliert und ergibt sich aus dem Beweis von ebendiesem Theorem 2.2.  $\square$

Also können wir die Vermutung 5.2.1 auch folgendermaßen ausdrücken:

*Es existiert ein  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfreies, treues  $\mathbb{Z}G$ -Gitter  $V$ , so dass  $H^2(G, V)$  ein spezielles Element besitzt.*

Wenn wir jetzt für  $G$  eine symmetrische Gruppe einsetzen, machen sich unsere Vorüberlegungen zu  $(p, \iota)$ -speziellen Elementen bezahlt. Für die symmetrischen Gruppen ist die Vermutung 5.2.1 zwar nicht äquivalent, aber eine Folgerung aus der Aussage:

**Vermutung 5.2.3** *Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  existiert eine Teilmenge  $S \subseteq \text{Part}(n)$  mit den Eigenschaften:*

- (i) *Für jedes Paar  $(p, \iota) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}$  mit  $p\iota \leq n$  existiert eine  $(p, \iota)$ -spezielle Partition  $\lambda \in S$ .*
- (ii) *Falls  $\lambda \in S$  sowohl  $(p, \iota)$ - als auch  $(p', \iota')$ -speziell ist und keine andere Partition aus  $S$   $(p, \iota)$ - oder  $(p', \iota')$ -speziell ist, dann gibt es ein  $\alpha \in H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$ , das sowohl  $(p, \iota)$ - als auch  $(p', \iota')$ -speziell ist.*
- (iii) *Für mindestens ein  $\lambda \in S$  ist  $S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}$  treu.*

Warum folgt daraus Szczepański's Vermutung für die symmetrischen Gruppen? Für gegebenes  $n$  und  $S \subseteq \text{Part}(n)$  wie oben setzen wir  $V_S := \bigoplus_{\lambda \in S} S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}$ . Dann ist  $\mathbb{Q}V_S \cong \bigoplus_{\lambda \in S} S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}$ , das heißt,  $V_S$  ist  $\mathbb{Q}$ -vielfachheitsfrei. Da mindestens einer der vorkommenden Spechtmoduln treu ist, ist auch  $V$  treu. Und wie in Lemma 2.1.21 besitzt  $H^2(S_n, V_S)$  ein spezielles Element.

Dabei ist zu beachten, dass der Modul  $V_S$  etwas anders konstruiert ist als die direkte Summe in Lemma 2.1.21. Dort war es erlaubt, dass ein Spechtmodul mehrfach in der Summe auftauchte. Da wir  $\mathbb{Q}$ -Vielfachheitsfreiheit haben wollen, dürfen wir so etwas jetzt nicht mehr zulassen. Das könnte zum Problem werden, wenn wir eine Partition  $\lambda$  verwenden, die sowohl  $(p, \iota)$ - als auch  $(p', \iota')$ -speziell ist, deren  $(p, \iota)$ - bzw.  $(p', \iota')$ -Spezialität aber von unterschiedlichen Elementen von  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  herrührt. Und wenn dann keine weitere Partition in  $S$  existierte, die  $(p, \iota)$ - oder  $(p', \iota')$ -speziell ist, dann würde nicht folgen, dass  $H^2(S_n, V_S)$  ein spezielles Element besitzt. Die Bedingung (ii) verhindert jedoch, dass ein solcher Fall eintritt.

Es steht zu vermuten, dass die Menge  $S := \text{Part}(n)$  die Bedingungen aus Vermutung 5.2.3 erfüllt. Wenn man dies jedoch zeigen wollte, müsste man wahrscheinlich ohnehin auf geeignete

Teilmengen ausweichen, da die meisten Partitionen von  $n$  gar nichts zu einem speziellen Element von  $H^2(S_n, \bigoplus_{\lambda \vdash n} S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  beitragen. Von daher ist es aussichtsreicher zu versuchen, nur so viele Partitionen wie unbedingt nötig in  $S$  hineinzustecken.

Zunächst stellen wir fest, dass für  $n \geq 5$  Bedingung (iii) aus Bedingung (i) folgt: Mit [JK81], Theorem 2.1.13, sind alle Spechtmoduln über  $\mathbb{Z}$  treu bis auf  $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}S_n}$  für  $n \geq 2$ ,  $\text{sgn}_{n,\mathbb{Z}}$  für  $n \geq 3$  und  $S_{\mathbb{Z}}^{(2,2)}$ . Für  $n \geq 5$  ist  $H^2(S_n, \mathbb{1}_{\mathbb{Z}S_n}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  und  $H^2(S_n, \text{sgn}_{n,\mathbb{Z}}) = 0$ . Wenn also  $S \subseteq \text{Part}(n)$  für  $n \geq 5$  die Bedingung (i) erfüllt, also  $(p, \iota)$ -spezielle Partitionen zu ungeradem  $p$  enthält, sind die zugehörigen Spechtmoduln treu. Für  $n \leq 4$  müssen wir uns allerdings noch Gedanken über die Treue machen, darum behandeln wir diese Fälle vorab.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in [Szc03], Theorem 1, die Vermutung 5.2.1 schon für  $S_n$  mit  $n \leq 6$  nachgewiesen wurde, allerdings auf Basis von Ad-hoc-Argumenten. Jetzt können wir die Sache systematisch angehen. Wir verwenden die Erkenntnisse aus Lemma 4.3.4, Tabelle 4.3.3 sowie Folgerung 3.4.4.

**n=1:** Da  $S_1$  keine nichttrivialen Untergruppen besitzt, ist das einzige Element von  $H^2(S_1, \mathbb{1}_{\mathbb{Z}S_1}) = 0$  trivialerweise ein spezielles Element. Außerdem ist  $\mathbb{1}_{\mathbb{Z}S_1}$  treu.

**n=2:** Wir benötigen  $S := \text{Part}(2) = \{(2), (1^2)\}$ : die Partition (2) wegen ihrer (2,1)-Spezialität und die Partition (1<sup>2</sup>) für die Treue.

**n=3:** Auch hier benötigen wir alle Partitionen: (3) wegen ihrer (2,1)-Spezialität, (1<sup>3</sup>) wegen ihrer (3,1)-Spezialität und (2,1) für die Treue.

**n=4:** Hier können wir erstmalig eine Auswahl treffen: Die Partitionen (4) und (3,1) sind (2,1)-speziell, (2<sup>2</sup>) ist (2,2)-speziell und (1<sup>4</sup>) ist (3,1)-speziell. Treu sind nur die Partitionen (3,1) und (2,1<sup>2</sup>). Die Menge  $S$  muss also auf jeden Fall die Partitionen (2<sup>2</sup>) und (1<sup>4</sup>) enthalten, mindestens eine der beiden (4) und (3,1) sowie mindestens eine der beiden (3,1) und (2,1<sup>2</sup>).

Der Plan für  $n \geq 5$  dürfte nicht mehr sonderlich überraschen: Der Schlüssel liegt in den Vermutungen 3.2.19, 3.4.3, 3.4.5, 4.3.5 und 4.3.8. Um einfacher formulieren zu können, nehmen wir im Folgenden an, diese Vermutungen seien bereits gezeigt.

Mit den Folgerungen 3.4.4 und 3.4.6 sind für ungerades  $p$  in den Pfaden  $\mathcal{P}_p(p\iota) \subseteq \mathcal{C}_p^2$  alle Partitionen  $(p, \iota)$ -speziell. Das heißt wir können dann für  $p\iota \leq n$  die (eindeutige) Partition von  $n$  aus  $\mathcal{P}_p(p\iota)$  wählen. Des weiteren können wir für ungerades  $\iota$  mit Lemma 4.3.4 als  $(2, \iota)$ -spezielle Partition von  $n$  immer die triviale Partition wählen. Als  $(2, 2)$ -spezielle Partition können wir mit Vermutung 4.3.5 die Partition  $\beta'$  wählen, ebenso als  $(2, \iota)$ -spezielle Partition für gerades  $\iota > 2$  im Fall  $n > 2\iota + 2$ . Mit Vermutung 4.3.8 können wir für gerades  $\iota > 2$  als  $(2, \iota)$ -spezielle Partition im Fall  $n = 2\iota$  die Partition  $\beta$  wählen, im Fall  $n = 2\iota + 1$  die Partition  $\vartheta$  und im Fall  $n = 2\iota + 2$  eine Partition, die noch zu bestimmen ist. Auf diese Weise erhalten wir eine Teilmenge  $S \subseteq \text{Part}(n)$ , die der Bedingung (i) genügt.

Ob dieses  $S$  auch die Bedingung (ii) erfüllt, kann noch nicht mit Sicherheit gesagt werden, da es für manche  $n$  noch unbestimmte Partitionen enthält. Wenn wir wüssten, dass wir diese fehlenden Partitionen so wählen könnten, dass die jeweils zugehörigen Kohomologiegruppen zyklisch sind, wäre das Problem gelöst. Denn wenn eine solche zyklische Kohomologiegruppe ein  $(p, \iota)$ -spezielles Element enthält, dann ist mit Lemma 4.3.1 jedes Element, das die Gruppe erzeugt,  $(p, \iota)$ -speziell.

Für die oben angegebenen Partitionen ist das Lemma 4.3.1 anwendbar. Wir können problemlos allein die triviale Partition als Vertreter für alle  $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen mit ungeradem  $\iota$  wählen: Da  $H^2(S_n, \mathbb{1}_{\mathbb{Z}S_n}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ist, ist der einzige Erzeuger  $(2, \iota)$ -speziell für alle ungeraden  $\iota$ . Für ungerades  $p$  wissen wir mit Lemma 3.2.18 und Vermutung 3.2.19, dass für alle  $\lambda \in \mathcal{P}_p(p\iota)$  die Kohomologiegruppe  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  zyklisch ist. Für zwei ungerade Primzahlen  $p$  und  $p'$  stellen also die Schnittpunkte der Pfade  $\mathcal{P}_p(p \cdot p' \cdot m)$  und  $\mathcal{P}_{p'}(p \cdot p' \cdot m)$  (die sich am Anfang der Pfade befinden) ebenfalls kein Problem dar. Von der Kohomologiegruppe  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\vartheta)$  wissen wir aus Lemma 5.1.2, dass sie zyklisch ist. Mit Lemma 2.5.12 ist  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\beta'})$  zyklisch. Die Partition  $\beta'$  wird einerseits



für verschiedene  $\iota$  als  $(2, \iota)$ -spezielle Partition benötigt, andererseits liegt  $\beta'$  für  $n \in \{7, 8\}$  auch in  $\mathcal{P}_3(3)$ . Da mit Lemma 4.3.6  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_2}^{\beta'})$  für alle  $n \geq 4$  zyklisch und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\beta'})$  für  $n \in \{7, 8\}$  gemäß [Web09b] isomorph zu  $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$  ist, bereitet auch  $\beta'$  keine Probleme.

Die eben beschriebene Wahl von  $S$  folgt dem Bestreben, die benötigten Partitionen auf Basis des bisherigen Wissensstands systematisch zusammenzustellen. Das bedeutet nicht, dass sie der ursprünglich formulierten Absicht genügt, nur so viele Partitionen wie unbedingt nötig zu verwenden. Im Anhang H wird für die Partitionen  $\lambda \vdash n$  mit  $2 \leq n \leq 20$ ,  $\text{Rang}(S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}) \leq 1200$  und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}) \neq 0$  angegeben, für welche  $p$  und  $\iota$  sie jeweils  $(p, \iota)$ -speziell sind, wobei diese Ergebnisse in GAP ermittelt wurden. An diesen Tabellen sieht man zum Beispiel, dass für  $k \leq 4$  die Partitionen  $(3k - 2, 1^3)$ ,  $(3k - 1, 1^3)$  und  $(3k - 1, 1^4)$  (also die drei Elemente in  $\mathcal{P}_3(3k)$ , die auf die Wurzel des Pfades folgen) für jedes  $1 \leq \iota \leq k$   $(3, \iota)$ -speziell sind. Sollte dies für alle  $k \in \mathbb{N}$  zutreffen, könnte dieser Umstand bei der Suche nach  $(3, \iota)$ -speziellen Partitionen als Alternative zu den Folgerungen 3.4.4 und 3.4.6 dienen: Statt der gesamten Pfade  $\mathcal{P}_3(3k)$  würde man nur jeweils die ersten 4 Partitionen benötigen. Auf größere Primzahlen können wir diese Aussage, so sie denn zutrifft, allerdings nicht ohne Weiteres verallgemeinern: Die Partition  $(8, 2, 1)$ , das zweite Element von  $\mathcal{P}_5(10)$ , ist nur  $(5, 2)$ -, nicht aber  $(5, 1)$ -speziell.

Trotz der möglichen Vereinfachungen für  $p = 3$  scheint der bisherige Plan der aussichtsreichste zu sein. Wir wollen die damit verbundenen offenen Fragen noch einmal zusammenfassen. Folgende Behauptungen sind noch unbewiesen:

- Für  $2 < p \in \mathbb{P}$ ,  $p \mid \iota \in \mathbb{N}$  und  $n := p\iota + p - 2$  ist die Partition  $\lambda := (p\iota - 2, p - 2, 1^2) \vdash n$   $(p, \iota)$ -speziell (Vermutung 3.4.5), und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  ist zyklisch (Vermutung 3.2.19).
- Es seien  $i, n \in \mathbb{N}$  mit  $p \mid n$  und  $p \mid i + 1$ . Weiter sei  $\mu$  die Partition von  $n + i + 1$  aus  $\mathcal{P}_p(n)$ . Dann ist  $\text{res}_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}} : H^2(S_{n+i+1}, S_{\mathbb{Z}_p}^{\mu}) \rightarrow H^2(S_{n+i}, S_{\mathbb{Z}_p}^{\mu} \downarrow_{S_{n+i}}^{S_{n+i+1}})$  bijektiv (Vermutung 3.4.3).
- Es sei  $n \geq 4$ . Die Partition  $\beta' \vdash n$  ist  $(2, 2)$ -speziell, und für gerades  $\iota > 2$  und  $n \geq 2\iota + 3$  ist sie  $(2, \iota)$ -speziell (Vermutung 4.3.5).
- Es sei  $\iota > 2$  gerade. Die Partitionen  $\beta \vdash 2\iota$  und  $\vartheta \vdash 2\iota + 1$  sind  $2\iota$ -speziell (Vermutung 4.3.8).
- Für gerades  $\iota > 2$  existiert eine  $(2, \iota)$ -spezielle Partition  $\lambda \vdash n := 2\iota + 2$  (Vermutung 4.3.8). Dabei kann  $\lambda$  so gewählt werden, dass es einer Wahl der Menge  $S \subseteq \text{Part}(n)$  wie oben beschrieben in Bezug auf Bedingung (ii) aus 5.2.3 nicht im Wege steht (sei es, dass  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  zyklisch ist, sei es, dass  $\lambda$  sich von allen übrigen benötigten Partitionen unterscheidet).

Wenn dies alles gezeigt werden kann, ergibt sich daraus Szczepańskis Vermutung 5.2.1 für  $S_n$ .

Definitiv bewiesen ist die Vermutung bisher für  $n \leq 13$ . Für  $n \leq 4$  haben wir oben bereits geeignete Mengen  $S$  angegeben. Wir fahren nun fort bei  $n = 5$ . Dabei orientieren wir uns jetzt nicht an der oben beschriebenen systematischen Wahl von  $S$ , sondern stellen die Partitionen jeweils mit Hilfe der Tabellen aus Anhang H so zusammen, dass wir mit möglichst wenigen auskommen. Auch so ist die Wahl natürlich nicht eindeutig. In der folgenden Tabelle sind die Folgen  $(p, \iota_1 / \dots / \iota_{\ell})$  so zu interpretieren, dass die entsprechende Partition für alle  $1 \leq j \leq \ell$   $(p, \iota_j)$ -speziell ist, allerdings nicht unbedingt ausschließlich; es geht hier nur darum zu demonstrieren, dass zu jedem Paar  $(p, \iota)$  mit  $p\iota \leq n$  eine  $(p, \iota)$ -spezielle Partition existiert. Die vollständigen Angaben sind Anhang H zu entnehmen.

$n$	$\lambda$	$(p, \iota)$	$n$	$\lambda$	$(p, \iota)$
5	$(2, 1^3)$	$(3, 1)$	11	$(4, 3^2, 1)$	$(5, 1)$
	$(2^2, 1)$	$(2, 2)$		$(5^2, 1)$	$(7, 1)$
	$(3, 1^2)$	$(2, 1), (5, 1)$		$(7, 2^2)$	$(2, 2/3/4/5)$
6	$(2, 1^4)$	$(3, 1)$		$(8, 1^3)$	$(3, 1/2/3)$
	$(2^2, 1^2)$	$(2, 2)$		$(8, 2, 1)$	$(5, 2)$
	$(3, 2, 1)$	$(5, 1)$		$(9, 1^2)$	$(2, 1), (11, 1)$
	$(4, 1^2)$	$(3, 2)$	12	$(4, 3^2, 1^2)$	$(5, 1)$
$(6)$	$(2, 1/3)$	$(5^2, 1^2)$		$(7, 1)$	
7	$(2^2, 1^3)$	$(2, 2)$		$(8, 1^4)$	$(3, 1/2/3)$
	$(2^2, 1)$	$(5, 1)$		$(8, 3, 1)$	$(5, 2)$
	$(4, 1^3)$	$(3, 1/2)$		$(9, 2, 1)$	$(11, 1)$
	$(4, 2, 1)$	$(2, 3)$		$(9, 3)$	$(2, 1/2/3/4), (3, 4)$
	$(5, 1^2)$	$(2, 1), (7, 1)$	$(10, 2)$	$(2, 6)$	
8	$(3^2, 1^2)$	$(5, 1)$	$(12)$	$(2, 5)$	
	$(4, 2^2)$	$(2, 2/3/4)$	13	$(4^2, 3, 1^2)$	$(5, 1)$
	$(5, 1^3)$	$(2, 1), (3, 1/2)$		$(6, 5, 1^2)$	$(7, 1)$
	$(5, 2, 1)$	$(7, 1)$		$(2^2, 1^9)$	$(2, 2/4)$
9	$(4, 3, 1^2)$	$(5, 1)$		$(8, 5)$	$(5, 2)$
	$(5, 1^4)$	$(3, 1/2)$		$(9, 3, 1)$	$(11, 1)$
	$(5, 2^2)$	$(2, 2/3/4)$		$(10, 1^3)$	$(3, 1/2/3/4)$
	$(5, 3, 1)$	$(7, 1)$	$(10, 2, 1)$	$(2, 6)$	
	$(7, 1^2)$	$(2, 1), (3, 3)$	$(11, 1^2)$	$(2, 1/3/5), (13, 1)$	
10	$(4, 3, 2, 1)$	$(5, 1)$			
	$(5, 4, 1)$	$(7, 1)$			
	$(6, 2^2)$	$(2, 2/3/4/5)$			
	$(7, 1^3)$	$(2, 1), (3, 1/2/3)$			
	$(8, 1^2)$	$(5, 2)$			

Die Kohomologiegruppen  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  zu den verwendeten Partitionen  $\lambda$  sind zyklisch außer im Fall  $\lambda = (3^2, 1^2) \vdash 8$ . In diesem Fall ist allerdings der 5-Anteil zyklisch, und das genügt.

Die  $(5, 1)$ -Spezialität von  $(4, 3^2, 1^2) \vdash 12$  und  $(4^2, 3, 1^2) \vdash 13$  wurde nicht errechnet, sondern sie ergibt sich mit Folgerung 3.4.4 aus der  $(5, 1)$ -Spezialität von  $(4, 3^2, 1) \vdash 11$ , die mit GAP ermittelt wurde. Auf die gleiche Weise wird die  $(7, 1)$ -Spezialität von  $(5^2, 1^2) \vdash 12$  und  $(6, 5, 1^2) \vdash 13$  aus der von  $(5^2, 1) \vdash 11$  gefolgert; ebenso ergibt sich die  $(11, 1)$ -Spezialität von  $(9, 3, 1) \vdash 13$  aus der von  $(9, 2, 1) \vdash 12$ .

Für  $n = 14$  wurde noch keine  $(2, 6)$ -spezielle Partition ermittelt. Ein Kandidat ist  $(10, 2, 1^2)$  als einziger Nachfolger von  $(10, 2, 1)$  in  $\mathcal{C}_2^2$ , aber der Rang des zugehörigen Spechtmoduls ist mit 2079 zu groß. Für  $n = 15$  ist die Auswahl an bekannten  $(2, \iota)$ -speziellen Partitionen zwar wieder ausreichend, aber dann fehlt der Nachweis, dass die Partition  $(4^2, 3, 2, 1) \vdash 15$   $(5, 1)$ -speziell ist. Zum konkreten Rechnen ist der Rang des Spechtmoduls wieder zu groß, und für einen theoretischen Beweis brauchte man Vermutung 3.4.3.

# Anhang A

## Die Operation der $S_n$ auf bestimmten Spechtmoduln

Im Anhang werden, wie angekündigt, die noch ausstehenden Beweise nachgereicht. Etliche dieser Beweise arbeiten mit konkreten Polytabloiden zu bestimmten Partitionen. Darum ist es wichtig zu wissen, wie die  $S_n$  auf den entsprechenden Polytabloiden operiert. Da wir diese Informationen zum Teil für unterschiedliche Beweise benötigen, sind sie hier im ersten Teil des Anhangs zusammengefasst, losgelöst von ihrer geplanten Anwendung. Lediglich die fehlenden Teile des Beweises von Lemma 2.5.8 sind hier integriert.

Wir beschreiben die Operation der  $S_n$  auf den Spechtmoduln zu den Partitionen  $\alpha = (n-1, 1)$ ,  $\beta = (n-2, 2)$  und  $\gamma = (n-2, 1^2)$ . Bei der Notation von Tabloiden verwenden wir die in (1.6) vereinbarte Konvention, bei der die erste Zeile eines Tabloids ausgespart wird, da sie durch die übrigen eindeutig festgelegt ist. Weiterhin seien im ganzen Kapitel  $a, b \in S_n$  mit  $a := (1, 2)$ ,  $b := (1, 2, \dots, n)$ , und  $A$  und  $B$  seien, bei gegebener Partition  $\lambda$ , die zugehörigen Abbildungsmatrizen bezüglich der Standard- $\lambda$ -Polytabloide.

### A.1 Die Operation der $S_n$ auf $S^\alpha$

Es sei  $n \geq 2$ . Für  $2 \leq i \leq n$  bezeichne  $t_i \in ST(\alpha)$  dasjenige Standard-Tableau, dessen (einziger) Eintrag in der zweiten Zeile gleich  $i$  ist. Der Spaltenstabilisator von  $t_i$  ist  $\{\text{id}, (1, i)\}$ , und die Standard-Polytabloide sind damit gegeben durch

$$e_i := e_{t_i} = \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t_i)} \text{sgn}(\pi) \pi \bar{i} = \bar{i} - \bar{1} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n.$$

Die Permutationen  $a$  und  $b$  operieren folgendermaßen auf den Standard-Polytabloiden:

**Tabelle A.I**

$\pi$	$i \in$	$\pi e_i$
$a$	$\{2\}$	$\bar{1} - \bar{2} = -e_2$
	$\{2, \dots, n\}$	$\bar{i} - \bar{2} = e_i - e_2$
$b$	$\{1, \dots, n-1\}$	$\bar{i} + \bar{1} - \bar{2} = e_{i+1} - e_2$
	$\{n\}$	$\bar{1} - \bar{2} = -e_2$

Die zugehörigen Matrizen  $A$  und  $B$  sind damit gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in R^{n-1 \times n-1}.$$

An dieser Stelle bietet es sich an, die Aussage  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\alpha}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  aus Lemma 2.5.8 (a) zu zeigen. Dazu führen wir das Zassenhaus-Verfahren für die erste Kohomologie durch (Satz 2.4.3 (a)), das heißt, wir bestimmen die Invariantenteiler von  $B_{\alpha} = \begin{pmatrix} A-1 \\ B-1 \end{pmatrix}$ . (Dabei ist zu beachten, dass in Satz 2.4.3 durch  $B$  eine andere Matrix bezeichnet wird als hier. An die Stelle des dortigen  $B$  tritt jetzt die Matrix  $B_{\alpha}$ .) In  $A-1$  sind alle Zeilen außer der ersten Nullzeilen, und die erste Zeile ist die gleiche wie die von  $B-1$ . Die Invariantenteiler von  $B_{\alpha}$  sind also die gleichen wie die von  $B-1$ . In  $B-1$  addieren wir nun sukzessive von rechts nach links jede Spalte auf die nächste:

$$B-1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & -1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -n & -(n-2) & \cdots & -2 & -1 \\ & -1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt sieht man, dass  $n$  der einzige von 1 verschiedene Invariantenteiler ist. Damit ist  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Z}}^{\alpha}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

## A.2 Die Operation der $S_n$ auf $S^{\beta}$

Es sei  $n \geq 4$ . Für  $2 \leq i < j \leq n$  mit  $\{i, j\} \neq \{2, 3\}$  sei  $\tau_{i,j}$  das Standard- $\beta$ -Tableau, in dessen zweiter Zeile die Einträge  $i$  und  $j$  stehen. (Für  $\{i, j\} = \{2, 3\}$  könnte die zweite Spalte nicht aufsteigend geordnet werden.) Dann ist

$$\text{Stab}_v(\tau_{i,j}) = \begin{cases} \{\text{id}, (1, 2), (3, j), (1, 2)(3, j)\} & \text{für } i = 2, \\ \{\text{id}, (1, i), (2, j), (1, i)(2, j)\} & \text{für } i > 2. \end{cases}$$

Die Standard- $\beta$ -Polytabloide  $\eta_{i,j} := e_{\tau_{i,j}}$  sind damit gegeben durch

$$\begin{array}{c|c||c} i \in & j \in & \eta_{i,j} = \\ \hline \{2\} & \{4, \dots, n\} & \overline{2, j-1}, \overline{j-2}, \overline{3+1}, \overline{3} \\ \{3, \dots, n-1\} & \{i+1, \dots, n\} & \overline{i, j-1}, \overline{j-2}, \overline{i+1}, \overline{2} \end{array}$$

Die Permutationen  $a$  und  $b$  operieren folgendermaßen auf den Standard-Polytabloiden:

Tabelle A.II

$\pi$	$i \in$	$j \in$	$\pi\eta_{i,j}$ als Linearkombination von Tabloiden	Polytabloiden
a	$\{2\}$	$\{4, \dots, n\}$	$\overline{1, j} - \overline{2, j} - \overline{1, 3} + \overline{2, 3}$	$-\eta_{2,j}$
	$\{3\}$	$\{4, \dots, n\}$	$\overline{3, j} - \overline{2, j} - \overline{1, 3} + \overline{1, 2}$ = $\overline{3, j} - \overline{1, j} - \overline{2, 3} + \overline{1, 2}$ $-\overline{2, j} + \overline{1, j} + \overline{2, 3} - \overline{1, 3}$	$\eta_{3,j} - \eta_{2,j}$
	$\{4, \dots, n-1\}$	$\{i+1, \dots, n\}$	$\overline{i, j} - \overline{2, j} - \overline{1, i} + \overline{1, 2}$ = $\overline{i, j} - \overline{1, j} - \overline{2, i} + \overline{1, 2}$ $-\overline{2, j} + \overline{1, j} + \overline{2, 3} - \overline{1, 3}$ $+\overline{2, i} - \overline{1, i} - \overline{2, 3} + \overline{1, 3}$	$\eta_{i,j} - \eta_{2,j}$ $+\eta_{2,i}$
b	$\{2\}$	$\{4, \dots, n-1\}$	$\overline{3, j+1} - \overline{2, j+1} - \overline{3, 4} + \overline{2, 4}$ = $\overline{3, j+1} - \overline{1, j+1} - \overline{2, 3} + \overline{1, 2}$ $-\overline{2, j+1} + \overline{1, j+1} + \overline{2, 3} - \overline{1, 3}$ $+\overline{2, 4} - \overline{1, 4} - \overline{2, 3} + \overline{1, 3}$ $-\overline{3, 4} + \overline{1, 4} + \overline{2, 3} - \overline{1, 2}$	$\eta_{3,j+1}$ $-\eta_{2,j+1}$ $+\eta_{2,4}$ $-\eta_{3,4}$
		$\{n\}$	$\overline{1, 3} - \overline{1, 2} - \overline{3, 4} + \overline{2, 4}$ = $\overline{2, 4} - \overline{1, 4} - \overline{2, 3} + \overline{1, 3}$ $-\overline{3, 4} + \overline{1, 4} + \overline{2, 3} - \overline{1, 2}$	$\eta_{2,4} - \eta_{3,4}$
	$\{3, \dots, n-2\}$	$\{i+1, \dots, n-1\}$	$\overline{i+1, j+1} - \overline{2, j+1} - \overline{3, i+1} + \overline{2, 3}$ = $\overline{i+1, j+1} - \overline{1, j+1} - \overline{2, i+1} + \overline{1, 2}$ $-\overline{2, j+1} + \overline{1, j+1} + \overline{2, 3} - \overline{1, 3}$ $+\overline{2, i+1} - \overline{1, i+1} - \overline{2, 3} + \overline{1, 3}$ $-\overline{3, i+1} + \overline{1, i+1} + \overline{2, 3} - \overline{1, 2}$	$\eta_{i+1,j+1}$ $-\eta_{2,j+1}$ $+\eta_{2,i+1}$ $-\eta_{3,i+1}$
$\{3, \dots, n-1\}$	$\{n\}$	$\overline{1, i+1} - \overline{1, 2} - \overline{3, i+1} + \overline{2, 3}$	$-\eta_{3,i+1}$	

Das ist alles, was wir über die Operation von  $S_n$  auf  $S^\beta$  wissen müssen.

### A.3 Die Operation der $S_n$ auf $S^\gamma$

Es sei  $n \geq 3$ . Für  $2 \leq i < j \leq n$  sei  $t_{i,j}$  das Standard- $\gamma$ -Tableau, in dessen zweiter Zeile der Eintrag  $i$  steht und in der dritten Zeile der Eintrag  $j$ . Dann ist

$$\text{Stab}_v(t_{i,j}) = \{\text{id}, (1, i), (1, j), (i, j), (1, i, j), (1, j, i)\}.$$

Die Standard- $\gamma$ -Polytabloide  $e_{i,j} := e_{t_{i,j}}$  sind damit gegeben durch

$$e_{i,j} := e_{t_{i,j}} = \sum_{\pi \in \text{Stab}_v(t_{i,j})} \text{sgn}(\pi) \pi \overline{i/j} = \overline{i/j} - \overline{1/j} - \overline{i/1} - \overline{j/i} + \overline{j/1} + \overline{1/i}.$$

Die Permutationen  $a$  und  $b$  operieren folgendermaßen auf den Standard-Polytabloiden:

$$\begin{aligned} a \cdot e_{2,j} &= -e_{2,j} && \text{für } 3 \leq j \leq n, \\ a \cdot e_{i,j} &= e_{i,j} + e_{2,i} - e_{2,j} && \text{für } 3 \leq i < j \leq n, \\ b \cdot e_{i,j} &= e_{i+1,j+1} + e_{2,i+1} - e_{2,j+1} && \text{für } 2 \leq i < j \leq n-1, \\ b \cdot e_{i,n} &= e_{2,i+1} && \text{für } 2 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$











ist dann klar, dass der einzige von 1 verschiedene Invariantenteiler von  $B_\gamma$  gleich 2 ist, was, wie angekündigt, den Beweis von Lemma 2.5.8 (b) vervollständigt.

Im Folgenden werden wir verschiedene Elemente aus  $\mathbb{Z}S_n$  auf die Standard- $\gamma$ -Polytabloide einwirken lassen. Im Wesentlichen geht es darum, die durch die zugehörige Zassenhaus-Matrix gegebenen Operationen auszuführen. Dabei zeigt es sich, dass die bisherige intuitive Bezeichnung der Standard-Polytabloide mit  $e_{i,j}$  für diese Zwecke wenig praktikabel ist. Darum schreiben wir ab jetzt für  $i, k \in \mathbb{N}$  mit  $i + k \leq n - 1$ :

$$\boxed{i|k} := e_{i+1, i+1+k}. \quad (\text{A.1})$$

(Dann ist umgekehrt  $e_{i,j} = \boxed{i-1|j-i}$  für  $2 \leq i < j \leq n$ .) Die Vorteile dieser Notation werden sich in den nachfolgenden Rechnungen offenbaren. Das Entscheidende dabei ist, dass wir bei jedem Standard-Polytabloid den Eintrag in der dritten Zeile des zugehörigen Standard-Tableaus über seinen Abstand zum Eintrag in der zweiten Zeile charakterisieren. Außerdem nehmen wir statt des Eintrags in der zweiten Zeile den um 1 erniedrigten Wert. Am besten macht man sich einmal klar, wie die Operation von  $a$  und  $b$  auf den Standard-Polytabloiden in der neuen Notation aussieht, und vergisst anschließend die alte Notation, zumindest vorläufig. Je nach Zusammenhang werden wir später auch wieder auf die Bezeichnung  $e_{i,j}$  zurückgreifen müssen.

**Tabelle A.III**

$\pi$	$i \in$	$k \in$	$\pi \cdot \boxed{i k}$
$a$	$\{1\}$	$\{1, \dots, n-2\}$	$-\boxed{1 k}$
	$\{2, \dots, n-2\}$	$\{1, \dots, n-i-1\}$	$\boxed{i k} + \boxed{1 i-1} - \boxed{1 i+k-1}$
$b$	$\{1, \dots, n-3\}$	$\{1, \dots, n-i-2\}$	$\boxed{i+1 k} + \boxed{1 i} - \boxed{1 i+k}$
	$\{1, \dots, n-2\}$	$\{n-i-1\}$	$\boxed{1 i}$

Die Operation der Potenzen von  $b$  erhalten wir durch iterierte Anwendung der Regeln aus Tabelle A.III. Die Details sollen hier nicht ausgeführt werden. Wir halten die Werte in der folgenden Tabelle fest. Dabei treten manche Fälle nur dann auf, wenn  $i$  oder  $k$  gewisse Bedingungen erfüllen. Tun sie das nicht, wird der entsprechende Teil der Tabelle einfach übersprungen.

**Tabelle A.IV**

$j$	$b^j \cdot \boxed{i k}$	ggf. Bedingung
0	$\boxed{i k}$	
1	$\boxed{1+i k} + \boxed{1 i} - \boxed{1 i+k}$	$i+k < n-1$
$\vdots$		
$j$	$\boxed{j+i k} + \boxed{j i} - \boxed{j i+k}$	
$\vdots$		
$n-k-i-1$	$\boxed{n-k-1 k} + \boxed{n-k-i-1 i} - \boxed{n-k-i-1 i+k}$	
$n-k-i$	$\boxed{n-k-i i}$	
$n-k-i+1$	$\boxed{n-k-i+1 i} + \boxed{1 n-k-i} - \boxed{1 n-k}$	$k > 1$
$\vdots$		
$j$	$\boxed{j i} + \boxed{j-n+k+i n-k-i} - \boxed{j-n+k+i n-k}$	
$\vdots$		
$n-i-1$	$\boxed{n-i-1 i} + \boxed{k-1 n-k-i} - \boxed{k-1 n-k}$	
$n-i$	$\boxed{k n-k-i}$	

$j$	$b^j \cdot \boxed{i \mid k}$	ggf. Bedingung
$n-i+1$	$\boxed{k+1 \mid n-k-i} + \boxed{1 \mid k} - \boxed{1 \mid n-i}$	$i > 1$
$\vdots$		
$j$	$\boxed{j-n+k+i \mid n-k-i} + \boxed{j-n+i \mid k} - \boxed{j-n+i \mid n-i}$	
$\vdots$		
$n-1$	$\boxed{k+i-1 \mid n-k-i} + \boxed{i-1 \mid k} - \boxed{i-1 \mid n-i}$	
$n$	$\boxed{i \mid k}$	

Als Nächstes sollen die Fixpunkte von  $S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  unter  $b$  bestimmt werden. Dazu schreiben wir einen beliebigen Fixpunkt  $v$  als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination der  $\boxed{i \mid k}$ :

$$\begin{aligned}
v &:= \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-k-1} a_{i,k} \boxed{i \mid k} = b \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-k-1} a_{i,k} \boxed{i \mid k} \quad (\text{A.2}) \\
&= \sum_{k=1}^{n-3} \left( \sum_{i=1}^{n-k-2} a_{i,k} \left( \boxed{i+1 \mid k} + \boxed{1 \mid i} - \boxed{1 \mid i+k} \right) + a_{n-k-1,k} \boxed{1 \mid n-k-1} \right) + a_{1,n-2} \boxed{1 \mid 1} \\
&= \underbrace{\sum_{k=1}^{n-3} \sum_{i=2}^{n-k-1} a_{i-1,k} \boxed{i \mid k}}_{=:(*)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-3} \left( \sum_{i=1}^{n-k-1} a_{i,k} \boxed{1 \mid i} - \sum_{i=1}^{n-k-2} a_{i,k} \boxed{1 \mid i+k} \right)}_{=:(**)} + a_{1,n-2} \boxed{1 \mid 1}.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit Hilfe von (\*) besagt, dass für alle  $1 \leq k \leq n-2$  ein  $a^{(k)} \in \mathbb{Z}$  existiert mit  $a_{i,k} = a^{(k)}$  für alle  $1 \leq i \leq n-1-k$ . (Dabei ist trivialerweise  $a^{(n-2)} = a_{1,n-2}$ .)

Wir fahren fort mit (\*\*). Zunächst ziehen wir die große Summe auseinander und integrieren  $a_{1,n-2} \boxed{1 \mid 1}$  in die erste der beiden Teilsummen.

$$(**) = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-k-1} a_{i,k} \boxed{1 \mid i} - \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{i=1}^{n-k-2} a_{i,k} \boxed{1 \mid i+k}$$

Wir ersetzen  $a_{i,k}$  durch  $a^{(k)}$  und nehmen in der zweiten Summe eine Indexverschiebung  $i \mapsto i+k$  vor.

$$\dots = \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-k-1} a^{(k)} \boxed{1 \mid i} - \sum_{k=1}^{n-3} \sum_{i=k+1}^{n-2} a^{(k)} \boxed{1 \mid i}$$

Wir vertauschen jeweils die innere mit der äußeren Summation.

$$\dots = \sum_{i=1}^{n-2} \left( \sum_{k=1}^{n-i-1} a^{(k)} \right) \boxed{1 \mid i} - \sum_{i=2}^{n-2} \left( \sum_{k=1}^{i-1} a^{(k)} \right) \boxed{1 \mid i}$$

Schließlich vertauschen wir noch die Indexbezeichnungen  $k$  und  $i$  und fassen beide Summen wieder zu einer zusammen.

$$\dots = \sum_{k=1}^{n-2} \left( \sum_{i=1}^{n-k-1} a^{(i)} - \sum_{i=1}^{k-1} a^{(i)} \right) \boxed{1 \mid k}. \quad (\text{A.3})$$

Ein weiterer Koeffizientenvergleich liefert, dass für alle  $1 \leq k \leq n-2$  gilt:

$$a^{(k)} = a_{1,k} = \sum_{i=1}^{n-k-1} a^{(i)} - \sum_{i=1}^{k-1} a^{(i)}.$$

Dies ist äquivalent dazu, dass für alle  $2 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$  gilt:

$$\sum_{i=k}^{n-k} a^{(i)} = 0.$$

Damit ist  $a^{(1)}$  beliebig, und wir erhalten per Induktion für  $2 \leq k \leq n-2$ , dass  $a^{(k)} = -a^{(n-k)}$  ist. (Insbesondere ist  $a^{(n/2)} = 0$  für gerades  $n$ .) Es ist also

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-k-1} a_{i,k} \boxed{i|k} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a^{(k)} \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i|k} + \sum_{k=\lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1}^{n-2} \sum_{i=1}^{n-k-1} (-a^{(n-k)}) \boxed{i|k} \\ &= \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a^{(k)} \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i|k} - \sum_{k=2}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sum_{i=1}^{k-1} a^{(k)} \boxed{i|n-k}. \end{aligned}$$

Beim letzten Schritt haben wir in der zweiten Summe  $k$  durch  $n-k$  ersetzt, also die Summationsreihenfolge umgekehrt. Dabei ist zu beachten, dass für gerades  $n$  das  $k$  eigentlich bis  $n/2 = \lfloor (n-1)/2 \rfloor + 1$  läuft. Da dann aber  $a^{(n/2)} = 0$  ist, können wir diesen Summanden unter den Tisch fallen lassen. Außerdem können wir in dieser Summe auch bei  $k=1$  anfangen, da in diesem Fall die innere Summe leer ist. (Für  $k=1$  ist der Ausdruck  $\boxed{i|n-k}$  eigentlich nicht definiert. Da er aber nur in einer leeren Summe auftaucht, lassen wir ihn der einfacheren Notation zuliebe so stehen.) Damit erhalten wir schließlich

$$v = \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} a^{(k)} \left( \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i|k} - \sum_{i=1}^{k-1} \boxed{i|n-k} \right).$$

Zur weiteren Verwendung setzen wir für  $1 \leq k \leq n-2$

$$t_k := \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i|k} - \sum_{i=1}^{k-1} \boxed{i|n-k}. \quad (\text{A.4})$$

Dann ist  $t_k = -t_{n-k}$  für  $2 \leq k \leq n-2$  und insbesondere  $t_{n/2} = 0$  für gerades  $n$ . Wir haben also gezeigt, dass

$$\text{Fix}_{\langle b \rangle}(S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}) = \langle t_k \mid 1 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor \rangle_{\mathbb{Z}} \quad (\text{A.5})$$

ist. Da dieses Erzeugendensystem außerdem offensichtlich  $\mathbb{Z}$ -linear unabhängig ist, handelt es sich dabei sogar um eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\text{Fix}_{\langle b \rangle}(S_{\mathbb{Z}}^{\gamma})$ .

Im späteren Verlauf sind Summen der Form  $\sum_j b^j \boxed{i|k}$  von Interesse. Im Allgemeinen sind dafür diverse Fallunterscheidungen notwendig, die wir allerdings de facto gar nicht alle benötigen. Es erweist sich als praktikabler, die entsprechenden Summen gegebenenfalls ad hoc zu bestimmen. An dieser Stelle interessiert uns nur die Operation von

$$N := \sum_{g \in \langle b \rangle} g = \sum_{j=0}^{n-1} b^j.$$

Dazu addiert man die Einträge aus Tabelle A.IV für  $j=0$  bis  $n-1$  auf und erhält so, dass  $N \cdot \boxed{i|k}$  für  $1 \leq i \leq n-2$  und  $1 \leq k \leq n-1-i$  gegeben ist durch

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n-1-i} \boxed{j|i} + \sum_{j=1}^{i+k-1} \boxed{j|n-k-i} + \sum_{j=1}^{n-k-1} \boxed{j|k} - \sum_{j=1}^{n-k-i-1} \boxed{j|i+k} - \sum_{j=1}^{k-1} \boxed{j|n-k} - \sum_{j=1}^{i-1} \boxed{j|n-i} \\ & = t_i + t_k + t_{n-i-k}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Damit ist  $N \cdot S_{\mathbb{Z}}^\gamma = \langle t_i + t_k + t_{n-i-k} \mid 1 \leq i \leq n-2, 1 \leq k \leq n-1-i \rangle_{\mathbb{Z}}$ . Dieses Erzeugendensystem wollen wir nun zu einer  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $N \cdot S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  reduzieren. Als erstes stellen wir fest, dass sich aus der Darstellung in (A.6) unmittelbar ergibt: Falls für  $1 \leq i' \leq n-2$  und  $1 \leq k' \leq n-1-i'$  gilt, dass  $\{i, k, n-i-k\} = \{i', k', n-i'-k'\}$  ist, dann ist  $N \boxed{i|k} = N \boxed{i'|k'}$ . Wegen  $i+k+(n-i-k) = n$  können wir also folgern, dass

$$N \cdot S_{\mathbb{Z}}^\gamma = \langle t_x + t_y + t_z \mid (x, y, z) \vdash n \rangle_{\mathbb{Z}}$$

ist. Mit dieser Darstellung des Erzeugendensystems in der Hand können wir zeigen, dass die Menge

$$\mathcal{M} := \{t_1 + t_i - t_{i+1} \mid 1 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1\} \cup \begin{cases} \{t_1 + 2t_{(n-1)/2}\} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ \{t_1 + t_{n/2-1}\} & \text{für } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $N \cdot S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  ist. Zunächst überprüfen wir, dass  $\mathcal{M}$  ebenfalls ein Erzeugendensystem ist. Dazu verwenden wir, dass  $t_{n-i-1} = -t_{i+1}$  ist für  $1 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1$ , und dass gilt:

$$t_{n-\lfloor (n-1)/2 \rfloor - 1} = \begin{cases} t_{(n-1)/2} & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ t_{n/2} = 0 & \text{für } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit ist

$$\mathcal{M} = \{t_{n-i-1} + t_i + t_1 \mid 1 \leq i \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor\} = \{t_x + t_y + t_z \mid (x, y, z) \vdash n, z = 1\}. \quad (\text{A.7})$$

Per Induktion über  $z$  folgt, dass  $t_x + t_y + t_z$  für alle  $(x, y, z) \vdash n$  eine  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination der  $t \in \mathcal{M}$  ist: Für  $z = 1$  ergibt sich diese Aussage unmittelbar aus (A.7). Nun sei  $(x, y, z) \vdash n$  mit  $2 \leq z \leq \lfloor n/3 \rfloor$  (größer kann  $z$  wegen  $x \geq y \geq z$  nicht werden), und wir nehmen an, die Aussage sei für  $1, \dots, z-1$  gezeigt. Dann gilt:

$$t_x + t_y + t_z = (t_{x+1} + t_y + t_{z-1}) + \underbrace{(t_x + t_{y+z-1} + t_1)}_{=-t_{x+1}} - \underbrace{(t_{x+y} + t_{z-1} + t_1)}_{=-t_z} \in \langle \mathcal{M} \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Also ist  $N \cdot S_{\mathbb{Z}}^\gamma = \langle \mathcal{M} \rangle_{\mathbb{Z}}$  und damit isomorph zum  $\mathbb{Z}$ -Erzeugnis der Spalten von

$$\tilde{N} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & & & & \\ & -1 & 1 & & & \\ & & -1 & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & -1 & x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor \times \lfloor (n-1)/2 \rfloor}, \quad (\text{A.8})$$

wobei  $x_n$  für gerades  $n$  gleich 2 und für ungerades  $n$  gleich 1 ist.

Wenn man jetzt noch zeigt, dass  $\tilde{N}$  vollen Rang hat, ist  $\mathcal{M}$  linear unabhängig und damit, wie behauptet, eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $N \cdot S_{\mathbb{Z}}^\gamma$ . Bei dieser Gelegenheit bestimmen wir überdies die Invariantenteiler von  $\tilde{N}$ , da wir diese für den Beweis von Lemma 3.3.4 benötigen.

Falls  $n$  gerade ist, ist  $x_{n+1} = 1$  und  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = n/2 - 1$ . In diesem Fall können wir analog zur Matrix  $B-1$  aus Abschnitt A.1 zeigen, dass  $\tilde{N}$  vollen Rang hat und der einzige von 1 verschiedene Invariantenteiler  $n/2 = n/x_n$  ist.

Falls  $n$  ungerade ist, sind mehr elementare Zeilen- und Spaltenumformungen erforderlich. Jetzt ist  $x_{n+1} = 2$  und  $\lfloor (n-1)/2 \rfloor = (n-1)/2$ . Auch hier addieren wir zunächst sukzessive von rechts nach links jede Spalte auf die nächste. Anschließend räumen wir mit den mittleren  $(n-1)/2 - 2$

Zeilen die entsprechenden Einträge in der ersten und letzten Zeile aus. Schließlich ziehen wir das Doppelte der ersten von der letzten Spalte ab sowie das  $(n+1)/2$ -fache der letzten von der ersten Zeile. So erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{N} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} & \frac{n-3}{2} & \cdots & 2 & 1 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} & & & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & & & & -n \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Jetzt sieht man, dass  $\tilde{N}$  vollen Rang hat und dass  $n = n/x_n$  der einzige von 1 verschiedene Invariantenteiler ist.

Als Nächstes untersuchen wir die Operation von  $a \cdot b = (2, 3, \dots, n)$  auf  $S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$ . Für  $1 \leq i \leq n-2$  gilt:

$$ab \cdot \boxed{i|k} = \begin{cases} a \cdot (\boxed{i+1|k} + \boxed{1|i} - \boxed{1|i+k}) & = \boxed{i+1|k} & \text{für } 1 \leq k \leq n-i-2, \\ a \cdot \boxed{1|i} & = -\boxed{1|i} & \text{für } k = n-i-1. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Durch iterierte Anwendung von  $ab$  erhalten wir somit für alle  $i, k \in \mathbb{N}$  mit  $i+k \leq n-1$ :

$$(ab)^{\ell} \cdot \boxed{i|k} = \begin{cases} \boxed{\ell+i|k} & \text{für } 0 \leq \ell \leq n-i-k-1, \\ -\boxed{\ell-n+i+k+1|n-k-1} & \text{für } n-i-k \leq \ell \leq n-i-1, \\ \boxed{\ell-n+i+1|k} & \text{für } n-i \leq \ell \leq n-1. \end{cases}$$

Wenn wir diese Werte für  $0 \leq \ell \leq n-2$  aufsummieren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=0}^{n-2} (ab)^{\ell} \boxed{i|k} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1-i-k} \boxed{i+\ell|k} - \sum_{\ell=n-i-k}^{n-i-1} \boxed{1-n+i+k+\ell|n-k-1} + \sum_{\ell=n-i}^{n-2} \boxed{1-n+i+\ell|k} \\ &= \sum_{\ell=i}^{n-1-k} \boxed{\ell|k} - \sum_{\ell=1}^k \boxed{\ell|n-k-1} + \sum_{\ell=1}^{i-1} \boxed{\ell|k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1-k} \boxed{\ell|k} - \sum_{\ell=1}^k \boxed{\ell|n-k-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Zu beachten ist, dass dieser Ausdruck nicht mehr von  $i$  abhängt.

Schließlich benötigen wir noch die Operation der Nachbartranspositionen  $(1+j, 2+j) = b^j ab^{n-j}$  für  $2 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$  auf Standard-Polytabloiden der Form  $\boxed{1|k}, \boxed{j|k}$  und  $\boxed{j+1|k}$  für bestimmte  $k$ .

Tabelle A.V

$i$	$k \in$	$b^j ab^{n-j} \overline{i k}$
1	$\{j-1\}$	$\overline{1 j}$
	$\{j\}$	$\overline{1 j-1}$
	$\{j+1, \dots, n-1\}$	$\overline{1 k}$
$j$	$\{1\}$	$-\overline{j 1}$
	$\{2, \dots, n-1-j\}$	$\overline{j+1 k-1}$
$j+1$	$\{1, \dots, n-2-j\}$	$\overline{j k+1}$

(Die hier getroffene Auswahl basiert auf einer gewissen Willkür: Bei den Werten für  $j$  beschränken wir uns auf die Fälle, die wir für das Zassenhaus-Verfahren unbedingt benötigen, obwohl sich die Aussagen teilweise mühelos auf weitere  $j$  verallgemeinern lassen. Für  $k$  hingegen nehmen wir mehr Werte mit ins Boot, als wir in späteren Beweisen wirklich verwenden. Es ging hier darum, die Fallunterscheidungen möglichst schlicht zu halten.)

Die Begründungen für die Tabelleneinträge sind leichter nachvollziehbar in der ursprünglichen Notation für Polytabloide vom Anfang des Abschnitts A.3. Oft genügt es sogar, die Operation der  $S_n$  auf den Tableaus zu betrachten. Für  $2 \leq j \leq \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $i \in \{1, j, j+1\}$  und  $1 \leq k \leq n-i-2$  gilt:

$$b^j ab^{n-j} \overline{i|k} = (j+1, j+2)e_{i+1, i+1+k} = (j+1, j+2)e_{t_{i+1, i+1+k}} = e_{(j+1, j+2)t_{i+1, i+1+k}}.$$

Zunächst sei  $i = 1$ . Dann vertauscht  $(j+1, j+2)$  die beiden Standard-Tableaus  $t_{2, j+1}$  und  $t_{2, j+2}$ . Für  $j+1 \leq k \leq n-1$  lässt  $(j+1, j+2)$  die erste Spalte von  $t_{2, k+2}$  sowie das Tabloid  $\overline{t_{2, k+2}}$  fest; per Definition der Polytabloide bleibt damit auch  $e_{2, k+2}$  fix. Für  $i = j$  und  $k = 1$  liegt  $(j+1, j+2)$  im Spaltenstabilisator von  $t_{i+1, i+1+k} = t_{j+1, j+2}$ . Daraus folgt, dass

$$(j+1, j+2)e_{j+1, j+2} = \text{sgn}((j+1, j+2))e_{j+1, j+2} = -e_{j+1, j+2}$$

ist. Schließlich stellen wir fest, dass die Transposition  $(j+1, j+2)$  für  $2 \leq k \leq n-1-j$  die beiden Standard-Tableaus  $t_{j+1, j+1+k}$  und  $t_{j+2, j+1+k}$  vertauscht, und für  $1 \leq k \leq n-2-j$  die beiden Standard-Tableaus  $t_{j+2, j+2+k}$  und  $t_{j+1, j+2+k}$ . Insgesamt erhalten wir also Folgendes:

$i$	$k \in$	$(j+1, j+2)e_{i+1, i+1+k}$
1	$\{j-1\}$	$(j+1, j+2)e_{2, j+1} = e_{2, j+2}$
	$\{j\}$	$(j+1, j+2)e_{2, j+2} = e_{2, j+1}$
	$\{j+1, \dots, n-1\}$	$(j+1, j+2)e_{2, k+2} = e_{2, k+2}$
$j$	$\{1\}$	$(j+1, j+2)e_{j+1, j+2} = -e_{j+1, j+2}$
	$\{2, \dots, n-1-j\}$	$(j+1, j+2)e_{j+1, j+1+k} = e_{j+2, j+1+k}$
$j+1$	$\{1, \dots, n-2-j\}$	$(j+1, j+2)e_{j+2, j+2+k} = e_{j+1, j+2+k}$

Eine Rückübersetzung in die Notation aus (A.1) liefert die Tabelle A.V.

Dies soll zur Operation von  $\mathbb{Z}S_n$  auf  $S^\gamma$  vorerst genügen. Alle weiteren Berechnungen dieser Art, die in den folgenden Beweisen benötigt werden, werden jeweils an Ort und Stelle erledigt.





## Anhang B

# Der Beweis von Lemma 2.5.10

Gesucht ist ein Homomorphismus von  $S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}$  nach  $M^\beta$ . Dazu machen wir einen kleinen Umweg. Zunächst definieren wir den surjektiven  $R$ -Modul-Homomorphismus

$$\varphi : M^\gamma \longrightarrow M^\beta, \quad \bar{i}/\bar{j} \mapsto \overline{i/j} \quad \text{für alle } 1 \leq i, j \leq n \text{ mit } i \neq j.$$

Dieser Homomorphismus ist offensichtlich verträglich mit der Operation der  $S_n$ . Es ist  $\varphi(\bar{i}/\bar{j}) = \varphi(\bar{j}/\bar{i})$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$  mit  $i \neq j$ . Eine  $R$ -Basis von  $\text{Kern}(\varphi)$  ist gegeben durch alle  $\bar{i}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{i}$  mit  $1 \leq i < j \leq n$ .

Mit den Verzweigungsregeln für Permutationsmoduln ist  $M^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \cong M^\gamma$ . Wir wählen hier explizit den folgenden Isomorphismus:

$$\psi : M^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} = RS_n \otimes_{RS_{n-1}} M^{\alpha-1} \longrightarrow M^\gamma,$$

$$\begin{aligned} (j, n) \otimes \bar{i} &\mapsto \bar{i}/\bar{j} && \text{für } 1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n, i \neq j, \\ (j, n) \otimes \bar{j} &\mapsto \bar{n}/\bar{j} && \text{für } 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

(Dabei identifizieren wir  $(n, n)$  mit der Identität.) Die Abbildung  $\psi$  ist bereits als  $R$ -Modul-Isomorphismus konstruiert. Nun zeigen wir noch, dass sie sich mit der Operation von  $S_n$  verträgt.

Auf den  $\gamma$ -Tabloiden operiert  $S_n$  durch Permutation der Einträge. Für  $\pi \in S_n$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  und  $1 \leq j \leq n$  mit  $i \neq j$  gilt:

$$\begin{aligned} \pi((j, n) \otimes \bar{i}) &= (\pi(j), n) \underbrace{(\pi(j), n) \pi(j, n)}_{\in S_{n-1}} \otimes \bar{i} = (\pi(j), n) \otimes (\pi(j), n) \pi(j, n) \bar{i} \\ &= \begin{cases} (\pi(j), n) \otimes \overline{\pi(j)} & \xrightarrow{\psi} \bar{n}/\overline{\pi(j)} = \overline{\pi(i)}/\overline{\pi(j)} & \text{für } \pi(i) = n, \\ (\pi(j), n) \otimes \overline{\pi(i)} & \xrightarrow{\psi} \overline{\pi(i)}/\overline{\pi(j)} & \text{für } \pi(i) \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Für  $\pi \in S_n$  und  $1 \leq j \leq n-1$  gilt:

$$\begin{aligned} \pi((j, n) \otimes \bar{j}) &= (\pi(j), n) \underbrace{(\pi(j), n) \pi(j, n)}_{\in S_{n-1}} \otimes \bar{j} = (\pi(j), n) \otimes (\pi(j), n) \pi(j, n) \bar{j}. \\ &= \begin{cases} (\pi(j), n) \otimes \overline{\pi(j)} & \xrightarrow{\psi} \bar{n}/\overline{\pi(j)} = \overline{\pi(n)}/\overline{\pi(j)} & \text{für } \pi(n) = n, \\ (\pi(j), n) \otimes \overline{\pi(n)} & \xrightarrow{\psi} \overline{\pi(n)}/\overline{\pi(j)} & \text{für } \pi(n) \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist  $\psi$ , wie behauptet, ein  $RS_n$ -Modul-Isomorphismus. (Er ist übrigens aus (1.7) hergeleitet.)

Nun betrachten wir die Einschränkung von  $\varphi$  auf  $\psi(S^{\alpha-1}\uparrow_{S_{n-1}}^{S_n})$ . Wir zeigen, dass der Kern dieser Einschränkung gleich  $S^\gamma \leq M^\gamma$  ist.

$$\begin{aligned} \psi(S^{\alpha-1}\uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}) &= \psi((\langle (j, n) \otimes (\bar{i} - \bar{1}) \mid 2 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n \rangle_R)) \\ &= \left\langle \begin{array}{l} \bar{i}/\bar{j} - \bar{1}/\bar{j} \mid 2 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n, i \neq j \\ \bar{i}/\bar{1} - \bar{n}/\bar{1} \mid 2 \leq i \leq n-1, j = 1 \\ \bar{n}/\bar{j} - \bar{1}/\bar{j} \mid 2 \leq i = j \leq n-1 \end{array} \right\rangle_R \\ &= \left\langle \begin{array}{l} \bar{i}/\bar{j} - \bar{1}/\bar{j} \mid 2 \leq i, j \leq n, i \neq j \\ \bar{i}/\bar{1} - \bar{n}/\bar{1} \mid 2 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\rangle_R. \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen aus Anhang A.3 gilt für  $2 \leq i < j \leq n$ :

$$\begin{aligned} e_{i,j} &= \bar{i}/\bar{j} - \bar{1}/\bar{j} - \bar{i}/\bar{1} - \bar{j}/\bar{i} + \bar{j}/\bar{1} + \bar{1}/\bar{i} \\ &= \begin{cases} (\bar{i}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{i}) - (\bar{1}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{1}) + (\bar{1}/\bar{i} - \bar{i}/\bar{1}) & \in \text{Kern}(\varphi), \\ (\bar{i}/\bar{j} - \bar{1}/\bar{j}) - (\bar{j}/\bar{i} - \bar{1}/\bar{i}) - (\bar{i}/\bar{1} - \bar{n}/\bar{1}) + (\bar{j}/\bar{1} - \bar{n}/\bar{1}) & \in \psi(S^{\alpha-1}\uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}). \end{cases} \end{aligned}$$

Es ist also  $S^\gamma \leq \psi(S^{\alpha-1}\uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \cap \text{Kern}(\varphi)$ . Jetzt zeigen wir noch die umgekehrte Inklusion. Für  $1 \leq i, j \leq n$  mit  $i \neq j$  sei  $a_{i,j} \in R$ , wobei  $a_{1,n} := -\sum_{j=2}^{n-1} a_{1,j}$  sei. (Letzteres dient vornehmlich der Bequemlichkeit.) Ein Element aus  $\psi(S^{\alpha-1}\uparrow_{S_{n-1}}^{S_n})$  hat dann die Form

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{2 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} a_{i,j} (\bar{i}/\bar{j} - \bar{1}/\bar{j}) + \sum_{j=2}^{n-1} a_{1,j} (\bar{j}/\bar{1} - \bar{n}/\bar{1}) \\ &= \sum_{j=2}^n \left( \sum_{i=2}^{j-1} (a_{i,j} \bar{i}/\bar{j} + a_{j,i} \bar{j}/\bar{i}) - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n a_{i,j} \bar{1}/\bar{j} \right) + \sum_{j=2}^{n-1} a_{1,j} \bar{j}/\bar{1} - \underbrace{\sum_{j=2}^{n-1} a_{1,j} \bar{n}/\bar{1}}_{=a_{1,n}} \\ &= \sum_{j=2}^n \left( \sum_{i=2}^{j-1} (a_{i,j} \bar{i}/\bar{j} + a_{j,i} \bar{j}/\bar{i}) - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n a_{i,j} \bar{1}/\bar{j} + a_{1,j} \bar{j}/\bar{1} \right). \end{aligned}$$

Wenn dieses Element außerdem noch in  $\text{Kern}(\varphi)$  liegt, folgt daraus, dass  $a_{i,j} = -a_{j,i}$  ist für  $2 \leq i < j \leq n$  und  $a_{1,j} = \sum_{j \neq i=2}^n a_{i,j}$  für  $2 \leq j \leq n$ . Wir können das Element also schreiben als

$$\sum_{j=2}^n \left( \sum_{i=2}^{j-1} a_{i,j} (\bar{i}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{i}) - \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq j}}^n a_{i,j} (\bar{1}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{1}) \right).$$

In einem Zwischenschritt nehmen wir uns einen Teil dieses Ausdrucks vor, indem wir erst die Summen und anschließend die Benennung der Indizes vertauschen:

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=j+1}^n -a_{i,j} (\bar{1}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{1}) = \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^{i-1} -a_{i,j} (\bar{1}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{1}) = \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^{j-1} \underbrace{-a_{j,i}}_{=a_{i,j}} (\bar{1}/\bar{i} - \bar{i}/\bar{1}).$$

Diese Umformung integrieren wir wieder in die Darstellung des betrachteten Elements und erhalten so eine Linearkombination von Standard- $\gamma$ -Polytabloiden:

$$\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^{j-1} a_{i,j} ((\bar{i}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{i}) - (\bar{1}/\bar{j} - \bar{j}/\bar{1}) + (\bar{1}/\bar{i} - \bar{i}/\bar{1})) = \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^{j-1} a_{i,j} e_{i,j}.$$

Damit ist, wie behauptet,  $\psi(S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \cap \text{Kern}(\varphi) = S^\gamma$ . Kommen wir nun zum Bild von  $\psi(S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n})$  unter  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} V &:= \varphi \circ \psi(S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n}) \\ &= \varphi \left( \left\langle \begin{array}{l} \overline{i/j} - \overline{1/j} \quad | \quad 2 \leq i, j \leq n, i \neq j \\ \overline{i/1} - \overline{n/1} \quad | \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\rangle_R \right) \\ &= \left\langle \begin{array}{l} \overline{i, j} - \overline{1, j} \quad | \quad 2 \leq i, j \leq n, i \neq j \\ \overline{1, i} - \overline{1, n} \quad | \quad 2 \leq i \leq n-1 \end{array} \right\rangle_R \\ &= \left\langle \begin{array}{l} \overline{i, j} - \overline{1, j} \quad | \quad 2 \leq i < j \leq n \\ \overline{1, j} - \overline{1, n} \quad | \quad 2 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\rangle_R. \end{aligned}$$

Die letzte Umformung kommt dadurch zustande, dass für  $2 \leq i, j \leq n-1$  mit  $i \neq j$  gilt:

$$\begin{aligned} (\overline{i, j} - \overline{1, j}) + (\overline{1, j} - \overline{1, n}) - (\overline{1, i} - \overline{1, n}) &= \overline{i, j} - \overline{1, i}, \\ (\overline{n, j} - \overline{1, j}) + (\overline{1, j} - \overline{1, n}) &= \overline{j, n} - \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Die verbleibenden Erzeuger sind dann  $R$ -linear unabhängig. Diese Basis von  $V$  lässt sich offensichtlich durch  $\overline{1, n}$  zu einer  $R$ -Basis von  $M^\beta$  ergänzen. Damit ist  $M^\beta/V = \langle \overline{1, n} + V \rangle \cong \mathbb{1}$ , und Teil (a) von Lemma 2.5.10 folgt: Wir haben gewissermaßen den oberen Teil der Spechtreihe  $S^{\alpha-1} \uparrow_{S_{n-1}}^{S_n} \rightarrow S^\gamma \mid S^\beta \mid S^\alpha$  mit dem unteren Teil der Spechtreihe  $M^\beta \rightarrow S^\beta \mid S^\alpha \mid \mathbb{1}$  "in Deckung gebracht".

Um zu sehen, dass  $V$  isomorph zu  $S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  ist, nehmen wir einen Basiswechsel vor. Dazu definieren wir

$$\begin{aligned} H_{2,j} &:= \overline{2, j} - \overline{1, j} - \overline{2, 3} + \overline{1, 3} \quad \text{für } 4 \leq j \leq n, \\ H_{i,j} &:= \overline{i, j} - \overline{1, j} - \overline{2, i} + \overline{1, 2} \quad \text{für } 3 \leq i < j \leq n, \\ H_2 &:= \overline{1, 3} - \overline{2, 3}, \\ H_i &:= \overline{1, 2} - \overline{2, i} \quad \text{für } 3 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Weiter setzen wir

$$\mathcal{B} := \{H_{2,j} \mid 4 \leq j \leq n\} \cup \{H_{i,j} \mid 3 \leq i < j \leq n\} \cup \{H_i \mid 2 \leq i \leq n\}$$

Die Elemente von  $\mathcal{B}$  liegen alle in  $V$ :

$$\begin{aligned} H_{2,j} &= (\overline{2, j} - \overline{1, j}) - (\overline{2, 3} - \overline{1, 3}) && \text{für } 4 \leq j \leq n, \\ H_{i,j} &= (\overline{i, j} - \overline{1, j}) - (\overline{2, i} - \overline{1, i}) - (\overline{1, i} - \overline{1, n}) + (\overline{1, 2} - \overline{1, n}) && \text{für } 3 \leq i < j \leq n, \\ H_2 &= -(\overline{2, 3} - \overline{1, 3}), \\ H_i &= (\overline{1, 2} - \overline{1, n}) - (\overline{1, i} - \overline{1, n}) - (\overline{2, i} - \overline{1, i}) && \text{für } 3 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Umgekehrt liegen die Elemente der obigen Basis von  $V$  auch im  $R$ -Erzeugnis von  $\mathcal{B}$ :

$$\begin{aligned} \overline{2, 3} - \overline{1, 3} &= -H_2, \\ \overline{2, j} - \overline{1, j} &= H_{2,j} - H_2 && \text{für } 4 \leq j \leq n, \\ \overline{i, j} - \overline{1, j} &= H_{i,j} - H_i && \text{für } 3 \leq i < j \leq n, \\ \overline{1, 2} - \overline{1, n} &= H_{2,n} + H_n - H_2, \\ \overline{1, 3} - \overline{1, n} &= H_{2,n} + H_n - H_3, \\ \overline{1, j} - \overline{1, n} &= H_{2,n} - H_{2,j} + H_n - H_j && \text{für } 4 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Damit ist  $V = \langle \mathcal{B} \rangle_R$ , und da  $\mathcal{B}$  ebenso viele Elemente enthält wie die obige Basis von  $V$  (nämlich  $(n-3) + \binom{n-2}{2} + (n-1) = \binom{n}{2}$ ), ist  $\mathcal{B}$  auch eine  $R$ -Basis von  $V$ .

Tabelle B.I

$\pi$	$i \in$	$\pi H_i$ als Linearkombination von Tabloiden	$H_j, H_{j,k}$
a	$\{2\}$	$2, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3}$	$-H_2$
	$\{3\}$	$\overline{1}, \overline{2} - \overline{1}, \overline{3}$ = $\overline{1}, \overline{2} - \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3} + \overline{2}, \overline{3}$	$H_3 - H_2$
	$\{4, \dots, n\}$	$\overline{1}, \overline{2} - \overline{1}, \overline{i}$ = $\overline{1}, \overline{2} - \overline{2}, \overline{i} - \overline{1}, \overline{3} + \overline{2}, \overline{3}$ $+ \overline{2}, \overline{i} - \overline{1}, \overline{i} - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{3}$	$H_i - H_2 + H_{2,i}$
b	$\{2\}$	$\overline{2}, \overline{4} - \overline{3}, \overline{4}$ = $\overline{1}, \overline{2} - \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3} + \overline{2}, \overline{3}$ $- \overline{3}, \overline{4} + \overline{1}, \overline{4} + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{2}$ $+ \overline{2}, \overline{4} - \overline{1}, \overline{4} - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{3}$	$H_3 - H_2$ $-H_{3,4} + H_{2,4}$
	$\{3, \dots, n-1\}$	$\overline{3}, \overline{i} + \overline{1} - \overline{2}, \overline{3}$ = $\overline{1}, \overline{2} - \overline{2}, \overline{i} + \overline{1} - \overline{1}, \overline{3} + \overline{2}, \overline{3}$ $- \overline{3}, \overline{i} + \overline{1} + \overline{1}, \overline{i} + \overline{1} + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{2}$ $+ \overline{2}, \overline{i} + \overline{1} - \overline{1}, \overline{i} + \overline{1} - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{3}$	$H_{i+1} - H_2$ $-H_{3,i+1} + H_{2,i+1}$
	$\{n\}$	$\overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3}$	$-H_2$

Tabelle B.II

$\pi$	$i \in$	$\pi \eta_{i,n+1}$ als Linearkombination von Tabloiden	Polytabloiden
a	$\{2\}$	$\overline{1}, n+1 - \overline{2}, n+1 - \overline{1}, \overline{3} + \overline{2}, \overline{3}$	$-\eta_{2,n+1}$
	$\{3\}$	$\overline{3}, n+1 - \overline{2}, n+1 - \overline{1}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{2}$ = $\overline{3}, n+1 - \overline{1}, n+1 - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{2}$ $- \overline{2}, n+1 + \overline{1}, n+1 + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3}$	$\eta_{3,n+1} - \eta_{2,n+1}$
	$\{4, \dots, n\}$	$\overline{i}, n+1 - \overline{2}, n+1 - \overline{1}, \overline{i} + \overline{1}, \overline{2}$ = $\overline{i}, n+1 - \overline{1}, n+1 - \overline{2}, \overline{i} + \overline{1}, \overline{2}$ $- \overline{2}, n+1 + \overline{1}, n+1 + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3}$ $+ \overline{2}, \overline{i} - \overline{1}, \overline{i} - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{3}$	$\eta_{i,n+1} - \eta_{2,n+1}$ $+ \eta_{2,i}$
b	$\{2\}$	$\overline{3}, n+1 - \overline{2}, n+1 - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{3}$ = $\overline{3}, n+1 - \overline{1}, n+1 - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{2}$ $- \overline{2}, n+1 + \overline{1}, n+1 + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3}$ $- \overline{3}, \overline{4} + \overline{1}, \overline{4} + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{2}$ $+ \overline{2}, \overline{4} - \overline{1}, \overline{4} - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{3}$	$\eta_{3,n+1} - \eta_{2,n+1}$ $- \eta_{3,4} + \eta_{2,4}$
	$\{3, \dots, n-1\}$	$\overline{i} + \overline{1}, n+1 - \overline{2}, n+1 - \overline{3}, \overline{i} + \overline{1} + \overline{2}, \overline{3}$ = $\overline{i} + \overline{1}, n+1 - \overline{1}, n+1 - \overline{2}, \overline{i} + \overline{1} + \overline{1}, \overline{2}$ $- \overline{2}, n+1 + \overline{1}, n+1 + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{3}$ $- \overline{3}, \overline{i} + \overline{1} + \overline{1}, \overline{i} + \overline{1} + \overline{2}, \overline{3} - \overline{1}, \overline{2}$ $+ \overline{2}, \overline{i} + \overline{1} - \overline{1}, \overline{i} + \overline{1} - \overline{2}, \overline{3} + \overline{1}, \overline{3}$	$\eta_{i+1,n+1} - \eta_{2,n+1}$ $- \eta_{3,i+1} + \eta_{2,i+1}$
	$\{n\}$	$\overline{1}, n+1 - \overline{2}, n+1 - \overline{1}, \overline{3} + \overline{2}, \overline{3}$	$-\eta_{2,n+1}$

Die Elemente  $H_{i,j} \in V \subseteq M^\beta$  für  $2 \leq i < j \leq n$  mit  $\{i,j\} \neq \{2,3\}$  sind übrigens genau die Standard- $\beta$ -Polytabloide, die in Abschnitt A.2 mit  $\eta_{i,j}$  bezeichnet wurden. Damit ist  $S^\beta$  ein  $RS_n$ -Untermodul von  $V$ .

Mit Hilfe der Basis  $\mathcal{B}$  definieren wir nun einen  $R$ -Modul-Isomorphismus

$$\psi : V \longrightarrow S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}, \quad \begin{cases} H_{i,j} \mapsto \eta_{i,j} & \text{für } 2 \leq i < j \leq n, \{i,j\} \neq \{2,3\}, \\ H_i \mapsto \eta_{i,n+1} & \text{für } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

(Die  $\eta_{i,j}$  bezeichnen jetzt die Standard- $(\beta+1)$ -Polytabloide.) Durch  $\psi$  wird  $S^\beta$  kanonisch in  $S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  eingebettet. Die Operation von  $S_n$  auf den  $H_{i,j} \in S^\beta$  bzw. den  $\eta_{i,j} \in S^{\beta+1} \downarrow_{S_n}^{S_{n+1}}$  für  $2 \leq i < j \leq n$  mit  $\{i,j\} \neq \{2,3\}$  wird durch  $\psi$  offensichtlich respektiert. Um zu zeigen, dass  $\psi$  insgesamt die Operation der  $S_n$  respektiert, brauchen wir nur noch die Operation der  $S_n$  auf den  $H_i$  und auf den  $\eta_{i,n+1}$  zu vergleichen. An den Tabellen B.I und B.II sieht man, dass  $\pi\eta_{i,n+1} = \psi(\pi H_i)$  ist für alle  $\pi \in S_n$  und alle  $2 \leq i \leq n$ . Also ist  $\psi$  ein  $RS_n$ -Modul-Isomorphismus, und Teil (b) von Lemma 2.5.10 ist gezeigt.

Für Teil (c) wechseln erneut die Basis von  $V$ :

$$V = \left\langle \begin{array}{c|c} \overline{i,j} - \overline{1,j} & 2 \leq i < j \leq n \\ \hline \overline{1,j} - \overline{1,n} & 2 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\rangle_R = \left\langle \begin{array}{c|c} \overline{i,j} - \overline{1,n} & 2 \leq i < j \leq n \\ \hline \overline{1,j} - \overline{1,n} & 2 \leq j \leq n-1 \end{array} \right\rangle_R.$$

Der Fixpunkt-Untermodul von  $M^\beta$  ist als  $R$ -Modul erzeugt von der Spur  $f_\beta$ . An der neuen Basis sehen wir praktisch unmittelbar, dass  $f_\beta + V = \binom{n}{2} \overline{1,n} + V$  ist. Wenn nun  $\pi : M^\beta \rightarrow M^\beta/V$  die kanonische Abbildung ist, dann ist

$$\begin{aligned} \text{Fix}_{S_n}(M^\beta/V)/\pi(\text{Fix}_{S_n}(M^\beta)) &\cong (M^\beta/V)/\pi(\langle f_\beta \rangle_R) \\ &\cong \langle \overline{1,n} + V \rangle_R / \langle \binom{n}{2} \overline{1,n} + V \rangle_R \cong R / \binom{n}{2} R. \end{aligned}$$

Falls  $R = \mathbb{Z}$  ist, ist  $H^0(S_n, V) = 0$ , weil die beiden Spechtfaktoren  $S_{\mathbb{Z}}^\beta$  und  $S_{\mathbb{Z}}^\alpha$  von  $V$  keine Fixpunkte haben. Mit Beispiel 2.1.13 ist außerdem  $H^1(S_n, M_{\mathbb{Z}}^\beta) = 0$ . Somit erhalten wir die exakte Kohomologie-Sequenz

$$\begin{aligned} 0 = H^0(S_n, V) &\longrightarrow \underbrace{H^0(S_n, M_{\mathbb{Z}}^\beta)}_{\cong \langle f_\beta \rangle_{\mathbb{Z}}} \xrightarrow{\pi} \underbrace{H^0(S_n, M_{\mathbb{Z}}^\beta/V)}_{\cong \langle \overline{1,n} + V \rangle_{\mathbb{Z}}} \\ &\longrightarrow H^1(S_n, V) \longrightarrow H^1(S_n, M_{\mathbb{Z}}^\beta) = 0. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich, dass  $H^1(S_n, V) \cong \mathbb{Z} / \binom{n}{2} \mathbb{Z}$  ist, und Teil (c) von Lemma 2.5.10 ist gezeigt.



# Anhang C

## Der Beweis von Lemma 3.3.1

Es seien  $2 \neq p \in \mathbb{P}$  und  $4 \leq n \in \mathbb{N}$  mit  $p \mid n$ . Die folgende Isomorphie ist zu zeigen:

$$S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \cong M_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \oplus S_{\mathbb{Z}_p}^\beta \oplus S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma.$$

Da  $p$  ungerade ist, ist 2 in  $\mathbb{Z}_p$  invertierbar. Damit ist eine Basis von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  gegeben durch

$$\varepsilon_i := e_i \otimes e_i \quad \text{für } 2 \leq i \leq n,$$

$$\varepsilon_{i,j} := (e_i \otimes e_j) + (e_j \otimes e_i) \quad \text{für } 2 \leq i < j \leq n,$$

$$\bar{\varepsilon}_{i,j} := (e_i \otimes e_j) - (e_j \otimes e_i) \quad \text{für } 2 \leq i < j \leq n.$$

Die Operation der  $S_n$  auf den  $e_i$  ist aus A.1 bekannt. Damit rechnet man leicht nach, dass die Operation von  $S_n$  auf  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} a \cdot \varepsilon_2 &= \varepsilon_2 && \\ a \cdot \varepsilon_i &= \varepsilon_2 + \varepsilon_i - \varepsilon_{2,i} && \text{für } 3 \leq i \leq n, \\ a \cdot \varepsilon_{2,j} &= 2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,j} && \text{für } 3 \leq j \leq n, \\ a \cdot \varepsilon_{i,j} &= 2\varepsilon_2 + \varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{2,j} && \text{für } 3 \leq i < j \leq n, \\ a \cdot \bar{\varepsilon}_{2,j} &= -\bar{\varepsilon}_{2,j} && \text{für } 3 \leq j \leq n, \\ a \cdot \bar{\varepsilon}_{i,j} &= \bar{\varepsilon}_{i,j} + \bar{\varepsilon}_{2,i} - \bar{\varepsilon}_{2,j} && \text{für } 3 \leq i < j \leq n, \\ b \cdot \varepsilon_i &= \varepsilon_2 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{2,i+1} && \text{für } 2 \leq i \leq n-1, \\ b \cdot \varepsilon_n &= \varepsilon_2 && \\ b \cdot \varepsilon_{i,j} &= 2\varepsilon_2 + \varepsilon_{i+1,j+1} - \varepsilon_{2,i+1} - \varepsilon_{2,j+1} && \text{für } 2 \leq i < j \leq n-1, \\ b \cdot \varepsilon_{i,n} &= 2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,i+1} && \text{für } 2 \leq i \leq n-1, \\ b \cdot \bar{\varepsilon}_{i,j} &= \bar{\varepsilon}_{i+1,j+1} + \bar{\varepsilon}_{2,i+1} - \bar{\varepsilon}_{2,j+1} && \text{für } 2 \leq i < j \leq n-1, \\ b \cdot \bar{\varepsilon}_{i,n} &= \bar{\varepsilon}_{2,i+1} && \text{für } 2 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

Das  $\mathbb{Z}_p$ -Erzeugnis der  $\bar{\varepsilon}_{i,j}$  ist ein direkter Summand von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  als  $\mathbb{Z}_p S_n$ -Modul. Es handelt sich hierbei um den schief-symmetrischen Anteil von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$ , wie sich aus §12 C von [CR81] ergibt. Dieser schief-symmetrische Anteil ist isomorph zu  $S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma$  als  $\mathbb{Z}_p S_n$ -Modul via  $\bar{\varepsilon}_{i,j} \mapsto e_{i,j}$ , wie man sofort sieht, wenn man die Operation der  $S_n$  auf den  $\bar{\varepsilon}_{i,j}$  mit der auf den  $e_{i,j}$  vergleicht (Anhang A.3).

Der symmetrische Anteil von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  als Komplement des schief-symmetrischen Anteils ist das  $\mathbb{Z}_p$ -Erzeugnis der  $\varepsilon_i$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und der  $\varepsilon_{i,j}$  für  $1 \leq i < j \leq n-1$ . In diesen symmetrischen Anteil lassen sich  $M_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  und  $S_{\mathbb{Z}_p}^\beta$  als  $\mathbb{Z}_p S_n$ -Moduln einbetten.

Wir beginnen mit dem etwas einfacher zu findenden  $S_{\mathbb{Z}_p}^\beta$ . Dazu setzen wir

$$E_{2,j} := \varepsilon_{2,j} - \varepsilon_{2,3} \quad \text{für alle } 4 \leq j \leq n,$$

$$E_{i,j} := \varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{2,i} \quad \text{für alle } 3 \leq i < j \leq n.$$

Diese Elemente sind offenkundig  $\mathbb{Z}_p$ -linear unabhängig. Ein  $\mathbb{Z}_p S_n$ -Modul-Isomorphismus zwischen dem  $\mathbb{Z}_p$ -Erzeugnis der  $E_{i,j}$  und  $S_{\mathbb{Z}_p}^\beta$  ist gegeben durch  $E_{i,j} \mapsto \eta_{i,j}$ . Das wird klar, wenn man die Operation der  $S_n$  auf den  $E_{i,j}$  mit der auf den  $\eta_{i,j}$  vergleicht (Tabelle A.II).

$\pi$	$i$	$j$	$\pi E_{i,j}$	
a	= 2	$\geq 4, \leq n$	$(2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,j}) - (2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,3})$	$-E_{2,j}$
	= 3	$\geq 4, \leq n$	$(2\varepsilon_2 + \varepsilon_{3,j} - \varepsilon_{2,3} - \varepsilon_{2,j}) - (2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,3})$	$E_{3,j} - E_{2,j}$
	$\geq 4, \leq n-1$	$\geq i+1, \leq n$	$(2\varepsilon_2 + \varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{2,j}) - (2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,i})$	$E_{i,j} - E_{2,j} + E_{2,i}$
b	= 2	$\geq 4, \leq n-1$	$(2\varepsilon_2 + \varepsilon_{3,j+1} - \varepsilon_{2,3} - \varepsilon_{2,j+1}) - (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{3,4} - \varepsilon_{2,3} - \varepsilon_{2,4})$	$E_{3,j+1} - E_{2,j+1} + E_{2,4} - E_{3,4}$
		= n	$(2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,3}) - (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{3,4} - \varepsilon_{2,3} - \varepsilon_{2,4})$	$E_{2,4} - E_{3,4}$
	$\geq 3, \leq n-2$	$\geq i+1, \leq n-1$	$(2\varepsilon_2 + \varepsilon_{i+1,j+1} - \varepsilon_{2,i+1} - \varepsilon_{2,j+1}) - (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{3,i+1} - \varepsilon_{2,3} - \varepsilon_{2,i+1})$	$E_{i+1,j+1} - E_{2,j+1} - E_{3,i+1} + E_{2,i+1}$
	$\geq 3, \leq n-1$	= n	$(2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,i+1}) - (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{3,i+1} - \varepsilon_{2,3} - \varepsilon_{2,i+1})$	$-E_{3,i+1}$

Als Nächstes definieren wir

$$E_1 := \sum_{j=2}^n \varepsilon_j, \quad E_i := E_1 + (n-2)\varepsilon_i - \sum_{j=2}^{i-1} \varepsilon_{j,i} - \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{i,j} \quad \text{für } 2 \leq i \leq n.$$

Wenn man die bei der Konstruktion verwendeten  $\varepsilon_{i,j}$  betrachtet, sieht man, dass diese Elemente  $\mathbb{Z}_p$ -linear unabhängig sind. Die  $S_n$  operiert folgendermaßen auf den  $E_i$ :

$$aE_1 = \varepsilon_2 + \sum_{j=3}^n (\varepsilon_2 + \varepsilon_j - \varepsilon_{2,j}) = \sum_{j=2}^n \varepsilon_j + (n-2)\varepsilon_2 - \sum_{j=3}^n \varepsilon_{2,j} = E_2.$$

Damit ist umgekehrt  $aE_2 = E_1$ . Nun sei  $3 \leq i \leq n$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} aE_i &= E_2 + (n-2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_i - \varepsilon_{2,i}) - (2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,i}) \\ &\quad - \sum_{j=3}^{i-1} (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{j,i} - \varepsilon_{2,j} - \varepsilon_{2,i}) - \sum_{j=i+1}^n (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{i,j} - \varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{2,j}) \\ &= E_2 + (n-2 - (n-2) \cdot 2)\varepsilon_2 + (n-2)\varepsilon_i - (n-2 - (n-2))\varepsilon_{2,i} \\ &\quad - \sum_{j=3}^{i-1} \varepsilon_{j,i} - \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{i,j} + \sum_{j=3}^{i-1} \varepsilon_{2,j} + \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{2,j} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \left( E_2 - (n-2)\varepsilon_2 + \sum_{j=3}^{i-1} \varepsilon_{2,j} + \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{2,j} \right) - \sum_{j=3}^{i-1} \varepsilon_{j,i} - \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{i,j} \\
&= (E_1 - \varepsilon_{2,i}) - \sum_{j=3}^{i-1} \varepsilon_{j,i} - \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{i,j} = E_i.
\end{aligned}$$

Weiterhin gilt:

$$bE_1 = \sum_{j=2}^{n-1} (\varepsilon_2 + \varepsilon_{j+1} - \varepsilon_{2,j+1}) + \varepsilon_2 = \sum_{j=2}^n \varepsilon_j + (n-2)\varepsilon_2 - \sum_{j=3}^n \varepsilon_{2,j} = E_2,$$

$$bE_n = E_2 + (n-2)\varepsilon_2 - \sum_{j=2}^{n-1} (2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,j+1}) = E_2 - (n-2)\varepsilon_2 + \sum_{j=3}^n \varepsilon_{2,j} = E_1.$$

Für  $2 \leq i \leq n-1$  erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
bE_i &= E_2 + (n-2)(\varepsilon_2 + \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{2,i+1}) - \sum_{j=2}^{i-1} (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{j+1,i+1} - \varepsilon_{2,j+1} - \varepsilon_{2,i+1}) \\
&\quad - \sum_{j=i+1}^{n-1} (2\varepsilon_2 + \varepsilon_{i+1,j+1} - \varepsilon_{2,i+1} - \varepsilon_{2,j+1}) - (2\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,i+1}) \\
&= E_2 + (n-2 - (n-2) \cdot 2)\varepsilon_2 + (n-2)\varepsilon_{i+1} - (n-2 - (n-2))\varepsilon_{2,i+1} \\
&\quad - \sum_{j=3}^i \varepsilon_{j,i+1} - \sum_{j=i+2}^n \varepsilon_{i+1,j} + \sum_{j=3}^i \varepsilon_{2,j} + \sum_{j=i+2}^n \varepsilon_{2,j} \\
&= \left( E_2 - (n-2)\varepsilon_2 + (n-2)\varepsilon_{i+1} + \sum_{j=3}^i \varepsilon_{2,j} + \sum_{j=i+2}^n \varepsilon_{2,j} \right) - \sum_{j=3}^i \varepsilon_{j,i+1} - \sum_{j=i+2}^n \varepsilon_{i+1,j} \\
&= \left( E_1 + (n-2)\varepsilon_{i+1} - \sum_{j=3}^n \varepsilon_{2,j} + \sum_{j=3}^i \varepsilon_{2,j} + \sum_{j=i+2}^n \varepsilon_{2,j} \right) - \sum_{j=3}^i \varepsilon_{j,i+1} - \sum_{j=i+2}^n \varepsilon_{i+1,j} \\
&= (E_1 + (n-2)\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{2,i+1}) - \sum_{j=3}^i \varepsilon_{j,i+1} - \sum_{j=i+2}^n \varepsilon_{i+1,j} = E_{i+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist das Erzeugnis der  $E_i$  isomorph zum natürlichen Permutationsmodul  $M_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  via  $E_i \mapsto \bar{i}$ .

Es ist noch zu zeigen, dass der symmetrische Anteil von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  eine direkte Summe aus dem Erzeugnis der  $E_i$  und dem Erzeugnis der  $E_{i,j}$  ist. Zunächst stellen wir fest, dass der Schnitt des Erzeugnisses der  $E_i$  mit dem Erzeugnis der  $E_{i,j}$  trivial ist. Das liegt daran, dass  $\alpha$  und  $\beta$  unterschiedliche  $p$ -Kerne haben: Bei ungeradem  $p$  stimmen die beiden  $p$ -Kerne genau dann überein, wenn  $n \equiv 2 \pmod{p}$  ist. Letzteres aber ist hier wegen  $p \mid n$  nicht der Fall.

Schließlich weisen wir nach, dass die Elemente  $\varepsilon_i$  und  $\varepsilon_{i,j}$ , die eine  $\mathbb{Z}_p$ -Basis des symmetrischen Anteils von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  bilden, im  $\mathbb{Z}_p$ -Erzeugnis der  $E_i$  und  $E_{i,j}$  liegen. Zunächst stellen wir fest, dass sich der Ausdruck  $(n-2)(\varepsilon_i - \varepsilon_{2,3})$  für  $2 \leq i \leq n$  aus den  $E_i$  und  $E_{i,j}$  linear kombinieren lässt:

$$E_2 - E_1 + \sum_{j=4}^n E_{2,j} = (n-2)\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,3} - \sum_{j=4}^n \varepsilon_{2,3} = (n-2)(\varepsilon_2 - \varepsilon_{2,3}),$$

$$\begin{aligned}
& E_i - E_1 + E_{2,i} + \sum_{j=3}^{i-1} (E_{j,i} + E_{2,i}) + \sum_{j=i+1}^n (E_{i,j} + E_{2,j}) \\
= & (n-2)\varepsilon_i - \sum_{j=2}^{i-1} \varepsilon_{j,i} - \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{i,j} + (\varepsilon_{2,i} - \varepsilon_{2,3}) + \sum_{j=3}^{i-1} (\varepsilon_{j,i} - \varepsilon_{2,3}) + \sum_{j=i+1}^n (\varepsilon_{i,j} + \varepsilon_{2,3}) \\
= & (n-2)\varepsilon_i - \varepsilon_{2,3} - \sum_{j=3}^{i-1} \varepsilon_{2,3} - \sum_{j=i+1}^n \varepsilon_{2,3} = (n-2)(\varepsilon_i - \varepsilon_{2,3}) \quad \text{für } 3 \leq i \leq n.
\end{aligned}$$

Da  $n-2$  wegen  $p \mid n$  in  $\mathbb{Z}_p$  invertierbar ist, liegen damit alle  $\varepsilon_i - \varepsilon_{2,3}$  im  $\mathbb{Z}_p$ -Erzeugnis der  $E_i$  und  $E_{i,j}$ . Da  $n-1$  ebenfalls in  $\mathbb{Z}_p$  invertierbar ist, liegen wegen

$$E_1 - \sum_{j=2}^n (\varepsilon_j - \varepsilon_{2,3}) = (n-1)\varepsilon_{2,3}$$

erstens  $\varepsilon_{2,3}$  im  $\mathbb{Z}_p$ -Erzeugnis der  $E_i$  und  $E_{i,j}$  und damit zweitens auch alle  $\varepsilon_i$ . Die übrigen Erzeuger des symmetrischen Anteils von  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  kann man jetzt leicht sukzessive linear kombinieren:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{2,i} &= E_{2,i} + \varepsilon_{2,3} \quad \text{für alle } 4 \leq i \leq n, \\
\varepsilon_{i,j} &= E_{i,j} + \varepsilon_{2,i} \quad \text{für alle } 3 \leq i < j \leq n.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt damit, dass  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha$  tatsächlich eine direkte Summe aus den drei betrachteten Untermoduln ist.

Zum Abschluss sei noch auf ein paar Möglichkeiten zur Verallgemeinerung der Aussage hingewiesen:

- (a) Für  $n=3$  ergeben die gleichen Rechnungen, dass  $S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \otimes S_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \cong M_{\mathbb{Z}_p}^\alpha \oplus S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma$  ist.
- (b) Die besagten zu  $M^\alpha$ ,  $S^\beta$  und  $S^\gamma$  isomorphen Untermoduln existieren auch, wenn wir statt  $\mathbb{Z}_p$  einen beliebigen Integritätsbereich  $R$  wählen und in Bezug auf  $n \in \mathbb{N}$  keine Einschränkungen außer  $n \geq 4$  machen. Die oben gewählten Basen sind unabhängig davon. Im Allgemeinen ist aber  $S^\alpha \otimes S^\alpha$  keine direkte Summe aus diesen drei Untermoduln.
- (c) Unter der Voraussetzung, dass  $n-2$  und  $n-1$  in  $R$  ungleich 0 sind, kann man nachrechnen, dass die drei Untermoduln auf jeden Fall paarweise trivialen Schnitt haben. Das soll hier aber nicht vorgeführt werden.
- (d) Wenn man zusätzlich voraussetzt, dass 2,  $n-2$  und  $n-1$  invertierbar in  $R$  sind, ergeben die gleichen Rechnungen wie oben, dass die drei Untermoduln ganz  $S^\alpha \otimes S^\alpha$  aufspannen.

## Anhang D

# Der Beweis von Lemma 3.3.6 (a)

Es sei  $2 \neq p \in \mathbb{P}$ . Wie zuvor ist  $\gamma = (n-2, 1^2) \vdash n \geq 3$  und  $a = (1, 2)$ ,  $b = (1, 2, \dots, n) \in S_n$ . Mit  $A$  und  $B$  seien die darstellenden Matrizen zu  $a$  und  $b$  aus Anhang A.3 bezeichnet, und  $N$  steht wieder für  $\sum_{\ell=0}^{n-1} b^\ell$ .

Es soll gezeigt werden, dass

$$\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \longrightarrow H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$$

surjektiv ist. Dies ist äquivalent dazu, dass die Restriktion

$$\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^\gamma / S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \longrightarrow H^1(\langle b \rangle, V)$$

für  $V := (S_{\mathbb{Q}}^\gamma / S_{\mathbb{Z}}^\gamma) \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n}$  surjektiv ist. Mit Satz 2.3.1 und Lemma 3.3.4 wissen wir, dass

$$\text{Kern}_V(N) / (1-b)V \cong H^1(\langle b \rangle, V) \cong H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n}) \cong \mathbb{Z} / \frac{n}{x_n} \mathbb{Z}$$

ist, wobei  $x_n$  für gerades  $n$  gleich 2 und für ungerades  $n$  gleich 1 ist. Genauer gesagt, ist  $\text{Kern}_V(N) \cong Z^1(\langle b \rangle, V)$  und  $(1-b)V \cong B^1(\langle b \rangle, V)$ , beides via  $v + S_{\mathbb{Z}}^\gamma \leftrightarrow [\delta : b \mapsto v + S_{\mathbb{Z}}^\gamma]$ . (Man vergleiche dazu auch Satz 2.4.2 und Beispiel 2.4.4. Dabei ist zu beachten, dass die Bezeichnungen dort zum Teil eine andere Bedeutung haben. Für das dortige  $B$  ist das jetzige  $B-1$  einzusetzen, und in Beispiel 2.4.4 muss an die Stelle des dortigen  $\mathbb{Q}V/V$  das jetzige  $V$  treten. Die Zassenhaus-Matrix  $Z$  ist die darstellende Matrix von  $N$ .)

Der Plan ist nun, einen Erzeuger  $m + S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  von  $\text{Kern}_V(N) / (1-b)V$  zu finden und anschließend zu zeigen, dass das Element  $\delta \in H^1(S_n, V)$ , das durch  $\delta(b) := m + S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  definiert ist, im Bild von  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n}$  liegt. Dazu definieren wir zunächst  $m \in S_{\mathbb{Q}}^\gamma$  durch

$$m := \begin{cases} \left( \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \frac{2}{n} \boxed{1|k} \right) + \frac{1}{n} \boxed{1|\frac{n-1}{2}} & \text{für ungerades } n, \\ \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{2}{n} \boxed{1|k} & \text{für gerades } n. \end{cases}$$

(Wir verwenden hier wieder die Notation für Standard- $\gamma$ -Polytabloide aus (A.1).) Für  $1 \leq k \leq n-2$  sei  $t_k$  definiert wie in (A.4). Mit (A.6) erhalten wir, dass  $N \cdot m = t_1 = \sum_{i=1}^{n-2} \boxed{i|1} \in S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  ist:

- Für ungerades  $n$  gilt:

$$N \cdot m = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{(n-3)/2} (t_1 + t_k + \underbrace{t_{n-1-k}}_{=-t_{k+1}}) + \frac{1}{n} (t_1 + t_{(n-1)/2} + t_{(n-1)/2})$$

$$= \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{1}{n}\right)t_1 + \frac{2}{n} \left( \sum_{k=2}^{(n-3)/2} t_k - \sum_{k=2}^{(n-1)/2} t_k + t_{(n-1)/2} \right) = t_1.$$

- Für gerades  $n$  gilt:

$$N \cdot m = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n/2-1} (t_1 + t_k + \underbrace{t_{n-1-k}}_{=-t_{k+1}}) = \left(\frac{2}{n} \cdot \frac{n}{2}\right)t_1 + \frac{2}{n} \left( \sum_{k=2}^{n/2-1} t_k - \sum_{k=2}^{n/2} t_k \right) \stackrel{t_{n/2}=0}{=} t_1.$$

Damit ist  $N \cdot (m + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}) = 0 + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$ , also  $m + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma} \in \text{Kern}_V(N)$ . Außerdem ist offensichtlich  $n/x_n \cdot m \in S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$ . Damit ist die Ordnung von  $(m + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}) + (1-b)V$  in  $\text{Kern}_V(N)/(1-b)V$  ein Teiler von  $n/x_n$ .

Gemäß Beispiel 2.4.4 ist  $v + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma} \in \text{Kern}_V(N)$  genau dann in  $(1-b)V \cong \text{col}_{\mathbb{Q}}(B-1) + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$ , wenn  $N \cdot v \in \text{col}_{\mathbb{Z}}(N)$  ist. Speziell  $N \cdot jm = jt_1$  mit  $j \in \mathbb{N}$  liegt genau dann in  $\text{col}_{\mathbb{Z}}(N) = \langle \mathcal{M} \rangle_{\mathbb{Z}}$  (mit  $\mathcal{M}$  aus (A.7)), wenn  $j$  ein Vielfaches von  $n/x_n$  ist. Das sieht man vielleicht am einfachsten mit Hilfe der Matrix  $\tilde{N}$  aus (A.8), wenn man ein Vielfaches des ersten Einheitsvektors als  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination der Spalten von  $\tilde{N}$  darzustellen versucht. Insgesamt hat also  $(m + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}) + (1-b)V$  in  $\text{Kern}_V(N)/(1-b)V$  die Ordnung  $n/x_n$  und ist damit ein Erzeuger.

Es bleibt also zu zeigen, dass der Erzeuger

$$[\delta : \langle b \rangle \rightarrow V, b \mapsto m + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}] + B^1(\langle b \rangle, V)$$

von  $H^1(\langle b \rangle, V)$  im Bild von  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n}$  liegt. Dazu zeigen wir, dass die Abbildung

$$\delta' : S_n \longrightarrow S_{\mathbb{Q}}^{\gamma}/S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}, \quad a \mapsto m + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}, b \mapsto m + S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$$

eine Derivation in  $Z^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^{\gamma}/S_{\mathbb{Z}}^{\gamma})$  ist. Wenn das nämlich der Fall ist, ist  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n}(\bar{\delta}') = \bar{\delta}$ , und wir sind fertig. Die Abbildung  $\delta'$  ist gemäß Zassenhaus-Verfahren genau dann eine Derivation, wenn  $Z_{\gamma} \binom{m}{m} \in \mathbb{Z}^{2d}$  ist (mit  $d := \text{Rang}_{\mathbb{Z}_p}(S_{\mathbb{Z}_p}^{\gamma}) = (n-1)(n-2)/2$ ). Mit diesem Nachweis befasst sich der Rest dieses Abschnitts.

Zur Erinnerung: Die Zassenhaus-Matrix ist gegeben durch

$$Z_{\gamma} = \left( \begin{array}{c|c} 1+A & 0 \\ \hline 0 & \sum_{i=0}^{n-1} B^i \\ \hline \sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i & \sum_{i=0}^{n-2} (AB)^i A \\ \hline (1+AB^j AB^{n-j})(1+AB^j) & (1+AB^j AB^{n-j})A \left( \sum_{i=0}^{j-1} B^i + B^j A \sum_{i=0}^{n-j-1} B^i \right) \\ \hline 2 \leq j \leq n/2 & 2 \leq j \leq n/2 \end{array} \right).$$

Es ist also  $Z_{\gamma} \binom{m}{m} \in \mathbb{Z}^{2d}$  genau dann, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $(1+a)m \in S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$ ,
- $\sum_{\ell=0}^{n-1} b^{\ell} \cdot m \in S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$ ,
- $\sum_{\ell=0}^{n-2} (ab)^{\ell} (1+a) \cdot m \in S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$ ,
- $(1+ab^j ab^{n-j}) \left( 1+a \sum_{\ell=0}^j b^{\ell} + ab^j a \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^{\ell} \right) \cdot m \in S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$  für alle  $2 \leq j \leq n/2$ .

Gemäß Tabelle A.III ist  $a\boxed{1|k} = -\boxed{1|k}$  für  $1 \leq k \leq n-2$ . Damit ist  $(1+a)m = m - m = 0$ , und die Aussagen (a) und (c) sind gezeigt. Wegen  $\sum_{\ell=0}^{n-1} b^\ell \cdot m = N \cdot m = t_1$  ist auch Teil (b) klar. Beim Beweis von Aussage (d) liegt allerdings noch ein hartes Stück Arbeit vor uns.

Es sei also  $2 \leq j \leq n/2$ . Als erstes wollen wir den zu überprüfenden Ausdruck etwas handlicher gestalten. Dazu stellen wir zunächst fest:

$$\left(1 + a \sum_{\ell=0}^j b^\ell\right) m = (1+a)m + a \sum_{\ell=1}^j b^\ell m = ab \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell m.$$

Unter Verwendung der Relation  $(ab^j ab^{n-j})^2 = 1$  aus der Präsentation  $G_n$  erhalten wir außerdem:

$$\begin{aligned} (1 + ab^j ab^{n-j}) \left( ab^j a \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^\ell \right) &= ab^j a \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^\ell + \underbrace{ab^j ab^{n-j} ab^j a}_{=b^j} \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^\ell \\ &= ab^j a \underbrace{b^{n-j} b^j}_{=1} \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^\ell + b^j \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^\ell \\ &= (ab^j ab^{n-j} + 1) \left( \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^{j+\ell} \right) = (1 + ab^j ab^{n-j}) \left( \sum_{\ell=j}^{n-1} b^\ell \right). \end{aligned}$$

Und schließlich gilt:

$$ab \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell + \sum_{\ell=j}^{n-1} b^\ell = ab \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell + N - \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell = (ab-1) \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell + N.$$

Mit Hilfe dieser drei Gleichungen lässt sich der Ausdruck in (d) folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} (1 + ab^j ab^{n-j}) \left( 1 + a \sum_{\ell=0}^j b^\ell + ab^j a \sum_{\ell=0}^{n-j-1} b^\ell \right) \cdot m \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) \left( ab \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell + \sum_{\ell=j}^{n-1} b^\ell \right) \cdot m \\ &= (1 + ab^j ab^{n-j}) \left( (ab-1) \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell + N \right) \cdot m. \end{aligned}$$

Dieses Element liegt wegen  $Nm \in S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  genau dann in  $S_{\mathbb{Z}}^\gamma$ , wenn

$$(1 + ab^j ab^{n-j})(ab-1) \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell \cdot m \in S_{\mathbb{Z}}^\gamma$$

ist. Im Folgenden werden wir den letzteren Ausdruck teilweise auswerten. ‘‘Teilweise‘‘ soll heißen, dass wir zwischendurch gelegentlich Teilausdrücke isolieren können, die bereits in  $S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  liegen, und die wir im weiteren Verlauf unter den Tisch fallen lassen. Einen derartigen Schritt kennzeichnen wir jeweils durch das Symbol  $\equiv_{\mathbb{Z}}$ .

Wegen der beiden unterschiedlichen Definitionen von  $m$  müssen wir eine Fallunterscheidung zwischen geraden und ungeraden  $n$  vornehmen, andererseits müssen wir zwischen  $j = \lfloor n/2 \rfloor$  und  $j < \lfloor n/2 \rfloor$  unterscheiden, was die Sache recht mühsam macht. Da  $m$  für gerades  $n$  eine einfachere Darstellung besitzt, betrachten wir diesen Fall zuerst. So werden die wichtigsten Rechenschritte

hoffentlich deutlich. Im Falle der ungeraden  $n$  läuft die Rechnung im Wesentlichen analog, nur leider sind die Terme viel länger.

Es sei also  $n$  gerade. In diesem Fall ist  $2 \leq j \leq n/2$  und  $m = \sum_{k=1}^{n/2-1} \frac{2}{n} \lfloor 1 \mid k \rfloor$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell \cdot m &= \frac{2}{n} \sum_{\ell=0}^{j-1} \sum_{k=1}^{n/2-1} b^\ell \lfloor 1 \mid k \rfloor \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor 1 \mid k \rfloor + \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n/2-1} \left( \lfloor \ell+1 \mid k \rfloor + \lfloor \ell \mid 1 \rfloor - \lfloor \ell \mid 1+k \rfloor \right) \right). \end{aligned}$$

Hier haben wir die Tabelle A.IV verwendet. Dabei ist zu beachten, dass für  $1 \leq k \leq n/2 - 1$  und  $0 \leq \ell \leq j - 1$  gilt, dass  $\ell < n/2 - 1 \leq n - k - 1$  ist. Aus diesem Ausdruck machen wir drei Doppelsummen, nehmen bei der ersten eine Indexverschiebung in  $\ell$  vor und in der dritten eine in  $k$ , und wir beachten bei der mittleren, dass die Summanden unabhängig von  $k$  sind.

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{2}{n} \left( \sum_{\ell=0}^{j-1} \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor \ell+1 \mid k \rfloor + \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor \ell \mid 1 \rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor \ell \mid 1+k \rfloor \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{\ell=1}^j \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor \ell \mid k \rfloor + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sum_{\ell=1}^{j-1} \lfloor \ell \mid 1 \rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=2}^{n/2} \lfloor \ell \mid k \rfloor \right) \\ &\equiv_{\mathbb{Z}} \frac{2}{n} \left( \sum_{\ell=1}^j \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor \ell \mid k \rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \lfloor \ell \mid 1 \rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=2}^{n/2} \lfloor \ell \mid k \rfloor \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{\ell=1}^j \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor \ell \mid k \rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n/2} \lfloor \ell \mid k \rfloor \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor j \mid k \rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \lfloor \ell \mid n/2 \rfloor \right) =: v. \end{aligned}$$

Jetzt fahren wir fort mit  $(ab - 1)v$ . Für  $j = n/2$  kommt in der ersten Summe ein  $\lfloor \frac{n}{2} \mid \frac{n}{2} - 1 \rfloor$  und in der zweiten Summe ein  $\lfloor \frac{n}{2} - 1 \mid \frac{n}{2} \rfloor$  vor. Daher müssen wir für die Operation mit  $ab$  gemäß (A.9) eine Fallunterscheidung vornehmen.

**1. Fall:** Für  $j < n/2$  ist  $(ab - 1)v$  gleich

$$\begin{aligned} &\frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor j+1 \mid k \rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \lfloor \ell+1 \mid \frac{n}{2} \rfloor - \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor j \mid k \rfloor + \sum_{\ell=1}^{j-1} \lfloor \ell \mid \frac{n}{2} \rfloor \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor j+1 \mid k \rfloor - \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor j \mid k \rfloor - \lfloor j \mid \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor 1 \mid \frac{n}{2} \rfloor \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor j+1 \mid k \rfloor - \sum_{k=1}^{n/2} \lfloor j \mid k \rfloor + \lfloor 1 \mid \frac{n}{2} \rfloor \right) =: v'. \end{aligned}$$

**2. Fall:** Für  $j = n/2$  ist  $(ab - 1)v$  gleich

$$\frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-2} \lfloor \frac{n}{2} + 1 \mid k \rfloor - \lfloor 1 \mid \frac{n}{2} \rfloor - \sum_{\ell=1}^{n/2-2} \lfloor \ell+1 \mid \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor 1 \mid \frac{n}{2} - 1 \rfloor - \sum_{k=1}^{n/2-1} \lfloor \frac{n}{2} \mid k \rfloor + \sum_{\ell=1}^{n/2-1} \lfloor \ell \mid \frac{n}{2} \rfloor \right)$$

$$= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-2} \left[ \frac{n}{2} + 1 \mid k \right] - \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ \frac{n}{2} \mid k \right] + \left[ 1 \mid \frac{n}{2} - 1 \right] \right) =: v''.$$

Auf diesen beiden Ausdrücken operieren wir nun jeweils mit  $(1 + ab^j ab^{n-j})$ . Für die Operation von  $b^j ab^{n-j}$  stützen wir uns auf Tabelle A.V.

**1. Fall:** Für  $j < n/2$  ist  $b^j ab^{n-j} v'$  gleich

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ j \mid k + 1 \right] - \left( - \left[ j \mid 1 \right] + \sum_{k=2}^{n/2} \left[ j + 1 \mid k - 1 \right] \right) + \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2} \left[ j \mid k \right] - \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ j + 1 \mid k \right] - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

Auf diesem Ausdruck operieren wir jetzt mit  $a$ . Da  $j \geq 2$  ist, ist  $ab^j ab^{n-j} v'$  gemäß Tabelle A.III gleich

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2} \left( \left[ j \mid k \right] + \left[ 1 \mid j - 1 \right] - \left[ 1 \mid j + k - 1 \right] \right) - \sum_{k=1}^{n/2-1} \left( \left[ j + 1 \mid k \right] + \left[ 1 \mid j \right] - \left[ 1 \mid j + k \right] \right) - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2} \left[ j \mid k \right] + \frac{n}{2} \left[ 1 \mid j - 1 \right] - \sum_{k=1}^{n/2} \left[ 1 \mid j + k - 1 \right] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ j + 1 \mid k \right] - \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left[ 1 \mid j \right] + \sum_{k=2}^{n/2} \left[ 1 \mid j + k - 1 \right] - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right) \\ & \equiv_{\mathbb{Z}} \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2} \left[ j \mid k \right] - \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ j + 1 \mid k \right] - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right) = -v'. \end{aligned}$$

Insgesamt ist also  $(1 + ab^j ab^{n-j})v' \equiv_{\mathbb{Z}} v' - v' = 0$ .

**2. Fall:** Für  $j = n/2$  ist  $b^j ab^{n-j} v''$  gleich

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-2} \left[ \frac{n}{2} \mid k + 1 \right] - \left( - \left[ \frac{n}{2} \mid 1 \right] + \sum_{k=2}^{n/2-1} \left[ \frac{n}{2} + 1 \mid k - 1 \right] \right) + \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ \frac{n}{2} \mid k \right] - \sum_{k=1}^{n/2-2} \left[ \frac{n}{2} + 1 \mid k \right] + \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right). \end{aligned}$$

Also ist gemäß Tabelle A.III  $ab^j ab^{n-j} v''$  gleich

$$\begin{aligned} & \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \left( \left[ \frac{n}{2} \mid k \right] + \left[ 1 \mid \frac{n}{2} - 1 \right] - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} + k - 1 \right] \right) - \sum_{k=1}^{n/2-2} \left( \left[ \frac{n}{2} + 1 \mid k \right] + \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} + k \right] \right) - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right) \\ &= \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ \frac{n}{2} \mid k \right] + \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \left[ 1 \mid \frac{n}{2} - 1 \right] - \sum_{k=1}^{n/2-1} \left[ 1 \mid \frac{n}{2} + k - 1 \right] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^{n/2-2} \left[ \frac{n}{2} + 1 \mid k \right] - \left( \frac{n}{2} - 2 \right) \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] + \sum_{k=1}^{n/2-2} \left[ 1 \mid \frac{n}{2} + k \right] - \left[ 1 \mid \frac{n}{2} \right] \right) \end{aligned}$$

$$\equiv_{\mathbb{Z}} \frac{2}{n} \left( \sum_{k=1}^{n/2-1} \left\lfloor \frac{n}{2} k \right\rfloor - \sum_{k=1}^{n/2-2} \left\lfloor \frac{n}{2} + 1 k \right\rfloor - \left\lfloor 1 \frac{n}{2} - 1 \right\rfloor \right) = -v''.$$

Insgesamt ist also  $(1 + ab^j ab^{n-j})v' \equiv_{\mathbb{Z}} v'' - v'' = 0$ .

Damit haben wir für gerades  $n$  wie gewünscht gezeigt, dass  $(1 + ab^j ab^{n-j})(ab-1) \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell \cdot m \in S_{\mathbb{Z}}^j$  ist. Es folgt die analoge Prozedur für ungerades  $n$ . In diesem Fall ist  $2 \leq j \leq (n-1)/2$  und  $m = \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \frac{2}{n} \left\lfloor 1 k \right\rfloor + \frac{1}{n} \left\lfloor 1 \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell \cdot m &= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{\ell=0}^{j-1} \sum_{k=1}^{(n-3)/2} b^\ell \left\lfloor 1 k \right\rfloor + \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell \left\lfloor 1 \frac{n-1}{2} \right\rfloor \right) \\ \text{Tabelle \underline{A.IV}} \quad \frac{1}{n} &\left( 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left\lfloor 1 k \right\rfloor + 2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left( \left\lfloor \ell + 1 k \right\rfloor + \left\lfloor \ell 1 \right\rfloor - \left\lfloor \ell 1 + k \right\rfloor \right) \right. \\ &\left. + \left\lfloor 1 \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^{j-1} \left( \left\lfloor \ell + 1 (n-1)/2 \right\rfloor + \left\lfloor \ell 1 \right\rfloor - \left\lfloor \ell \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) \right) \\ = \frac{1}{n} &\left( 2 \sum_{\ell=1}^j \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left\lfloor \ell k \right\rfloor + (n-3) \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell 1 \right\rfloor - 2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=2}^{(n-1)/2} \left\lfloor \ell k \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^j \left\lfloor \ell \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell 1 \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) \\ \equiv_{\mathbb{Z}} \frac{1}{n} &\left( 2 \sum_{\ell=1}^j \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left\lfloor \ell k \right\rfloor - 2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell 1 \right\rfloor - 2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=2}^{(n-1)/2} \left\lfloor \ell k \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^j \left\lfloor \ell \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) \\ = \frac{1}{n} &\left( 2 \sum_{\ell=1}^j \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left\lfloor \ell k \right\rfloor - 2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left\lfloor \ell k \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^j \left\lfloor \ell \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) \\ = \frac{1}{n} &\left( 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left\lfloor j k \right\rfloor - 2 \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^j \left\lfloor \ell \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) \\ = \frac{1}{n} &\left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left\lfloor j k \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^j \left\lfloor \ell \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) =: v. \end{aligned}$$

Wir fahren fort mit  $(ab-1)v$ . Für die Operation mit  $ab$  gemäß (A.9) müssen wir wieder eine Fallunterscheidung vornehmen.

**1. Fall:** Für  $j < (n-1)/2$  ist  $(ab-1)v$  gleich

$$\begin{aligned} &\frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left\lfloor j+1 k \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^j \left\lfloor \ell + 1 \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell + 1 \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left\lfloor j k \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^j \left\lfloor \ell \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \sum_{\ell=1}^{j-1} \left\lfloor \ell \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) \\ = \frac{1}{n} &\left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left\lfloor j+1 k \right\rfloor - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left\lfloor j k \right\rfloor - \left\lfloor j+1 \frac{n-1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor j \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor 1 \frac{n-1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor 1 \frac{n+1}{2} \right\rfloor \right) =: v'. \end{aligned}$$



**2. Fall:** Für  $j = (n-1)/2$  ist  $(ab-1)v$  gleich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left[ \frac{n+1}{2} \mid k \right] - 2 \left[ 1 \mid \frac{n-1}{2} \right] - \sum_{\ell=1}^{(n-3)/2} \left[ \ell + 1 \mid \frac{n-1}{2} \right] + \left[ 1 \mid \frac{n-1}{2} \right] - \sum_{\ell=1}^{(n-5)/2} \left[ \ell + 1 \mid \frac{n+1}{2} \right] + \left[ 1 \mid \frac{n-3}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left[ \frac{n-1}{2} \mid k \right] + \sum_{\ell=1}^{(n-1)/2} \left[ \ell \mid \frac{n-1}{2} \right] + \sum_{\ell=1}^{(n-3)/2} \left[ \ell \mid \frac{n+1}{2} \right] \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left[ \frac{n+1}{2} \mid k \right] - \sum_{\ell=1}^{(n-1)/2} \left[ \ell \mid \frac{n-1}{2} \right] - \sum_{\ell=2}^{(n-3)/2} \left[ \ell \mid \frac{n+1}{2} \right] + \left[ 1 \mid \frac{n-3}{2} \right] \right. \\
& \quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left[ \frac{n-1}{2} \mid k \right] + \sum_{\ell=1}^{(n-1)/2} \left[ \ell \mid \frac{n-1}{2} \right] + \sum_{\ell=1}^{(n-3)/2} \left[ \ell \mid \frac{n+1}{2} \right] \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left[ \frac{n+1}{2} \mid k \right] - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left[ \frac{n-1}{2} \mid k \right] + \left[ 1 \mid \frac{n+1}{2} \right] + \left[ 1 \mid \frac{n-3}{2} \right] \right) =: v''.
\end{aligned}$$

Auf diesen beiden Ausdrücken operieren wir nun jeweils mit  $(1 + ab^j ab^{n-j})$ . Für die Operation von  $b^j ab^{n-j}$  verwenden wir wieder Tabelle A.V.

**1. Fall:** Für  $j < (n-1)/2$  ist  $ab^j ab^{n-j} v'$  gleich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n} a \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left[ j \mid 1+k \right] - 2 \left( - \left[ j \mid 1 \right] + \sum_{k=2}^{(n-1)/2} \left[ j+1 \mid k-1 \right] \right) \right. \\
& \quad \left. - \left[ j \mid \frac{n+1}{2} \right] - \left[ j+1 \mid \frac{n-1}{2} \right] + \left[ 1 \mid \frac{n-1}{2} \right] + \left[ 1 \mid \frac{n+1}{2} \right] \right) \\
&= \frac{1}{n} a \left( 2 \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \left[ j \mid k \right] - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left[ j+1 \mid k \right] + \left[ 1 \mid \frac{n-1}{2} \right] - \left[ j+1 \mid \frac{n-1}{2} \right] + \left[ 1 \mid \frac{n+1}{2} \right] - \left[ j \mid \frac{n+1}{2} \right] \right) \\
& \stackrel{\text{Tabelle A.III}}{=} \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \left( \left[ j \mid k \right] + \left[ 1 \mid j-1 \right] - \left[ 1 \mid j+k-1 \right] \right) - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left( \left[ j+1 \mid k \right] + \left[ 1 \mid j \right] - \left[ 1 \mid j+k \right] \right) \right. \\
& \quad \left. - \left[ 1 \mid \frac{n-1}{2} \right] - \left( \left[ j+1 \mid \frac{n-1}{2} \right] + \left[ 1 \mid j \right] - \left[ 1 \mid j + \frac{n-1}{2} \right] \right) - \left[ 1 \mid \frac{n+1}{2} \right] - \left( \left[ j \mid \frac{n+1}{2} \right] + \left[ 1 \mid j-1 \right] - \left[ 1 \mid j + \frac{n-1}{2} \right] \right) \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \left[ j \mid k \right] + (n+1) \left[ 1 \mid j-1 \right] - 2 \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \left[ 1 \mid j+k \right] \right. \\
& \quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left[ j+1 \mid k \right] - (n-3) \left[ 1 \mid j \right] + 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left[ 1 \mid j+k \right] \right. \\
& \quad \left. - \left[ 1 \mid \frac{n-1}{2} \right] - \left[ j+1 \mid \frac{n-1}{2} \right] - \left[ 1 \mid j \right] + \left[ 1 \mid j + \frac{n-1}{2} \right] - \left[ 1 \mid \frac{n+1}{2} \right] - \left[ j \mid \frac{n+1}{2} \right] - \left[ 1 \mid j-1 \right] + \left[ 1 \mid j + \frac{n-1}{2} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{j|k} + n \boxed{1|j-1} - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{j+1|k} - n \boxed{1|j} \right. \\
&\quad \left. - \boxed{1|\frac{n-1}{2}} + \boxed{j+1|\frac{n-1}{2}} - \boxed{1|\frac{n+1}{2}} + \boxed{j|\frac{n+1}{2}} \right) \\
&\equiv_{\mathbb{Z}} \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \boxed{j|k} - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \boxed{j+1|k} + \boxed{j+1|\frac{n-1}{2}} + \boxed{j|\frac{n+1}{2}} - \boxed{1|\frac{n-1}{2}} - \boxed{1|\frac{n+1}{2}} \right) \\
&= -v'.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also  $(1 + ab^j ab^{n-j})v' \equiv_{\mathbb{Z}} v' - v' = 0$ .

**2. Fall:** Für  $j = (n-1)/2$  ist  $ab^j ab^{n-j}v''$  gleich

$$\begin{aligned}
&ab^{(n-1)/2} ab^{(n+1)/2} \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \boxed{\frac{n+1}{2}|k} - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{\frac{n-1}{2}|k} + \boxed{1|\frac{n+1}{2}} + \boxed{1|\frac{n-3}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{n} a \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \boxed{\frac{n-1}{2}|1+k} - 2 \left( -\boxed{\frac{n-1}{2}|1} + \sum_{k=2}^{(n-1)/2} \boxed{\frac{n+1}{2}|k-1} \right) + \boxed{1|\frac{n+1}{2}} + \boxed{1|\frac{n-1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{n} a \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{\frac{n-1}{2}|k} - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \boxed{\frac{n+1}{2}|k} + \boxed{1|\frac{n+1}{2}} + \boxed{1|\frac{n-1}{2}} \right) \\
&\stackrel{\text{Tabelle A.III}}{=} \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \left( \boxed{\frac{n-1}{2}|k} + \boxed{1|\frac{n-3}{2}} - \boxed{1|\frac{n-3}{2}+k} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \left( \boxed{\frac{n+1}{2}|k} + \boxed{1|\frac{n-1}{2}} - \boxed{1|\frac{n-1}{2}+k} \right) - \boxed{1|\frac{n+1}{2}} - \boxed{1|\frac{n-1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{\frac{n-1}{2}|k} + (n-1) \boxed{1|\frac{n-3}{2}} - 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{1|\frac{n-3}{2}+k} \right. \\
&\quad \left. - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \boxed{\frac{n+1}{2}|k} - (n-3) \boxed{1|\frac{n-1}{2}} + 2 \sum_{k=2}^{(n-1)/2} \boxed{1|\frac{n-3}{2}+k} - \boxed{1|\frac{n+1}{2}} - \boxed{1|\frac{n-1}{2}} \right) \\
&= \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{\frac{n-1}{2}|k} + (n-1) \boxed{1|\frac{n-3}{2}} - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \boxed{\frac{n+1}{2}|k} - n \boxed{1|\frac{n-1}{2}} - \boxed{1|\frac{n+1}{2}} \right) \\
&\equiv_{\mathbb{Z}} \frac{1}{n} \left( 2 \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \boxed{\frac{n-1}{2}|k} - 2 \sum_{k=1}^{(n-3)/2} \boxed{\frac{n+1}{2}|k} - \boxed{1|\frac{n+1}{2}} - \boxed{1|\frac{n-3}{2}} \right) = -v''.
\end{aligned}$$

Insgesamt ist also  $(1 + ab^j ab^{n-j})v'' \equiv_{\mathbb{Z}} v'' - v'' = 0$ .

Damit ist auch für ungerades  $n$  gezeigt, dass  $(1 + ab^j ab^{n-j})(ab-1) \sum_{\ell=0}^{j-1} b^\ell \cdot m \in S_{\mathbb{Z}}^\gamma$  ist. Insgesamt folgt also, dass  $\text{res}_{\binom{S}{b}}^S$  surjektiv ist.

## Anhang E

# Der Beweis von Lemma 3.3.6 (b)

Wir verwenden die gleichen Voraussetzungen wie in Anhang D. Es soll gezeigt werden, dass  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma) \rightarrow H^2(\langle b \rangle, S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma \downarrow_{\langle b \rangle}^{S_n})$  bijektiv ist. Die Surjektivität erhalten wir mit dem gleichen Beweis wie in Anhang D, wo die entsprechende Aussage über  $\mathbb{Z}$  gezeigt wurde. Die Injektivität führen wir nun zurück auf die von

$$\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n} : H^1(S_n, V) \rightarrow H^1(\langle b \rangle, V),$$

wobei  $V := S_{\mathbb{Q}_p}^\gamma / S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma$  sei.

Dazu zeigen wir, dass für  $\delta \in Z^1(S_n, V)$  gilt: Falls  $\delta|_{\langle b \rangle} = \delta'_v \in B^1(\langle b \rangle, V)$  ist für ein  $v \in V$ , so ist  $\delta \in B^1(S_n, V)$ . Dabei wiederum können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\delta|_{\langle b \rangle} = 0$  ist. (Denn statt  $\delta$  kann man  $\delta - \delta_v$  betrachten,  $\delta_v \in B^1(S_n, V)$ .)

Wir wollen beim Beweis auf das Zassenhaus-Verfahren zurückgreifen. Es sei  $d := \text{Rang}_{\mathbb{Z}_p}(S_{\mathbb{Z}_p}^\gamma) = (n-1)(n-2)/2$ ,  $Z_\gamma$  die zu  $\gamma$  gehörige Zassenhaus-Matrix bezüglich der Präsentation  $G_n$  aus (2.8),  $r = \lfloor n/2 \rfloor + 2$  die Anzahl der Relationen von  $G_n$  und

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_p^{2d} \mid v_1, v_2 \in \mathbb{Q}_p^d, Z_\gamma \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_p^{rd} \right\}.$$

Gemäß Zassenhaus-Verfahren ist  $D/\mathbb{Z}_p^{2d} \cong Z^1(S_n, V)$ , und zwar via

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z}_p^{2d} \mapsto \left( \delta : a \mapsto v_1 + \mathbb{Z}_p^d, b \mapsto v_2 + \mathbb{Z}_p^d \right).$$

Damit gilt insbesondere: Falls  $\delta(a) = v_1 + \mathbb{Z}_p^d$  ist, so gilt wegen  $0 = \delta(1) = \delta(a^2) = \delta(a) + a\delta(a)$ , dass  $(1+A)v_1 \in \mathbb{Z}_p^d$  ist. Da 2 bei ungeradem  $p$  in  $\mathbb{Z}_p$  invertierbar ist, gilt:

$$\begin{aligned} & \{v \in \mathbb{Q}_p^d \mid (1+A)v \in \mathbb{Z}_p^d\} \\ &= \langle e_{2,j} \mid 3 \leq j \leq n \rangle_{\mathbb{Q}_p} + \langle e_{i,j} \mid 3 \leq i < j \leq n \rangle_{\mathbb{Z}_p} \\ &= (A-1)\mathbb{Q}_p^d + \mathbb{Z}_p^d. \end{aligned}$$

Dies wird klar, wenn man sich in Anhang A.3 die Gestalt der Matrix  $A$  ansieht. Damit gilt für jedes  $\delta \in Z^1(S_n, V)$ : Es existiert ein  $m' \in \mathbb{Q}_p^d$  mit  $\delta(a) = (A-1)m' + \mathbb{Z}_p^d$ .

Nun sei  $\delta \in Z^1(S_n, V)$  mit  $\delta(b) = 0$ . Wir wollen zeigen, dass ein  $m \in \mathbb{Q}_p^d$  existiert mit  $\delta = \delta_{m+\mathbb{Z}_p^d}$ . Das heißt, es soll gelten:

$$\delta(a) = (A-1)m + \mathbb{Z}_p^d, \quad \delta(b) = (B-1)m + \mathbb{Z}_p^d = 0 + \mathbb{Z}_p^d.$$

Wir wissen bereits, dass  $\delta(a) = (A-1)m' + \mathbb{Z}_p^d$  ist für ein  $m' \in \mathbb{Q}_p^d$ . Im Folgenden werden wir zeigen, dass ein  $x \in \text{Kern}_{\mathbb{Q}_p}(A-1)$  existiert mit  $(B-1)(m'+x) \in \mathbb{Z}_p^d$ . Dann erfüllt  $m := m' + x$  die gewünschte Aussage, und die ursprüngliche Behauptung ist gezeigt.

Es sei also  $m' := (m_1, m_2, \dots, m_d)^{tr} \in \mathbb{Q}_p^d$  mit  $\delta(a) = (A-1)m' + \mathbb{Z}_p^d$ . Es ist  $\text{Kern}_{\mathbb{Q}_p}(A-1) = \langle e_{i,j} \mid 3 \leq i < j \leq n \rangle_{\mathbb{Q}_p}$ . Wenn wir also  $x \in \text{Kern}_{\mathbb{Q}_p}(A-1)$  auf  $m'$  addieren, ändern sich gegenüber  $m'$  nur die Einträge  $m_{n-1}$  bis  $m_d$ , und  $(A-1)(m'+x)$  ist wieder ein Vertreter für  $\delta(a)$ . Wir wählen  $x \in \text{Kern}_{\mathbb{Q}_p}(A-1)$  nun so, dass

$$\begin{aligned} m &:= m' + x = (m_1, m_2, \dots, m_{n-2}, m_1, m_2, \dots, m_{n-3}, \dots, m_1, m_2, m_1)^{tr} \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} m_k \sum_{i=2}^{n-k} e_{i,i+k} = \sum_{k=1}^{n-2} m_k \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i \mid k} \end{aligned}$$

ist. An dieser Stelle wechseln wir wieder zur Notation der Standard- $\gamma$ -Polytabloide aus (A.1).

Es ist also  $\delta(a) = (A-1)m + \mathbb{Z}_p^d$  und nach Voraussetzung  $\delta(b) = 0$ . Der Vektor  $\binom{(A-1)m}{0} \in \mathbb{Q}_p^{2d}$  wird also von  $Z_\gamma$  nach  $\mathbb{Z}_p^{rd}$  abgebildet. Insbesondere ist

$$\sum_{j=0}^{n-2} (ab)^j (a-1)m \in \mathbb{Z}_p^d.$$

Diesen Ausdruck rechnen wir jetzt aus, um so genaueres über die Einträge  $m_k$  von  $m$  zu erfahren. (Die nicht kommentierten Umformungen sollten selbsterklärend sein. Es handelt sich dabei um Standard-Umformungen wie Indexverschiebung, Aufspaltung oder Zusammenfassung von Summen, Vertauschung von Summen, Umbenennung von Indizes und Ähnliches.)

$$\sum_{\ell=0}^{n-2} (ab)^\ell (a-1)m = \sum_{\ell=0}^{n-2} (ab)^\ell (a-1) \sum_{k=1}^{n-2} m_k \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i \mid k}$$

$$\begin{aligned} &\text{Tabelle A.III } \sum_{\ell=0}^{n-2} (ab)^\ell \left( \sum_{k=1}^{n-2} -2m_k \boxed{1 \mid k} + \sum_{k=1}^{n-3} m_k \sum_{i=2}^{n-k-1} (\boxed{1 \mid i-1} - \boxed{1 \mid i+k-1}) \right) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-2} (ab)^\ell \left( \sum_{k=1}^{n-2} -2m_k \boxed{1 \mid k} + \sum_{k=1}^{n-3} m_k \left( \sum_{i=1}^{n-k-2} \boxed{1 \mid i} - \sum_{i=k+1}^{n-2} \boxed{1 \mid i} \right) \right) \\ &\stackrel{\text{(A.10)}}{=} \sum_{k=1}^{n-2} -2m_k \left( \sum_{\ell=1}^{n-1-k} \boxed{\ell \mid k} - \sum_{\ell=1}^k \boxed{\ell \mid n-k-1} \right) \\ &+ \sum_{k=1}^{n-3} m_k \sum_{i=1}^{n-k-2} \left( \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \boxed{\ell \mid i} - \sum_{\ell=1}^i \boxed{\ell \mid n-i-1} \right) - \sum_{k=1}^{n-3} m_k \sum_{i=k+1}^{n-2} \left( \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \boxed{\ell \mid i} - \sum_{\ell=1}^i \boxed{\ell \mid n-i-1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^k 2m_k \boxed{\ell \mid n-k-1} - \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-k} 2m_k \boxed{\ell \mid k} \\ &+ \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k \left( \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \boxed{\ell \mid i} - \sum_{\ell=1}^i \boxed{\ell \mid n-i-1} \right) - \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{k=1}^{i-1} m_k \left( \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \boxed{\ell \mid i} - \sum_{\ell=1}^i \boxed{\ell \mid n-i-1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^i 2m_i \boxed{\ell | n-i-1} - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} 2m_i \boxed{\ell | i} \\
&+ \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k \boxed{\ell | i} - \sum_{i=1}^{n-3} \sum_{\ell=1}^i \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k \boxed{\ell | n-i-1} \\
&- \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \sum_{k=1}^{i-1} m_k \boxed{\ell | i} + \sum_{i=2}^{n-2} \sum_{\ell=1}^i \sum_{k=1}^{i-1} m_k \boxed{\ell | n-i-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} 2m_{n-1-i} \boxed{\ell | i} - \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} 2m_i \boxed{\ell | i} \\
&+ \sum_{\ell=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-3} m_k \boxed{\ell | 1} + \sum_{i=2}^{n-3} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \left( \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k - \sum_{k=1}^{i-1} m_k \right) \boxed{\ell | i} - \sum_{k=1}^{n-3} m_k \boxed{1 | n-2} \\
&- \sum_{k=1}^{n-3} m_k \boxed{1 | n-2} - \sum_{i=2}^{n-3} \sum_{\ell=1}^i \left( \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k - \sum_{k=1}^{i-1} m_k \right) \boxed{\ell | n-i-1} + \sum_{\ell=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-3} m_k \boxed{\ell | 1} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} (m_{n-1-i} - m_i) \boxed{\ell | i} + 2 \sum_{\ell=1}^{n-2} \sum_{k=1}^{n-3} m_k \boxed{\ell | 1} - 2 \sum_{k=1}^{n-3} m_k \boxed{1 | n-2} \\
&+ \sum_{i=2}^{n-3} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \left( \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k - \sum_{k=1}^{i-1} m_k \right) \boxed{\ell | i} - \sum_{i=2}^{n-3} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \left( \sum_{k=1}^{i-1} m_k - \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k \right) \boxed{\ell | i} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} (m_{n-1-i} - m_i) \boxed{\ell | i} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \left( \sum_{k=1}^{n-2-i} m_k - \sum_{k=1}^{i-1} m_k \right) \boxed{\ell | i} \\
&= 2 \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{\ell=1}^{n-1-i} \left( \sum_{k=1}^{n-1-i} m_k - \sum_{k=1}^i m_k \right) \boxed{\ell | i}
\end{aligned}$$

Da dieser Ausdruck, wie gesagt, mit dem Zassenhaus-Verfahren in  $\mathbb{Z}_p^d$  liegt und 2 in  $\mathbb{Z}_p$  invertierbar ist, gilt für alle  $1 \leq k \leq n-2$ :

$$\sum_{i=1}^{n-1-k} m_i - \sum_{i=1}^k m_i \in \mathbb{Z}_p.$$

Analog zu den Rechnungen bei der Ermittlung der Fixpunkte von  $S_{\mathbb{Z}}^{\gamma}$  zwischen (A.2) und (A.3) (wobei wir  $a^{(k)}$  bzw.  $a_{i,k}$  durch  $m_k$  ersetzen), erhalten wir:

$$\begin{aligned}
&(b-1) \sum_{k=1}^{n-2} m_k \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i | k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-3} m_k \sum_{i=2}^{n-k-1} \boxed{i | k} + \sum_{k=1}^{n-2} \left( \sum_{i=1}^{n-k-1} m_i - \sum_{i=1}^{k-1} m_i \right) \boxed{1 | k} - \sum_{k=1}^{n-2} m_k \sum_{i=1}^{n-k-1} \boxed{i | k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-2} \left( \sum_{i=1}^{n-k-1} m_i - \sum_{i=1}^{k-1} m_i \right) \boxed{1|k} - \sum_{k=1}^{n-2} m_k \boxed{1|k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} \left( \sum_{i=1}^{n-k-1} m_i - \sum_{i=1}^k m_i \right) \boxed{1|k} \in \mathbb{Z}_p^d.
\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, dass für unser  $\delta \in Z^1(S_n, V)$  mit  $\delta(b) = 0$  gilt, dass  $\delta = \delta_{m+\mathbb{Z}_p^d} \in B^1(S_n, V)$  ist. Damit ist  $\text{Kern}(\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n}) = 0$ , also  $\text{res}_{\langle b \rangle}^{S_n}$  injektiv.

## Anhang F

# Der Beweis von Lemma 3.2.20

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \equiv 1 \pmod{9}$  und  $\vartheta := (n-3, 2, 1)$ . Es ist zu zeigen, dass  $H^1(S_n, S_{\mathbb{F}_3}^\vartheta) \neq 0$  ist. Dazu wollen wir ein  $u \in M_{\mathbb{F}_3}^\vartheta$  angeben, das Hemmer genügt. Das tun wir folgendermaßen: Es sei  $X := \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \underline{n}$  mit  $x_1 < x_2 < x_3$ . Dann setzen wir für  $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\bar{t}(X, i) := (\underline{n} \setminus X) / (X \setminus \{x_i\}) / \{x_i\}.$$

Bei der Belegung der Koeffizienten  $u_{\bar{t}}$  von  $u$  betrachten wir jetzt für jedes solche  $X$  die drei Koeffizienten  $u_{\bar{t}(X, i)}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , simultan.

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$u_{\bar{t}(X,1)}$	$u_{\bar{t}(X,2)}$	$u_{\bar{t}(X,3)}$	
(1)	$> 1$			0	0	1	außer in Fall (2)
(2)	2	3	$\equiv 1 \pmod{3}$	0	1	0	
(3)	1		$\equiv 0 \pmod{3}$	1	0	0	
(4)	1	2		1	0	0	
(5)	1	3	$\equiv 1 \pmod{3}$	-1	-1	0	
(6)	1	$> 3$		-1	0	-1	
(7)	1		$\equiv 2 \pmod{3}$	0	0	1	

Ein leeres Feld bedeutet, dass es (außer der Grundvoraussetzung  $x_1 < x_2 < x_3$ ) keine einschränkenden Bedingungen ans jeweilige  $x_i$  gibt.

Die Menge  $J(\vartheta)$  ist gegeben durch  $\{(1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$ . Wir wollen nun zeigen:

$$(a) \quad u_{1,0} := 0 = \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_1 \\ |A|=n-3}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} \quad \text{für alle } \bar{\tau} \in \bar{T}(\vartheta(1, 0)).$$

$$(b) \quad u_{1,1} := 0 = \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_1 \\ |A|=n-3}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} \quad \text{für alle } \bar{\tau} \in \bar{T}(\vartheta(1, 1)).$$

$$(c) \quad u_{2,0} := 1 = \sum_{\substack{A \subseteq \bar{\tau}_2 \\ |A|=2}} u_{\bar{t}(\bar{\tau}, A)} \quad \text{für alle } \bar{\tau} \in \bar{T}(\vartheta(2, 0)).$$

Die Notationen aus Abschnitt 3.2 sind allerdings zum konkreten Rechnen zu unhandlich. Wir übersetzen die drei Summen in die folgenden Darstellungen:

$$(a) \quad u_{1,0} = 0 = \sum_{\substack{(a,b) \in (\underline{n} \setminus \{x\})^2 \\ a < b}} u_{\bar{a}, \bar{b}/\bar{x}} \quad \text{für alle } x \in \underline{n}.$$

$$(b) \quad u_{1,1} = 0 = \sum_{j \in \underline{n} \setminus \{a, b\}} u_{\bar{j}, \bar{a}/\bar{b}} \quad \text{für alle } (a, b) \in \underline{n}^2 \text{ mit } a \neq b.$$

$$(c) \quad u_{2,0} = 1 = \sum_{i=1}^3 u_{\bar{i}(X,i)} \quad \text{für alle } X \subseteq \underline{n} \text{ mit } |X| = 3.$$

Wenn das gezeigt ist, genügt  $u$  Hemmer (1\*). Außerdem ist dann leicht zu sehen, dass auch Hemmer (2\*) erfüllt ist: Die zu betrachtenden Binomialkoeffizienten sind

$$\begin{aligned} b(1,0) &= \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)n}{2} \equiv 0 \pmod{3}, \\ b(1,1) &= \binom{n-2}{1} = n-2 \equiv -1 \pmod{3}, \\ b(2,0) &= \binom{2}{1} = 2 \equiv -1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Damit ist dann  $b(1,1)u_{2,0} = -1 \neq 0 = b(2,0)u_{1,1}$ .

Bis Hemmer (1\*) gezeigt ist, liegt jedoch ein steiniger Weg vor uns. Nur Teil (c) wird unmittelbar klar aus der Konstruktion von  $u$ : Er folgt daraus, dass die Summe der Einträge jeder Zeile der Definitionstabelle jeweils gleich 1 ist.

Kommen wir nun zu Teil (a). Zur Berechnung der betreffenden Summe sind zahlreiche Fallunterscheidungen nötig. Bei deren Ausformulierung bewegen wir uns auf einem schmalen Grat: Zu viele Details machen das Ganze unübersichtlich, zu wenige machen es schwer nachvollziehbar. Das folgende Vorgehen bietet einen hoffentlich angemessenen Mittelweg.

Zunächst unterteilen wir die (von  $x \in \underline{n}$  abhängende) Summe in bestimmte Teilsummen:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(a,b) \in (\underline{n} \setminus \{x\})^2 \\ a < b}} u_{\overline{a,b/x}} &= \sum_{\substack{a=1 \\ a \neq x}}^{n-1} \sum_{\substack{b=a+1 \\ b \neq x}}^n u_{\overline{a,b/x}} \\ &= \left( \sum_{b=2}^{x-1} u_{\overline{1,b/x}} + \sum_{b=3}^{x-1} u_{\overline{2,b/x}} + \sum_{a=3}^{x-2} \sum_{b=a+1}^{x-1} u_{\overline{a,b/x}} \right) \\ &+ \left( \sum_{b=x+1}^n u_{\overline{1,b/x}} + \sum_{b=x+1}^n u_{\overline{2,b/x}} + \sum_{a=3}^{x-1} \sum_{b=x+1}^n u_{\overline{a,b/x}} \right) \\ &\quad + \sum_{a=x+1}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n u_{\overline{a,b/x}}. \end{aligned}$$

Die Spalte, in der der Wert eines  $u_{\overline{a,b/x}}$  zu finden ist (nummeriert durch das  $i$  mit  $\bar{t}(\{a, b, x\}, i) = \overline{a, b/x}$ ), hängt nur davon ab, ob  $a$  und  $b$  beide kleiner oder beide größer sind als  $x$ , oder ob  $x$  zwischen beiden liegt. Das heißt, für die ersten drei Teilsummen ist  $i = 3$ , für die nächsten drei ist  $i = 2$ , und in der siebten Teilsumme ist  $i = 1$  für jeweils alle Summanden  $u_{\overline{a,b/x}}$ .

Als Nächstes ist zu ermitteln, in welcher der Zeilen (1) bis (7) der Definitionstabelle die Summanden  $u_{\overline{a,b/x}}$  der jeweiligen Teilsumme zu finden sind. Das können durchaus mehrere sein, und sie können auch von  $x$  abhängen. Wir nehmen grundsätzlich eine Fallunterscheidung nach der Kongruenz modulo 3 von  $x$  vor und verfeinern diese Fallunterscheidung an den Stellen, wo es nötig ist. Damit können wir dann den Wert jeder einzelnen Teilsumme ausrechnen.

Die auf diese Weise erhaltenen Ergebnisse sind in den folgenden drei Tabellen zusammengefasst. In der ersten Spalte stehen die Nummern der Teilsummen, wobei wir uns diese als in der obigen Reihenfolge 1 bis 7 durchnummeriert vorstellen. In einzelnen Fällen ist es praktisch, zwei oder drei der Teilsummen zu einer einzelnen Summe zusammenzufassen. In diesem Fall schreiben wir ihre Nummern zusammen in ein Feld. Außerdem ist zu beachten, dass nach Voraussetzung  $(n-1)/3 \equiv 0 \pmod{3}$  ist.



**1. Fall:**  $x \equiv 0 \pmod{3}$ .

Summe	$x_1, x_2, x_3$	$i$	Zeile	(falls:)	Wert der Summe
1	$1, b, x$	3	(3)		0
2	$2, b, x$		(1)		$(x-3) \cdot 1 = 0$
3	$a, b, x$		(1)	$a \geq 3$	$\binom{x-3}{2} \cdot 1 = 0$
4	$1, x, b$		(3),(5),(7)	$x = 3$	$0 + (n-1)/3 \cdot (-1) + 0 = 0$
			(3),(6),(7)	$x \neq 3$	$0 + 0 + 0 = 0$
5	$2, x, b$	2	(1),(2)	$x = 3$	$0 + (n-1)/3 \cdot 1 = 0$
			(1)	$x \neq 3$	0
6	$a, x, b$		(1)	$a \geq 3$	0
7	$x, a, b$	1	(1)		0

**2. Fall:**  $x \equiv 1 \pmod{3}$ .

Summe	$x_1, x_2, x_3$	$i$	Zeile	(falls:)	Wert der Summe
1	$1, b, x$	3	(4),(5),(6)		$0 + 0 + (x-4) \cdot (-1) = 0$
2	$2, b, x$		(1),(2)		$(x-4) \cdot 1 + 0 = 0$
3	$a, b, x$		(1)	$a \geq 3$	$\binom{x-3}{2} \cdot 1 = 0$
4	$1, x, b$	2	(3),(6),(7)		$0 + 0 + 0 = 0$
5+6	$a, x, b$		(1)	$a \geq 2$	0
7	$x, a, b$	1	(3)-(7)	$x = 1$	0
			(1)	$x \neq 1$	0

Um zu sehen, dass die siebte Summe für  $x = 1$  gleich 0 ist, brauchen wir mehr Platz, als in der Tabelle zur Verfügung steht. Wir dröseln sie weiter auf:

$$\sum_{a=2}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n u_{a,b/\bar{1}} = \sum_{b=3}^n u_{2,b/\bar{1}} + \sum_{a=3}^{n-1} \sum_{b=a+1}^n u_{a,b/\bar{1}}$$

Die erste Summe enthält Koeffizienten aus den Zeilen (3), (4) und (7), von der Sorte der ersten beiden jeweils gleich viele, nämlich  $(n-1)/3$ , und alle sind gleich 1. Im Fall (7) kommen ohnehin nur Nullen vor, also ist die erste Summe gleich 0.

Die zweite Summe enthält Koeffizienten aus den Zeilen (3), (5/6) und (7). (Da die Fälle (5) und (6) für  $i = 1$  beide eine  $-1$  haben, können wir sie hier zusammenfassen unter den Fall " $b \equiv 1 \pmod{3}$ ".) Wieder sind die Summanden aus Fall (7) alle gleich 0. Weiter ist

$$\sum_{b=a+1}^n u_{a,b/\bar{1}} = \begin{cases} -1 & \text{für } n-a \equiv 1 \pmod{3}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist  $n-a \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow 3 \mid a$ , und zwischen 3 und  $n$  gibt es genau  $(n-1)/3$  Vielfache von 3. Damit ist die zweite obige Summe gleich  $(n-1)/3 \cdot (-1) = 0$ .

**3. Fall:**  $x \equiv 2 \pmod{3}$ .

Summe	$x_1, x_2, x_3$	$i$	Zeile	(falls:)	Wert der Summe
1+2+3	$a, b, x$	3	(1),(7)	$a \geq 1$	$\binom{x-1}{2} \cdot 1 = 0$
4	$1, x, b$	2	(3),(4),(7)	$x = 2$	$0 + 0 + 0 = 0$
			(3),(6),(7)	$x \neq 2$	$0 + 0 + 0 = 0$
5+6	$a, x, b$		(1)	$a \geq 2$	0
7	$x, a, b$	1	(1),(2)	$x = 2$	$0 + 0 = 0$
			(1)	$x \neq 2$	0

Damit ist Teil (a) gezeigt. Für Teil (b) sei  $(a, b) \in \underline{n}^2$  mit  $a \neq b$ . Falls  $a < b$  ist, können wir die zu betrachtende Summe folgendermaßen aufteilen:

$$\sum_{j \in \underline{n} \setminus \{a, b\}} u_{\overline{j, a/b}} = \sum_{j=1}^{a-1} u_{\overline{j, a/b}} + \sum_{j=a+1}^{b-1} u_{\overline{a, j/b}} + \sum_{j=b+1}^n u_{\overline{a, j/b}}.$$

Da wir diesmal zwei feste Parameter und nur einen Laufindex haben, ist ein anderer Tabellenaufbau erforderlich als in Teil (a). Wir unterscheiden erst nach der Größe von  $a$ , dann nach der Kongruenz modulo 3 von  $b$ . Die Spalte  $i$  der Definitionstabelle wird analog zu eben bestimmt durch  $\bar{t}(\{j, a, b\}, i) = \overline{j, a/b}$ , das heißt, in den ersten beiden Summen ist  $i = 3$ , und in der dritten Summe ist  $i = 2$ .

**1. Fall:**  $a = 1$ .

Dann ist die erste Summe immer leer. Für  $b = 2$  ist auch die zweite Summe leer.

$b \pmod{3}$	Summe	Zeile	(falls:)	$i$	Wert
0	2	(3)		3	0
	3	(3),(5),(7)	$b = 3$	2	$0 + (n-1)/3 \cdot (-1) + 0 = 0$
		(3),(6),(7)	$b \neq 3$		$0 + 0 + 0 = 0$
1	2	(4),(5),(6)		3	$0 + 0 + (b-4) \cdot (-1) = 0$
	3	(3),(6),(7)		2	$0 + 0 + 0 = 0$
2	2	(7)	$b \neq 2$	3	$(b-2) \cdot 1 = 0$
	3	(3),(4),(7)	$b = 2$	2	$0 + 0 + 0 = 0$
		(3),(6),(7)	$b \neq 2$		$0 + 0 + 0 = 0$

**2. Fall:**  $a = 2$ .

$b \pmod{3}$	Summe	Zeile	(falls:)	$i$	Wert
0	1	(3)		3	0
	2	(1)		3	$(b-3) \cdot 1 = 0$
	3	(1),(2)	$b = 3$	2	$(n-1)/3 \cdot 1 = 0$
		(1)	$b \neq 3$		0
1	1	(4)		3	0
	2	(1),(2)		3	$(b-4) \cdot 1 + 0 = 0$
	3	(1)		2	0
2	1	(7)		3	1
	2	(1)		3	$(b-3) \cdot 1 = -1$
	3	(1)		2	0

**3. Fall:**  $a > 2$ .

In der dritten Summe befinden wir uns immer im Fall (1) mit  $i = 2$ , das heißt, diese Summe ist immer gleich 0. In den ersten beiden Summen ist, wie gesagt,  $i = 3$ . Damit erhalten wir:

$b \bmod 3$	Summe	Zeile	Wert	gesamt
0	1	(1),(3)	$(a-2) \cdot 1 + 0$	$(b-3) \cdot 1 = 0$
	2	(1)	$(b-1-a) \cdot 1$	
1	1	(2),(5) für $a = 3$ (1),(6) für $a \neq 3$	$0 + 0$ $(a-2) \cdot 1 - 1$	$(b-3) \cdot 1 - 1 = 0$
	2	(1)	$(b-1-a) \cdot 1$	
2	1	(1),(7)	$(a-2) \cdot 1 + 1$	$(b-3) \cdot 1 + 1 = 0$
	2	(1)	$(b-1-a) \cdot 1$	

Nun betrachten wir den Fall  $b < a$ . Analog zu eben spalten wir die zu betrachtende Summe folgendermaßen auf:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{a,b\}} u_{\overline{j,a/b}} = \sum_{j=1}^{b-1} u_{\overline{j,a/b}} + \sum_{j=b+1}^{a-1} u_{\overline{j,a/b}} + \sum_{j=a+1}^n u_{\overline{j,a/b}}.$$

**1. Fall:**  $b = 1$ .

Dann ist die erste Summe immer leer. Für  $a = 2$  ist auch die zweite Summe leer. Alle  $u_{\overline{j,a/b}}$  finden sich in der ersten Spalte der Definitionstabelle.

$a \bmod 3$	Summe	Zeile	(falls:)	Wert	gesamt
0	2	(3)		$(a-2) \cdot 1$	$1 - 1 = 0$
	3	(3),(5/6),(7)		$\frac{n-a-1}{3} \cdot 1 + \frac{n-a+2}{3} \cdot (-1) + 0$	
1	2	(4),(5),(6)		$1 - 1 + (a-4) \cdot (-1)$	$0 + 0 = 0$
	3	(3),(6),(7)		$\frac{n-a}{3} \cdot 1 + \frac{n-a}{3} \cdot (-1) + 0$	
2	2	(7)	$a \neq 2$	0	$0 + 0 = 0$
	3	(3),(4),(7)	$a = 2$	$\frac{n-1}{3} \cdot 1 + \frac{n-1}{3} \cdot 1 + 0$	
		(3),(6),(7)	$a \neq 2$	$\frac{n-a+1}{3} \cdot 1 + \frac{n-a+1}{3} \cdot (-1) + 0$	

**2. Fall:**  $b = 2$ .

Die erste Summe besteht nur aus  $u_{\overline{1,a/2}}$ . Dessen Wert findet sich, abhängig von der Kongruenz modulo 3 von  $a$  in der zweiten Spalte der Zeilen (3), (4) oder (7) und ist in jedem Fall gleich 0. Die  $u_{\overline{j,a/b}}$  aus der zweiten und dritten Summe finden sich in der ersten Spalte der Zeilen (1) und (2) und sind damit ebenfalls alle gleich 0.

**3. Fall:**  $b = 3$ .

Die erste Summe ist gleich  $u_{\overline{1,a/3}} + u_{\overline{2,a/3}}$ . Falls  $a \equiv 1 \pmod{3}$  ist, ist dies  $-1 + 1 = 0$ . Andernfalls sind beide Werte gleich 0. Die  $u_{\overline{j,a/b}}$  der zweiten und dritten Summe finden sich in der ersten Spalte der Zeile (1) und sind damit alle gleich 0.

**4. Fall:**  $b > 3$ .

Die  $u_{\overline{j,a/b}}$  der ersten Summe finden sich, abhängig von  $j$  und  $a$ , in der zweiten Spalte der Zeilen (1), (3), (6) oder (7) und sind damit alle gleich 0. Diejenigen aus der zweiten und dritten Summe finden sich in der ersten Spalte der Zeile (1) und sind damit ebenfalls alle gleich 0.

Damit ist zu guter Letzt auch Teil (b) gezeigt. Insgesamt folgt also, dass  $u$  Hemmer genügt mit  $u_{1,0} = 0 = u_{1,1}$  und  $u_{2,0} = 1$ .  $\square$



# Anhang G

## GAP-Routinen

Hier sind einige GAP-Routinen zusammengestellt, die man benötigt, um den Algorithmus 4.3.2 auszuführen.

**Programm:** IsInPrincipalPBlock  
**Eingabe:** eine Partition  $\lambda \vdash n$   
eine Primzahl  $p$   
**Ausgabe:** der Wahrheitswert der Aussage  $\lambda \in \mathcal{B}_0(p)$

Das Programm berechnet und vergleicht die beiden Folgen  $\alpha^{(n)}$  und  $\alpha^\lambda$  (siehe Lemma 1.1.5). Es ist zu beachten, dass die Folgen jetzt von 1 bis  $p$  indiziert sind statt von 0 bis  $p - 1$ .

```
IsInPrincipalPBlock := function(lambda,p)
local i, n, l, an, alambda, res;

l := Length(lambda);
if l = 1 then return true; fi;
n := Sum(lambda);
if n mod p = 0
then an := ListWithIdenticalEntries(p,0);
else an := ListWithIdenticalEntries(p,1);
an[p] := 0;
an[n mod p] := 2;
fi;
alambda := ListWithIdenticalEntries(p,0);
for i in [1..l] do
res := (lambda[i]-i) mod p + 1;
alambda[res] := alambda[res] + 1;
od;
for i in [1..((-l) mod p)] do
alambda[i] := alambda[i] + 1;
od;
alambda := alambda-ListWithIdenticalEntries(p,Minimum(alambda));

return alambda=an;
end;
```

**Programm:** Unify

**Eingabe:** eine Liste rationaler Zahlen  $x_1, \dots, x_k$

**Ausgabe:** die Liste  $[x_1], \dots, [x_k]$

Später wird mit rationalen Vektoren als Vertretern von Elementen aus  $\mathbb{Q}^k/\mathbb{Z}^k$  gerechnet. Um die Werte klein zu halten, werden die Koeffizienten nach manchen Zwischenschritten auf Werte aus  $[0, 1)$  normiert.

```
Unify := function(v)
Apply(v,x->(NumeratorRat(x) mod DenominatorRat(x))/DenominatorRat(x));
return v;
end;
```

**Programm:** ZasMatCyc

**Eingabe:** eine invertierbare Matrix von endlicher Ordnung

**Ausgabe:** die zugehörige Zassenhaus-Matrix

Wir wollen die Zassenhaus-Matrix zu einem  $\langle g \rangle$ -Modul  $V$  mit zugehöriger Matrixdarstellung  $g \mapsto X$  berechnen. Hier setzen wir voraus, dass diese Darstellung treu ist: Das Programm berechnet die Spur  $\sum_{j=1}^{|X|} X^j$ . Um die zu  $V$  gehörige Zassenhaus-Matrix zu erhalten, müssen wir im Allgemeinen aber bis  $|g|$  summieren (siehe Beispiel 2.4.4). Da wir allerdings hier das Programm ohnehin nur auf treue Moduln anwenden wollen, belassen wir es dabei.

```
ZasMatCyc := function(X)
local I, A, Z;
I := IdentityMat(Length(X));
A := X;
Z := X;
while not (A=I) do
  A := A*X;
  Z := Z+A;
od;
return Z;
end;
```

Für die übrigen Programme ist die Einbindung der Bibliothek `spechtmats.g` erforderlich.

**Programm:** ZasMatGn

**Eingabe:** eine Partition  $\lambda \vdash n$

**Ausgabe:** eine Liste  $[Z_\lambda, \text{Rang}(Z_\lambda)]$

Das Programm stellt die Zassenhaus-Matrix  $Z_\lambda$  von Seite 66 auf. Für Erläuterungen zum Programmcode sei auf [Web06], Anhang A.1, verwiesen.

```
ZasMatGn := function(lambda)
local c, e, i, j, k, m, n, erz, sum, plist, Binary, MatPot;

  Binary := function(l)
    local bin;
    bin := [];
```

```

while l>0 do
  if l mod 2 = 1
    then Add(bin,1); l := (l-1)/2;
    else Add(bin,0); l := l/2;
  fi;
od;
return bin;
end;

MatPot := function(l)
local bin, mat, exp;
bin := Binary(l);
mat := e;
for exp in [1..Length(bin)] do
  if bin[exp]=1 then mat := mat*plist[exp]; fi;
od;
return mat;
end;

n := Sum(lambda);
erz := SpechtMatrices(lambda);
k := Length(erz[1]);

e := IdentityMat(k);
plist := [erz[1]];
for i in [2..Length(Binary(n-1))] do
  plist[i] := plist[i-1]^2;
od;

c := erz[2]*erz[1];
sum := e;
for i in [1..n-2] do
  sum := e + c*sum;
od;

m := [];
for i in [1..k*(EuclideanQuotient(n,2)+2)] do
  Add(m, []);
od;

m{[1..k]}{[1..k]} := e+erz[2];
m{[1..k]}{[k+1..2*k]} := NullMat(k,k);
m{[k+1..2*k]}{[1..k]} := NullMat(k,k);
m{[k+1..2*k]}{[k+1..2*k]} := e+Sum([1..n-1], i->MatPot(i));
m{[2*k+1..3*k]}{[1..k]} := sum;
m{[2*k+1..3*k]}{[k+1..2*k]} := sum*erz[2];

for i in [2..EuclideanQuotient(n,2)] do
  m{[(i+1)*k+1..(i+2)*k]}{[1..k]}
    := e + MatPot(i)*erz[2] + erz[2]*MatPot(i)*(e+erz[2]*MatPot(n-i));

```

```

m{ [(i+1)*k+1..(i+2)*k] }{ [k+1..2*k] }
:= (erz[2]+MatPot(i)*erz[2]*MatPot(n-i))
   * (e+Sum([1..i-1],j->MatPot(j))+MatPot(i)*erz[2]
      *(e+Sum([1..n-i-1],j->MatPot(j)))));
od;

if Length(lambda) = 1 then return [ m, 2 ]; else return [ m, k ]; fi;
end;

```

**Programm:** H1SnQmodZ

**Eingabe:** eine Partition  $\lambda \vdash n$

**Ausgabe:** Listen rationaler Vektoren, die eine Erzeugermenge von  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}/S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  repräsentieren  
eine Liste von darstellenden Matrizen zu den Nachbartranspositionen

Die Funktion bestimmt zunächst, wie in Algorithmus 4.3.2 beschrieben, zu jedem nichttrivialen Invariantenteiler von  $Z_{\lambda}$  einen rationalen Vektor, der für eine Derivation  $\delta \in H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}/S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  steht. Dabei entspricht die Matrix `A.coltrans` der Matrix  $T^{-1}$ . Anschließend wird jeder dieser Vektoren “in der Mitte zerschnitten“, so dass die erste Hälfte  $\delta(a)$  und die zweite Hälfte  $\delta(b)$  entspricht.

Da es einfacher ist, Permutationen als Wörter in Nachbartranspositionen auszudrücken als als Wörter in  $a$  und  $b$ , berechnen wir einerseits die zugehörigen Matrizen sukzessive via  $(i, i+1) = b(i-1, i)b^{-1}$ , andererseits die zugehörigen Bilder unter der Derivation via  $\delta((i, i+1)) = \delta(b) + (i-1, i)b^{-1}(\delta((i-1, i)) - (i-1, i)\delta(b))$ . (Dabei ist zu beachten, dass `SpechtMatrices(lambda)` in der ersten Komponente die Matrix zu  $b$  und in der zweiten die zu  $a$  liefert.) Mit Hilfe dieser beiden Listen können wir dann später Bilder unter  $\delta$  rekursiv ausrechnen.

Da die Matrizen in `spechtmats.g` auf Linksoperation basieren, Permutationen in GAP aber von rechts operieren (und daher von links statt von rechts miteinander multipliziert werden), ist es erforderlich, sowohl die Spechtmatrizen als auch die Matrix  $T^{-1}$  zu transponieren. (Dadurch wird dann auch andersherum konjugiert.) Das hat den zusätzlichen Vorteil, dass wir die Derivationen durch Zeilen- statt durch Spaltenvektoren repräsentieren können, was ihre Handhabung in GAP einfacher macht.

```

H1SnQmodZ := function(lambda)
local i, j, A, zas, erz, delta, pord, specht, darst, deriv;

zas := ZasMatGn(lambda);
A := NormalFormIntMat(zas[1],9);
erz := [];
i := 0;
while zas[2] > i and A.normal[zas[2]-i][zas[2]-i] > 1 do
delta := ShallowCopy(TransposedMat(A.coltrans)[zas[2]-i]/
A.normal[zas[2]-i][zas[2]-i]);
Unify(delta);
delta := [delta, []];
if Length(lambda)=1 then zas[2] := 1; fi;
for j in [1..zas[2]] do
Add(delta[2], Remove(delta[1], zas[2]+1));
od;
Add(erz, delta);
i := i+1;
od;
end;

```



```

specht := Reversed(SpechtMatrices(lambda));
Apply(specht,m->TransposedMat(m));
Add(specht,Inverse(specht[2]));
for delta in erz do
  Add(delta,Unify(-delta[2]*specht[3]));
od;

darst := [specht[1]];
deriv := [];
for delta in erz do
  Add(deriv,[delta[1]]);
od;
for i in [2..Sum(lambda)-1] do
  Add(darst,specht[3]*darst[i-1]*specht[2]);
  for j in [1..Length(deriv)] do
    Add(deriv[j],Unify((erz[j][3]*darst[i-1]+deriv[j][i-1])
      *specht[2]+erz[j][2]));
  od;
od;

return rec(deriv:=deriv,matrep:=darst);
end;

```

**Programm:** PISpecial

**Eingabe:** eine Partition  $\lambda \vdash n$   
eine Primzahl  $p$

**Ausgabe:** eine Liste der  $\iota \in \mathbb{N}$ , für die  $\lambda$  ( $p, \iota$ )-speziell ist

Bevor der eigentliche Algorithmus zur Anwendung kommt, werden einige Spezialfälle separat abgehandelt: Für die trivialen und die alternierenden Partitionen wurde das Ergebnis bereits theoretisch nachgewiesen. Über die Partition  $(2^2)$  weiß man, dass die zweite Kohomologie über  $\mathbb{Z}$  keinen ungeraden Anteil hat, und für  $p = 2$  wurde die Lösung zuvor mit Hilfe einer Version von `ZasMatCyc` berechnet, die auch für nicht-treue Darstellungen funktioniert, so dass auch hier das Ergebnis direkt ausgegeben werden kann. Schließlich testen wir  $\lambda$  noch mit `IsInPrincipalPBlock` auf Mitgliedschaft im Hauptblock, denn wenn  $\lambda \notin \mathcal{B}_0(p)$  ist, kann es auch nicht ( $p, \iota$ )-speziell sein.

Jetzt beginnt das eigentliche Programm: Für jedes  $1 \leq \iota \leq n/p$  repräsentieren wir die Permutation  $g$  aus Algorithmus 4.3.2 durch eine Liste  $\mathbf{g}$  der Form

$$[p\iota - 1, p\iota - 2, \dots, p(\iota - 1) + 1, \dots, 2\iota - 1, 2\iota - 2, \dots, 2\iota + 1, 2\iota - 1, 2\iota - 2, \dots, 1].$$

Dabei steht jeder Eintrag  $i$  für die Transposition  $(i, i + 1)$ , so dass das Produkt der zu den Einträgen gehörigen Transpositionen gerade  $g$  ist. (Da in GAP, wie gesagt, Permutationen von links multipliziert werden, ist die Liste absteigend geordnet.)

Dann überprüfen wir die mit `H1SnQmodZ` gefundene Erzeugermenge von  $H^1(S_n, S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}/S_{\mathbb{Z}}^{\lambda})$  daraufhin, ob jeweils  $\delta|_{\langle g \rangle} \in B^1(\langle g \rangle, (S_{\mathbb{Q}}^{\lambda}/S_{\mathbb{Z}}^{\lambda}) \downarrow_{\langle g \rangle}^{S_n})$  ist. Dies tut die Unterfunktion `RestrictionZero` mit der Methode aus Beispiel 2.4.4: Mit `ZasMatCyc` wird die Zassenhaus-Matrix  $Z$  (im Programmcode  $\mathbf{z}$ ) zu  $\langle g \rangle$  aufgestellt. Die Unterfunktion `DerEval` berechnet mit Hilfe der mit `H1SnQmodZ` gewonnenen Daten rekursiv einen Vertreter  $v$  für  $\delta(g)$  via  $\delta(x(i, i + 1)) = \delta(x)(i, i + 1) + \delta((i, i + 1))$ . (Wir operieren jetzt, wie gesagt, von rechts auf Zeilenvektoren.) Schließlich wird überprüft, ob  $vZ^{tr}$  im  $\mathbb{Z}$ -Zeilenerzeugnis der Hermite-Normalform von  $Z^{tr}$  liegt. Falls  $Z$  keine nichttrivialen Invariantenteiler besitzt oder wenn  $vZ^{tr}$  der Nullvektor ist, können wir diese Prozedur vorzeitig abbrechen.

```

PISpecial := function(p,lambda)
local i, j, h1, g, speciallist, DerEval, RestrictionZero;

  DerEval := function(l,k)
local x;
x := Remove(l,Length(l));
if l=[] then return h1.deriv[k][x];
  else return DerEval(l,k)*h1.matrep[x] + h1.deriv[k][x];
fi;
end;

  RestrictionZero := function()
local z, v, i, k, X, hnf;
X := h1.matrep[g[1]];
for k in [2..Length(g)] do X := X*h1.matrep[g[k]]; od;
z := ZasMatCyc(X);
if Filtered(ElementaryDivisorsMat(z),x->not(x in [0,1]))=[]
  then return true;
fi;
hnf := HermiteNormalFormIntegerMat(z);
for k in [1..Length(h1.deriv)] do
v := Unify(DerEval(ShallowCopy(g),k))*z;
if not(ForAll(v,IsZero)) then
  for i in [1..Rank(hnf)] do
    k := First([1..Length(hnf[i])+1],
      x -> x=Length(hnf[i])+1 or hnf[i][x]<>0);
    if v[k] mod hnf[i][k] = 0
      then v := v - QuoInt(v[k],hnf[i][k])*hnf[i];
      else return false;
    fi;
  od;
  if not(ForAll(v,IsZero)) then return false; fi;
fi;
od;
return true;
end;

if Length(lambda)=1 then
  if p=2 then return List([1..QuoInt(lambda[1]+2,4)],k->2*k-1);
  else return [];
fi;
fi;

if Sum(lambda)=Length(lambda) then
  if p=3 and Length(lambda) in [3,4] then return [1];
  else return [];
fi;
fi;

if lambda = [2,2] then
  if p=2 then return [2];
  else return [];
fi;
fi;

```

```
if not IsInPrincipalPBlock(lambda,p) then return []; fi;

h1 := H1SnQmodZ(lambda);
specialist := [];
for i in [1..EuclideanQuotient(Sum(lambda),p)] do
  g := [1..p*i-1];
  for j in [1..i-1] do
    Remove(g,(i-j)*p);
  od;
  g := Reversed(g);
  if not RestrictionZero()
    then Add(specialist,i);
  fi;
od;

return(specialist);
end;
```

Der aufwendigste Teil bei dieser Umsetzung von Algorithmus 4.3.2 ist die Bestimmung der Matrix  $T^{-1}$  in  $H1SnQmodZ$ . Im Vergleich dazu fällt alles andere kaum ins Gewicht. Da die verwendete GAP-Funktion `NormalFormIntMat` die Matrix  $T^{-1}$  bereits auf sehr effiziente Weise bestimmt, ist eine insgesamt entscheidend effizientere Programmierung des Algorithmus schwerlich möglich.



# Anhang H

## GAP-Ergebnisse

Hier werden für  $2 \leq n \leq 20$  alle Partitionen  $\lambda \vdash n$  aufgelistet, für die  $k_\lambda := \text{Rang}(S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \leq 1200$  und  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda) \neq 0$  ist. Es werden jeweils die Invariantenteiler  $e_i > 1$  von  $H^2(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$  angegeben sowie alle Paare  $(p, \iota)$ , für die  $\lambda$   $(p, \iota)$ -speziell ist. Die Folge  $(p, \iota_1 / \dots / \iota_\ell)$  bedeutet, dass die entsprechende Partition für alle  $1 \leq j \leq \ell$   $(p, \iota_j)$ -speziell ist. Dabei wurde die  $(p, \iota_j)$ -Spezialität in GAP ermittelt; es sind keine Ergebnisse aufgenommen, die allein aus theoretischen Gründen bekannt sind.

Die größte betrachtete Zassenhausmatrix ist die zu  $(14, 2, 1)$  mit einem Format von  $11050 \times 2210$ . Die Untersuchung von  $(14, 2, 1)$  auf  $(p, \iota)$ -Spezialität dauerte etwa 47 Stunden.

$n$	$\lambda$	$k_\lambda$	$e_i$	$(p, \iota)$ -speziell	
2	(2)	1	2	(2, 1)	
3	(1 <sup>3</sup> )	1	3	(3, 1)	
	(3)	1	2	(2, 1)	
4	(1 <sup>4</sup> )	1	3	(3, 1)	
	(2, 1 <sup>2</sup> )	3	2	–	
	(2 <sup>2</sup> )	2	2	(2, 2)	
	(3, 1)	3	2	(2, 2)	
	(4)	1	2	(2, 1)	
	(5)	4	3	(3, 1)	
5	(2 <sup>2</sup> , 1)	5	4	(2, 2)	
	(3, 1 <sup>2</sup> )	6	10	(2, 1), (5, 1)	
	(3, 2)	5	2	(2, 1)	
	(5)	1	2	(2, 1)	
	(6)	5	3	(3, 1)	
6	(2 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> )	9	4	(2, 2)	
	(3, 1 <sup>3</sup> )	10	2	(2, 1)	
	(3, 2, 1)	16	5	(5, 1)	
	(3 <sup>2</sup> )	5	6	(2, 1), (3, 2)	
	(4, 1 <sup>2</sup> )	10	3	(3, 2)	
	(4, 2)	9	2	(2, 3)	
	(5, 1)	5	2	(2, 1)	
	(6)	1	2	(2, 1/3)	
	7	(2 <sup>2</sup> , 1 <sup>3</sup> )	14	6	(2, 2), (3, 1)
		(3, 1 <sup>4</sup> )	15	2	(2, 1/3)

$n$	$\lambda$	$k_\lambda$	$e_i$	$(p, \iota)$ -speziell
7	(3, 2, 1 <sup>2</sup> )	35	2	–
	(3 <sup>2</sup> , 1)	21	10	(2, 1), (5, 1)
	(4, 1 <sup>3</sup> )	20	3	(3, 1/2)
	(4, 2, 1)	35	2	(2, 3)
	(4, 3)	14	3	(3, 2)
	(5, 1 <sup>2</sup> )	15	14	(2, 1), (7, 1)
	(5, 2)	14	2	(2, 1/2)
	(7)	1	2	(2, 1/3)
8	(2 <sup>2</sup> , 1 <sup>4</sup> )	20	6	(2, 2), (3, 1)
	(3, 1 <sup>5</sup> )	21	2	(2, 1/3)
	(3, 2 <sup>2</sup> , 1)	70	2	–
	(3 <sup>2</sup> , 1 <sup>2</sup> )	56	2, 10	(2, 1/4), (5, 1)
	(3 <sup>2</sup> , 2)	42	2	(2, 1/3)
	(4, 2, 1 <sup>2</sup> )	90	2	(2, 3)
	(4, 2 <sup>2</sup> )	56	2	(2, 2/3/4)
	(4, 3, 1)	70	3	(3, 2)
	(4 <sup>2</sup> )	14	2	(2, 4)
	(5, 1 <sup>3</sup> )	35	6	(2, 1), (3, 1/2)
	(5, 2, 1)	64	7	(7, 1)
	(5, 3)	28	2	(2, 1/2)
	(6, 1 <sup>2</sup> )	21	4	–
	(6, 2)	20	2	(2, 4)
	(7, 1)	7	2	(2, 1/3)
(8)	1	2	(2, 1/3)	

$n$	$\lambda$	$k_\lambda$	$e_i$	$(p, \iota)$ -speziell
9	$(2^2, 1^5)$	27	2	(2, 2)
	$(2^3, 1^3)$	48	3	(3, 1/3)
	$(3, 1^6)$	28	2	(2, 1/3)
	$(3, 2^2, 1^2)$	162	2	–
	$(3^2, 1^3)$	120	2, 2	(2, 1/4)
	$(3^3)$	42	2	(2, 1/3)
	$(4, 2, 1^3)$	189	2	(2, 3)
	$(4, 3, 1^2)$	216	5	(5, 1)
	$(4, 3, 2)$	168	3	(3, 2)
	$(5, 1^4)$	70	6	(2, 1/3), (3, 1/2)
	$(5, 2^2)$	120	2	(2, 2/3/4)
	$(5, 3, 1)$	162	14	(2, 1/2), (7, 1)
	$(5, 4)$	42	2	–
	$(6, 2, 1)$	105	8	(2, 4)
	$(6, 3)$	48	3	(3, 3)
	$(7, 1^2)$	28	18	(2, 1/3), (3, 3)
	$(7, 2)$	27	2	(2, 1/3)
	$(9)$	1	2	(2, 1/3)
	10	$(2^2, 1^6)$	35	2
$(2^3, 1^4)$		75	3	(3, 1/3)
$(3, 1^7)$		36	2	(2, 1/3)
$(3, 2^2, 1^3)$		315	2	(2, 2/3)
$(3^2, 1^4)$		225	2, 2	(2, 1/3/4)
$(3^2, 2, 1^2)$		450	2	(2, 2/4/5)
$(3^3, 1)$		210	2	(2, 1/3)
$(4, 2, 1^4)$		350	2	(2, 3/5)
$(4, 3, 2, 1)$		768	15	(3, 2), (5, 1)
$(4, 3^2)$		210	3	(3, 2/3)
$(5, 1^5)$		126	2	(2, 1/3)
$(5, 2, 1^3)$		448	3	(3, 1/2)
$(5, 3, 1^2)$		567	2	(2, 1/2)
$(5, 3, 2)$		450	2, 2	(2, 1/2/3)
$(5, 4, 1)$		288	7	(7, 1)
$(5^2)$		42	10	(5, 2)
$(6, 2, 1^2)$		350	4	–
$(6, 2^2)$		225	2	(2, 2/3/4/5)
$(6, 3, 1)$		315	2	–
$(6, 4)$		90	2	(2, 5)
$(7, 1^3)$		84	6	(2, 1/3), (3, 1/2/3)
$(7, 2, 1)$		160	3	–
$(7, 3)$		75	6	(2, 1/3), (3, 3)
$(8, 1^2)$		36	5	(5, 2)
$(8, 2)$		35	2	(2, 5)
$(9, 1)$		9	2	(2, 1/3)
$(10)$		1	2	(2, 1/3/5)

$n$	$\lambda$	$k_\lambda$	$e_i$	$(p, \iota)$ -speziell	
11	$(2^2, 1^7)$	44	2	$(2, 2/4)$	
	$(2^4, 1^3)$	165	3	$(3, 1/3)$	
	$(3, 1^8)$	45	2	$(2, 1/3/5)$	
	$(3, 2^2, 1^4)$	550	2	$(2, 2/3)$	
	$(3^2, 1^5)$	385	2, 2	$(2, 1/3/4)$	
	$(3^2, 2^2, 1)$	990	2	$(2, 4)$	
	$(3^3, 1^2)$	660	2, 2	$(2, 1/2/3/4/5)$	
	$(3^3, 2)$	462	2	$(2, 1/3)$	
	$(4, 2, 1^5)$	594	2	$(2, 3/5)$	
	$(4, 3^2, 1)$	1188	5	$(5, 1)$	
	$(5, 1^6)$	210	2	$(2, 1/3)$	
	$(5, 2, 1^4)$	924	3	$(3, 1/2)$	
	$(5, 3^2)$	660	2, 6	$(2, 1/2/3), (3, 2/3)$	
	$(5, 4, 2)$	990	2	$(2, 3/4/5)$	
	$(5^2, 1)$	330	14	$(7, 1)$	
	$(6, 2, 1^3)$	924	2	$(2, 4)$	
	$(6, 4, 1)$	693	4	$(2, 5)$	
	$(6, 5)$	132	5	$(5, 2)$	
	$(7, 1^4)$	210	2	$(2, 1/3/5)$	
	$(7, 2, 1^2)$	594	2	–	
	$(7, 2^2)$	385	2	$(2, 2/3/4/5)$	
	$(7, 3, 1)$	550	2, 18	$(2, 1/3), (3, 3)$	
	$(7, 4)$	165	2	$(2, 1/3/5)$	
	$(8, 1^3)$	120	3	$(3, 1/2/3)$	
	$(8, 2, 1)$	231	10	$(2, 5), (5, 2)$	
	$(9, 1^2)$	45	22	$(2, 1/3), (11, 1)$	
	$(9, 2)$	44	2	$(2, 1/2/3/4)$	
	$(11)$	1	2	$(2, 1/3/5)$	
	12	$(2^2, 1^8)$	54	2	$(2, 2/4)$
		$(2^4, 1^4)$	275	3	$(3, 1/3)$
$(3, 1^9)$		55	2	$(2, 1/3/5)$	
$(3, 2^2, 1^5)$		891	2	$(2, 2/3)$	
$(3^2, 1^6)$		616	2, 2	$(2, 1/3/4/6)$	
$(3^4)$		462	2	$(2, 1/3)$	
$(4, 2, 1^6)$		945	2	$(2, 3/5)$	
$(5, 1^7)$		330	2	$(2, 1/3)$	
$(6, 5, 1)$		1155	2	–	
$(7, 1^5)$		462	2	$(2, 1/3/5)$	
$(7, 5)$		297	10	$(2, 1/3/5), (5, 2)$	
$(8, 1^4)$		330	3	$(3, 1/2/3)$	
$(8, 2, 1^2)$		945	2	$(2, 5)$	
$(8, 3, 1)$		891	5	$(5, 2)$	
$(8, 4)$		275	2	$(2, 6)$	
$(9, 1^3)$		165	2	$(2, 1/3)$	
$(9, 2, 1)$		320	11	$(11, 1)$	
$(9, 3)$		154	6	$(2, 1/2/3/4), (3, 4)$	

$n$	$\lambda$	$k_\lambda$	$e_i$	$(p, \iota)$ -speziell
12	$(10, 1^2)$	55	6	(3, 4)
	$(10, 2)$	54	2	(2, 6)
	$(11, 1)$	11	2	(2, 1/3/5)
	$(12)$	1	2	(2, 1/3/5)
13	$(2^2, 1^9)$	65	2	(2, 2/4)
	$(2^5, 1^3)$	572	3	(3, 1/3)
	$(3, 1^{10})$	66	2	(2, 1/3/5)
	$(3^2, 1^7)$	936	2, 2	(2, 1/3/4/6)
	$(5, 1^8)$	495	2	(2, 1/3/5)
	$(7, 1^6)$	924	2	(2, 1/3/5)
	$(7, 6)$	429	2	(2, 1/3/5)
	$(8, 5)$	572	5	(5, 2)
	$(9, 1^4)$	495	2	(2, 1/3/5)
	$(9, 4)$	429	2, 2	(2, 1/2/3/4/5)
	$(10, 1^3)$	220	3	(3, 1/2/3/4)
	$(10, 2, 1)$	429	4	(2, 6)
	$(10, 3)$	208	3	(3, 4)
	$(11, 1^2)$	66	26	(2, 1/3/5), (13, 1)
	$(11, 2)$	65	2	(2, 1/3/5)
$(13)$	1	2	(2, 1/3/5)	
14	$(2^2, 1^{10})$	77	2	(2, 2/4)
	$(2^5, 1^4)$	1001	3	(3, 1/3)
	$(3, 1^{11})$	78	2	(2, 1/3/5)
	$(5, 1^9)$	715	2	(2, 1/3/5)
	$(7^2)$	429	14	(2, 1/3/5), (7, 2)
	$(9, 5)$	1001	2, 2	(2, 1/2/3/4/5)
	$(10, 4)$	637	2	(2, 7)
	$(11, 1^3)$	286	6	(2, 1/3/5), (3, 1/2/3/4)
	$(11, 2, 1)$	560	13	(13, 1)
	$(11, 3)$	273	2	(2, 1/3/5)
	$(12, 1^2)$	78	7	(7, 2)
	$(12, 2)$	77	2	(2, 7)
	$(13, 1)$	13	2	(2, 1/3/5)
	$(14)$	1	2	(2, 1/3/5/7)
15	$(2^2, 1^{11})$	90	2	(2, 2/4/6)
	$(3, 1^{12})$	91	2	(2, 1/3/5/7)
	$(5, 1^{10})$	1001	2	(2, 1/3/5)
	$(11, 1^4)$	1001	6	(2, 1/3/5/7), (3, 1/2/3/4)
	$(12, 2, 1)$	715	14	(2, 7), (7, 2)
	$(12, 3)$	350	3	(3, 5)
	$(13, 1^2)$	91	30	(2, 1/3/5), (3, 5), (5, 3)
	$(13, 2)$	90	2	(2, 1/2/3/4/5/6)
	$(15)$	1	2	(2, 1/3/5/7)



$n$	$\lambda$	$k_\lambda$	$e_i$	$(p, \iota)$ -speziell
16	$(2^2, 1^{12})$	104	2	$(2, 2/4/6)$
	$(3, 1^{13})$	105	2	$(2, 1/3/5/7)$
	$(13, 1^3)$	455	6	$(2, 1/3/5), (3, 1/2/3/4/5)$
	$(13, 2, 1)$	896	5	$(5, 3)$
	$(13, 3)$	440	6	$(2, 1/2/3/4/5/6), (3, 5)$
	$(14, 1^2)$	105	8	–
	$(14, 2)$	104	2	$(2, 8)$
	$(15, 1)$	15	2	$(2, 1/3/5/7)$
	$(16)$	1	2	$(2, 1/3/5/7)$
17	$(2^2, 1^{13})$	119	2	$(2, 2/4/6)$
	$(3, 1^{14})$	120	2	$(2, 1/3/5/7)$
	$(14, 1^3)$	560	3	$(3, 1/2/3/4/5)$
	$(14, 2, 1)$	1105	16	$(2, 8)$
	$(15, 1^2)$	120	34	$(2, 1/3/5/7), (17, 1)$
	$(15, 2)$	119	2	$(2, 1/3/5/7)$
		$(17)$	1	2
18	$(2^2, 1^{14})$	135	2	$(2, 2/4/6)$
	$(3, 1^{15})$	136	2	$(2, 1/3/5/7)$
	$(15, 1^3)$	680	2	$(2, 1/3/5/7)$
	$(15, 3)$	663	6	$(2, 1/3/5/7), (3, 6)$
	$(16, 1^2)$	136	9	$(3, 6)$
	$(16, 2)$	135	2	$(2, 9)$
	$(17, 1)$	17	2	$(2, 1/3/5/7)$
		$(18)$	1	2
19	$(2^2, 1^{15})$	152	2	$(2, 2/4/6/8)$
	$(3, 1^{16})$	153	2	$(2, 1/3/5/7/9)$
	$(16, 1^3)$	816	3	$(3, 1/2/3/4/5/6)$
	$(16, 3)$	798	3	$(3, 6)$
	$(17, 1^2)$	153	38	$(2, 1/3/5/7), (19, 1)$
	$(17, 2)$	152	2	$(2, 1/2/3/4/5/6/7/8)$
		$(19)$	1	2
20	$(2^2, 1^{16})$	170	2	$(2, 2/4/6/8)$
	$(3, 1^{17})$	171	2	$(2, 1/3/5/7/9)$
	$(17, 1^3)$	969	6	$(2, 1/3/5/7), (3, 1/2/3/4/5/6)$
	$(17, 3)$	950	2	$(2, 1/2/3/4/5/6/7/8)$
	$(18, 1^2)$	171	10	$(5, 4)$
	$(18, 2)$	170	2	$(2, 10)$
	$(19, 1)$	19	2	$(2, 1/3/5/7/9)$
		$(20)$	1	2



# Literaturverzeichnis

- [Aig75] M. Aigner. *Kombinatorik I. Grundlagen und Zähltheorie*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1975.
- [Ben98] D. J. Benson. *Representations and cohomology, Vol. I*. Number 30 in Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, second edition, paperback, 1998.
- [BKM96] V. P. Burichenko, A. S. Kleshchev, and S. Martin. On cohomology of dual Specht modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 112:157–180, 1996.
- [Cha65] L. S. Charlap. Compact flat Riemannian manifolds I. *Annals of mathematics*, 81:15–30, 1965.
- [CM72] H. S. M. Coxeter and W. O. J. Moser. *Generators and relations for discrete groups*. Number 14 in *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, third edition, 1972.
- [CR62] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebra*. Number 11 in *Pure and Applied Mathematics*. John Wiley & Sons, New York, London, 1962.
- [CR81] C. W. Curtis and I. Reiner. *Methods of Representation Theory with Applications to finite Groups and Orders*, volume 1. Wiley Interscience Publication, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, 1981.
- [Don87] S. Donkin. On Schur Algebras and Related Algebras, II. *Journal of Algebra*, 111:354–364, 1987.
- [Eve91] L. Evens. *The Cohomology of Groups*. Clarendon Press, Oxford, New York, Tokyo, 1991.
- [GAP08] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12*, 2008.
- [Gra85] J. Grabmeier. Unzerlegbare Moduln mit trivialer Youngquelle und Darstellungstheorie der Schuralgebra. *Bayreuther Mathematische Schriften*, 20:9–152, 1985.
- [Hem09] D. J. Hemmer. A combinatorial approach to Specht module cohomology. *arXiv:0910.5229v1 [math.RT]*, 2009.
- [Hen05] A. Henke. On  $p$ -Kostka numbers and Young modules. *European Journal of Combinatorics*, 26:923–942, 2005.
- [HEO05] D. Holt, B. Eick, and E. O’Brien. *Handbook of Computational Group Theory*. Discrete mathematics and its applications. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, London, New York, Washington D.C., 2005.
- [HP89] D. F. Holt and W. Plesken. *Perfect Groups*. Oxford Science Publications. Clarendon Press, 1989.

- [HS95] G. Hiss and A. Szczepański. Holonomy groups of Bieberbach groups with finite outer automorphism groups. *Arch. Math.*, 65:8–14, 1995.
- [Jam76] G. D. James. Representations of the Symmetric Groups over the Field of Order 2. *Journal of Algebra*, 38:280–308, 1976.
- [Jam78] G. D. James. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Number 682 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, 1978.
- [Jam83] G. D. James. Trivial source modules for symmetric groups. *Arch. Math.*, 41:294–300, 1983.
- [JK81] G. James and A. Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1981.
- [JW00] G. James and A. Williams. Decomposition Numbers of Symmetric Groups by Induction. *Journal of Algebra*, 228:119–142, 2000.
- [Kle95a] A. S. Kleshchev. Branching Rules for Modular Representations of Symmetric Groups I. *Journal of Algebra*, 178:193–511, 1995.
- [Kle95b] A. S. Kleshchev. Branching rules for modular representations of symmetric groups II. *J. reine angew. Math.*, 459:163–212, 1995.
- [Kle96] A. S. Kleshchev. Branching rules for modular representations of symmetric groups III: Some corollaries and a problem of Mullineux. *J. London Math. Soc. (2)*, 54:25–38, 1996.
- [Kle98a] A. S. Kleshchev. Branching Rules for Modular Representations of Symmetric Groups, IV. *Journal of Algebra*, 201:547–572, 1998.
- [Kle98b] A. S. Kleshchev. Branching rules for symmetric groups and applications. *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, 517:103–130, 1998.
- [Kob84] N. Koblitz. *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions*. Springer, second edition, 1984.
- [KP93] A. S. Kleshchev and A. A. Premet. On second degree cohomology of symmetric and alternating groups. *Communications in Algebra*, 21(2):583–600, 1993.
- [Kum52] E. E. Kummer. Über die Ergänzungssätze zu den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen. *J. Reine Angew. Math.*, 44:93–146, 1852.
- [Lüb06] F. Lübeck. *GAP 4 package EDIM - Elementary Divisors and Integer Matrices, Version 1.2.3*. <http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/EDIM>, 2006.
- [MO11] J. Müller and J. Orlob. On the structure of the tensor square of the natural module of the symmetric group. *Algebra Colloq.*, 18:589–610, 2011.
- [MR97] S. Martin and L. Russell. On the ordinary quiver of the symmetric group over a field of characteristic 2. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 122:415–438, 1997.
- [MS03] W. Malfait and A. Szczepański. The Structure of the (Outer) Automorphism Group of a Bieberbach Group. *Compositio Mathematica*, 136:89–101, 2003.
- [Nak40] T. Nakayama. On some modular properties of irreducible representations of symmetric groups, II. *Japanese Journal of Mathematics*, 17:411–423, 1940.
- [NT88] H. Nagao and Y. Tsushima. *Representations of Finite Groups*. Academic Press, 1988.

- [Oli88] R. Oliver. *Whitehead groups of finite groups*. Number 132 in London Mathematical Society lecture note series. Cambridge Univ. Press, 1988.
- [Rin09] Ringe, M. *The C MeatAxe, Version 2.4.13*, 2009.
- [She99] J. Sheth. Branching rules for two row partitions and applications to the inductive systems for symmetric groups. *Communications in Algebra*, 7:3303–3316, 1999.
- [Szc96] A. Szczepański. Outer Automorphism Groups of Bieberbach Groups. *Bull. Belg. Math. Soc.*, 3:585–593, 1996.
- [Szc03] A. Szczepański. Holonomy Groups of Crystallographic Groups with Finite Outer Automorphism Groups. *Research and Exposition in Mathematics*, 27:163–165, 2003.
- [Web06] C. Weber. Kohomologie von Spechtmoduln. Diplomarbeit, RWTH Aachen University, <http://www.math.rwth-aachen.de/~Gerhard.Hiss/Students/KohomologievonSpechtmoduln.pdf>, 2006.
- [Web09a] C. Weber. Low-Degree Cohomology of Integral Specht Modules. *Experimental Mathematics*, 18:1:85–95, 2009.
- [Web09b] C. Weber. Low degree cohomology of integral Specht modules - Tables and graphs. <http://www.math.rwth-aachen.de/~Christian.Weber/pdf/specht.coho.table.graphs.pdf>, 2009.
- [Wei94] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Number 38 in Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.
- [Wil06] A. Williams. Symmetric Group Decomposition Numbers for Some Three-Part Partitions. *Communications in Algebra*, 34:1599–1613, 2006.
- [Zas48] H. Zassenhaus. Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 21:117–141, 1948.



# Glossar

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\underline{n}$	$\{1, 2, \dots, n\}$ , insbesondere $\underline{0} = \emptyset$
$\mathbb{P}$	die Menge der Primzahlen
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Z}_{(p)}$	die $p$ -adischen ganzen Zahlen
$\mathbb{Z}_p$	die $p$ -adische Vervollständigung von $\mathbb{Z}_{(p)}$
$\mathbb{Q}_p$	der Quotientenkörper von $\mathbb{Z}_p$
$\mathbb{F}_p$	der Körper mit $p$ Elementen
$\lfloor x \rfloor$	die größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x$ (untere Gaußklammer)
$p \mid n$	$p$ ist ein Teiler von $n$
$p \nmid n$	$p$ ist kein Teiler von $n$
$[n]_p$	der $p$ -Anteil von $n$
$[n]_{p'}$	$n/[n]_p$
$l_p(k)$	$\min\{x \in \mathbb{N}_0 \mid k < p^x\}$
$a \subset_p b$	$a$ ist (stark) enthalten zur Basis $p$ in $b$
$a \subseteq_p b$	$a$ ist (schwach) enthalten zur Basis $p$ in $b$
$R^*$	die Einheitengruppe des Rings $R$
$\text{col}_R(X)$	der Spaltenmodul der Matrix $X$ über $R$
$\text{Kern}_R(X)$	der Kern der Matrix $X$ über $R$
$\mathbb{1} = \mathbb{1}_G = \mathbb{1}_{RG}$	der triviale $RG$ -Modul
$V \uparrow^H = V \uparrow_G^H$	der nach $H$ induzierte $RG$ -Modul $V$
$V \downarrow_U = V \downarrow_U^G$	der nach $U$ eingeschränkte $RG$ -Modul $V$
$V^*$	der zu $V$ duale $RG$ -Modul $\text{Hom}_R(V, R)$
$\text{Fix}_G(V)$	die Fixpunkte des $RG$ -Moduls $V$ unter der Operation von $G$
$[V : S]$	die Vielfachheit des einfachen $kG$ -Moduls $S$ als Kompositionsfaktor des $kG$ -Moduls $V$
$\text{rad}(V)$	das Radikal des $kG$ -Moduls $V$
$\text{soc}(V)$	der Sockel des $kG$ -Moduls $V$
$\text{hd}(V)$	der Kopf des $kG$ -Moduls $V$
$V \otimes_R W$	das Tensorprodukt der $R$ -Moduln $V$ und $W$
$V \hookrightarrow W$	$W$ besitzt einen zu $V$ isomorphen Untermodul (Einbettung)
$\text{Ext}_{RG}^i(V, W)$	die $i$ -te Ext-Gruppe der $RG$ -Moduln $V$ und $W$
$Z^i(G, V)$	die $i$ -Kozykel des $RG$ -Moduls $V$
$B^i(G, V)$	die $i$ -Koränder des $RG$ -Moduls $V$
$H^i(G, V)$	die $i$ -te Kohomologiegruppe des $RG$ -Moduls $V$
$\text{res}_U^G$	Restriktionsabbildung
$\text{tr}_U^G$	Transferabbildung

$\lambda \vdash n$	eine Partition von $n$
$\text{Part}(n)$	$\{\lambda \vdash n\}$
$\lambda \vDash n$	eine Komposition von $n$
$\bar{\lambda}$	die zur Komposition $\lambda$ gehörige Partition
$\ell(\lambda)$	die Länge der Partition (Komposition) $\lambda$
$[\lambda]$	das Young-Diagramm zur Partition (Komposition) $\lambda$
$\lambda'$	die konjugierte Partition zur Partition $\lambda$
$\tilde{\lambda}$	der $p$ -Kern der Partition $\lambda$
$\lambda^R$	die zur Partition $\lambda$ gehörige $p$ -reguläre Partition
$\lambda \leq \mu$	lexikografische Ordnung auf $\text{Part}(n)$
$\lambda \preceq \mu$	Dominanzordnung auf $\text{Part}(n)$
$\text{res}(i, p)$	das $p$ -Residuum $(j - i) \bmod p$
$\text{ER}(\lambda, q)$	die Folge der $p$ -Endresiduen der Partition $\lambda$ bis zur Zeile $q$
$q^\lambda$	$\min\{q \in \mathbb{N}_0 \mid q \geq \ell(\lambda), p \mid q\}$
$\text{ER}(\lambda)$	die minimale $p$ -Endresiduenfolge $\text{ER}(\lambda, q^\lambda)$
$a^\lambda$	die Folge der Vielfachheiten der $p$ -Endresiduen in $\text{ER}(\lambda)$
$\alpha^\lambda$	$a^\lambda - \min\{a_j^\lambda \mid 0 \leq j \leq p - 1\} \cdot (1, 1, \dots, 1)$
$S_M$	die symmetrische Gruppe auf der Menge $M$
$S_n$	die symmetrische Gruppe auf der Menge $\underline{n}$
$S_\lambda$	die Young-Untergruppe von $S_n$ zur Partition $\lambda \vdash n$
$\text{sgn}(\pi)$	das Signum einer Permutation $\pi$
$G_n$	eine bestimmte endliche Präsentation der $S_n$ mit Erzeugern $(1, 2)$ und $(1, 2, \dots, n)$ , siehe (2.8)
$H_n$	die Coxeter-Präsentation der $S_n$
$M^\lambda = M_R^\lambda$	der Permutationsmodul zur Partition (Komposition) $\lambda$ über $R$
$S^\lambda = S_R^\lambda$	der Spechtmodul zur Partition $\lambda$ über $R$
$D^\lambda = D_k^\lambda$	der einfache Modul zur $p$ -regulären Partition $\lambda$ über einem Körper $k$ der Charakteristik $p$
$Y^\lambda = Y_k^\lambda$	der Youngmodul zur Partition $\lambda$ über einem Körper $k$ der Charakteristik $p$
$\text{sgn}_n = \text{sgn}_{n,R}$	der alternierende $RS_n$ -Modul
$f_\lambda$	die Spur von $M^\lambda$
$\kappa_{\lambda,\mu}^p$	die Vielfachheit von $Y_{\mathbb{F}_p}^\mu$ als direkter Summand von $M_{\mathbb{F}_p}^\lambda$ ( $p$ -Kostka-Zahl)
$T(\lambda)$	die Menge der $\lambda$ -Tableaus
$ST(\lambda)$	die Menge der Standard- $\lambda$ -Tableaus
$\bar{T}(\lambda)$	die Menge der $\lambda$ -Tabloide
$\text{Stab}_\vee(t)$	der Spaltenstabilisator des Tableaus $t$
$e_t$	das Polytabloid zum Tableau $t$
$\eta_{i,j}$	das Polytabloid zum $(n - 2, 2)$ -Tableau, dessen zweite Zeile $i, j$ lautet
$e_{i,j}$	das Polytabloid zum $(n - 2, 1^2)$ -Tableau, in dessen zweiter Zeile $i$ steht und in dessen dritter Zeile $j$ steht
$\boxed{i \mid k}$	$e_{i+1, i+1+k}$
$\mathcal{Y}$	der Young-Graph
$\lambda+$	die Menge der Nachfolger von $\lambda$ in $\mathcal{Y}$
$\lambda-$	die Menge der Vorgänger von $\lambda$ in $\mathcal{Y}$
$\lambda^A$	die Partition aus $\lambda+$ , die durch Hinzufügen des Knotens $A$ entsteht
$\lambda_A$	die Partition aus $\lambda-$ , die durch Entfernen des Knotens $A$ entsteht



$\mathcal{B}_0(p)$	der $p$ -Hauptblock-Graph
$\mathcal{P}_p(n)$	ein bestimmter Pfad in $\mathcal{Y}$ mit Wurzel $(n-2, 1^2)$ (siehe Definition 1.5.5)
$\mathcal{C}^i(R)$	die Menge der Partitionen mit $H^i(S_n, S_R^\lambda) \neq 0$
$\mathcal{C}_p^i$	$\mathcal{C}^i(\mathbb{Z}_p)$
$d_i^\lambda$	$\dim(H^i(S_n, S_{\mathbb{F}_p}^\lambda))$
$x_i^\lambda$	der $p$ -Rang von $H^i(S_n, S_{\mathbb{Z}}^\lambda)$
$Z_\lambda$	die Zassenhaus-Matrix zur Partition $\lambda$ bezüglich der Präsentation $G_n$
$B_\lambda$	die Matrix $\begin{pmatrix} A-1 \\ B-1 \end{pmatrix}$ zum Spechtmodul $S_{\mathbb{Z}}^\lambda$ bezüglich der darstellenden Matrizen $(1, 2) \mapsto A, (1, 2, \dots, n) \mapsto B$
$\lambda(i, v)$	die Partition von $n$ , die mit der Partition $\lambda \vdash n$ außerhalb der Zeilen $i$ und $i+1$ übereinstimmt und deren Zeile $i+1$ die Länge $v$ hat
$J(\lambda)$	$\{(i, v) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}_0 \mid i \leq \ell(\lambda) - 1, v \leq \lambda_{i+1} - 1\}$
$b(i, v)$	der Binomialkoeffizient $\binom{\lambda_i + \lambda_{i+1} - v}{\lambda_i}$ für $(i, v) \in J(\lambda)$
$T(i, v, \bar{t})$	$\{\bar{\tau} \in \bar{T}(\lambda(i, v)) \mid \bar{\tau}_j = \bar{t}_j \text{ für } j \notin \{i, i+1\} \text{ und } \bar{t}_i \subseteq \bar{\tau}_i\}$
$\psi_{i,v}$	$M^\lambda \rightarrow M^{\lambda(i,v)}, \bar{t} \mapsto \sum_{\bar{\tau} \in T(i,v,\bar{t})} \bar{\tau}$
$\bar{t}(\bar{\tau}, A)$	dasjenige $\lambda$ -Tabloid, das mit dem $\lambda(i, v)$ -Tabloid $\bar{\tau}$ außerhalb der Zeilen $i$ und $i+1$ übereinstimmt, und dessen $i$ -te Zeile gleich $A$ ist

# Index

- Abakus, 14
- addierbarer Knoten, 30
- Auflösung, 46
  
- Baer-Summe, 48
- Bieberbachgruppe, 150
- Bockstein-Homomorphismen, 57
  
- Coxeter-Präsentation, 66
  
- Derivation, 51
- Dominanzordnung, 12
- dualer Modul, 18
  
- Ecke, 12
- Endresiduum, 15
- entfernbarer Knoten, 30
- enthalten zur Basis  $p$ , 23
- Erweiterung, 47, 52
- exakte Sequenz, 46
- Ext-Gruppen, 47
  
- Faktorensystem, 51
- Fox-Derivation, 61
- Frobenius-Reziprozität, 116
  
- gebrochenes  $R$ -Ideal, 59
- Gitter, 17
  
- Haken, 13
- Hakenformel, 19
- Hasse-Diagramm, 101
- Hauptblock, 36
- Hauptblock-Graph, 37
- Hauptblockanteil, 36
- Hemmer, 79
- Holonomiedarstellung, 150
- Holonomiegruppe, 150
  
- induzierter Teilgraph, 37
- injektiver Modul, 46
- Invariantenteiler, 57
  
- James-Kriterium, 65
- Jordan-Hölder, 28
  
- Klyachko-Formel, 24
- Kohomologie-Graph, 64
- Kohomologiegruppe, 50
- Komposition, 12
- Kompositionsreihe, 28
- Kopf, 21
- Kostka-Zahl, 23
- kristallografische Gruppe, 150
- Krull-Schmidt, 21
- Kummer, 83
- Künneth-Formel, 54
  
- Leiter, 29
- lokaler Untermodul, 103
  
- Mackey, 32
  
- $p$ -Anteil, 57
- $p$ -adische ganze Zahlen, 19
- Partition, 12
  - 'böse', 42
  - Haken-, 28
  - konjugierte, 12
  - $(p, \iota)$ -spezielle, 56, 95, 141, 151
  - $p$ -reguläre, 21
  - $p$ -singuläre, 21
  - $p$ -spaltenreguläre, 24
  - Zweiteil-, 29
- $p$ -Block, 35
- Permutationsmodul, 17
- $p$ -Kern, 13
- $p$ -modulares System, 35
- Polytabloid, 19
- $p$ -Rang, 57
- projektiver Modul, 46
  
- Radikal, 21
- Randhaken, 13
- reiner Untermodul, 17
- Residuum, 15
- Restriktion, 54
- $R$ -Idealklasse, 59
  
- Sockel, 21
- Spaltenstabilisator, 19

---

Spechtmodul, 19  
Spechtreihe, 25  
spezielles Element, 55  
Spur, 18, 79  
symmetrische Gruppe, 11

Tableau, 17  
Tabloid, 17  
Transfer, 54

uniseriell, 28

Verzweigungsregeln, 30  
  modulare, 33

Young-Diagramm, 12  
Young-Graph, 31  
Young-Untergruppe, 18  
Youngmodul, 21, 22

Zassenhaus-Matrix, 61, 66

# Lebenslauf

## Christian Weber

10.08.1977	geboren in Trier Staatsangehörigkeit: deutsch
1984 - 1988	Besuch der Grundschule in Irrel
1988 - 1997 27.06.1997	Besuch des St.-Josef-Gymnasiums in Biesdorf Abitur
07/1997 - 07/1998	Zivildienst in der Jugendburg Neuerburg
01/1999 - 06/2001	Drehbuchkurse am Billy-Wilder-Institut (Bonn) und an der Interspherial-Drehbuchschule (Stuttgart)
10/2001 - 12/2006 18.12.2006	Studium der Mathematik mit Nebenfach Informatik an der RWTH Aachen Diplom in Mathematik
10/2002 - 07/2006	Tutor am Lehrstuhl D für Mathematik sowie 04/2005 - 09/2005 am Institut für Stochastik und Wirtschaftsmathematik
seit 02/2007	wissenschaftlicher Angestellter am Lehrstuhl D für Mathematik