Prof. Dr. G. Nebe, Prof. Dr. E. Zerz
Dipl.-Math. D. Andres

SoSe 2011

Codes und Systemtheorie

Übungsblatt 6

Dieses Übungsblatt wird am 03.06.11 besprochen.

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper.

Aufgabe 1. Sei $H \in \mathbb{F}(s)^{p\times m}$ und seien $H = P^{-1}Q = P_1^{-1}Q_1$ zwei Linksfaktorierungen. Sei $U := P_1P^{-1} \in \mathbb{F}(s)^{p\times p}$. Zeigen Sie: Wenn $P^{-1}Q$ eine links koprime Faktorisierung ist, dann gilt $U \in \mathbb{F}[s]^{p\times p}$. Wenn auch $P_1^{-1}Q_1$ eine links koprime Faktorisierung ist, dann ist U sogar unimodular. Folgern Sie:

1. $d(H) := \deg\det(P)$, wobei $H = P^{-1}Q$ eine beliebige Linkskoprimfaktorisierung ist, ist wohldefiniert.
2. Ist $H = P_1^{-1}Q_1$ eine beliebige Linksfaktorsierung, so gilt $\deg\det(P_1) \geq d(H)$.
3. $d(H)$ ist der McMillan-Grad von H, und $d(H) = \deg\det(\bar{P})$, wobei $H = \bar{Q}\bar{P}^{-1}$ eine beliebige Rechtskoprimfaktorisierung ist.

Aufgabe 2. Sei $H \in \mathbb{F}(s)^{p\times m}$ strikt echtrational. Beweisen Sie mithilfe der obigen Aufgabe, dass die Größe einer Realisierung von H mindestens $d(H)$ sein muss.

Aufgabe 3. Sei $g = \sum_{t=0}^{d} g_t z^t \in \mathbb{F}[z]^{1\times n}$ mit $g_i \in \mathbb{F}^{1\times n}$ und $g_d \neq 0$ eine polynomielle Zeile vom Grad $d \geq 1$. Sei $h(z) = g(z^{-1}) = \frac{1}{z^d}\sum_{t=0}^{d} g_t z^{d-t}$. Zeigen Sie mithilfe von Satz 1.16, dass

$$C = [0,\dots,0,1], \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{d\times d}, \quad B = \begin{bmatrix} g_d \\ \vdots \\ g_1 \end{bmatrix}, \quad D = g_0$$

eine minimale Realisierung von h ist. Insbesondere ist $d = \deg(g) = \text{McMillan-deg}(h)$.

Bemerkung. Allgemein ergibt sich für zeilenreduziertes $G \in \mathbb{F}[z]^{k\times n}$ und $H(z) = G(z^{-1})$, dass der McMillan-Grad von H gleich der Summe der Zeilengrade von G ist.