Eine Einführung in die algebraische D-Modultheorie

Daniel Andres

RWTH AACHEN UNIVERSITY
Experimental and constructive algebra

4. November 2010

Übersicht

$\mathbb{K}$	Körper der Charakteristik 0
$n \in \mathbb{N}$	natürliche Zahl
$\mathbb{K}[x]$	$:= \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$
Monomordnung	Totalordnung $\prec$ auf einer Menge M von Monomen mit $a \prec b \Rightarrow a \cdot c \prec b \cdot c$ für alle $a, b, c \in M$
globale Ordnung	Monomordnung mit $1 \prec a$ für alle $a \in M$
$\mathrm{lm}(p)$	Leitmonom des Polynoms p

Definition

Die assoziative $\mathbb{K}$-Algebra

$$D_n := \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \mid \partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

heißt die *n-te Weylalgebra* über $\mathbb{K}$.

$C^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ wird zum D_n-Modul via

$$x_i \bullet f := x_i \cdot f, \quad \partial_i \bullet f := \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{für } f \in C^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$$

$\rightsquigarrow$ Ring der linearen partiellen Differentialoperatoren mit polynomiellen Koeffizienten

Definition

Die assoziative $\mathbb{K}$-Algebra

$$D_n := \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \mid \partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

heißt die *n-te Weylalgebra* über $\mathbb{K}$.

$C^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ wird zum D_n-Modul via

$$x_i \bullet f := x_i \cdot f, \quad \partial_i \bullet f := \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{für } f \in C^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$$

$\rightsquigarrow$ Ring der linearen partiellen Differentialoperatoren mit polynomiellen Koeffizienten

Definition

Die assoziative $\mathbb{K}$-Algebra

$$D_n := \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \mid \partial_i x_j = x_j \partial_i + \delta_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \rangle$$

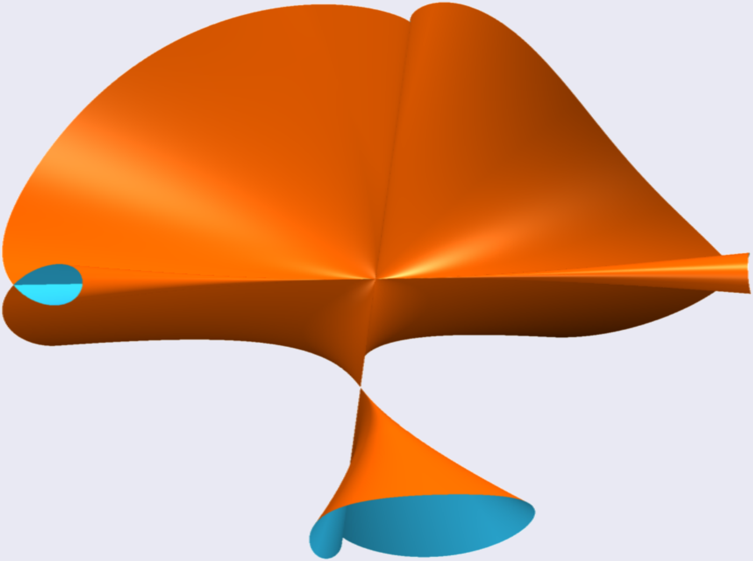
heißt die *n-te Weylalgebra* über $\mathbb{K}$.

$C^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ wird zum D_n-Modul via

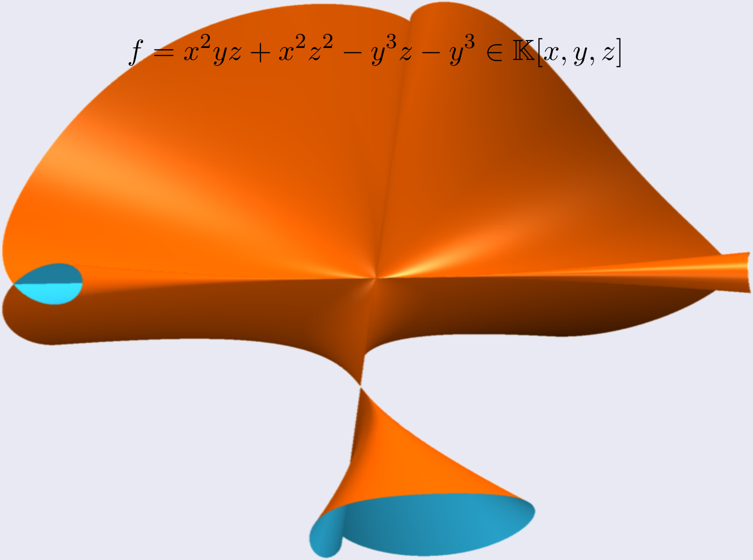
$$x_i \bullet f := x_i \cdot f, \quad \partial_i \bullet f := \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \text{für } f \in C^\infty(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$$

$\rightsquigarrow$ Ring der linearen partiellen Differentialoperatoren mit polynomiellen Koeffizienten

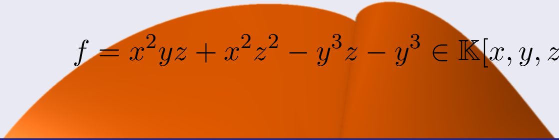
Die Geisha



$$f = x^2yz + x^2z^2 - y^3z - y^3 \in \mathbb{K}[x, y, z]$$



Die Geisha



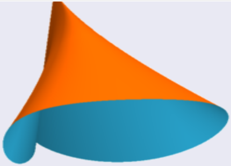
$$f = x^2yz + x^2z^2 - y^3z - y^3 \in \mathbb{K}[x,y,z]$$

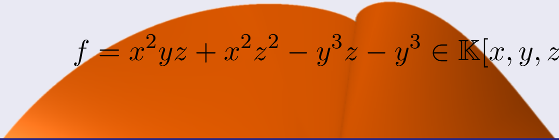
Aufgabe

Bestimme alle linearen partiellen Differentialgleichungen mit polynomiellen Koeffizienten, die

(a) f als Lösung besitzen.

(b) $\frac{1}{\sqrt[67]{f^7}}$ als Lösung besitzen.





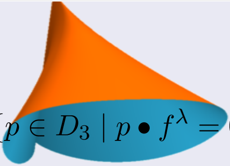
$$f = x^2yz + x^2z^2 - y^3z - y^3 \in \mathbb{K}[x, y, z]$$

Aufgabe

Bestimme alle linearen partiellen Differentialgleichungen mit polynomiellen Koeffizienten, die

(a) f als Lösung besitzen.

(b) $\frac{1}{\sqrt[67]{f^7}}$ als Lösung besitzen.



Also: Berechne das Linksideal

$$\mathrm{Ann}_{D_3}(f^\lambda) := \{p \in D_3 \mid p \bullet f^\lambda = 0\} \subset D_3$$

für $\lambda \in \{1, -\frac{7}{67}\}$.

Theorem

Die Weylalgebra ist einfach, d.h. $\{0\}$ und D_n sind die einzigen zweiseitigen Ideale von D_n.

Bemerkung

Jeder Endomorphismus der Weylalgebra injektiv.

Vermutung (Dixmier (1968))

$\mathrm{End}(D_n) = \mathrm{Aut}(D_n)$.

Eigenschaften der Weylalgebra

Theorem

Die Weylalgebra ist einfach, d.h. $\{0\}$ und D_n sind die einzigen zweiseitigen Ideale von D_n.

Bemerkung

Jeder Endomorphismus der Weylalgebra injektiv.

Vermutung (Dixmier (1968))

$\mathrm{End}(D_n) = \mathrm{Aut}(D_n)$.

Theorem

Die Weylalgebra ist einfach, d.h. $\{0\}$ und D_n sind die einzigen zweiseitigen Ideale von D_n.

Bemerkung

Jeder Endomorphismus der Weylalgebra injektiv.

Vermutung (Dixmier (1968))

$\mathrm{End}(D_n) = \mathrm{Aut}(D_n)$.

Definition

Sei $A = \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \mid x_j x_i = c_{ij} x_i x_j + d_{ij}, 1 \leq i < j \leq n \rangle$, wobei $0 \neq c_{ij} \in \mathbb{K}$ und $d_{ij} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Man nennt A eine *G-Algebra* falls:

1. *Ordnungsbedingung:* Es existiert eine Monomordnung $\prec$ mit $\mathrm{lm}(d_{ij}) \prec x_i x_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.
2. *Nicht-Entartungsbedingung:* Für alle $1 \leq i < j < k \leq n$ gilt $c_{ik} c_{jk} d_{ij} x_k - x_k d_{ij} + c_{jk} x_j d_{ik} - c_{ij} d_{ik} x_j + d_{jk} x_i - c_{ij} c_{ik} x_i d_{jk} = 0$.

Beispiele

- $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \mid x_j x_i = x_i x_j, 1 \leq i < j \leq n \rangle$
- $D_n = \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \mid \partial_j x_i = x_i \partial_j + \delta_{ij}, 1 \leq i < j \leq n \rangle$
- $U(\mathfrak{sl}_2, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle e, f, h \mid fe = ef - h, he = eh + 2e, hf = fh - 2f \rangle$

Definition

Sei $A = \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \mid x_j x_i = c_{ij} x_i x_j + d_{ij}, 1 \leq i < j \leq n \rangle$, wobei $0 \neq c_{ij} \in \mathbb{K}$ und $d_{ij} \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Man nennt A eine *G-Algebra* falls:

1. *Ordnungsbedingung:* Es existiert eine Monomordnung $\prec$ mit $\operatorname{lm}(d_{ij}) \prec x_i x_j$ für alle $1 \leq i < j \leq n$.
2. *Nicht-Entartungsbedingung:* Für alle $1 \leq i < j < k \leq n$ gilt $c_{ik} c_{jk} d_{ij} x_k - x_k d_{ij} + c_{jk} x_j d_{ik} - c_{ij} d_{ik} x_j + d_{jk} x_i - c_{ij} c_{ik} x_i d_{jk} = 0$.

Beispiele

- $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n \mid x_j x_i = x_i x_j, 1 \leq i < j \leq n \rangle$
- $D_n = \mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n, \partial_1, \ldots, \partial_n \mid \partial_j x_i = x_i \partial_j + \delta_{ij}, 1 \leq i < j \leq n \rangle$
- $U(\mathfrak{sl}_2, \mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle e, f, h \mid fe = ef - h, he = eh + 2e, hf = fh - 2f \rangle$

Fakten

Sei A eine G-Algebra in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$.

- A ist ein Integritätsbereich.
- A ist links- und rechtsnoethersch.
- A hat eine *PBW-Basis* (Poincaré-Birkhoff-Witt) $\{x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0\}$.
- Jedes Linksideal in A besitzt eine endliche Gröbnerbasis.

Wir benutzen *Multiindexnotationen*:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Definition

Das Monom x^α *teilt* das Monom x^β (Notation: $x^\alpha \mid x^\beta$), falls $\alpha_i \le \beta_i$ für alle $1 \le i \le n$.

Fakten

Sei A eine G-Algebra in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$.

- A ist ein Integritätsbereich.
- A ist links- und rechtsnoethersch.
- A hat eine *PBW-Basis* (Poincaré-Birkhoff-Witt) $\{x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0\}$.
- Jedes Linksideal in A besitzt eine endliche Gröbnerbasis.

Wir benutzen *Multiindexnotationen*:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Definition

Das Monom x^α *teilt* das Monom x^β (Notation: $x^\alpha \mid x^\beta$), falls $\alpha_i \leq \beta_i$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Fakten

Sei A eine G-Algebra in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$.

- A ist ein Integritätsbereich.
- A ist links- und rechtsnoethersch.
- A hat eine *PBW-Basis* (Poincaré-Birkhoff-Witt) $\{x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}_0\}$.
- Jedes Linksideal in A besitzt eine endliche Gröbnerbasis.

Wir benutzen *Multiindexnotationen*:

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}.$$

Definition

Das Monom x^α *teilt* das Monom x^β (Notation: $x^\alpha \mid x^\beta$), falls $\alpha_i \le \beta_i$ für alle $1 \le i \le n$.

Seien A eine G-Algebra, $I \subset A$ ein Linksideal und $f \in A$.
„Reduziere“ f mit I:
Ist $A = \mathbb{K}[x_1]$, so ist $I = \langle g \rangle \rightsquigarrow$ Division mit Rest:

$$\exists q, r \in \mathbb{K}[x_1] : \; f = qg + r \text{ mit } r = 0 \text{ oder } \deg(r) < \deg(g).$$

Anders gesagt:

$$\exists q \in \mathbb{K}[x_1] : \; f - qg = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g) \nmid \operatorname{lm}(f - qg).$$

Ist A beliebig, so ist I im Allgemeinen kein Hauptideal.
Wähle ein Erzeugendensystem $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ von I.
Wähle eine globale Ordnung $\prec$.

$$\exists q_1, \ldots, q_r \in A : \; f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g_j) \nmid \operatorname{lm}(f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i), 1 \leq j \leq r.$$

Dann heißt $\mathrm{NF}(f, G) := f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i$ eine *Normalform* von f bzgl. G.

Seien A eine G-Algebra, $I \subset A$ ein Linksideal und $f \in A$.
„Reduziere" f mit I:
Ist $A = \mathbb{K}[x_1]$, so ist $I = \langle g \rangle \rightsquigarrow$ Division mit Rest:

$$\exists q, r \in \mathbb{K}[x_1] : \; f = qg + r \text{ mit } r = 0 \text{ oder } \deg(r) < \deg(g).$$

Anders gesagt:

$$\exists q \in \mathbb{K}[x_1] : \; f - qg = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g) \nmid \operatorname{lm}(f - qg).$$

Ist A beliebig, so ist I im Allgemeinen kein Hauptideal.
Wähle ein Erzeugendensystem $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ von I.
Wähle eine globale Ordnung $\prec$.

$$\exists q_1, \ldots, q_r \in A : \; f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g_j) \nmid \operatorname{lm}(f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i), 1 \leq j \leq r.$$

Dann heißt $\mathrm{NF}(f, G) := f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i$ eine *Normalform* von f bzgl. G.

Seien A eine G-Algebra, $I \subset A$ ein Linksideal und $f \in A$.
„Reduziere“ f mit I:
Ist $A = \mathbb{K}[x_1]$, so ist $I = \langle g \rangle \rightsquigarrow$ Division mit Rest:

$$\exists q, r \in \mathbb{K}[x_1]: \; f = qg + r \text{ mit } r = 0 \text{ oder } \deg(r) < \deg(g).$$

Anders gesagt:

$$\exists q \in \mathbb{K}[x_1]: \; f - qg = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g) \nmid \operatorname{lm}(f - qg).$$

Ist A beliebig, so ist I im Allgemeinen kein Hauptideal.
Wähle ein Erzeugendensystem $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ von I.
Wähle eine globale Ordnung $\prec$.

$$\exists q_1, \ldots, q_r \in A: \; f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g_j) \nmid \operatorname{lm}(f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i), 1 \leq j \leq r.$$

Dann heißt $\mathrm{NF}(f, G) := f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i$ eine *Normalform* von f bzgl. G.

Normalformen

Seien A eine G-Algebra, $I \subset A$ ein Linksideal und $f \in A$.
„Reduziere" f mit I:
Ist $A = \mathbb{K}[x_1]$, so ist $I = \langle g \rangle \rightsquigarrow$ Division mit Rest:

$$\exists q, r \in \mathbb{K}[x_1] : \; f = qg + r \text{ mit } r = 0 \text{ oder } \deg(r) < \deg(g).$$

Anders gesagt:

$$\exists q \in \mathbb{K}[x_1] : \; f - qg = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g) \nmid \operatorname{lm}(f - qg).$$

Ist A beliebig, so ist I im Allgemeinen kein Hauptideal.
Wähle ein Erzeugendensystem $G = \{g_1, \dots, g_r\}$ von I.
Wähle eine globale Ordnung $\prec$.

$$\exists q_1, \dots, q_r \in A : \; f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g_j) \nmid \operatorname{lm}(f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i), 1 \leq j \leq r.$$

Dann heißt $\operatorname{NF}(f, G) := f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i$ eine *Normalform* von f bzgl. G.

Seien A eine G-Algebra, $I \subset A$ ein Linksideal und $f \in A$.
„Reduziere“ f mit I:
Ist $A = \mathbb{K}[x_1]$, so ist $I = \langle g \rangle \rightsquigarrow$ Division mit Rest:

$$\exists q, r \in \mathbb{K}[x_1] : \; f = qg + r \text{ mit } r = 0 \text{ oder } \deg(r) < \deg(g).$$

Anders gesagt:

$$\exists q \in \mathbb{K}[x_1] : \; f - qg = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g) \nmid \operatorname{lm}(f - qg).$$

Ist A beliebig, so ist I im Allgemeinen kein Hauptideal.
Wähle ein Erzeugendensystem $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ von I.
Wähle eine globale Ordnung $\prec$.

$$\exists q_1, \ldots, q_r \in A : \; f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i = 0 \text{ oder } \operatorname{lm}(g_j) \nmid \operatorname{lm}(f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i), 1 \leq j \leq r.$$

Dann heißt $\mathrm{NF}(f, G) := f - \sum_{i=1}^{r} q_i g_i$ eine *Normalform* von f bzgl. G.

Definition

Seien $\prec$ eine globale Ordnung auf einer G-Algebra A und $I \subset A$ ein Linksideal. Eine Teilmenge $G \subset I$ heißt *Gröbnerbasis* von I bzgl. $\prec$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

- Für jedes $0 \neq f \in I$ existiert ein $g \in G$ mit $\mathrm{lm}(g) \mid \mathrm{lm}(f)$.
- $\mathrm{NF}(f, G) = 0$ für alle $f \in I$.

Gröbner basics

- Lösen von nulldimensionalen polynomiellen Systemen
- Ideal- und Radikalmitgliedschaft
- Schnitte von Idealen, Schnitte von Ideal und Unteralgebra
- Kerne von Ring- und Modulhomomorphismen
- ...

Definition

Seien $\prec$ eine globale Ordnung auf einer G-Algebra A und $I \subset A$ ein Linksideal. Eine Teilmenge $G \subset I$ heißt *Gröbnerbasis* von I bzgl.$\prec$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

- Für jedes $0 \neq f \in I$ existiert ein $g \in G$ mit $\mathrm{lm}(g) \mid \mathrm{lm}(f)$.
- $\mathrm{NF}(f, G) = 0$ für alle $f \in I$.

Gröbner basics

- Lösen von nulldimensionalen polynomiellen Systemen
- Ideal- und Radikalmitgliedschaft
- Schnitte von Idealen, Schnitte von Ideal und Unteralgebra
- Kerne von Ring- und Modulhomomorphismen
- ...

Lemma

Seien A eine G-Algebra, $I \subset A$ ein Linksideal und G eine Gröbnerbasis von I. Für alle $f \in A$ sei weiter $\mathrm{NF}(f, G)$ so, dass kein $g \in G$ ein Monom von $\mathrm{NF}(f, G)$ teilt (d.h. $\mathrm{NF}(\cdot, G)$ ist *reduziert*). Dann gilt:

- $\mathrm{NF}(\cdot, G)$ ist eindeutig bestimmt.
- $\mathrm{NF}(\cdot, G)$ ist $\mathbb{K}$-linear.

Seien $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$, s eine neue Variable und $R_f := \mathbb{K}[x, s, f^{-1}]$.
Betrachte den freien R_f-Modul vom Rang eins, der vom formalen Symbol f^s erzeugt wird:

$$M_f := R_f \cdot f^s.$$

M_f wird zum $D_n[s]$-Modul, wobei $D_n[s] := D_n \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[s]$, durch

$$\begin{aligned}
s \bullet g \cdot f^{s+j} &:= s \cdot g \cdot f^{s+j}, \\
x_i \bullet g \cdot f^{s+j} &:= x_i \cdot g \cdot f^{s+j}, \\
\partial_i \bullet g \cdot f^{s+j} &:= \frac{\partial g}{\partial x_i} \cdot f^{s+j} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot (s+j) \cdot f^{s+j-1}
\end{aligned}$$

für $g \in \mathbb{K}[x, s]$ und $f^{s+j} := f^j \cdot f^s$, $j \in \mathbb{Z}$.

Definition

Der *s-parametrische Annihilator* von f ist das Linksideal $\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) := \{p \in D_n[s] \mid p \bullet f^s = 0\}$.

Theorem (Briançon-Maisonobe, 2002)

Betrachte die *Shiftalgebra* $S := \mathbb{K}\langle \partial_t, \sigma \mid \sigma\partial_t = \partial_t\sigma + \partial_t\rangle$. Definiere

$$I := \langle \sigma + f \cdot \partial_t, \partial_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \partial_t, \ldots, \partial_n + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \partial_t\rangle \subset D_n \otimes_{\mathbb{K}} S.$$

Dann ist $\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) = I_{|_{\sigma=s}} \cap D_n[s]$.

$\rightsquigarrow$ Berechnung mit Elimination mittels Gröbnerbasen

Definition

Der *s-parametrische Annihilator* von f ist das Linksideal $\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) := \{p \in D_n[s] \mid p \bullet f^s = 0\}$.

Theorem (Briançon-Maisonobe, 2002)

Betrachte die *Shiftalgebra* $S := \mathbb{K}\langle \partial_t, \sigma \mid \sigma\partial_t = \partial_t\sigma + \partial_t\rangle$. Definiere

$$I := \langle \sigma + f \cdot \partial_t, \partial_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \partial_t, \ldots, \partial_n + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \partial_t\rangle \subset D_n \otimes_{\mathbb{K}} S.$$

Dann ist $\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) = I_{|\sigma=s} \cap D_n[s]$.

$\rightsquigarrow$ Berechnung mit Elimination mittels Gröbnerbasen

Definition

Der *s-parametrische Annihilator* von f ist das Linksideal $\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) := \{p \in D_n[s] \mid p \bullet f^s = 0\}$.

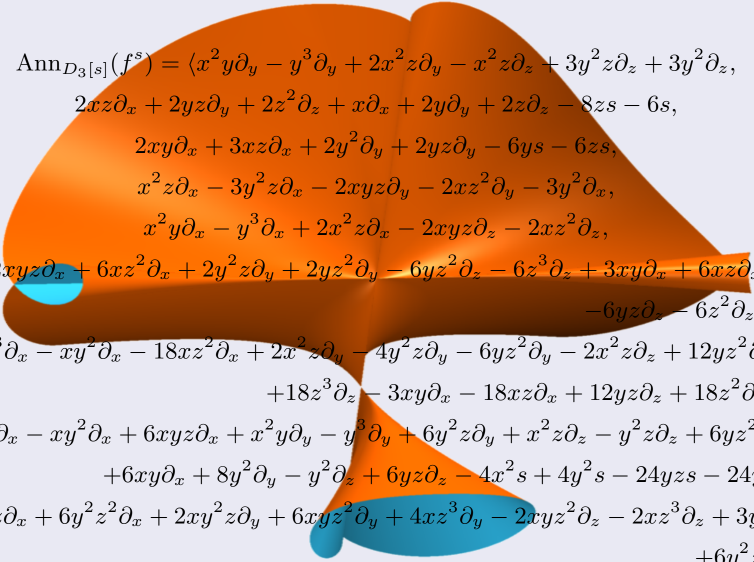
Theorem (Briançon-Maisonobe, 2002)

Betrachte die *Shiftalgebra* $S := \mathbb{K}\langle \partial_t, \sigma \mid \sigma\partial_t = \partial_t\sigma + \partial_t \rangle$. Definiere

$$I := \langle \sigma + f \cdot \partial_t, \partial_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \partial_t, \dots, \partial_n + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \partial_t \rangle \subset D_n \otimes_{\mathbb{K}} S.$$

Dann ist $\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) = I_{|_{\sigma=s}} \cap D_n[s]$.

$\rightsquigarrow$ Berechnung mit Elimination mittels Gröbnerbasen



$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ann}_{D_3[s]}(f^s) = \langle & x^2y\partial_y - y^3\partial_y + 2x^2z\partial_y - x^2z\partial_z + 3y^2z\partial_z + 3y^2\partial_z, \\
& 2xz\partial_x + 2yz\partial_y + 2z^2\partial_z + x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z - 8zs - 6s, \\
& 2xy\partial_x + 3xz\partial_x + 2y^2\partial_y + 2yz\partial_y - 6ys - 6zs, \\
& x^2z\partial_x - 3y^2z\partial_x - 2xyz\partial_y - 2xz^2\partial_y - 3y^2\partial_x, \\
& x^2y\partial_x - y^3\partial_x + 2x^2z\partial_x - 2xyz\partial_z - 2xz^2\partial_z, \\
& 2xyz\partial_x + 6xz^2\partial_x + 2y^2z\partial_y + 2yz^2\partial_y - 6yz^2\partial_z - 6z^3\partial_z + 3xy\partial_x + 6xz\partial_x \\
& \qquad - 6yz\partial_z - 6z^2\partial_z, \\
& x^3\partial_x - xy^2\partial_x - 18xz^2\partial_x + 2x^2z\partial_y - 4y^2z\partial_y - 6yz^2\partial_y - 2x^2z\partial_z + 12yz^2\partial_z \\
& \qquad + 18z^3\partial_z - 3xy\partial_x - 18xz\partial_x + 12yz\partial_z + 18z^2\partial_z, \\
& x^3\partial_x - xy^2\partial_x + 6xyz\partial_x + x^2y\partial_y - y^3\partial_y + 6y^2z\partial_y + x^2z\partial_z - y^2z\partial_z + 6yz^2\partial_z \\
& \qquad + 6xy\partial_x + 8y^2\partial_y - y^2\partial_z + 6yz\partial_z - 4x^2s + 4y^2s - 24yzs - 24ys, \\
& 2y^3z\partial_x + 6y^2z^2\partial_x + 2xy^2z\partial_y + 6xyz^2\partial_y + 4xz^3\partial_y - 2xyz^2\partial_z - 2xz^3\partial_z + 3y^3\partial_x \\
& \qquad + 6y^2z\partial_x \rangle
\end{aligned}
$$

Theorem (Bernstein (1971/72), Sato (1972))

Es existieren ein univariates Polynom $0 \neq b \in \mathbb{K}[s]$ und ein Operator $P \in D_n[s]$, so dass

$$P \bullet f^{s+1} = b \cdot f^s. \tag{1}$$

Definition

Das normierte von Null verschiedene Polynom $b_f \in \mathbb{K}[s]$ kleinsten Grades, das Gleichung (1) erfüllt, heißt die *(globale) b-Funktion* oder das *Bernstein-Sato-Polynom* von f.

Korollar

- $(s+1) \mid b_f$.
- $\langle b_f \rangle_{\mathbb{K}[s]} = (\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle) \cap \mathbb{K}[s]$.

Theorem (Bernstein (1971/72), Sato (1972))

Es existieren ein univariates Polynom $0 \neq b \in \mathbb{K}[s]$ und ein Operator $P \in D_n[s]$, so dass

$$P \bullet f^{s+1} = b \cdot f^s. \tag{1}$$

Definition

Das normierte von Null verschiedene Polynom $b_f \in \mathbb{K}[s]$ kleinsten Grades, das Gleichung (1) erfüllt, heißt die *(globale) b-Funktion* oder das *Bernstein-Sato-Polynom* von f.

Korollar

- $(s+1) \mid b_f$.
- $\langle b_f \rangle_{\mathbb{K}[s]} = (\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle) \cap \mathbb{K}[s]$.

Theorem (Bernstein (1971/72), Sato (1972))

Es existieren ein univariates Polynom $0 \neq b \in \mathbb{K}[s]$ und ein Operator $P \in D_n[s]$, so dass

$$P \bullet f^{s+1} = b \cdot f^s. \tag{1}$$

Definition

Das normierte von Null verschiedene Polynom $b_f \in \mathbb{K}[s]$ kleinsten Grades, das Gleichung (1) erfüllt, heißt die *(globale) b-Funktion* oder das *Bernstein-Sato-Polynom* von f.

Korollar

- $(s+1) \mid b_f$.
- $\langle b_f \rangle_{\mathbb{K}[s]} = (\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle) \cap \mathbb{K}[s]$.

A	G-Algebra
$J \subset A$	Linksideal
$G \subset J$	Gröbnerbasis von J bzgl. einer *beliebigen* globalen Ordnung
$s \in A$	beliebiges Element, das transzendent über $\mathbb{K}$ ist

Ziel: Berechne $J \cap \mathbb{K}[s]$

Lemma

Falls es kein $g \in G$ mit $\operatorname{lm}(g) \mid \operatorname{lm}(s^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so ist $J \cap \mathbb{K}[s] = \{0\}$.

Bemerkung

Die Umkehrung des vorigen Lemmas ist falsch. Zum Beispiel: $J = \langle y^2 + x \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Dann ist $J \cap \mathbb{K}[y] = \{0\}$, aber $\{y^2 + x\}$ ist eine Gröbnerbasis von J bzgl. jeder Ordnung.

A	G-Algebra
$J \subset A$	Linksideal
$G \subset J$	Gröbnerbasis von J bzgl. einer *beliebigen* globalen Ordnung
$s \in A$	beliebiges Element, das transzendent über $\mathbb{K}$ ist

Ziel: Berechne $J \cap \mathbb{K}[s]$

Lemma

Falls es kein $g \in G$ mit $\operatorname{lm}(g) \mid \operatorname{lm}(s^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so ist $J \cap \mathbb{K}[s] = \{0\}$.

Bemerkung

Die Umkehrung des vorigen Lemmas ist falsch. Zum Beispiel: $J = \langle y^2 + x \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Dann ist $J \cap \mathbb{K}[y] = \{0\}$, aber $\{y^2 + x\}$ ist eine Gröbnerbasis von J bzgl. jeder Ordnung.

A	G-Algebra
$J \subset A$	Linksideal
$G \subset J$	Gröbnerbasis von J bzgl. einer *beliebigen* globalen Ordnung
$s \in A$	beliebiges Element, das transzendent über $\mathbb{K}$ ist

Ziel: Berechne $J \cap \mathbb{K}[s]$

Lemma

Falls es kein $g \in G$ mit $\operatorname{lm}(g) \mid \operatorname{lm}(s^k)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, so ist $J \cap \mathbb{K}[s] = \{0\}$.

Bemerkung

Die Umkehrung des vorigen Lemmas ist falsch. Zum Beispiel: $J = \langle y^2 + x \rangle \subset \mathbb{K}[x, y]$. Dann ist $J \cap \mathbb{K}[y] = \{0\}$, aber $\{y^2 + x\}$ ist eine Gröbnerbasis von J bzgl. jeder Ordnung.

Theorem

Seien $J \cdot s \subset J$ und $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{End}_A(A/J)) < \infty$. Dann ist $J \cap \mathbb{K}[s] \neq \{0\}$.

Bemerkung

$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{End}_A(A/J)) < \infty$, falls

- A/J selbst ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum oder
- $A = D_n$ und J ein *holonomes* Linksideal ist.

Theorem

Seien $J \cdot s \subset J$ und $\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{End}_A(A/J)) < \infty$. Dann ist $J \cap \mathbb{K}[s] \neq \{0\}$.

Bemerkung

$\dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{End}_A(A/J)) < \infty$, falls

- A/J selbst ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum oder
- $A = D_n$ und J ein *holonomes* Linksideal ist.

Algorithmus (`pIntersect`)

Input: $s \in A$ transzendent über $\mathbb{K}$, $J \subset A$ ein Linksideal mit $J \cap \mathbb{K}[s] \neq \{0\}$

Output: $b \in \mathbb{K}[s]$ normiert so dass $J \cap \mathbb{K}[s] = \langle b \rangle$

$G :=$ endliche Gröbnerbasis von J bzgl. einer *beliebigen* Ordnung

$i := 1$

loop

if Es existieren $a_0, \ldots, a_{i-1} \in \mathbb{K}$ mit

$$\mathrm{NF}(s^i, G) + \sum_{j=0}^{i-1} a_j \, \mathrm{NF}(s^j, G) = 0 \text{ **then**}$$

return $b := s^i + \sum_{j=0}^{i-1} a_j s^j$

else

$i := i + 1$

end if

end loop

Lemma

Seien A eine G-Algebra vom Lietyp (z.B. eine Weylalgebra), $J \subset A$ ein Linksideal, $s \in A$ und $[a, b] := ab - ba$, $a, b \in A$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{NF}(s^{i+1}, J) = \mathrm{NF}\left([s^i - \mathrm{NF}(s^i, J), \mathrm{NF}(s, J)] + \mathrm{NF}(s^i, J)\,\mathrm{NF}(s, J), J \right).$$

$\rightsquigarrow$ Verringerung der Rechenzeit um einen Faktor ~ 6.4
(bei „schwereren“ Beispielen ~ 8.5)

Anwendungen von `pIntersect`

- Lösen von nulldimensionalen polynomiellen Systemen
- Finden von algebraischen Abhängigkeiten
- Test auf Radikalmitgliedschaft
- Zerlegung in zentrale Charaktere
- Berechnung von Bernstein-Sato-Polynomen

Lemma

Seien A eine G-Algebra vom Lietyp (z.B. eine Weylalgebra), $J \subset A$ ein Linksideal, $s \in A$ und $[a, b] := ab - ba$, $a, b \in A$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{NF}(s^{i+1}, J) = \mathrm{NF}\left([s^i - \mathrm{NF}(s^i, J), \mathrm{NF}(s, J)] + \mathrm{NF}(s^i, J)\,\mathrm{NF}(s, J), J\right).$$

$\rightsquigarrow$ Verringerung der Rechenzeit um einen Faktor ~ 6.4
(bei „schwereren“ Beispielen ~ 8.5)

Anwendungen von `pIntersect`

- Lösen von nulldimensionalen polynomiellen Systemen
- Finden von algebraischen Abhängigkeiten
- Test auf Radikalmitgliedschaft
- Zerlegung in zentrale Charaktere
- Berechnung von Bernstein-Sato-Polynomen

Lemma

Seien A eine G-Algebra vom Lietyp (z.B. eine Weylalgebra), $J \subset A$ ein Linksideal, $s \in A$ und $[a, b] := ab - ba$, $a, b \in A$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{NF}(s^{i+1}, J) = \mathrm{NF}\left([s^i - \mathrm{NF}(s^i, J), \mathrm{NF}(s, J)] + \mathrm{NF}(s^i, J)\,\mathrm{NF}(s, J), J\right).$$

$\rightsquigarrow$ Verringerung der Rechenzeit um einen Faktor ~ 6.4
(bei „schwereren" Beispielen ~ 8.5)

Anwendungen von `pIntersect`

- Lösen von nulldimensionalen polynomiellen Systemen
- Finden von algebraischen Abhängigkeiten
- Test auf Radikalmitgliedschaft
- Zerlegung in zentrale Charaktere
- Berechnung von Bernstein-Sato-Polynomen

Erinnerung

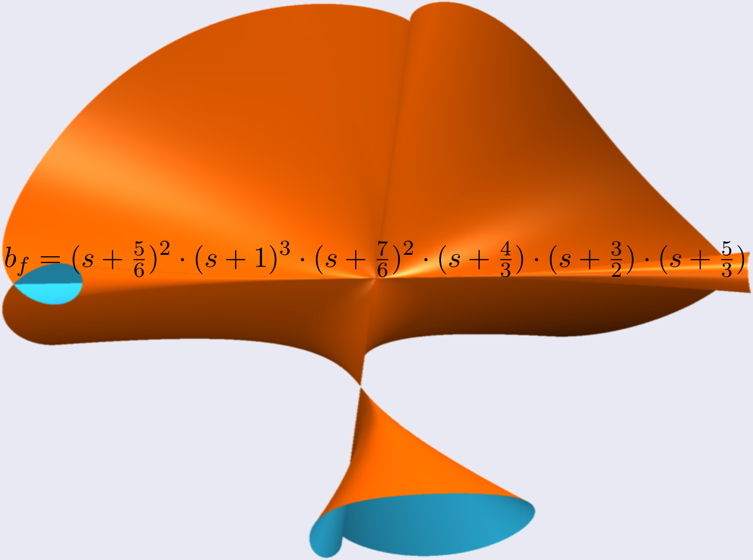
$$\langle b_f \rangle_{\mathbb{K}[s]} = (\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) + \langle f \rangle) \cap \mathbb{K}[s].$$

Algorithmus (`bfctAnn`)

Input: $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$
Output: Das Bernstein-Sato-Polynom $b_f \in \mathbb{K}[s]$ von f

$I := \mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) \subset D_n[s]$
$G :=$ eine Gröbnerbasis von $I + \langle f \rangle \subset D_n[s]$
return $b_f := \texttt{pIntersect}(s, G)$

Die Geisha $f = x^2yz + x^2z^2 - y^3z - y^3$



$$b_f = (s+\tfrac{5}{6})^2 \cdot (s+1)^3 \cdot (s+\tfrac{7}{6})^2 \cdot (s+\tfrac{4}{3}) \cdot (s+\tfrac{3}{2}) \cdot (s+\tfrac{5}{3})$$

Wie berechnet man $\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda)$ für ein spezifisches $\lambda \in \mathbb{K}$?

Beispiel

Betrachte das univariate Polynom $f := x \in \mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1]$.
Dann ist $\mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s) = \langle x\partial_x - s \rangle$.
$(x\partial_x - \lambda) \bullet x^\lambda = x\lambda x^{\lambda-1} - \lambda x^\lambda = 0 \implies \mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s)_{|s=\lambda} \subset \mathrm{Ann}_{D_1}(f^\lambda)$.
Aber: $\lambda \in \mathbb{N} \implies \partial_x^{\lambda+1} \bullet x^\lambda = 0$.

Theorem

Seien $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$, $\lambda_0 := \min\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid b_f(\lambda) = 0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda_0 + k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann ist

$$\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda) = \mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s)_{|s=\lambda}.$$

Wie berechnet man $\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda)$ für ein spezifisches $\lambda \in \mathbb{K}$?

Beispiel

Betrachte das univariate Polynom $f := x \in \mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1]$.
Dann ist $\mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s) = \langle x\partial_x - s\rangle$.
$(x\partial_x - \lambda) \bullet x^\lambda = x\lambda x^{\lambda-1} - \lambda x^\lambda = 0 \implies \mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s)_{|s=\lambda} \subset \mathrm{Ann}_{D_1}(f^\lambda)$.
Aber: $\lambda \in \mathbb{N} \implies \partial_x^{\lambda+1} \bullet x^\lambda = 0$.

Theorem

Seien $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$, $\lambda_0 := \min\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid b_f(\lambda) = 0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda_0 + k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann ist

$$\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda) = \mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s)_{|s=\lambda}.$$

Wie berechnet man $\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda)$ für ein spezifisches $\lambda \in \mathbb{K}$?

Beispiel

Betrachte das univariate Polynom $f := x \in \mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1]$.
Dann ist $\mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s) = \langle x\partial_x - s\rangle$.
$(x\partial_x - \lambda) \bullet x^\lambda = x\lambda x^{\lambda-1} - \lambda x^\lambda = 0 \implies \mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s)_{|_{s=\lambda}} \subset \mathrm{Ann}_{D_1}(f^\lambda)$.
Aber: $\lambda \in \mathbb{N} \implies \partial_x^{\lambda+1} \bullet x^\lambda = 0$.

Theorem

Seien $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$, $\lambda_0 := \min\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid b_f(\lambda) = 0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda_0 + k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann ist

$$\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda) = \mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s)_{|_{s=\lambda}}.$$

Wie berechnet man $\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda)$ für ein spezifisches $\lambda \in \mathbb{K}$?

Beispiel

Betrachte das univariate Polynom $f := x \in \mathbb{K}[x] = \mathbb{K}[x_1]$.
Dann ist $\mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s) = \langle x\partial_x - s \rangle$.
$(x\partial_x - \lambda) \bullet x^\lambda = x\lambda x^{\lambda-1} - \lambda x^\lambda = 0 \implies \mathrm{Ann}_{D_1[s]}(f^s)_{|_{s=\lambda}} \subset \mathrm{Ann}_{D_1}(f^\lambda)$.
Aber: $\lambda \in \mathbb{N} \implies \partial_x^{\lambda+1} \bullet x^\lambda = 0$.

Theorem

Seien $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$, $\lambda_0 := \min\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid b_f(\lambda) = 0\}$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\lambda_0 + k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dann ist

$$\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda) = \mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s)_{|_{s=\lambda}}.$$

Algorithmus (`annflambda`)

Input: $f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \mathbb{K}, \lambda \in \mathbb{K}$

Output: $\mathrm{Ann}_{D_n}(f^\lambda) \subset D_n$

$G := \{g_1, \ldots, g_r\}$ eine Gröbnerbasis von $\mathrm{Ann}_{D_n[s]}(f^s) \subset D_n[s]$

$\lambda_0 := \min\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid b_f(\lambda) = 0\}$

$d := \lambda - \lambda_0, \quad G' := \varnothing$

if $d \in \mathbb{N}$ **then**

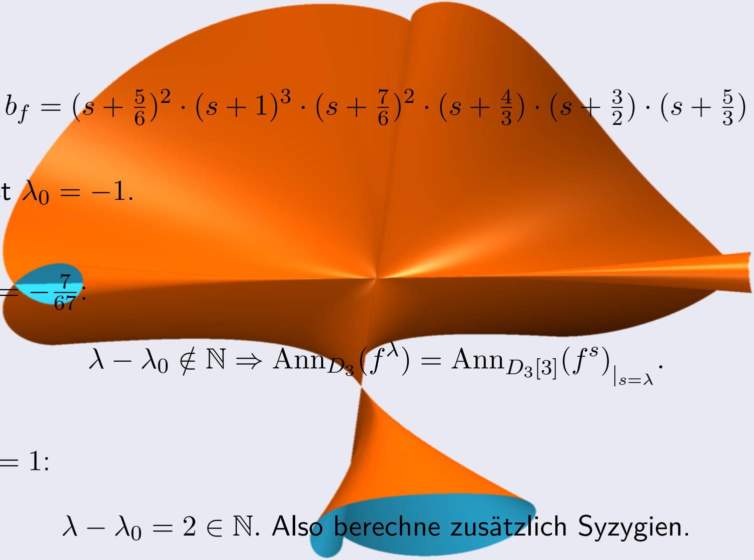
$\quad M := \mathrm{Syz}(f^d, g_1|_{s=\lambda_0}, \ldots, g_r|_{s=\lambda_0}) \subset D_n^{r+1}$

$\quad G' := \{c_0 \mid (c_0, c_1, \ldots, c_r) \in M\} \subset D_n$

end if

return $G|_{s=\lambda} \cup G'$

Die Geisha $f = x^2yz + x^2z^2 - y^3z - y^3$



$$b_f = (s+\tfrac{5}{6})^2 \cdot (s+1)^3 \cdot (s+\tfrac{7}{6})^2 \cdot (s+\tfrac{4}{3}) \cdot (s+\tfrac{3}{2}) \cdot (s+\tfrac{5}{3})$$

Also ist $\lambda_0 = -1$.

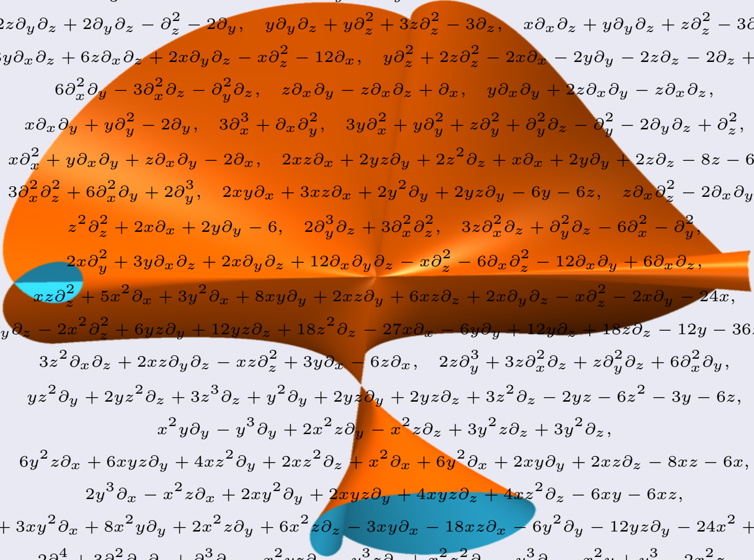
Für $\lambda = -\frac{7}{67}$:

$$\lambda - \lambda_0 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \operatorname{Ann}_{D_3}(f^\lambda) = \operatorname{Ann}_{D_3[3]}(f^s)_{|_{s=\lambda}}.$$

Für $\lambda = 1$:

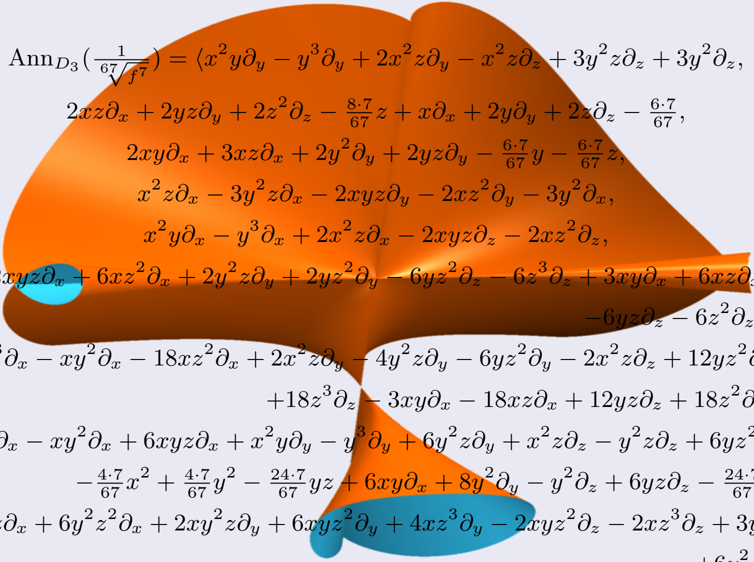
$\lambda - \lambda_0 = 2 \in \mathbb{N}$. Also berechne zusätzlich Syzygien.

Die Geisha $f = x^2yz + x^2z^2 - y^3z - y^3$



$$
\begin{gathered}
\mathrm{Ann}_{D_3}(f) = \langle \partial_z^3, \quad \partial_y\partial_z^2, \quad \partial_x\partial_y^2, \quad y\partial_y^2 + z\partial_z^2 - 2\partial_y, \quad 2\partial_x\partial_y\partial_z - \partial_x\partial_z^2, \\
2z\partial_y\partial_z + 2\partial_y\partial_z - \partial_z^2 - 2\partial_y, \quad y\partial_y\partial_z + y\partial_z^2 + 3z\partial_z^2 - 3\partial_z, \quad x\partial_x\partial_z + y\partial_y\partial_z + z\partial_z^2 - 3\partial_z, \\
3y\partial_x\partial_z + 6z\partial_x\partial_z + 2x\partial_y\partial_z - x\partial_z^2 - 12\partial_x, \quad y\partial_z^2 + 2z\partial_z^2 - 2x\partial_x - 2y\partial_y - 2z\partial_z - 2\partial_z + 8, \\
6\partial_x^2\partial_y - 3\partial_x^2\partial_z - \partial_y^2\partial_z, \quad z\partial_x\partial_y - z\partial_x\partial_z + \partial_x, \quad y\partial_x\partial_y + 2z\partial_x\partial_y - z\partial_x\partial_z, \\
x\partial_x\partial_y + y\partial_y^2 - 2\partial_y, \quad 3\partial_x^3 + \partial_x\partial_y^2, \quad 3y\partial_x^2 + y\partial_y^2 + z\partial_y^2 + \partial_y^2\partial_z - \partial_y^2 - 2\partial_y\partial_z + \partial_z^2, \\
x\partial_x^2 + y\partial_x\partial_y + z\partial_x\partial_y - 2\partial_x, \quad 2xz\partial_x + 2yz\partial_y + 2z^2\partial_z + x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z - 8z - 6, \\
3\partial_x^2\partial_z^2 + 6\partial_x^2\partial_y + 2\partial_y^3, \quad 2xy\partial_x + 3xz\partial_x + 2y^2\partial_y + 2yz\partial_y - 6y - 6z, \quad z\partial_x\partial_z^2 - 2\partial_x\partial_y, \\
z^2\partial_z^2 + 2x\partial_x + 2y\partial_y - 6, \quad 2\partial_y^3\partial_z + 3\partial_x^2\partial_z^2, \quad 3z\partial_x^2\partial_z + \partial_y^2\partial_z - 6\partial_x^2 - \partial_y^2, \\
2x\partial_y^2 + 3y\partial_x\partial_z + 2x\partial_y\partial_z + 12\partial_x\partial_y\partial_z - x\partial_z^2 - 6\partial_x\partial_z^2 - 12\partial_x\partial_y + 6\partial_x\partial_z, \\
xz\partial_z^2 + 5x^2\partial_x + 3y^2\partial_x + 8xy\partial_y + 2xz\partial_y + 6xz\partial_z + 2x\partial_y\partial_z - x\partial_z^2 - 2x\partial_y - 24x, \\
4x^2\partial_y\partial_z - 2x^2\partial_z^2 + 6yz\partial_y + 12yz\partial_z + 18z^2\partial_z - 27x\partial_x - 6y\partial_y + 12y\partial_z + 18z\partial_z - 12y - 36z + 18, \\
3z^2\partial_x\partial_z + 2xz\partial_y\partial_z - xz\partial_z^2 + 3y\partial_x - 6z\partial_x, \quad 2z\partial_y^3 + 3z\partial_x^2\partial_z + z\partial_y^2\partial_z + 6\partial_x^2\partial_y, \\
yz^2\partial_y + 2yz^2\partial_z + 3z^3\partial_z + y^2\partial_y + 2yz\partial_y + 2yz\partial_z + 3z^2\partial_z - 2yz - 6z^2 - 3y - 6z, \\
x^2y\partial_y - y^3\partial_y + 2x^2z\partial_y - x^2z\partial_z + 3y^2z\partial_z + 3y^2\partial_z, \\
6y^2z\partial_x + 6xyz\partial_y + 4xz^2\partial_y + 2xz^2\partial_z + x^2\partial_x + 6y^2\partial_x + 2xy\partial_y + 2xz\partial_z - 8xz - 6x, \\
2y^3\partial_x - x^2z\partial_x + 2xy^2\partial_y + 2xyz\partial_y + 4xyz\partial_z + 4xz^2\partial_z - 6xy - 6xz, \\
5x^3\partial_x + 3xy^2\partial_x + 8x^2y\partial_y + 2x^2z\partial_y + 6x^2z\partial_z - 3xy\partial_x - 18xz\partial_x - 6y^2\partial_y - 12yz\partial_y - 24x^2 + 18y + 36z, \\
2\partial_y^4 + 3\partial_x^2\partial_y\partial_z + \partial_y^3\partial_z, \quad x^2yz\partial_z - y^3z\partial_z + x^2z^2\partial_z - y^3\partial_z - x^2y + y^3 - 2x^2z, \\
x^2z\partial_y - y^2z\partial_y + 3yz^2\partial_y - x^2z\partial_z + y^2z\partial_z + 3yz^2\partial_z + 9z^3\partial_z + y^2\partial_y + 6yz\partial_y + y^2\partial_z + 3yz\partial_z + 9z^2\partial_z \\
+x^2 - y^2 - 18z^2 - 3y - 18z\rangle
\end{gathered}
$$

Die Geisha $f = x^2yz + x^2z^2 - y^3z - y^3$



$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ann}_{D_3}\left(\frac{1}{\sqrt[67]{f^7}}\right) = \langle\, & x^2y\partial_y - y^3\partial_y + 2x^2z\partial_y - x^2z\partial_z + 3y^2z\partial_z + 3y^2\partial_z, \\
& 2xz\partial_x + 2yz\partial_y + 2z^2\partial_z - \tfrac{8\cdot 7}{67}z + x\partial_x + 2y\partial_y + 2z\partial_z - \tfrac{6\cdot 7}{67}, \\
& 2xy\partial_x + 3xz\partial_x + 2y^2\partial_y + 2yz\partial_y - \tfrac{6\cdot 7}{67}y - \tfrac{6\cdot 7}{67}z, \\
& x^2z\partial_x - 3y^2z\partial_x - 2xyz\partial_y - 2xz^2\partial_y - 3y^2\partial_x, \\
& x^2y\partial_x - y^3\partial_x + 2x^2z\partial_x - 2xyz\partial_z - 2xz^2\partial_z, \\
& 2xyz\partial_x + 6xz^2\partial_x + 2y^2z\partial_y + 2yz^2\partial_y - 6yz^2\partial_z - 6z^3\partial_z + 3xy\partial_x + 6xz\partial_x \\
& \quad -6yz\partial_z - 6z^2\partial_z, \\
& x^3\partial_x - xy^2\partial_x - 18xz^2\partial_x + 2x^2z\partial_y - 4y^2z\partial_y - 6yz^2\partial_y - 2x^2z\partial_z + 12yz^2\partial_z \\
& \quad +18z^3\partial_z - 3xy\partial_x - 18xz\partial_x + 12yz\partial_z + 18z^2\partial_z, \\
& x^3\partial_x - xy^2\partial_x + 6xyz\partial_x + x^2y\partial_y - y^3\partial_y + 6y^2z\partial_y + x^2z\partial_z - y^2z\partial_z + 6yz^2\partial_z \\
& \quad -\tfrac{4\cdot 7}{67}x^2 + \tfrac{4\cdot 7}{67}y^2 - \tfrac{24\cdot 7}{67}yz + 6xy\partial_x + 8y^2\partial_y - y^2\partial_z + 6yz\partial_z - \tfrac{24\cdot 7}{67}y, \\
& 2y^3z\partial_x + 6y^2z^2\partial_x + 2xy^2z\partial_y + 6xyz^2\partial_y + 4xz^3\partial_y - 2xyz^2\partial_z - 2xz^3\partial_z + 3y^3\partial_x \\
& \quad +6y^2z\partial_x \,\rangle
\end{aligned}
$$

Werbung

SINGULAR plural

http://www.singular.uni-kl.de

bfun.lib	dmodapp.lib
dmod.lib	dmodvar.lib

SINGULAR plural

http://www.singular.uni-kl.de

bfun.lib	dmodapp.lib
dmod.lib	dmodvar.lib

Vielen Dank!