1 Affine Spiegelungsgruppen

(1.1) Definition

(i) Zu $v \in V$ sei die Abbildung $t_v := t(v) : V \to V, w \mapsto w + v$ die *Translation* um v.

(ii) Für jede Wurzel $a \in \Phi$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $H_{a,k} := \{v \in V : (a, v) = k\}$. Offensichtlich gilt $H_{a,k} = H_{-a,-k}$ und $H_{a,0} = H_a$.

(iii) Wir definieren die zu $H_{a,k}$ gehörige Spiegelung durch

$$s_{a,k} : V \to V, v \mapsto v - ((v, a) - k)\check{a}.$$

(iv) Ab nun bezeichne $\mathcal{H}$ die Menge aller Hyperebenen $H_{a,k}$ für $a \in \Phi$ und $k \in \mathbb{Z}$ ◊

(1.2) Definition

Die *affine Weyl-Gruppe* W_a wird definiert als die Untergruppe der Aff(V), die von den affinen Spiegelungen $s_{a,k}$ erzeugt wird, für $a \in \Phi$ und $k \in \mathbb{Z}$.

(1.3) Proposition

W_a ist das semidirekte Produkt von W und der zu $L := L(\check{\Phi})$ korrespondierenden Translationsgruppe. ◊

(1.4) Bemerkung

Da auch die zu $\check{L} = \{v \in V : (v, a) \in \mathbb{Z}$ für alle $a \in \Phi\}$ korresponiderte Translationsgruppe normal in W ist, können wir auch hier das semidirekte Produkt mit W bilden, welches wir mit $\widehat{W_a}$ bezeichnen. Sie enthält W_a als Normalteiler von endlichem Index. ◊

2 Alkoven

(2.1) Definition

Um besser zu verstehen, wie die Gruppen W_a und $\widehat{W_a}$ auf den Hyperebenen $\mathcal{H}$ operieren, betrachten wir im Folgenden die Operation dieser Gruppen auf einer Menge $\mathcal{A}$ von Zusammenhangskomponenten von

$$V^o := V \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H.$$

◊

(2.2) Bemerkung

Damit können wir dann einen speziellen Alkoven auszeichnen, und zwar

$$A_o := \{v \in V : 0 < (a, v) < 1 \text{ für alle } a \in \Phi^+\}.$$

Alternativ könne wir auch

$$A_o = \{v \in V : 0 < (a, v) \text{ für alle } a \in \Delta, (v, \widetilde{a}) < 1\}.$$

schreiben. ◊

(2.3) Proposition

Die Gruppe W_a operiert transitiv auf der Menge aller Alkoven $\mathcal{A}$ und wird von der Menge S_a erzeugt. ◊

3 Längenfunktion und Hyperebenen

3.1 Die Längenfunktion

(3.1) Definition
Wir können die Abbildung $n : \widehat{W_a} \to \mathbb{N}, w \mapsto |L(w)|$ definieren, wobei

$$L(w) = \{H \in \mathcal{H} : H \text{ trennt } \mathcal{A}_o \text{ und } w\mathcal{A}_o\}$$

ist, für $w \in W_a$. $\Diamond$

3.2 Einfache Transitivität

(3.2) Satz

(i) Auf W_a stimmt die Abbildung n mit der Längenfunktion überein.

(ii) Die Gruppe W_a operiert regulär auf $\mathcal{A}$. $\Diamond$

4 Der Fundamentalbereich

(4.1) Satz
Der Abschluss $\overline{A_o}$ von A_o ist ein Fundamentalbereich für die Operation von W_a auf V. $\Diamond$

5 Eine Formel für die Ordnung von W

Als Hauptresultat dieses Vortrages wollen wir eine Formel für die Ordnung von W herleiten

(5.1) Definition und Bemerkung
Es sei $f := L/\widehat{L}$, wobei $L = (\check{\Phi})$ und $\widehat{L} = \widehat{L}(\check{\Phi})$ die Gitter vom Anfang des Vortrages sind. Dann nennt man f auch den *Zusammenhangsindex*.
Weiterhin ist bereits bekannt, dass wir die größte Wurzel $\tilde{a}$ als Linearkombination der positiven Wurzeln darstellen können, also existiert eine Folge $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$, so dass

$$\tilde{a} = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i,$$

wobei $\Delta = \{a_1, \ldots a_n\}$ ist. Die Folge $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ kann mit Mitteln aus früheren Vorträgen berechnet werden. $\Diamond$

(5.2) Satz
Falls W eine irreduzibele Weyl-Gruppe von Rang n ist, so ist

$$|W| = n! \cdot c_1 \cdots c_n \cdot f,$$

wobei f und die Folge $(c_i)_{1 \leq i \leq n}$ wie oben gewählt sind. $\Diamond$