Endliche Spiegelungsgruppen

Ausarbeitung zum Seminar zur Gruppentheorie, 16.11.2012

Nadine Friesen und Antje Tasche

In unserer Ausarbeitung beschäftigen wir uns damit, wie man endliche Spiegelungsgruppen charakterisieren kann. Als Grundlage hierzu dient das erste Kapitel des Buchs *Reflection groups and Coxeter groups* von James E. Humphreys.

§1 Wurzeln und Wurzelsysteme

Zunächst klären wir die grundlegenden Definitionen.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, der mit einem Skalarprodukt $(\ ,\ )$ versehen ist, also ein Euklidischer Vektorraum.

(1.1) Definition (Spiegelung)
Eine *Spiegelung* ist eine lineare Abbildung s_a auf V, die eine Hyperebene H_a punktweise fest lässt und einen Vektor $a \neq 0$, der orthogonal zu H_a steht, auf sein Negatives schickt. $\diamond$

Es gilt

$$s_a(\lambda) = \lambda - 2\frac{(\lambda, a)}{(a, a)}a$$

für alle $\lambda \in V$.

Spiegelungen sind orthogonale Abbildungen, das heißt, es gilt $(s_a(x), s_a(y)) = (x, y)$ für alle $x, y \in V$.

(1.2) Definition
Eine *endliche Spiegelungsgruppe* ist eine endliche Gruppe, die von Spiegelungen erzeugt wird. $\diamond$

Wir bezeichnen von nun an mit W eine endliche Spiegelungsgruppe, die auf V operiert. W ist damit eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $O(V)$. Jede Spiegelung s_a legt eine Hyperebene H_a und eine Gerade $L_a = \mathbb{R}a$, die orthogonal zu H_a ist, fest.

Das folgende Lemma zeigt, wie W auf der Menge dieser Geraden operiert.

(1.3) Lemma
Sei $t \in O(V)$ und $a \neq 0$ ein Vektor aus V. Dann gilt $ts_at^{-1} = s_{ta}$. Insbesondere gilt für $w \in W$, dass $s_{wa} \in W$, wenn $s_a \in W$. $\diamond$

Beweis
Es gilt $ts_at^{-1}(t(a)) = ts_a(a) = -t(a)$. Bleibt zu zeigen, dass ts_at^{-1} die Hyperebene H_{ta} punktweise fixiert. Es ist $\lambda \in H_a$ genau dann, wenn $t(\lambda) \in H_{ta}$, da $(\lambda, a) = (t(\lambda), t(a))$, weil $t \in O(V)$. Für $\lambda \in H_a$ gilt $ts_at^{-1}(t(\lambda)) = ts_a(\lambda) = t(\lambda)$. $\square$

Falls $s_a \in W$ gilt, permutiert W also die Geraden L_a, wobei $w(L_a) = L_{w(a)}$. Durch W werden zwar die Geraden L_a festgelegt, aber nicht die Vektoren a. Die Menge der Einheitsvektoren, die auf diesen Geraden liegen, ist hingegen stabil unter W.

(1.4) Definition
Eine endliche Menge Φ von Vektoren ungleich Null in V, die die Bedingungen

1. $\Phi \cap \mathbb{R}a = \{a, -a\}$ für alle $a \in \Phi$ und
2. $s_a(\Phi) = \Phi$ für alle $a \in \Phi$

erfüllt, nennt man *Wurzelsystem*. Die Elemente von Φ heißen *Wurzeln*. $\diamond$

Wir definieren W nun als die Gruppe, die von den Spiegelungen s_a, $a \in \Phi$, erzeugt wird. Dass es sich tatsächlich um eine endliche Gruppe handelt, zeigt folgendes Lemma.

(1.5) Lemma
Jede Gruppe W, die von einem Wurzelsystem Φ erzeugt wird, ist endlich. $\diamond$

Beweis
Wir betrachten den Homomorphismus $\vartheta : W \to Sym(\Phi), w \mapsto \sigma_w$, wobei $\sigma_w(a) := w(a)$ für alle $a \in \Phi$. $Sym(\Phi)$ bezeichne dabei die symmetrische Gruppe auf Φ. Es gilt $V = \langle\Phi\rangle \oplus \langle\Phi\rangle^\perp$ und $w(v) = v$ für alle $v \in \langle\Phi\rangle^\perp$. Da $\sigma_w(a) = w(a) = a$ für alle $a \in \Phi$ also ausschließlich für die Identität gelten kann, ist der Kern von ϑ trivial und ϑ somit injektiv. Weil $Sym(\Phi)$ endlich ist, ist damit auch die von Φ erzeugte Gruppe W endlich. $\square$

§ 2 Positive und einfache Systeme

Wir betrachten von nun an ein beliebiges, aber festes Wurzelsystem Φ.

Ein Wurzelsystem Φ legt die Gruppe W fest. Doch um Spiegelungsgruppen zu charakterisieren, eignen sich Wurzelsysteme nur bedingt, denn Φ kann (im Vergleich mit der Dimension von V) sehr groß werden. Daher suchen wir nach einer geeigneten linear unabhängigen Teilmenge von Φ.
Zunächst stellen wir jedoch fest, dass wir eine Partition von Φ in positive und negative Wurzeln vornehmen können, wobei wir „positiv" und „negativ" mit Hilfe einer Totalordnung festlegen.

(2.1) Definition
Wir bezeichnen mit dem Begriff *Totalordnung* auf V eine transitive Relation „$<$" auf V, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Für zwei Elemente $\lambda, \mu \in V$ gilt genau eine der drei Eigenschaften $\lambda < \mu$, $\lambda = \mu$ und $\lambda > \mu$.
2. Für alle $\lambda, \mu, \nu \in V$ gilt, falls $\mu < \nu$, dann ist $\lambda + \mu < \lambda + \nu$.
3. Für alle $\mu, \nu \in V$ mit $\mu < \nu$ und $c \neq 0 \in \mathbb{R}$ gilt, falls $c > 0$, dann ist $c\mu < c\nu$ und falls $c < 0$, dann ist $c\mu > c\nu$. $\diamond$

Wir bezeichnen die Elemente λ von V als *positiv*, wenn $\lambda > 0$ bezüglich einer zuvor festgelegten Totalordnung gilt.

(2.2) Definition
Ein *positives System* ist eine Teilmenge Π eines Wurzelsystems Φ, die alle (bezüglich einer Totalordnung auf V) positiven Wurzeln von Φ enthält.
Die Menge $-\Pi := \{-a \mid a \in \Pi\}$ bezeichnen wir als *negatives System*. $\diamond$

Da es sich bei Φ um eine endliche Menge handelt, ist die Existenz von positiven Systemen gesichert.

Es gilt $\Phi = \Pi \,\dot{\cup}\, -\Pi$, da die Wurzeln immer in Paaren von a und $-a$ auftreten.

(2.3) Definition
Eine Teilmenge Δ von Φ nennt man *einfaches System*, wenn Δ eine Basis für $\langle\Phi\rangle_{\mathbb{R}}$ in V ist und jedes $a \in \Phi$ sich als Linearkombination von Elementen aus Δ schreiben lässt, wobei alle Koeffizienten das gleiche Vorzeichen haben (alle nichtnegativ oder alle nichtpositiv). Die Elemente von Δ heißen *einfache Wurzeln*. $\diamond$

Wir werden nun zeigen, dass einfache Systeme tatsächlich existieren.

(2.4) Satz

1. Wenn Δ ein einfaches System in Φ ist, dann gibt es ein eindeutiges positives System, das Δ enthält.

2. Jedes positive System Π in Φ enthält ein eindeutiges einfaches System. Insbesondere existieren einfache Systeme. $\diamond$

Beweis

1. *Existenz:* Erweitert man die linear unabhängigen Elemente des einfachen Systems Δ zu einer geordneten Basis des Vektorraums V, dann sei Π die Menge der positiven Elemente von Φ in der entsprechenden lexikografischen Ordnung. Es gilt $\Delta \subseteq \Pi$ und Π ist ein positives System.
   Eindeutigkeit: Wir nehmen an, dass das einfache System Δ Teilmenge eines positiven Systems Π ist. Dann liegen alle Wurzeln, die nichtnegative Linearkombinationen von Δ sind, auch in Π. Ihr Negatives kann dagegen nicht in Π liegen. Damit kann Π eindeutig als die Menge dieser Wurzeln beschrieben werden.

2. *Existenz:* Wir wählen eine minimale Teilmenge Δ von Π unter der Bedingung, dass jede Wurzel aus Π eine nichtnegative Linearkombination von Δ ist. Da Π eine endliche Menge ist, existiert eine solche Teilmenge. Bleibt die lineare Unabhängigkeit von Δ zu zeigen. Dazu zeigen wir zunächst, dass gilt
   $$(a,b) \leqslant 0 \text{ für alle } a \neq b \in \Delta. \tag{1}$$
   Angenommen es existieren $a, b \in \Delta$ mit $a \neq b$, für die $(a,b) > 0$ ist. Dann gilt $s_a(b) = b - ca$ mit $c = 2\frac{(b,a)}{(a,a)} = 2\frac{(a,b)}{(a,a)} > 0$. Da $s_a(b) \in \Phi$, muss entweder $s_a(b)$ oder $-s_a(b)$ in Π liegen.
   Falls $s_a(b)$ in Π liegt, lässt es sich schreiben als $s_a(b) = \sum_\gamma c_\gamma \gamma$ mit $\gamma \in \Delta$ und $c_\gamma \geqslant 0$. Es gilt also $s_a(b) = b - ca = c_b b + \sum_{\gamma \neq b} c_\gamma \gamma$.
   Falls $c_b < 1$, erhalten wir damit $(1 - c_b)b = ca + \sum_{\gamma \neq b} c_\gamma \gamma$, also eine nichtnegative Linearkombination von $\Delta \setminus \{b\}$. Da $(1 - c_b) > 0$, kann b nicht in Δ liegen, da wir Δ als minimal vorausgesetzt haben.
   Falls $c_b \geq 1$, erhalten wir $0 = (c_b - 1)b + ca + \sum_{\gamma \neq b} c_\gamma \gamma$. Da $c > 0$, handelt es sich um eine nichtnegative Linearkombination mit mindestens einem strikt positiven Koeffizienten. Diese kann nicht Null werden.
   Also kann $s_a(b)$ nicht in Π liegen, sondern muss negativ sein. Dann lässt sich es sich schreiben als $s_a(b) = \sum_\gamma c_\gamma \gamma$ mit $\gamma \in \Delta$ und $c_\gamma \leq 0$. Wir können nun ähnlich argumentieren.
   Betrachten wir den Fall $c + c_a > 0$. Wir erhalten $s_a(b) = b - ca = c_a a + \sum_{\gamma \neq a} c_\gamma \gamma$

oder auch $-(c+c_a)a = \sum_{\gamma \neq a} c_\gamma \gamma - b$, also eine nichtpositive Linearkombination von $\Delta \setminus \{a\}$. Da $c + c_a > 0$, kann a nicht in unserem minimalen Δ liegen. Für den Fall $c + c_a \leq 0$ ergibt sich $0 = (c+c_a)a + \sum_{\gamma \neq a} c_\gamma \gamma - b$, eine nichtpositive Linearkombination mit mindestens einem strikt negativen Koeffizienten. Diese kann nicht Null werden.
Da $s_a(b)$ somit auch nicht negativ sein kann, muss die Aussage (1) wahr sein. Dies nutzen wir nun, um die lineare Unabhängigkeit von Δ zu zeigen.
Wäre Δ nicht linear unabhängig, dann gäbe es eine Linearkombination $\sum_{a \in \Delta} k_a a = 0$ mit nicht allen $k_a = 0$. Diese können wir umschreiben zu $\sum l_b b = \sum m_c c =: \sigma$, wobei die Summen über disjunkte Teilmengen von Δ laufen und strikt positive Koeffizienten haben. Es gilt also $\sigma > 0$. Außerdem gilt mit den Eigenschaften des Skalarproduktes

$$0 \leq (\sigma, \sigma) = (\sum l_b b, \sum m_c c).$$

Doch mit dem gerade Bewiesenen folgt auch $(\sum l_b b, \sum m_c c) \leq 0$, also $\sigma = 0$. Da wir auf einen Widerspruch stoßen, muss Δ also linear unabhängig sein.
Eindeutigkeit: Ein gegebenes positives System Π zu einer festgelegten Totalordnung auf V enthält also ein einfaches System Δ. Dann behaupten wir, dass

$$\Delta = \{a \in \Pi \mid a \text{ nicht Linearkombination mit strikt positiven Koeffizienten von zwei oder mehr Wurzeln aus } \Pi\}.$$

Denn sei $\delta \in \Delta$. Könnte man δ schreiben als $\delta = x_1 b_1 + x_2 b_2$ (betrachte ohne Einschränkung eine Linearkombination aus zwei Wurzeln) mit $x_1, x_2 > 0$ und $b_1, b_2 \in \Pi$, dann existieren nach der Definition von Δ Darstellungen $b_1 = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ und $b_2 = \sum_{l \in \Delta} k_l l$ mit $c_\gamma, k_l \geq 0$. Also gilt $\delta = x_1 \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma + x_2 \sum_{l \in \Delta} k_l l$. Da die Elemente von Δ linear unabhängig sind, können wir einen Koeffizientenvergleich vornehmen und erhalten, dass die Koeffizienten für alle $m \in \Delta \setminus \{\delta\}$ gleich Null sein müssen. Also kann δ nicht Linearkombination mit strikt positiven Koeffizienten von zwei oder mehr Wurzeln aus Π sein.
Sei umgekehrt x Element der Menge auf der rechten Seite der Gleichung. Dann gilt insbesondere $x \in \Pi$. Also finden wir wieder eine Darstellung $x = \sum_{\delta \in \Delta} c_\delta \delta$ mit $c_\delta \geq 0$. Aber die $\delta \in \Delta$, über die summiert wird, sind auch Elemente von Π. Nach der Bedingung, die an x gestellt ist, müssen dann $|\Delta| - 1$ Koeffizienten gleich Null sein. Also gilt $x = c_k k$ für ein festes $k \in \Delta$. Aber die einzigen Vielfachen von k in Φ sind definitionsgemäß $\pm k$. Da $x \in \Pi$, folgt $x = k$, also liegt x in Δ.
Die Menge der Wurzeln aus Π, die die Bedingung auf der rechten Seite erfüllen, ist eindeutig und damit auch das einfach System $\Delta \subseteq \Pi$. $\square$

Mit der Eindeutigkeit von Δ erhalten wir aus dem Beweis die folgende allgemeine Aussage.

(2.5) Korollar
Sei Δ ein einfaches System in Φ. Dann gilt $(a, b) \leqslant 0$ für alle $a \neq b \in \Delta$. $\diamond$

Die Anzahl der Elemente eines einfachen Systems entspricht nach der Defintion der Dimension des Erzeugnisses von Φ in V und ist daher eine Invariante von Φ.

(2.6) Definition
Die Kardinalität eines einfachen Systems Δ in Φ bezeichnet man als den *Rang* von W. $\diamond$

Nun wollen wir die eingeführten Begriffe an einem Beispiel verdeutlichen.

(2.7) Beispiel
Wir betrachten das Wurzelsystem

$$\Phi = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Es erzeugt die Diedergruppe D_4, wobei D_4 die Diedergruppe mit acht Elementen bezeichne.
Wir definieren als Totalordnung die lexikografische Ordnung, wobei gelten soll, dass

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist das positive System Π in Φ

$$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und das negative System $-\Pi$ in Φ

$$-\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir erhalten das einfache System $\Delta \subseteq \Pi$ wie im Beweis von Satz 2.4 als die Menge der $a \in \Pi$, die sich nicht als Linearkombination mit strikt positiven Koeffizienten von zwei oder mehr Wurzeln aus Π schreiben lassen, nämlich

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Der Rang der Diedergruppe D_4 beträgt also zwei. $\diamond$

§3 Zusammenhang von positiven/einfachen Systemen

Wir werden uns nun damit befassen, wie unterschiedliche positive beziehungsweise einfache Systeme zueinander in Verbindung stehen.

(3.1) Lemma
Sei Δ ein einfaches System und Teilmenge eines positiven Systems Π. Dann gilt, falls $a \in \Delta$, dass $s_a(\Pi \setminus \{a\}) = \Pi \setminus \{a\}$. $\diamond$

Beweis
Sei $b \in \Pi$ mit $b \neq a$. Dann kann man b schreiben als $b = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma$ mit allen Koeffizienten $c_\gamma \geq 0$. Da die einzigen Vielfachen von a in Φ die Wurzeln a und $-a$ sind, gibt es ein $\gamma \neq a \in \Delta$ für das $c_\gamma > 0$ gilt. Wendet man die Spiegelung s_a auf b an, ergibt sich $s_a(b) = b - 2\frac{(a,b)}{(a,a)}a = \sum_{\gamma \in \Delta} c_\gamma \gamma - 2\frac{(a,b)}{(a,a)}a$. Da $s_a(b)$ wieder eine Wurzel ist, ist es eine Linearkombination einfacher Wurzeln mit Koeffizienten gleichen Vorzeichens. Da $c_\gamma \geq 0$ für alle $\gamma \in \Delta$ gilt, muss $c_a - 2\frac{(a,b)}{(a,a)}$ ebenfalls nichtnegativ sein. Außerdem gibt es einen Koeffizienten c_γ mit $\gamma \neq a$ in der Linearkombination, der strikt positiv ist. Folglich ist $s_a(b) \in \Pi$. Es gilt $s_a(a) \neq a$, denn sonst würde $b = s_a(s_a(b)) = s_a(a) = -a$ gelten, aber b ist ein Element von Π. Also bildet s_a die Menge $\Pi \setminus \{a\}$ auf $\Pi \setminus \{a\}$ ab. $\square$

Für eine einfache Wurzel a gilt also, dass sie die einzige positive Wurzel ist, die unter s_a negativ wird.

(3.2) Satz
Für zwei positive Systeme Π und Π' von Φ gibt es ein $w \in W$ mit $w(\Pi) = \Pi'$. $\diamond$

Beweis
Seien Π und Π' positive Systeme. Wir führen eine Induktion über $r = |\Pi \cap -\Pi'|$ durch, um die Behauptung zu beweisen.
Induktionsanfang: Wenn $r = 0$ ist, dann muss $\Pi = \Pi'$ gelten, da sowohl Π als auch Π' genau die Hälfte der Wurzeln aus Φ enthält.
Sei nun $r > 0$. Dann kann das einfache System Δ von Π nicht komplett in Π' enthalten sein, denn angenommen es gilt $\Delta \subseteq \Pi'$, also $\Delta \subseteq (\Pi \cap \Pi')$. Sei $x \in \Pi \cap -\Pi'$. Da es in Π liegt, lässt es sich schreiben als $x = \sum_{\delta \in \Delta} c_\delta \delta$ mit Koeffizienten $c_\delta \geq 0$. Bezüglich der Totalordnung auf V, die zu Π' gehört, ist $x > 0$, da es eine positive Linearkombination positiver Wurzeln ist (da $\Delta \subseteq \Pi'$). Also kann x nicht in $-\Pi'$ liegen. Dann gilt jedoch $\Pi \cap -\Pi' = \emptyset$. Ein Widerspruch zu $r > 0$.
Wir können also ein $a \in \Delta$ finden, das auch Element von $-\Pi'$ ist. Nach Lemma 3.1

gilt $|s_a(\Pi) \cap -\Pi'| = |(\Pi \setminus \{a\} \cup \{-a\}) \cap -\Pi'| = |(\Pi \setminus \{a\}) \cap -\Pi'| = r - 1$. Wir können die Induktionsvoraussetzung anwenden, und erhalten, dass es für die positiven Systeme $s_a(\Pi)$ und Π' ein Element $w \in W$ mit $w(s_a(\Pi)) = \Pi'$. Da w und s_a in W liegen, gilt die Aussage auch für Π und Π'. □

(3.3) Folgerung
Für zwei einfache Systeme $\Delta \subseteq \Pi$ und $\Delta' \subseteq \Pi'$ von Φ gibt es ein $w \in W$ mit $w(\Delta) = \Delta'$. ◇

Beweis
Nach Satz 3.2 gibt es ein $w \in W$, mit $w(\Pi) = \Pi'$. Damit gilt für das positive System $w(\Delta)$, dass $w(\Delta) \subseteq \Pi'$. Nach Satz 2.4 (1) ist das positive System, das in Π' enthalten ist, eindeutig. Daher muss $w(\Delta) = \Delta'$ gelten. □

§ 4 Einfache Spiegelungen

Im Folgenden seien das einfache System Δ und das zugehörige positive System Π in Φ beliebig, aber fest gewählt. Die konkrete Wahl ist aufgrund von Satz 3.2 für die folgenden Aussagen auch unbedeutend. Wir werden nun zeigen, dass die Spiegelungsgruppe W von *einfachen Spiegelungen* erzeugt wird.

(4.1) Definition
Mit *einfachen Spiegelungen* bezeichnen wir die Spiegelungen s_a, für die gilt, dass a aus Δ ist. ◇

(4.2) Definition
Ein $b \in \Phi$ lässt sich eindeutig schreiben als $b = \sum_{a \in \Delta} c_a a$. Wir nennen $\sum c_a$ die *Höhe* von b (im Bezug zu Δ), kurz $ht(b)$. ◇

Für $b \in \Delta$ gilt natürlich $ht(b) = 1$.

(4.3) Satz
Für ein festes einfaches System Δ wird W von den einfachen Spiegelungen s_a, $a \in \Delta$, erzeugt. ◇

Beweis
Wir bezeichnen mit W' die Untergruppe von W, die durch diese einfachen Spiegelungen erzeugt wird. Es ist also zu zeigen, dass $W' = W$ gilt. Dies werden wir in drei Schritten tun.
Erster Schritt: Wir zeigen, dass $\Pi \subseteq W'(\Delta)$ gilt.

Sei $b \in \Pi$. Wir betrachten $W'(b) \cap \Pi$, wobei $W'(b)$ die Bahn von b unter W' ist. Die Menge ist nicht leer, da sie b enthält. Daher können wir ein Element γ aus $W'(b) \cap \Pi$ mit minimaler Höhe auswählen. Wir zeigen nun, dass $\gamma \in \Delta$ gilt.
Da $\gamma \in \Pi$ ist, lässt es sich schreiben als $\gamma = \sum_{a \in \Delta} c_a a$ und mit Hilfe der Eigenschaften des Skalarproduktes gilt $0 < (\gamma, \gamma) = \sum_{a \in \Delta} c_a(\gamma, a)$. Es muss also ein $a \in \Delta$ geben mit $(\gamma, a) > 0$.
Für den Fall, dass $\gamma = a$ gilt, liegt γ in Δ.
Falls $\gamma \neq a$, betrachten wir $s_a(\gamma)$. Nach Lemma 3.1 muss $s_a(\gamma)$ positiv sein. Außerdem gilt $s_a(\gamma) = \gamma - 2\frac{(\gamma,a)}{(a,a)}a$, wobei $2\frac{(\gamma,a)}{(a,a)} > 0$. Damit gilt $ht(s_a(\gamma)) < ht(\gamma)$. Aber $s_a(\gamma) \in W'(b)$, da $s_a \in W'$ und γ aus $W'(b) \cap \Pi$ stammt. Dann kann γ aber nicht das Element mit minimaler Höhe gewesen sein.
Also gilt $\gamma = a \in \Delta$. Da $\gamma \in W'(b) \cap \Pi$, gibt es ein $w' \in W'$ mit $w'(\gamma) = b$, also ist $b \in W'(\Delta)$.
Zweiter Schritt: Wir zeigen, dass auch $-\Pi \subseteq W'(\Delta)$ gilt und folgern insgesamt, dass $W'(\Delta) = \Phi$ ist.
Sei $b \in -\Pi$. Dann ist $-b \in \Pi$. Also gibt es nach dem ersten Schritt ein $w' \in W'$ und ein $a \in \Delta$ mit $w'(a) = -b$. Es gilt also $b = -w'(a) = w'(-a) = w'(s_a(a))$. Da w' und s_a aus W' sind, gilt also $b \in W'(\Delta)$.
Wir haben somit insgesamt gezeigt, dass $\Pi \cup -\Pi = \Phi \subseteq W'(\Delta)$ gilt. Die andere Teilmengenbeziehung folgt aus der Definition des Wurzelsystems Φ.
Dritter Schritt: Nun folgern wir, dass $W' = W$ gilt.
Sei s_b eine der Spiegelungen, die W erzeugen, also $b \in \Phi$. Da $W'(\Delta) = \Phi$, können wir b schreiben als $b = w'(a)$ für ein $w' \in W'$ und ein $a \in \Delta$. Nach Lemma 1.3 gilt damit $s_b = s_{w'(a)} = w' s_a w'^{-1}$. Also liegt s_b in W' und es gilt $W \subseteq W'$, also ist $W' = W$. □

Aus dem Beweis ergibt sich direkt das folgende Resultat.

(4.4) Korollar
Sei Δ ein beliebiges, aber festes einfaches System. Dann existiert für jedes $b \in \Phi$ ein $w \in W$ mit $w(b) \in \Delta$. ◇

§ 5 Längenfunktion

Wir wollen nun die Art und Weise, in der sich $w = s_1 * \cdots * s_r$ als Produkt von einfachen Spiegelungen mit $s_i = s_{a_i}$ für ein $a_i \in \Delta$ schreiben lässt, näher untersuchen und diesen Ausdruck so stark wie möglich vereinfachen.

(5.1) Definition
Die *Länge* l eines $w \in W$ sei das kleinste $r \in \mathbb{N}_0$, so dass eine Darstellung von w als Produkt von einfachen Spiegelungen $w = s_1 * \cdots * s_r$ existiert, für die $s_i = s_{a_i}$ für ein $a_i \in \Delta$ gilt. Wir nennen $s_1 * \cdots * s_r$ den reduzierten Ausdruck und setzen $l(1) := 0$.◇

(5.2) Lemma
Es gilt:

1. $l(w) = 1 \Leftrightarrow w = s_a, a \in \Delta$.
2. $l(w) = l(w^{-1})$.
3. $det(w) = (-1)^{l(w)}$.
4. $l(ww') \equiv (l(w) + l(w'))mod\ 2$. ◇

Beweis
1. trivial.
2. Wenn $w = s_1 * \cdots * s_r$, so ist $w^{-1} = s_r * \cdots * s_1$ und damit ist $l(w) = l(w^{-1})$.
3. Da jede Spiegelung die Determinante -1 hat, hat ein Produkt aus Spiegelungen die Determinante $(-1)^{l(w)}$. Daraus folgt, dass $l(w)$ genau dann gerade ist, wenn die Anzahl von Spiegelungen, deren Produkt w ist, gerade ist, selbst wenn der Ausdruck nicht reduziert ist. Hieraus folgt auch 4. . □

(5.3) Definition
Wir bezeichnen mit $n(w) := |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)|$ die Anzahl der positiven Wurzeln aus Π, die von w auf eine negative abgebildet werden. ◇

(5.4) Lemma
Es sei $a \in \Delta$ und $w \in W$

1. $n(w) = n(w^{-1})$.
2. $wa > 0 \Rightarrow n(ws_a) = n(w) + 1$.
3. $wa < 0 \Rightarrow n(ws_a) = n(w) - 1$.
4. $w^{-1}a > 0 \Rightarrow n(s_a w) = n(w) + 1$.
5. $w^{-1}a < 0 \Rightarrow n(s_a w) = n(w) - 1$. ◇

Beweis

1. folgt direkt aus der Definition und der Bijektivität von w $n(w^{-1}) = |\Pi \cap w(-\Pi)| = |w^{-1}(w(\Pi) \cap -\Pi)| = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)| = n(w)$.
2. Wenn $wa > 0$ ist, ist nach 3.1 $n(ws_a) = |\Pi \cap (ws_a)^{-1}(-\Pi)| = |\Pi \cap s_a(w)^{-1}(-\Pi)| =$

   $|(s_a(\Pi \cap s_a(w(-\Pi))) \dot\cup \{a\}| = n(w) + 1$.
3. Für $wa < 0$ folgt die Aussage mit der gleichen Argumentation wie oben.
4. , 5. sind Anwendungen von 1. beziehungsweise 2. auf $n(w^{-1}s_a) = n((s_a w)^{-1}) = n(s_a w)$ und $n(w) = w^{-1}$. □

(5.5) Korollar
Für alle $w \in W$ gilt $n(w) \leqslant l(w)$ ◇

Beweis
Da wir w aus $l(w)$ Spiegelungen zusammensetzen und $n(w)$ bei jedem Schritt maximal um 1 wachsen kann, gilt $n(w) \leqslant l(w)$.

§ 6 Auslass- und Austauschbedingung

Im Folgenden wollen wir untersuchen, wie wir ein Produkt aus einfachen Spiegelungen verkürzen können, falls es noch nicht reduziert ist.

(6.1) Satz
Es sei Δ ein beliebiges, aber festes einfaches System. Wir schreiben ein $w \in W$ als $w = s_1 * \cdots * s_r (s_i = s_{a_i}$ mit $a_i \in \Delta$, wobei Wiederholungen erlaubt sind). Angenommen, es gelte $n(w) < r$. Dann gibt es Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant n$, für die gilt:

1. $a_i = (s_{i+1} \dots s_{j-1})a_j$.
2. $s_{i+1}s_{i+2} \dots s_j = s_i s_{i+1} \dots s_{j-1}$.
3. (**Auslassbedingung**)$w = s_1 \dots \widetilde{s_i} \dots \widetilde{s_j} \dots s_r$, wobei die Tilden die Auslassung des jeweiligen Elements markieren. ◇

Beweis

1. Da $n(w) < r$ ist, erhalten wir durch wiederholte Anwendung von 5.4, dass für ein $j \leqslant r$ gilt $(s_1 \dots s_{j-1})a_j < 0$. Aber da $a_j \in \Delta \subset \Pi > 0$ ist, gibt es ein $i < j$, so dass $s_i(s_{i+1} \dots s_{j-1})a_j < 0$, aber $(s_{i+1} \dots s_{j-1})a_j > 0$ ist. Jetzt wenden wir 5.4 auf die einfache Spiegelung s_i an und erkennen, dass die positive Wurzel $(s_{i+1} \dots s_{j-1})a_j$, die durch Anwendung von s_i negativ wird, a_i sein muss.

2. Setzen wir $a := a_j$ und $w' := s_{i+1} \dots s_{j-1}$, so erhalten wir, dass nach 1. $w'a = a_i$ ist. Mit 1.3 ergibt sich, dass $w's_a w'^{-1} = s_{w'a} = s_{a_i} = s_i$, so dass wir
$$(s_{i+1} \dots s_{j-1})s_j(s_{j-1} \dots s_{i+1}) = s_i \tag{2}$$
erhalten. Durch Multiplikation mit $s_{i+1} \dots s_{j-1}$ erhalten wir
$$s_{i+1} \dots s_{j-1}s_j = s_i \dots s_{j-1}. \tag{3}$$

3. Aus 2. folgt, dass $s_{i+1} \dots s_{j-1} = s_i \dots s_{j-1}s_j$ ist und damit auch die Gleichheit $w = s_1 \dots \widetilde{s_i} \dots \widetilde{s_j} \dots s_r$. □

(6.2) Korollar
Für $w \in W$ gilt $n(w) = l(w)$. ◇

Beweis
"$\leqslant$"gilt nach 5.5. Bleibt "$\geqslant$" zu zeigen. Angenommen, es gelte $n(w) < l(w) = r$, $w = s_1 \dots s_r$ sei reduziert. Dann können wir nach 6.1 w als Produkt von $r-2$ Spiegelungen schreiben,was ein Widerspruch zur Minimalität von $l(w)$ ist. □

(6.3) Folgerung
(**Austauschbedingung**)Es sei $w = s_1 \dots s_r$ ein nicht unbedingt reduziertes Produkt aus einfachen Spieglungen. Genau dann wenn es eine einfache Spiegelung s_a gibt, so dass $l(ws_a) < l(w)$ ist, gibt es einen Index i mit $w = s_1 \dots \widetilde{s_i} \dots s_r s$. ◇

Beweis
Die Ungleichung $l(ws_a) < l(w)$ ist äquivalent zu $wa < 0$ und somit folgt mit dem obigen Satz die Aussage. □

§7 Regularität und das Element mit der maximalen Längenfunktion

In Paragraph 2 und 3 haben wir gesehen, dass W die Geraden L_a transitiv vertauscht. Aus dem letzten Kapitel folgt, dass es sich um reguläre Operationen handelt, was wir im folgenden Satz spezifizieren wollen.

(7.1) Satz
Es sei Δ ein beliebiges, aber festes einfaches System und Π das zugehörige positive System. Dann ist Folgendes äquivalent:

1. $w\Pi = \Pi$.
2. $w\Delta = \Delta$.
3. $n(w) = 0$.
4. $l(w) = 0$.
5. $w = 1$. ◇

Beweis
Wir zeigen die Äquivalenz durch einen Ringschluss. 3.⇒4., 4.⇒ 5., 5. ⇒ 2.,2⇒ 1. sind klar.
"1.⇒3."
Es sei $w\Pi = \Pi$ und somit auch $w^{-1}\Pi = \Pi$.

$$n(w) = |\Pi \cap w^{-1}(-\Pi)| \Rightarrow n(w) = |\Pi \cap -\Pi| = 0. \tag{4}$$

□

Nach der Definition eines positiven Systems ist $-\Pi$ genau dann ein positives System (bezüglich einer anderen Ordnung), wenn Π eines ist.

(7.2) Folgerung
Es existiert genau ein Element, so dass $w\Pi = -\Pi$ ist. Außerdem ist dessen Länge größer als die aller anderen Elemente aus W und es ist zu sich selbst invers. ◇

Beweis
Da jedes positive System als $w\Pi$ für ein festes positives System Π schreibbar ist, ist auch $-\Pi = w\Pi$ für ein $w_0 \in W$. Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der Bijektivität der $w \in W$. Aus $l(w_0) = n(w_0) = |\Pi \cap w_0^{-1}(-\Pi)| = |\Pi|$ erschließt sich die Maximalität von $l(w_0)$. Da $l(w_0) = l(w_0^{-1})$, es aber nur ein Element mit dieser Länge geben kann, muss $w_0 = w_0^{-1}$ sein.

Für dieses w_0 gilt als einziges Element auch, dass $l(w_0 s_a) < l(w)$ für alle $a \in \Delta$. Außerdem gilt $l(w_0 w) = l(w_0) - l(w)$ für alle $w \in W$.

(7.3) Beispiel
Für die Diedergruppe ist dieses längste Element beispielsweise

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

◇

§ 8 Erzeuger und Relationen

Jetzt wenden wir uns der Präsentation dieser Gruppen zu.

(8.1) Satz
Wir halten ein einfaches System Δ fest. Dann ist W erzeugt von $S := \{s_a | a \in \Delta\}$ und ist bestimmt durch die Relationen $(s_a s_b)^{ord(s_a s_b)} = 1$. ◇

Beweis
Wir werden den Beweis nicht über freie Gruppen, sondern etwas informeller führen, indem wir zeigen, dass alle Relation $s_1 \dots s_r = 1$ aus der obigen folgen.Da $det(s_i) = -1$, aber $det(1) = 1$, muss r gerade sein. Im Fall $r = 2$ folgt aus $s_1 s_2 = 1$, dass $s_1 = s_2^{-1} = s_2$ gelten muss und wir erhalten $s_1^2 = 1$, eine unserer bereits angegebenen Relationen. Also gelte die Behauptung für alle k mit $k < r$. Sei also $r = 2q$ mit $q > 2$. Formulieren wir die Gleichung

$$s_1 \dots s_r = 1 \tag{6}$$

um zu

$$s_{i+1} \dots s_r s_1 \dots s_i = 1, \tag{7}$$

so können wir von dort aus übergehen zu

$$s_1 \dots s_{q+1} = s_r \dots s_{q+2}. \tag{8}$$

Da die linke Seite der Gleichung aus 2 einfachen Spiegelungen mehr besteht, kann dieser Ausdruck nicht reduziert sein. Wenden wir jetzt die Auslassbedingung an, erhalten wir, dass es zwei Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant r$ gibt, so dass

$$s_{i+1} \dots s_j = s_i \dots s_{j-1} \;\Leftrightarrow\; s_i \dots s_{j-1} s_j \dots s_{i+1} = 1. \tag{9}$$

Falls diese Gleichung weniger als r einfache Spiegelungen beinhaltet, können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und sind fertig, da wir $s_{i+1} \dots s_j$ durch $s_i \dots s_{j-1}$

in der Ursprungsgleichung ersetzen können. Der einzige Fall, der sich so nicht erschließt, ist der, in dem wir immer noch r Spiegelungen haben, also $i = 1$ und $j = q + 1$ ist. Durch Einsetzen in Gleichung 9 erhalten wir:

$$s_2 \dots s_{q+1} = s_1 \dots s_q \tag{10}$$

Schreiben wir unsere Gleichung 6 als

$$s_2 \dots s_r s_1 = 1, \tag{11}$$

so können wir die obigen Schritte erfolgreich durchführen, außer es ist

$$s_3 \dots s_{q+2} = s_2 \dots s_{q+1}. \tag{12}$$

Falls 10 und 12 eintreten, sind wir fertig, sobald wir gezeigt haben, dass 12 aus den gegebenen Relationen folgt, denn dann können wir es in 6 ersetzen und die Induktionsvoraussetzung anwenden. 12 können wir umformen zu

$$s_3(s_2 s_3 \dots s_{q+1}) s_{q+2} s_{q+1} \dots s_4 = 1. \tag{13}$$

Da wir auf der linken Seite der Gleichung wiederum r Spiegelungen, haben können wir unsere obigen Schritte auf diese Gleichung anwenden, was wieder erfolgreich ist außer im Fall

$$s_2 \dots s_{q+1} = s_3 s_2 s_3 \dots s_q. \tag{14}$$

Jetzt folgt aber mit 10, dass $s_1 = s_3$ ist. Indem wir dieses Verfahren iterativ fortsetzen, erhalten wir, dass wir unsere Induktionsvoraussetzung immer anwenden können, außer wenn $s_1 = s_3 = \cdots = s_{r-1}$und $s_2 = s_4 = \cdots = s_r$ ist. Dann ist aber 6 von der Form $s_a s_b s_a \dots s_a s_b = 1$, was sich auf $(s_a s_b)^{ord(s_a s_b)} = 1$, eine unserer ursprünglichen Relationen, zurückführen lässt. □

Alle Gruppen, die eine solche Präsentation in Bezug auf eine erzeugende Menge S besitzen, heißen Coxetergruppen, wobei als Ordnung von $s_a s_b$ auch unendlich zugelassen ist.

§ 9 Parabolische Untergruppen und kleinste Restklassenvertreter

Wir wollen jetzt die Untergruppen W_I von W betrachten, die von einer Untermenge I von S, der Menge der einfachen Spiegelungen s_a mit $a \in \Delta$, erzeugt werden. Es sei $\Delta_I := \{a \in \Delta | s_a \in I\}$

(9.1) Definition
Die Untergruppen von W, die wir auf diese Weise angeben können, werden *parabolische Untergruppen* genannt. $\diamond$

Falls wir das einfache System Δ durch das einfache System $w\Delta$ ersetzen, erhalten wir wW_Iw^{-1} statt W_I, wobei die Konjugation direkt aus 1.3 folgt. Im folgenden möchten wir überprüfen, inwiefern W_I die in den vorherigen Abschnitten betrachteten Eigenschaften erfüllt.

(9.2) Definition
Wir definieren $W^I := \{w \in W | l(ws) < l(w) \text{für alle } s \in I\}$. $\diamond$

(9.3) Satz
Wir halten ein einfaches System Δ und die zugehörige Menge der Spiegelungen S fest. Ist $I \subset S$, so definieren wir Φ_I als Einschränkung von Φ auf V_I, wobei V_I, der von Δ_I aufgespannte Unterraum von V ist.

1. Φ_I ist ein Wurzelsystem in V(und damit auch in V_I) mit einfachem System Δ_I und zugehöriger Spiegelungsgruppe W_I.
2. Betrachten wir die Längenfunktion l_I in Relation zum einfachen System Δ_I der Spiegelungsgruppe W_I, so ist $l_I = l$ in W_I (mit l als der Längenfunktion von W).
3. Ist $w \in W$, so gibt es ein eindeutiges $u \in W_I$ und ein eindeutiges $v \in W^I$ mit $w = uv$ und es gilt $l(w) = l(u) + l(v)$, außerdem ist u das kleinste Element in der Restklasse wW_I. $\diamond$

Beweis
1. Es ist klar, dass Δ_I ein einfaches System ist und dass Φ_I die Bedingungen für Wurzelsysteme erfüllt. Außerdem stabilisiert W_I den Vektorraum V_I und ist damit die zugehörige Spiegelungsgruppe.
2. Es sind $l(w)$ und $l_I(w)$ für $w \in W_I$ die Anzahl der positiven Wurzeln, die von w auf eine negative abgebildet werden. Die positiven Wurzeln aus Δ_I sind natürlicherweise die Wurzeln aus $\Pi \cap \Phi_I$. Wir nehmen an, dass es ein $a \in \Pi \setminus \Phi_I$ gibt. Dann gibt es eine einfache Wurzel γ, so dass alle einfachen Spieglungen angewendet auf a immer noch γ mit einem positiven Koeffizienten beinhalten. Somit muss $s_b a > 0$ gelten. Also ist $wa > 0$ für alle $w \in W_I$. Daher stimmen die positiven Wurzeln aus Π undΦ_I^+, die von $w \in W_I$ auf ihr negatives geschickt werden, überein. Somit gilt $l(w) = l_I(w)$.

3. Für $w \in W$ wählen wir einen Restklassenvertreter $u \in wW_I$ mit kleinster Länge. Wir schreiben w als $w = uv$ mit $v \in W_I$. Da $us \in wW_I$ ist für alle $s \in I$, folgt, dass $u \in W^I$ ist. Schreiben wir $u = s_1 \ldots s_q$ und $v = s'_1 \ldots s'_r$ als reduzierten Ausdruck, wobei die s_i und s'_i mit 2. in I liegen, dann ist $l(w) \leqslant l(u) + l(v) = q + r$. Falls keine Gleichheit herrschte, könnten wir die Auslassbedingung anwenden und zwei Spiegelungen s_i, s'_j aus dem Produkt uv zu streichen ohne w zu ändern. Das wäre ein Widerspruch zur Minimalität von u. Da aber v reduziert ist, können auch nicht beide Spiegelungen aus v gestrichen werden. Also herrscht Gleichheit. Da wir an w keine weitere Bedingung gestellt haben, als dass es zur Restklasse wW_I gehört, haben wir gezeigt, dass alle w als uv geschrieben werden können. Gäbe es ein $u' \in W^I$ in wW_I, so hätten wir $u' = uv$ mit $l(v) = r > 0$, aber dann gilt $l(u's_r) < l(u')$, was $u' \in W^I$ widerspricht. W^I können wir die kleinsten Restklassenvertreter nennen.