

INVARIANTEN VON SPIEGELUNGSGRUPPEN (TEIL I)

Malte Milatz

Seminar im November 2012

Bezeichnungen.

- V endl.dim. Vektorraum über einem Körper K der Charakteristik 0
- G endliche Gruppe, die linear auf V operiert

$$\begin{array}{ccc} S = K[x_1, \dots, x_n] & & L = K(x_1, \dots, x_n) \\ | & & | \\ S^G & & L^G \\ | & & | \\ K & & K \end{array}$$

- $S = K[x_1, \dots, x_n]$ symmetrische Algebra (Polynomring), erzeugt von einer Basis $(x_1, \dots, x_n)$ des Dualraums V^* .
 G operiert auf S durch Fortsetzen der dualen Operation $\sigma \bullet f = f \circ \sigma^{-1}$.
Die Operation respektiert die Struktur der graduierten K -Algebra S .
- S^G **Invariantenring**
 $\approx$ „Funktionen, die konstant auf den Bahnen sind“
- L Quotientenkörper von S
Die Operation von G auf S setzt sich natürlich auf L fort.
- L^G Fixkörper; ist gleich dem Quotientenkörper von S^G
- $I = \{fg \mid f \in S, g \in S^G, g(0) = 0\}$ Ideal von S („Hilbert-Ideal“)
 $I = Sg_1 + \dots + Sg_r$ mit homogenen $g_i \in S^G$ (Hilbertscher Basissatz)

Man spricht von einer **Pseudospiegelungsgruppe**, wenn G von Pseudospiegelungen erzeugt ist; das sind solche Elementen, welche irgendeine Hyperebene fixieren. (Später sind $K = \mathbb{R}$, V euklidisch und G von Spiegelungen erzeugt.) Ist G eine Pseudospiegelungsgruppe, so gelten:

Satz von Chevalley. Die g_i sind algebraisch unabhängig, $r = \dim(V)$, und $S^G = K[g_1, \dots, g_r]$ (also endlich erzeugt und isomorph zu S).

Proposition („Ko-Invarianten“). S/I hat Dimension $|G|$. Weiterhin ist S frei über S^G vom Rang $|G|$.