

Algebraische Geometrie – Übung 1

Abgabe bis: entfällt, Besprechung am: Dienstag, 11.4.

1. Seien K ein Körper, m, n positive ganze Zahlen, $f_1, \dots, f_m \in K[x_1, \dots, x_n]$ und

$$f : K^n \rightarrow K^m, \quad a \mapsto f(a) := (f_1(a), \dots, f_m(a)).$$

Ist f Zariski-stetig?

Beschreiben Sie alle Zariski-offenen Teilmengen von K (was passiert, wenn K endlich ist?).

Sei K unendlich. Zeigen Sie: Für jedes $0 \neq f \in K[x_1, \dots, x_n]$ ist $K^n \setminus \mathcal{V}(f)$ unendlich, insbesondere ist $\mathcal{V}(f) \neq K^n$. Schließen Sie daraus: Je zwei nichtleere Zariski-offene Mengen haben nichtleeren Schnitt. (Also ist die Zariski-Topologie nicht Hausdorffsch.) Andererseits hat die Zariski-Topologie folgende schwächere Trennbarkeitseigenschaft: Zu $a \neq b \in K^n$ gibt es eine offene Menge U mit $a \in U$, aber $b \notin U$.

2. Stellen Sie $\mathcal{V}(f) \subset \mathbb{R}^2$ graphisch dar (mit Hilfe eines Programmpakets Ihrer Wahl):

(a) $f = x^4 - 50x^2 + 2x^2y^2 + 49 - 14y^2 + y^4$

(b) $f = (x^2 + y^2)^3 - x^2y^2$

(c) $f = x^2 + x^3 - y^2$

(d) $f = x^2(1 + x) - y^2(1 - x)$.

- (e) Geben Sie, wenn möglich, eine Parametrisierung an, d.h., eine (stetige/differenzierbare/glatte) Abbildung von einem Intervall in $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^2$, deren Bild gleich $\mathcal{V}(f)$ ist!

3. Die folgenden algebraischen Kurven sind durch Parameterdarstellungen gegeben. Dabei ist $t \in \mathbb{R}$ der Parameter (außer bei (b), wo man $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ betrachten kann), und $a, b > 0$ seien jeweils feste reelle Zahlen. Finden Sie eine implizite Darstellung¹:

(a) $x(t) = (\cos(t) + a) \cos(t), y(t) = (\cos(t) + a) \sin(t)$

(b) $x(t) = a + b \cos(t), y(t) = a \tan(t) + b \sin(t)$

(c) $x(t) = t^2 - a, y(t) = t(a - t^2)$

(d) $x(t) = \frac{a(t^2-1)}{t^2+1}, y(t) = \frac{at(t^2-1)}{t^2+1}$

(e) $x(t) = \frac{at^2}{t^2+1}, y(t) = \frac{at^3}{t^2+1}$.

¹durch "Probieren" oder Recherche zu den Begriffen Konchoide, Pascalsche Schnecke, Strophoide, Zissoide; systematisch: später

Algebraische Geometrie – Übung 2

Abgabe bis: Donnerstag, 13.4. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 18.4.

Sei K ein Körper, n eine positive ganze Zahl,

$$\mathcal{J}(V) := \{f \in K[x_1, \dots, x_n] \mid f(a) = 0 \ \forall a \in V\}$$

für $V \subseteq K^n$, und

$$\mathcal{V}(F) := \{a \in K^n \mid f(a) = 0 \ \forall f \in F\}$$

für $F \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$.

4. Zeigen Sie:

- (a) $\mathcal{J}(\emptyset) = \langle 1 \rangle$ und, falls $|K| = \infty$, $\mathcal{J}(K^n) = \langle 0 \rangle$
- (b) $\text{Rad}(\mathcal{J}(V)) = \mathcal{J}(V)$
- (c) $\mathcal{J}(V_1 \cup V_2) = \mathcal{J}(V_1) \cap \mathcal{J}(V_2)$.
- (d) $\mathcal{V}$ und $\mathcal{J}$ sind inklusionsumkehrend und für alle V, F gilt $V \subseteq \mathcal{V}\mathcal{J}(V)$,
 $F \subseteq \mathcal{J}\mathcal{V}(F)$.
- (e) $\mathcal{V} \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{V} = \mathcal{V}$ und $\mathcal{J} \circ \mathcal{V} \circ \mathcal{J} = \mathcal{J}$.

5. Seien V, W algebraische Mengen, und I, J Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$. Zeigen Sie:

- (a) $V \subseteq W \Leftrightarrow \mathcal{J}(V) \supseteq \mathcal{J}(W)$ und $V \subsetneq W \Leftrightarrow \mathcal{J}(V) \supsetneq \mathcal{J}(W)$
- (b) $\mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I \cdot J) = \mathcal{V}(I \cap J)$
- (c) $\mathcal{V}(I) \cap \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(I + J) = \mathcal{V}(I \cup J)$.

6. Seien I, J Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$ und

$$(I : J) := \{h \in K[x_1, \dots, x_n] \mid hg \in I \ \forall g \in J\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $I \subseteq (I : J) \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J))$.
- (b) Sind V, W algebraische Mengen, so gilt $(\mathcal{J}(V) : \mathcal{J}(W)) = \mathcal{J}(V \setminus W)$.

Algebraische Geometrie – Übung 3

Abgabe bis: Montag, 24.4. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 25.4.

7. Für $V \subseteq K^n$ bezeichne $\overline{V} = \mathcal{V}\mathcal{J}(V)$ den Zariski-Abschluss von V . Seien I, J Ideale in $K[x_1, \dots, x_n]$.

- (a) Schließen Sie aus Aufgabe 6a:

$$\mathcal{V}(I) \supseteq \mathcal{V}(I : J) \supseteq \overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)} \supseteq \mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J).$$

Sei insbesondere $J = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n \rangle$ für ein $a \in V := \mathcal{V}(I)$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: entweder $\overline{V \setminus \{a\}} = V$ oder $\overline{V \setminus \{a\}} = V \setminus \{a\}$. Geben Sie eine geometrische Interpretation der beiden Fälle an.

- (b) Ist K algebraisch abgeschlossen und I radikal, so gilt

$$\mathcal{V}(I : J) = \overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)}.$$

Überlegen Sie sich das auf zwei Arten: erstens durch direkten Nachweis der angesichts von 7a noch fehlenden Inklusion und zweitens, indem Sie $V = \mathcal{V}(I)$, $W = \mathcal{V}(J)$ in die Gleichung aus Aufgabe 6b einsetzen und dann zeigen, dass

$$(I : \text{Rad}(J)) \subseteq (I : J) \subseteq (\text{Rad}(I) : J) = (\text{Rad}(I) : \text{Rad}(J)). \quad (1)$$

- (c) Folgern Sie: Ist K algebraisch abgeschlossen (aber I nicht notwendigerweise radikal), so gilt

$$\mathcal{V}(I : J^\infty) = \overline{\mathcal{V}(I) \setminus \mathcal{V}(J)},$$

wobei

$$(I : J^\infty) = \{h \in K[x_1, \dots, x_n] \mid \exists l \in \mathbb{N} : hg \in I \ \forall g \in J^l\} = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (I : J^l)$$

die sogenannte *Saturierung* von I bezüglich J ist.

- (d) Berechnen Sie die Saturierung, alle in (1) auftauchenden Ideale und deren Radikale für

$$I = \langle xy^2, y^3z^2 \rangle, \quad J = \langle y^2 \rangle \subseteq K[x, y, z].$$

Hinweise: In 7c genügt es, $\text{Rad}(I : J^\infty) = (\text{Rad}(I) : J)$ zu zeigen. Da $K[x_1, \dots, x_n]$ Noethersch ist, ist J endlich erzeugt und

$$I \subseteq (I : J) \subseteq (I : J^2) \subseteq \dots \quad (2)$$

wird stationär, d.h., es existiert k mit $(I : J^\infty) = (I : J^k)$. Die erste Gleichheit in (2) liefert schon Stationarität. Ist $I \cap \langle g \rangle = \langle h_1g, \dots, h_mg \rangle$, so ist $I : \langle g \rangle = \langle h_1, \dots, h_m \rangle$.

Algebraic Geometry – Tutorial 4

To be handed in till: Friday, April 28 (noon), To be discussed on: Tuesday, May 2

8. Let $I \neq 0$ be an ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$. Prove that the following are equivalent:

(a) For each $1 \leq i \leq n$, there exists

$$0 \neq g_i \in I \cap K[x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n].$$

(b) I is not contained in any proper principal ideal of $K[x_1, \dots, x_n]$.

(c) Any finite set of non-zero generators of I consists of coprime polynomials.

(d) There exists a finite generating set of I that consists of non-zero coprime polynomials.

An algebraic set defined by a single, non-constant polynomial is called a *hypersurface*. If K is algebraically closed, then the four conditions from above are also equivalent to

(e) $\mathcal{V}(I)$ does not contain an algebraic hypersurface.

Useful background material (“divisibility theory reloaded”): $K[x_1, \dots, x_n]$ is a unique factorization domain, i.e., any $f \in K[x_1, \dots, x_n] \setminus K$ can be written as a product of prime polynomials. Thus, we have a well-defined concept of greatest common divisor (gcd). Two non-zero polynomials f, g are called coprime if $\gcd(f, g) = 1$, which is equivalent to $\langle f \rangle \cap \langle g \rangle = \langle fg \rangle$. A stronger coprimeness notion is obtained by requiring that $\langle f, g \rangle = K[x_1, \dots, x_n]$. This is sometimes called *zero coprimeness* (guess why!). For $n = 1$ (principal ideal domain), coprimeness and zero coprimeness are equivalent.

The ring $R := K(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)[x_i]$ is a localization of the polynomial ring, and therefore, coprime polynomials are still coprime when considered as elements of the principal ideal domain R .

9. Lagrange interpolation over the field with two elements: Let $K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Show that for any function $f : K^n \rightarrow K$, there exists a polynomial $p \in K[x_1, \dots, x_n]$ with $p(a) = f(a)$ for all $a \in K^n$.

Hint: It suffices to consider $p = \sum_{\nu \in \{0,1\}^n} p_\nu x^\nu$. This yields a system of 2^n linear equations for 2^n unknowns ...

Algebraische Geometrie – Übung 5

Abgabe bis: Montag, 8.5. (12 Uhr), Besprechung am: Mittwoch, 10.5.

10. (a) Sei $\leq$ eine zulässige Ordnung auf $\mathbb{N}^n$. Zeigen Sie, dass jede absteigende Kette $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots$ in $\mathbb{N}^n$ stationär werden muss (d.h., $\leq$ ist Artinsch). Folgern Sie, dass jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ ein kleinstes Element enthält (d.h., $\leq$ ist eine Wohlordnung).
- (b) Für jedes $\mu \in \mathbb{N}^n$ sei $f_\mu \in K[x_1, \dots, x_n]$ so, dass $\deg(f_\mu) = \mu$, wobei der Grad bezüglich einer zulässigen Ordnung definiert sei. Weisen Sie nach, dass $\{f_\mu \mid \mu \in \mathbb{N}^n\}$ eine K -Basis von $K[x_1, \dots, x_n]$ ist.
- (c) Sei $f \in \mathbb{Q}[x, x^{-1}]$, also $f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} c_i x^i$, wobei die Koeffizienten $c_i \in \mathbb{Q}$ fast alle Null sind. Der Grad von f sei bezüglich der natürlichen Ordnung von $\mathbb{Z}$ definiert. Zeigen Sie: Für $f_m := x^m + x^{-m^2}$, $m \in \mathbb{Z}$, gilt zwar $\deg(f_m) = m$, aber $\{f_m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ ist keine $\mathbb{Q}$ -Basis von $\mathbb{Q}[x, x^{-1}]$.
11. (a) Sei N eine Teilmenge von $\mathbb{N}^n$ mit der Eigenschaft

$$\nu \in N, \mu \in \mathbb{N}^n \quad \Rightarrow \quad \nu + \mu \in N.$$

Weisen Sie nach, dass die Menge $M := \min_{\text{cw}} N$ aller komponentenweise minimalen Elemente von N endlich ist, und dass $N = M + \mathbb{N}^n$ gilt.

- (b) Sei $0 \notin F$ eine endliche nichtleere Teilmenge von $K[x_1, \dots, x_n]$ und sei eine zulässige Ordnung auf $\mathbb{N}^n$ gegeben. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
- i. F ist Gröbner-Basis von $\langle F \rangle$.
 - ii. Für alle $\mu \in \min_{\text{cw}} \deg(\langle F \rangle)$ existiert $f \in F$ mit $\deg(f) = \mu$.

Algebraische Geometrie – Übung 6

Abgabe bis: Montag, 15.5. (12 Uhr), Besprechung am: Mittwoch, 17.5.

12. Mit $F, F', G \dots$ seien stets endliche, nichtleere Teilmengen von $K[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ bezeichnet.

(a) Sei $I \neq 0$ ein Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$. Zeigen Sie: Ist $F \subset I$ und $\deg(F) + \mathbb{N}^n = \deg(I)$, so folgt $I = \langle F \rangle$, und F ist dann eine Gröbner-Basis von I .

(b) Für jedes F existiert ein vereinfachtes F' mit $\langle F \rangle = \langle F' \rangle$.

Überlegen Sie sich das auf zwei Arten: Geben Sie erstens ein konstruktives Verfahren zur Vereinfachung an (dessen Terminieren wie üblich mit einem Noetherschen Argument begründet wird). Benutzen Sie zweitens, dass $I := \langle F \rangle$ eine Gröbner-Basis besitzt, und beweisen Sie folgende Aussage: Ist G eine GB von $I = \langle G \rangle$, und ist $g \in G$ so, dass $\deg(g) \in \deg(G \setminus \{g\}) + \mathbb{N}^n$, dann ist $G \setminus \{g\}$ immer noch eine GB von I .

(c) Zeigen Sie, dass F genau dann vereinfachte Gröbner-Basis von $\langle F \rangle$ ist, wenn

i. $\forall \mu \in M := \min_{\text{cw}} \deg(\langle F \rangle) \exists! f \in F: \deg(f) = \mu$, und

ii. $\deg(F) \subseteq M$.

(Das heißt: $\deg : F \rightarrow M, f \mapsto \deg(f)$ ist wohldefiniert und bijektiv.)

(d) Sei F eine Gröbner-Basis von $\langle F \rangle$. Alle Elemente von F seien normiert. Es gilt per Definition:

$$F \text{ vereinfacht} \iff \forall f \in F : \deg(f) \notin \deg(F \setminus \{f\}) + \mathbb{N}^n.$$

Zeigen Sie:

$$F \text{ reduziert} \iff \forall f \in F : f \in \bigoplus_{\mu \notin \deg(F \setminus \{f\}) + \mathbb{N}^n} Kx^\mu,$$

d.h., nicht nur der Grad von f , sondern jedes κ mit $c_\kappa \neq 0$ in $f = \sum c_\kappa x^\kappa$ erfüllt $\kappa \notin \deg(F \setminus \{f\}) + \mathbb{N}^n$.

13. Berechnen Sie die reduzierte Gröbner-Basis von $I = \langle x^3 + xy, x^2y - y^3 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y]$ bezüglich der lexikographischen Ordnung. Überprüfen Sie Ihr Resultat mit Hilfe der MAPLE-Befehle¹

```
> with(Groebner);
```

```
> F:={x^3+x*y, x^2*y-y^3};
```

```
> gbasis(F,plex(x,y));
```

(oder so ähnlich, je nachdem, welche Version Sie benutzen).

Berechnen Sie $V = \mathcal{V}(I)$ und $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[x, y]/I$. Wie würden Sie die "Vielfachheit" der Elemente von V definieren?

¹Natürlich können Sie auch gerne ein anderes Computeralgebrasystem verwenden, z.B. GAP.

Algebraische Geometrie – Übung 7

Abgabe bis: Montag, 22.5. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 23.5.

14. Sei K algebraisch abgeschlossen.

- (a) Sei I ein Ideal in $K[x_1, \dots, x_n]$ und $1 \leq j \leq n$. Mit $\pi : K^n \rightarrow K^{n-j+1}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_j, \dots, a_n)$ sei die Projektion auf die letzten $n - j + 1$ Komponenten bezeichnet. Zeigen Sie, dass (wir missbrauchen die Notation leicht, indem wir $\mathcal{V}$ sowohl bzgl. K^n als auch bzgl. K^{n-j+1} benutzen)

$$\pi(\mathcal{V}(I)) \subseteq \mathcal{V}(I \cap K[x_j, \dots, x_n])$$

und dass (wenn man $\mathcal{J}(V)$ für $V \subseteq K^{n-j+1}$ als Teilmenge von $K[x_j, \dots, x_n]$ auffasst)

$$\mathcal{J}(\pi(\mathcal{V}(I))) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{V}(I).$$

- (b) Folgern Sie, dass

$$\overline{\pi(\mathcal{V}(I))} = \mathcal{V}(I \cap K[x_j, \dots, x_n]),$$

wobei $\overline{V}$ der Zariski-Abschluss von V in K^{n-j+1} ist.

- (c) Seien $f_1, \dots, f_n \in K[t_1, \dots, t_m]$. Betrachten Sie $I = \langle x_1 - f_1, \dots, x_n - f_n \rangle \subseteq K[t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$. Schließen Sie aus dem vorigen Aufgabenteil, dass

$$\mathcal{V}(I \cap K[x_1, \dots, x_n]) = \overline{\text{im}(f)},$$

wobei $\overline{V}$ der Zariski-Abschluss von V in K^n ist, und $f : K^m \rightarrow K^n$ die durch $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ definierte Abbildung ist.

- (d) Seien $f_1 = t^2 - a$, $f_2 = t(a - t^2) \in K[t, a]$. Berechnen Sie $\overline{\text{im}(f)}$ und erklären Sie den Zusammenhang mit Aufgabe 3c.
- (e) Obwohl sich die oben entwickelte Theorie nicht direkt auf die anderen algebraischen Kurven aus Aufgabe 3 anwenden lässt, existieren dafür ähnliche Methoden: Man betrachtet z.B. $I = \langle x - (c + a)c, y - (c + a)s, c^2 + s^2 - 1 \rangle$ in $\mathbb{R}[c, s, a, x, y]$. Berechnen Sie (mit MAPLE o.ä.) eine Gröbner-Basis von $I \cap \mathbb{R}[a, x, y]$ und überzeugen Sie sich davon, dass sich das erwartete Resultat ergibt. Probieren Sie analoge Methoden für die verbleibenden algebraischen Kurven aus Aufgabe 3 aus.

15. Seien $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$ und $J = \langle g_1, \dots, g_l \rangle$ Ideale in $K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$. Sei

$$L := \langle tf_1, \dots, tf_k, (1 - t)g_1, \dots, (1 - t)g_l \rangle \subseteq K[x, t].$$

Zeigen Sie, dass $I \cap J = L \cap K[x]$. Beschreiben Sie ein Verfahren zur Berechnung eines Erzeugendensystems von $I \cap J$ aus den gegebenen Erzeugendensystemen von I und J .

Algebraische Geometrie – Übung 8

Abgabe bis: Montag, 29.5. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 30.5.

16. Sei R ein kommutativer Ring (nicht Null, mit Eins). Zeigen Sie:

- (a) Sind $I_1, \dots, I_k$ paarweise null-kopprime Ideale in R , d.h., gilt $I_i + I_j = R$ für alle $i \neq j$ (man nennt solche I_i auch *komaximal*), so folgt

$$I_1 \cdot \dots \cdot I_k = I_1 \cap \dots \cap I_k.$$

- (b) Wenn $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$ maximale Ideale in R sind, so gilt $\mathfrak{m}^d + \mathfrak{n}^d = R$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

17. Sei K algebraisch abgeschlossen und I ein null-dimensionales Ideal in $K[x] = K[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist $\mathcal{V}(I)$ endlich, und laut Beweis von Satz 1.15 gilt $|\mathcal{V}(I)| = \dim_K K[x]/\text{Rad}(I)$. Wir wissen aus Lemma 1.14, dass auch $\dim_K K[x]/I < \infty$, aber im Allgemeinen gilt nur $\dim_K K[x]/\text{Rad}(I) \leq \dim_K K[x]/I$. In Analogie zum Fall $n = 1$ liegt es nahe, $\dim_K K[x]/I$ als Anzahl der Nullstellen von I mit Vielfachheit gezählt zu interpretieren. Bleibt die Frage, wie sich diese Gesamtvielfachheit auf die einzelnen Nullstellen verteilt. Beweisen Sie dazu folgenden Satz: Es gilt

$$K[x]/I \cong \bigoplus_{a \in \mathcal{V}(I)} (K[x]/I)_{\mathfrak{m}_a},$$

wobei $\mathfrak{m}_a$ das zu $a \in K^n$ gehörende maximale Ideal ist, und $(K[x]/I)_{\mathfrak{m}_a} \cong K[x]_{\mathfrak{m}_a}/I_{\mathfrak{m}_a}$ die Lokalisierung von $K[x]/I$ an $\mathfrak{m}_a$ ist. Man definiert dann die Vielfachheit von a durch

$$\mu(a) := \dim_K (K[x]/I)_{\mathfrak{m}_a}.$$

Zum Beweis sei $\mathcal{V}(I) = \{a_1, \dots, a_k\}$ und $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_k$ seien die entsprechenden maximalen Ideale. Man betrachtet

$$\varphi : K[x] \rightarrow K[x]_{\mathfrak{m}_1}/I_{\mathfrak{m}_1} \times \dots \times K[x]_{\mathfrak{m}_k}/I_{\mathfrak{m}_k}, \quad r \mapsto ([\frac{r}{1}], \dots, [\frac{r}{1}]).$$

Es ist klar, dass $I \subseteq \ker(\varphi)$. Man muss also (i) die umgekehrte Inklusion und (ii) die Surjektivität von φ beweisen, dann liefert der Homomorphiesatz den Rest. Folgende Hilfsresultate (und obige Aufgabe) sollten dabei nützlich sein:

- (a) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap_{i=1}^k \mathfrak{m}_i^d \subseteq I$.
- (b) Laut Lagrange-Interpolation existieren $\varepsilon_i \in K[x]$ mit $\varepsilon_i(a_i) = 1$ und $\varepsilon_i(a_j) = 0$ für $i \neq j$. Sei $e_i := 1 - (1 - \varepsilon_i^d)^d$, wobei d wie in (a) sei. Modulo I gilt $\sum_{i=1}^k e_i \equiv 1$, $e_i e_j \equiv 0$ für $i \neq j$, und $e_i^2 \equiv e_i$. Außerdem ist $e_i - 1 \in I_{\mathfrak{m}_i}$ und $e_i \in I_{\mathfrak{m}_j}$ für $i \neq j$.
- (c) Ist $g \notin \mathfrak{m}_i$, so gibt es $h \in K[x]$ mit $hg \equiv e_i$ modulo I . (Hinweis: Mit $\tilde{g} := 1 - \frac{g}{g(a_i)}$ betrachte man $1 + \tilde{g} + \dots + \tilde{g}^{d-1}$.)

Algebraische Geometrie – Übung 9

Abgabe bis: Montag, 12.6. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 13.6.

18. Sei $f : V \rightarrow W$ ein Morphismus algebraischer Mengen und $\varphi := K[f]$ der davon induzierte K -Algebra-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(\mathcal{V}_W(F)) = \mathcal{V}_V(\varphi(F))$$

für $F \subseteq K[W]$.

19. Seien $f_1, \dots, f_n \in K[x_1, \dots, x_n]$. Dann ist $f : K^n \rightarrow K^n$, $a \mapsto (f_1(a), \dots, f_n(a))$ ein Morphismus algebraischer Mengen.

- (a) Zeigen Sie: f ist genau dann ein Isomorphismus algebraischer Mengen, wenn es $g_1, \dots, g_n \in K[y_1, \dots, y_n]$ gibt mit

$$\langle y_1 - f_1, \dots, y_n - f_n \rangle = \langle x_1 - g_1, \dots, x_n - g_n \rangle.$$

- (b) Wie kann man diese Bedingung mit Hilfe von GB überprüfen?

20. Gegeben sei das radikale Ideal

$$I = \langle xz - y^2, x - yz \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z].$$

Berechnen Sie die irreduziblen Komponenten von $V = \mathcal{V}(I)$. Ist V zusammenhängend?

Hinweis: Seien $p, q \notin I$ so, dass $pq \in I$. Laut KA gilt dann (da I radikal ist) $I = I_1 \cap I_2$ mit $I_1 := (I : p)$ und $I_2 := I + \langle p \rangle$.

Algebraische Geometrie – Übung 10

Abgabe bis: Montag, 19.6. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 20.6.

21. Sei R ein Ring und $\emptyset \neq P$ eine abgeschlossene Menge in $\text{Spec}(R)$, also $P = \mathcal{V}(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p}\}$ für ein Ideal I in R . Zeigen Sie, dass P genau dann irreduzibel ist, wenn $\mathcal{J}(P) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in P} \mathfrak{p}$ prim ist.
22. (a) Sei (M, A) eine algebraische Varietät und $U \subseteq M$ eine offene Menge. Sei I eine beliebige Menge und seien $U_i \subseteq M$, $i \in I$, spezielle offene Mengen mit

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Zeigen Sie: $\exists k \in \mathbb{N}$, $i_1, \dots, i_k \in I$: $U = \bigcup_{j=1}^k U_{i_j}$.

- (b) Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$, und $h \in K(M) = \text{Quot}(A)$. Zeigen Sie, dass

$$D(h) = \bigcup \{D(\frac{1}{g}) \mid 0 \neq g \in A, gh \in A\}$$

und schließen Sie aus (a): $\exists k \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_k \in A$, $g_1, \dots, g_k \in A \setminus \{0\}$ mit $h = \frac{f_1}{g_1} = \dots = \frac{f_k}{g_k}$ so dass $D(h) = \bigcup_{j=1}^k D(\frac{1}{g_j})$.

- (c) Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$, und $0 \neq g \in A$. Zeigen Sie:

$$A_g = \{h \in K(M) \mid M_g \subseteq D(h)\}.$$

23. Sei (M, A) eine algebraische Varietät, $U \subseteq M$ offen, $x \in U$, und $h : U \rightarrow K$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (a) $\exists f, g \in A$: $x \in D(\frac{1}{g}) \subseteq U$ und $h(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ für alle $y \in D(\frac{1}{g})$;
- (b) $\exists f, g \in A$: $\exists V$, offene Umgebung von x in $U \cap D(\frac{1}{g})$, mit $h(y) = \frac{f(y)}{g(y)}$ für alle $y \in V$.

Zeigen Sie außerdem: Wenn (a) für alle $x \in U$ erfüllt ist, dann folgt: $\exists k \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k \in A$: $U = \bigcup_{j=1}^k D(\frac{1}{g_j})$ und $h(y) = \frac{f_j(y)}{g_j(y)}$ für alle $y \in D(\frac{1}{g_j})$.

Algebraische Geometrie – Übung 11

Abgabe bis: Montag, 26.6. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 27.6.

24. (a) Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$, und $h \in K(M)$. Zeigen Sie: Ist A faktoriell, so ist $D(h)$ eine spezielle offene Menge.
- (b) Sei jetzt $A = \mathbb{C}[x, y, z]/\langle x^2 - yz \rangle$. Laut Vorlesung gibt es $h \in \text{Quot}(A)$, für das $D(h)$ keine spezielle offene Menge ist. Also kann A nicht faktoriell sein. Weisen Sie das auf folgendem alternativen Weg nach: Betrachten Sie $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow V = \mathcal{V}(x^2 - yz) \subseteq \mathbb{C}^3$, $(s, t) \mapsto (st, s^2, t^2)$. Zeigen Sie, dass f dominant ist. Daher ist $\varphi := \mathbb{C}[f]$ ein Monomorphismus. Bestimmen Sie damit die Einheiten von A und zeigen Sie, dass es irreduzible, aber nicht prime Elemente gibt.
25. (a) Sei (M, A) eine algebraische Varietät. Wir betrachten Paare (h, U) , wobei $U \subseteq M$ offen und dicht ist, und $h \in \mathcal{O}(U)$. Zeigen Sie, dass
- $$(h_1, U_1) \sim (h_2, U_2) \Leftrightarrow \exists W \subseteq U_1 \cap U_2, W \text{ offen und dicht in } M: h_1|_W = h_2|_W$$
- eine Äquivalenzrelation ist. Die Menge der Äquivalenzklassen $[(h, U)]$ wird mit $R(M)$ bezeichnet.
- (b) Zeigen Sie, dass

$$(h_1, U_1) \sim (h_2, U_2) \Leftrightarrow h_1|_{U_1 \cap U_2} = h_2|_{U_1 \cap U_2}.$$

Die interessante Richtung dieser Äquivalenz heißt *Identitätssatz*.

Hinweis: $U := U_1 \cap U_2$, $h := h_1 - h_2 \in \mathcal{O}(U)$. $\mathcal{N}(h) := \{x \in U \mid h(x) = 0\}$ ist abgeschlossen in U (zu jedem $x \in U \setminus \mathcal{N}(h)$ gibt es eine offene Umgebung von x in $U \setminus \mathcal{N}(h)$) und enthält eine in M dichte Teilmenge. Betrachten Sie die Abschlüsse in U : $\overline{V}^U = U \cap \overline{V}$ für $V \subseteq U$.

26. Sei (M, A) eine irreduzible algebraische Varietät, $M \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $K(M) \rightarrow R(M)$, die einem Repräsentanten $\frac{f}{g}$ ($f \in A, 0 \neq g \in A$) die Äquivalenzklasse $[(\frac{f}{g}, D(\frac{1}{g}))]$ zuordnet, wobei $\frac{f}{g}$ als Abbildung $D(\frac{1}{g}) \rightarrow K$ interpretiert wird, wohldefiniert und bijektiv ist.

Algebraische Geometrie – Übung 12

Abgabe bis: Montag, 3.7. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 4.7.

27. Seien $V \subseteq K^n$ und $W \subseteq K^m$ nichtleere irreduzible algebraische Mengen. Wir identifizieren $K(V) = R(V)$, $K(W) = R(W)$. Seien $h_1, \dots, h_m \in K(V)$ so, dass

$$h : D(h) \rightarrow W, \quad v \mapsto h(v) := (h_1(v), \dots, h_m(v))$$

wohldefiniert ist, d.h., $\text{im}(h) \subseteq W$. Dabei ist $D(h) := \bigcap_{i=1}^m D(h_i)$ offen und dicht in V . Wir nennen h dann eine rationale Abbildung von V nach W .

Die natürlich wirkende Definition

$$K(h) : K(W) \rightarrow K(V), \quad g \mapsto g \circ h$$

hat i.A. keinen Sinn, denn es kann passieren, dass $\text{im}(h) \cap D(g) = \emptyset$.

- (a) Geben Sie ein einfaches Beispiel an, in dem dieses Phänomen auftritt.
- (b) Zeigen Sie: Ist h dominant ($\overline{\text{im}(h)} = W$), so ist $K(h)$ wie oben wohldefiniert. Umgekehrt liefert jeder K -Algebren-Homomorphismus $\varphi : K(W) \rightarrow K(V)$ eine dominante rationale Abbildung h von V nach W mit $K(h) = \varphi$.
- (c) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:
 - i. Es gibt $h : D(h) \rightarrow W$ wie oben und analog $k : D(k) \rightarrow V$ so, dass $h \circ k$ und $k \circ h$ jeweils auf offenen dichten Teilmengen definiert sind und mit der Identität übereinstimmen.
 - ii. $K(W) \cong K(V)$.

Man sagt dann: V ist *birational äquivalent* zu W . Falls $W = K^m$, nennt man V eine *rationale Varietät* bzw. (falls $m = 1$) eine *rationale Kurve*.

- (d) Zeigen Sie, dass $V = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1) \subset \mathbb{C}^2$ eine rationale Kurve ist.
Hinweis: Stereographische Projektion.
Bemerkung: $\mathcal{V}(x^n + y^n - 1) \subset \mathbb{C}^2$ für $n \geq 3$ ist keine rationale Kurve.

28. Sei L ein Erweiterungskörper von K und E eine endliche Teilmenge von L . Zeigen Sie: E ist genau dann Transzendenzbasis von L über K , wenn L über $K(E)$ algebraisch ist, aber über keinem $K(E \setminus \{e\})$, $e \in E$.

Algebraische Geometrie – Übung 13

Abgabe bis: Montag, 10.7. (12 Uhr), Besprechung am: Dienstag, 11.7.

29. Beweisen Sie Satz 4.6 und Folgerung 4.7 der Vorlesung.
30. Sei $V = \mathcal{V}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1) \subset \mathbb{C}^3$ und $V_1 = V \cap \mathcal{V}(x_1 x_2 x_3)$. Wie sehen diese Objekte im Reellen aus? Bestimmen Sie einen endlichen Morphismus $f : V \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $f(V_1) = \mathbb{C} \times \{0\}$.

Bemerkung: Das Ideal

$$\langle x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1, x_1 x_2 x_3 \rangle$$

ist als Schnitt dreier Primideale schreibbar (welche sind das?) und daher radikal.