

Zur Darstellungstheorie der Schurschen Erweiterungen symmetrischer Gruppen

von
Felix Noeske

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
April 2002

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. G. Hiß

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	iii
1 Schursche Überlagerungen	1
1.1 Schursche zentrale Erweiterungen	1
1.2 Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen	3
2 Grundlagen aus der Darstellungstheorie	7
2.1 Idempotente und Zerlegungen	8
2.2 Projektive Moduln	9
2.3 p -modulare Systeme und Zerlegungsmatrizen	10
2.4 Brauercharaktere	12
2.5 Blöcke von Gruppenalgebren	14
2.6 Defektgruppen von Blöcken	17
2.7 Brauerkorrespondenz	18
2.8 Blöcke von zyklischem Defekt	19
3 Charaktertafeln	23
3.1 Bezeichnungen und Definitionen	23
3.2 Die Konjugiertenklassen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$	24
3.3 Die Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$	26
3.4 Morris' Rekursionsformel	28
3.5 Die Klassen und Charaktere von $\tilde{\mathcal{A}}_n$	33
3.6 Die Charaktere der isoklinen Gruppe $\hat{\mathcal{S}}_n$	35

3.7	Elementordnungen und Potenzabbildungen	40
3.8	Effiziente Berechnung der Charaktertafeln	45
4	Blöcke und lokale Analyse in ungerader Charakteristik	55
4.1	Blockzerlegung	55
4.2	Lokale Analyse	58
5	Brauerbäume von $\tilde{\mathcal{S}}_n$	65
5.1	Generische Beispiele	65
5.1.1	Der Fall $\tilde{\mathcal{S}}_p \bmod p$	65
5.1.2	Der Fall $\tilde{\mathcal{S}}_{p+1} \bmod p$	68
5.1.3	Der Fall $\tilde{\mathcal{S}}_{p+2} \bmod p$	71
5.2	Zur allgemeinen Struktur	74
5.2.1	Der Fall $\varepsilon(B) = 1$	76
5.2.2	Der Fall $\varepsilon(B) = -1$	80
5.2.3	Explizite Labellings	81
5.2.4	Die Bäume der isoklinen Gruppen	81
A	GAP –Routinen	83
A.1	Zum Erzeugen von Partitionen	83
A.2	Nützliches im Umgang mit Partitionen	85
A.3	Zur Berechnung einzelner Charaktere	87
A.4	Spinscheme und Co.	89
	Bibliographie	99

Vorwort

*Wenn der Bauer im Strudel mäht
und die Wolken schwer zu Tale hängen,
dann brauch auch Du nicht lang, Mariechen,
zu Deinem Pferdchen küssen.*

C. MORGENSTERN

Seit etwa 100 Jahren ist die Theorie der Überlagerungsgruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ der symmetrischen Gruppen \mathcal{S}_n Gegenstand aktiver Forschung. An ihrem Anfang stehen die grundlegenden Arbeiten von Schur (man vergleiche [26], [27] und [28]), in denen er die projektiven Darstellungen der symmetrischen Gruppen untersucht.

Während die Kombinatorik der symmetrischen Gruppen durch die Einführung von Young-Diagrammen handhabbar und ihre Darstellungstheorie weiterentwickelt wurde, erfährt die Theorie der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ erst 50 Jahre nach Schurs Arbeiten einen weiteren Entwicklungsschub. Morris liefert in seinen Arbeiten [20] und [21] kombinatorische Konzepte, die denen der symmetrischen Gruppen verwandt sind und Schurs komplizierteren Zugang über Q -Funktionen ablösen.

In der modularen Darstellungstheorie verhält es sich ähnlich: während man die p -Blockzerlegung der symmetrischen Gruppen nach dem Beweis von Nakayamas Vermutung seit 1947 schon lange kennt, ist das von Morris in [21] formulierte Analogon erst in [15] von Humphreys bewiesen worden. Seitdem wird verstärkt nach den Zerlegungsmatrizen der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ geforscht (man vergleiche z.B. [22] und [2]).

Die Frage nach den Zerlegungszahlen der Blöcke von zyklischem Defekt der Überlagerungsgruppen reiht sich folglich nahtlos in die aktuelle Forschung auf dem Gebiet dieser Gruppen ein. Doch sie ist nicht nur aus diesem Grund von Interesse.

Eine weitere Motivation ist die durch Feit aufgeworfene Frage, welche Bäume überhaupt nur als Brauerbäume von Blöcken mit zyklischem Defekt für endliche Gruppen auftreten können. Nach Theorem 1.1 in [9] sind alle Brauerbäume Entfaltungen von Brauerbäumen quasi-einfacher Gruppen. Mittels der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ist viel für diese Klasse von Gruppen bekannt. Eine der letzten verbleibenden Lücken ist der

Fall der Gruppen $\tilde{\mathcal{A}}_n$. Folglich ist es ein natürlicher Zugang, zunächst die Situation im Fall von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ zu untersuchen.

Gegenstand dieser Arbeit ist die Entwicklung effizienter Algorithmen, welche die Charaktertafeln der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ in GAP berechenbar machen. Darauf aufbauend sollen die Brauerbäume dieser Gruppen untersucht werden, um Informationen über ihre Struktur zu gewinnen.

Dazu werden im ersten Kapitel dieser Arbeit die Schurschen Überlagerungsgruppen der symmetrischen und alternierenden Gruppen vorgestellt.

Im zweiten Kapitel werden die für die Untersuchung der Überlagerungsgruppen benötigten darstellungstheoretischen Grundlagen mit besonderem Blick auf die zu bestimmenden Brauerbäume gelegt.

Kapitel 3 befaßt sich mit der gewöhnlichen Darstellungstheorie der Überlagerungsgruppen. Es werden die theoretischen Grundlagen für eine praktische GAP-Implementierung der Charaktertafeln dieser Gruppen vorgestellt. Der konkreten Implementation ist der sich daran anschließende Abschnitt gewidmet, in welchem effiziente Algorithmen zur Behandlung dieses Problems vorgestellt werden. Die genaue GAP-Implementation ist im Anhang dieser Arbeit zu finden.

In Kapitel 4 wird es noch einmal theoretisch. Hier wird ein wichtiges Konzept der p -modularen Darstellungstheorie der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ eingeführt, der \bar{p} -Kern. Mit dessen Hilfe wird die p -Blockzerlegung bestimmt und anschließend durch eine Betrachtung der Defektgruppen und ihrer Normalisatoren bzw. Zentralisatoren weitere Information über die p -Blöcke von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ gewonnen.

Im abschließenden Kapitel dieser Arbeit werden die Brauerbäume der Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen vorgestellt. Dabei werden zunächst einige generische Beispiele behandelt, mit deren Hilfe sich bereits viel Information über die Bäume gewinnen läßt. Im zweiten Teil wird die allgemeine Struktur der Bäume formuliert und bewiesen, sofern die Ergebnisse im Rahmen dieser Diplomarbeit ermittelt werden konnten.

Weiterführende Ergebnisse konnte Jürgen Müller auf Grundlage der vorliegenden Arbeit in [23] erzielen.

Das Thema dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Hiß. Ihm sei für die stets hilfsbereite Betreuung gedankt, die mir dennoch große Freiheit bei der Bearbeitung ließ. Mein besonderer Dank gilt Dr. Jürgen Müller, der immer Zeit fand, auf meine Fragen einzugehen, und durch viele Gespräche und Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit beitrug. Desweiteren gilt mein Dank den übrigen Mitarbeitern des Lehrstuhls für die angenehme Arbeitsatmosphäre. Hervorzuheben sind hierbei Max Neunhöffer, der sich als wahres GAP- und L^AT_EX-Kompandium erwies und stets großzügig seine Küche zum Backen von Strafkuchen zur Verfügung stellte, und Frank Himstedt, dessen Hilfsbereitschaft und aufmunternde Worte große Unterstützung leisteten.

Kapitel 1

Schursche Überlagerungen

In diesem Kapitel werden wir die Grundlagen für das Studium der sogenannten Schurschen Überlagerungen der symmetrischen Gruppen legen. Zunächst werden wir diese Art von Erweiterung allgemein durch Einführung der Schurschen zentralen Erweiterungen vorstellen und ihre Herkunft erläutern. Im darauf folgenden Abschnitt werden wir dann die Schurschen Erweiterungen für den speziellen Fall der symmetrischen Gruppen einführen, und ihre Überlagerungsgruppen, die in dieser Arbeit genauer betrachtet werden, definieren. Wir werden zunächst einige grundlegende Begriffe aus der gewöhnlichen Darstellungstheorie einführen, die eine Betrachtung der genannten Gruppen motivieren.

1.1 Schursche zentrale Erweiterungen

Es sei G eine endliche Gruppe, $K = \mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum.

1.1.1 Definition (Projektive Darstellung)

(a) Eine projektive Darstellung von G auf V ist eine Abbildung $\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{GL}(V)$, welche die Bedingungen erfüllt:

(i) $\mathfrak{X}(1_G) = \text{id}_V$,

(ii) Zu gegebenen $x, y \in G$ gibt es einen geeigneten Skalar $\alpha(x, y) \in K^*$ mit

$$\mathfrak{X}(x)\mathfrak{X}(y) = \alpha(x, y)\mathfrak{X}(xy).$$

(b) Zwei projektive Darstellungen \mathfrak{X}_1 und \mathfrak{X}_2 von G auf K -Vektorräumen V_1 bzw. V_2 heißen projektiv äquivalent, falls es einen Isomorphismus $\mu \in \text{Hom}_K(V_1, V_2)$ und eine Abbildung $\delta : G \rightarrow K^*$ gibt, so dass gilt:

$$\delta(x)\mu\mathfrak{X}_1(x)\mu^{-1} = \mathfrak{X}_2(x) \quad \text{für alle } x \in G.$$

1.1.2 Bemerkung

- (i) Eine projektive Darstellung \mathfrak{X} kann als ein Homomorphismus $\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{PGL}(V)$ aufgefasst werden.
- (ii) Die Abbildung $\alpha : G \times G \rightarrow K^*$ ist ein Faktorensystem, d.h. sie erfüllt die Gleichung

$$\alpha(x, y)\alpha(xy, z) = \alpha(x, yz)\alpha(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in G.$$

- (iii) Zwei Faktorensysteme α und β heißen äquivalent, falls es eine Abbildung $\delta : G \rightarrow K^*$ gibt mit

$$\delta(x)\delta(y)\alpha(x, y) = \delta(x, y)\beta(x, y)$$

für alle $x, y \in G$.

Die Äquivalenz projektiver Darstellungen induziert somit in natürlicher Weise eine Äquivalenz der zugehörigen Faktorensysteme und umgekehrt. Die Menge dieser Äquivalenzklassen ist von besonderer Bedeutung und erhält deshalb einen eigenen Namen.

1.1.3 Definition (Schurscher Multiplikator)

Die Menge der Äquivalenzklassen von Faktorensystemen bildet mit punktweiser Multiplikation eine endliche abelsche Gruppe (man vergleiche Proposition 11.38 in [7]). Diese wird mit $M(G)$ bezeichnet und heißt der Schursche Multiplikator von G .

Schur erkannte, dass sich projektive Darstellungen zu gewöhnlichen Darstellungen heben lassen, indem man die Gruppe G in folgendem Sinne geeignet vergrößert. Dazu betrachtet man eine zentrale Erweiterung (\tilde{G}, θ) von G , d.h. man betrachtet eine kurze exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\theta} G \longrightarrow 1 \quad (1.1)$$

wobei Z eine zentrale Untergruppe von \tilde{G} ist.

1.1.4 Definition (projektive Hebbarkeitseigenschaft)

Eine zentrale Erweiterung (\tilde{G}, θ) von G hat die projektive Hebbarkeitseigenschaft, wenn zu jedem Homomorphismus $\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{PGL}(V)$, wobei V ein endlich dimensionaler K -Vektorraum ist, ein Homomorphismus $\tilde{\mathfrak{X}} : \tilde{G} \rightarrow \text{GL}(V)$ existiert, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \tilde{G} & \xrightarrow{\theta} & G & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \tilde{\mathfrak{X}} & & \downarrow \mathfrak{X} & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \text{GL}(V) & \xrightarrow{\nu} & \text{PGL}(V) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Dabei sei ν der kanonische Epimorphismus.

Eine Gruppe kleinstmöglicher Ordnung, welche die projektive Hebbarkeitseigenschaft besitzt, wird gesondert ausgezeichnet und erhält einen eigenen Namen.

1.1.5 Definition (Darstellungsgruppe)

Eine Gruppe \tilde{G} einer zentralen Erweiterung kleinstmöglicher Ordnung von G , welche die projektive Hebbarkeitseigenschaft besitzt, nennt man eine Darstellungsgruppe von G .

Von besonderer Bedeutung in dieser Arbeit ist eine Klasse von zentralen Erweiterungen, die nicht zerfallen.

1.1.6 Definition (Schursche zentrale Erweiterung)

Unter einer Schurschen zentralen Erweiterung einer Gruppe G versteht man eine zentrale Erweiterung

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow \tilde{G} \xrightarrow{\theta} G \longrightarrow 1 \quad (1.2)$$

wobei die zentrale Untergruppe Z in \tilde{G}' enthalten ist.

Die Verbindung zwischen dem Schurschem Multiplikator einer Gruppe und ihrer Darstellungsgruppe liefert der folgende Satz.

1.1.7 Satz

Eine Schursche zentrale Erweiterung (\tilde{G}, θ) von G im Sinne von Definition 1.1.6 ist genau dann eine Darstellungsgruppe von G , wenn $Z \cong M(G)$ ist.

Beweis: Siehe Proposition 11.43 in [7]. ■

1.2 Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen

Im Folgenden wird die Frage nach den Darstellungsgruppen der symmetrischen Gruppen beantwortet. Dabei werden die Schurschen zentralen Erweiterungen aus dem vorangegangenen Abschnitt auf den Fall der symmetrischen Gruppen spezialisiert und der Multiplikator der symmetrischen Gruppen bestimmt. Darüber hinaus werden die sogenannten Überlagerungsgruppen der symmetrischen und alternierenden Gruppen eingeführt, die fast immer eine Darstellungsgruppe der jeweiligen überlagerten Gruppe bilden. Wir werden sehen, dass es für fast alle n genau zwei nicht isomorphe Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppe auf n Ziffern gibt, so dass abschließend noch auf die Unterschiede dieser beiden Gruppen eingegangen wird.

Eine umfassende und in sich geschlossene Arbeit, welche die Ergebnisse dieses Abschnitts erstmalig herleitet, ist [28]. Eine „modernere“ Fassung dieser Arbeit findet man in [14].

Für $n \in \mathbb{N}$ (in der vorliegenden Arbeit ist $0 \in \mathbb{N}$) bezeichne \mathcal{S}_n die symmetrische Gruppe auf der Menge $\{1, \dots, n\}$.

Ist $n = 0$ oder $n = 1$, so ist \mathcal{S}_n die triviale Gruppe. Für $n \geq 2$ ist \mathcal{S}_n endlich präsentierbar durch

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n \cong \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid & s_i^2 = 1, 1 \leq i \leq n-1, \\ & (s_i s_{i+1})^3 = 1, 1 \leq i \leq n-2, \\ & s_i s_j = s_j s_i, 1 \leq i < j \leq n-1, |i-j| > 1 \rangle \end{aligned} \quad (1.3)$$

wobei s_i auf die Transposition benachbarter Ziffern $(i, i+1)$ abgebildet wird.

Für die Definition der Schurschen Überlagerung von \mathcal{S}_n ist die Kenntnis des Schurschen Multiplikators von \mathcal{S}_n wesentlich:

1.2.1 Satz

Für den Schurschen Multiplikator $M(\mathcal{S}_n)$ der symmetrischen Gruppe \mathcal{S}_n gilt:

$$M(\mathcal{S}_n) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 3 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } n > 3 \end{cases}$$

Beweis: Siehe Abschnitt I.3 in [28]. ■

Damit kann man die Darstellungsgruppen von \mathcal{S}_n angeben:

1.2.2 Satz

Für $n \geq 4$ existieren zwei Darstellungsgruppen von \mathcal{S}_n , welche nur für $n = 6$ isomorph sind. Ihre Präsentationen lauten

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_n \cong \langle z, t_1, \dots, t_{n-1} \mid & z^2 = 1, t_i^2 = z, 1 \leq i \leq n-1, \\ & (t_i t_{i+1})^3 = z, 1 \leq i \leq n-2, \\ & t_i t_j = z t_j t_i, 1 \leq i < j \leq n-1, |i-j| > 1 \rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{S}}_n \cong \langle z, t_1, \dots, t_{n-1} \mid & z^2 = t_i^2 = (t_i z)^2 = 1, 1 \leq i \leq n-1, \\ & (t_i t_{i+1})^3 = 1, 1 \leq i \leq n-2, \\ & (t_i t_j)^2 = z, 1 \leq i < j \leq n-1, |i-j| > 1 \rangle \end{aligned} \quad (1.5)$$

Beweis: Aus den Präsentationen folgt unmittelbar, dass $Z := \langle z \rangle$ in beiden Fällen Untergruppe des Zentrums der jeweiligen Gruppe ist und dass die präsentierten Gruppen modulo Z isomorph zu \mathcal{S}_n sind. Ebenso sieht man anhand der letzten Relation, dass Z auch in der jeweiligen Kommutatorgruppe liegt. Damit ist nur zu zeigen, dass sie die richtige Ordnung besitzen, d.h. $|\tilde{\mathcal{S}}_n| = 2(n!) = |\hat{\mathcal{S}}_n|$. Dazu siehe Theorem 2.9 in [14] oder Abschnitt IV.21 in [28]. In beiden werden Matrixdarstellungen der Gruppen angegeben, bei denen 1 und z auf verschiedene Matrizen abgebildet werden. Dass $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ bis auf Isomorphie die einzigen Darstellungsgruppen von \mathcal{S}_n , $n \geq 4$, sind, folgt aus Abschnitt I.2 in [28]. Insbesondere findet sich in Abschnitt I.3 von [28] ein expliziter Isomorphismus, der zwischen $\tilde{\mathcal{S}}_6$ und $\hat{\mathcal{S}}_6$ besteht. Dass es im allgemeinen Fall keinen Isomorphismus zwischen den beiden Gruppen gibt, folgt aus Theorem 2.12 in [14]. ■

1.2.3 Definition

Für $n \geq 2$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{S}}_n$, bzw. $\hat{\mathcal{S}}_n$ diejenigen Gruppen, welche durch die Präsentationen (1.4), bzw. (1.5) definiert werden. Für $n = 0$ und $n = 1$ setzen wir $\tilde{\mathcal{S}}_n = \hat{\mathcal{S}}_n := \langle z \rangle$.

1.2.4 Bemerkung

Für die in Definition 1.2.3 gegebenen zentralen Erweiterungen $1 \rightarrow \langle z \rangle \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_n \xrightarrow{\theta} \mathcal{S}_n \rightarrow 1$, bzw. $1 \rightarrow \langle z \rangle \rightarrow \hat{\mathcal{S}}_n \xrightarrow{\theta} \mathcal{S}_n \rightarrow 1$ gilt $\theta : z \mapsto 1$ für $n \geq 0$. Ist $n \geq 2$, so gilt für θ zusätzlich $\theta : t_i \mapsto s_i$ für $1 \leq i \leq n - 1$.

Abschließend betrachten wir die Unterschiede der nichtisomorphen Darstellungsgruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$. Obwohl sie nicht isomorph sind, besitzen sie dennoch eine gewisse Ähnlichkeit, die als Isoklinie bezeichnet und im Folgenden genau definiert wird. Isoklinie kann als eine Verallgemeinerung des Isomorphiebegriffs aufgefasst werden.

1.2.5 Definition (Isoklinie)

Zwei zentrale Erweiterungen (\tilde{G}_1, π_1) und (\tilde{G}_2, π_2) heißen isoklin, falls Isomorphismen $\zeta : G_1 \rightarrow G_2$ und $\xi : \tilde{G}_1' \rightarrow \tilde{G}_2'$ existieren, so dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} G_1 \times G_1 & \xrightarrow{c_1} & \tilde{G}_1' \\ \zeta \times \zeta \downarrow & & \downarrow \xi \\ G_2 \times G_2 & \xrightarrow{c_2} & \tilde{G}_2' \end{array}$$

wobei $c_i : G_i \times G_i \rightarrow \tilde{G}_i'$, $(\pi_i(g), \pi_i(h)) \mapsto [g, h]$ für $g, h \in \tilde{G}_i$ und $i = 1, 2$.

Das Paar (ζ, ξ) heißt Isoklinismus von (\tilde{G}_1, π_1) nach (\tilde{G}_2, π_2) .

1.2.6 Satz

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ sind isoklin.

Beweis: Nach Korollar 2.4 in [5] sind Darstellungsgruppen stets isokline Gruppen. Damit sind nach Satz 1.2.2 die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ für $n \geq 4$ isoklin.

Es muss folglich die Isoklinie nur noch für $n \leq 3$ gezeigt werden. Da $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ für $n = 0$ und $n = 1$ isomorphe Gruppen sind, sind sie auch isoklin. Für $n = 2$ ist $\tilde{\mathcal{S}}_n$ zyklisch von Ordnung vier und $\hat{\mathcal{S}}_n$ isomorph zur Kleinschen Vierergruppe. Ihre Kommutatorgruppen sind folglich trivial und damit erfüllen beide Definition 1.2.5. Für $n = 3$ rechnet man nach, dass $\tilde{\mathcal{S}}_n' = \langle t_1 t_2 \rangle$ und $\hat{\mathcal{S}}_n' = \langle z t_1 t_2 \rangle$ gilt und somit beide zyklisch von Ordnung 6 sind. Wählt man für ζ in Definition 1.2.5 die Identität und für ξ den Isomorphismus, der obige Erzeuger der Kommutatorgruppen aufeinander abbildet, so sieht man, dass auch in diesem Fall $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ isokline Gruppen sind. ■

Da sich die Darstellungstheorie isokliner Gruppen nur in geringem Maße unterscheidet (man gedulde sich noch bis Abschnitt 3.6), werden in dieser Arbeit, Schur folgend, nur die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ aus Definition 1.2.3 betrachtet.

Wir legen nun fest, welche Gruppe als Überlagerungsgruppe der \mathcal{S}_n aufgefasst werden soll.

1.2.7 Definition (Schursche Überlagerung)

Im Rahmen dieser Arbeit wird mit einer Schurschen Überlagerung $\tilde{\mathcal{S}}_n$ von \mathcal{S}_n für $n \geq 2$ die in Satz 1.2.2 (1.4) endlich präsentierte Gruppe bezeichnet. Für $n \in \{0, 1\}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{S}}_n$ die entsprechende Gruppe aus Definition 1.2.3. Somit ist $\tilde{\mathcal{S}}_n$ eine Darstellungsgruppe von \mathcal{S}_n , wenn $n \geq 4$ ist.

Obwohl die Überlagerungsgruppen der alternierenden Gruppen \mathcal{A}_n nicht im Fokus dieser Arbeit stehen, schließt sich die Frage nach ihrer Gestalt in natürlicher Weise an die Betrachtung der Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen an. Der Vollständigkeit wegen sei deshalb an dieser Stelle Schurs Ergebnis bezüglich des Schurschen Multiplikators der alternierenden Gruppen genannt.

1.2.8 Satz

Für den Schurschen Multiplikator $M(\mathcal{A}_n)$ der alternierenden Gruppe \mathcal{A}_n gilt:

$$M(\mathcal{A}_n) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } n \leq 3 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{falls } n > 3 \text{ und } n \neq 6, 7 \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{falls } n = 6, 7 \end{cases}$$

Beweis: Siehe Abschnitt I.4 in [28]. ■

Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\tilde{\mathcal{A}}_n$ bzw. $\hat{\mathcal{A}}_n$ die Urbilder der alternierenden Gruppe \mathcal{A}_n unter dem Epimorphismus θ der jeweiligen kurzen exakten Sequenz aus Bemerkung 1.2.4.

Wir erhalten damit, dass $\tilde{\mathcal{A}}_n$ und $\hat{\mathcal{A}}_n$ für $n \leq 2$ jeweils von z erzeugt und damit eine zyklische Gruppe mit zwei Elementen ist. Für $n = 3$ erhalten wir, dass $\tilde{\mathcal{A}}_3 = \langle t_1 t_2 \rangle$ und $\hat{\mathcal{A}}_3 = \langle t_1 t_2 z \rangle$ ist und beide damit zyklisch von Ordnung 6 sind.

Ist $n \geq 4$, so ist $\tilde{\mathcal{A}}_n = \tilde{\mathcal{S}}'_n$ und $\hat{\mathcal{A}}_n = \hat{\mathcal{S}}'_n$. Wir zeigen die Gleichheit nur für $\tilde{\mathcal{S}}'_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$, da dieselbe Argumentation auch Gleichheit für die anderen beiden Gruppen liefert.

Ist $\tilde{g} \in \theta^{-1}(\mathcal{A}_n)$ und $\tilde{g} \notin \tilde{\mathcal{S}}'_n$, so ist auch $z\tilde{g} \notin \tilde{\mathcal{S}}'_n$, da für $n \geq 4$ das zentrale Element z in $\tilde{\mathcal{S}}'_n$ liegt (man vergleiche Satz 1.2.2). Damit erhalten wir den Widerspruch $\theta(\tilde{g}) \notin \theta(\tilde{\mathcal{S}}'_n) = \mathcal{A}_n$. Somit ist $\theta^{-1}(\mathcal{A}_n) \subseteq \tilde{\mathcal{S}}'_n$ und die Gleichheit folgt, da \mathcal{A}_n ein epimorphes Bild von $\tilde{\mathcal{S}}'_n$ unter θ ist.

Aus der Isomorphie von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ und $\hat{\mathcal{A}}_n$ für $0 \leq n \leq 3$ und der Isoklinie von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ für $n \geq 4$ folgt damit, dass $\tilde{\mathcal{A}}_n$ isomorph zu $\hat{\mathcal{A}}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Demgemäß ist folgende Definition keine Einschränkung.

1.2.9 Definition

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\tilde{\mathcal{A}}_n$ eine Schursche Überlagerung von \mathcal{A}_n . Für n größer als 3 und ungleich 6 oder 7, ist sie gemäß Satz 1.2.8 eine Darstellungsgruppe von \mathcal{A}_n .

Kapitel 2

Grundlagen aus der Darstellungstheorie

Die Aufgabe dieses Kapitels ist es, einige Grundlagen aus der Darstellungstheorie bereitzustellen. Es werden Konzepte, Begriffe und Sätze vorgestellt, die in dieser Arbeit gebraucht werden.

Im ersten Abschnitt werden Zerlegungen von Ringen mit Hilfe von Idempotenten beschrieben. Da projektive Moduln eine prominente Rolle in der zukünftigen Untersuchung der modularen Theorie der \tilde{S}_n spielen werden, schließt sich daran eine Vorstellung dieser Moduln an. Danach werden weitere wichtige Begriffe der modularen Darstellungstheorie eingeführt, und zwar p -modulare Systeme, Brauer-Charaktere und Zerlegungszahlen.

In den daran anschließenden Abschnitten wird der Begriff der Zerlegung aus dem ersten Abschnitt wieder aufgegriffen und Blockzerlegung eines Gruppenringes eingeführt. Darauf aufbauend wird in den letzten Abschnitten auf Defektgruppen und die Brauerkorrespondenz eingegangen, um die Grundlage für die lokale Analyse der Überlagerungsgruppen von \tilde{S}_n zu liefern. Den Abschluß dieses Kapitels bildet ein Abschnitt, in dem wir uns der Theorie der Blöcke von zyklischem Defekt widmen, um die Grundlagen der Brauerbäume einzuführen.

Diese Einleitung abschließend wollen wir noch festhalten, dass alle in diesem Kapitel betrachteten Moduln als endlich erzeugt angenommen werden. An Stellen, wo dies nicht der Fall ist, wird diese Ausnahme ausdrücklich angegeben.

2.1 Idempotente und Zerlegungen

In diesem Abschnitt werden einige Grundlagen aus der Ringtheorie vorgestellt. Es sei A ein Ring mit 1.

2.1.1 Definition (Idempotent)

- (a) $e \in A$ heißt Idempotent, falls $e \neq 0$ und $e^2 = e$ ist.
- (b) Zwei Idempotente e_1, e_2 heißen orthogonal, falls $e_1e_2 = 0 = e_2e_1$ ist.
- (c) Ein Idempotent e heißt primitiv, falls e nicht Summe zweier orthogonaler Idempotente ist.

Mit Hilfe von Idempotenten kann man Zerlegungen von Ringen in Linksideale und zweiseitige Ideale beschreiben. Man kann einerseits von speziellen Idempotenten zu Zerlegungen gelangen. Andererseits gehören zu bestimmten Zerlegungen gewisse Mengen von Idempotenten. Die folgenden zwei Sätze geben den genauen Zusammenhang an (vergleiche Kapitel 1, Abschnitt 7 in [8]).

2.1.2 Satz

Es seien $e_1, \dots, e_n \in A$ paarweise orthogonale Idempotente mit

$$1 = e_1 + \dots + e_n. \quad (2.1)$$

Dann zerfällt A in eine direkte Summe von Linksidealen

$$A = Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_n. \quad (2.2)$$

Sind die Idempotente e_1, \dots, e_n primitiv, so sind die Linksideale Ae_i für $i = 1, \dots, n$ unzerlegbar. Handelt es sich um zentrale Idempotente, so sind die Linksideale in 2.2 zweiseitige Ideale. Sind die Idempotente sogar zentral-primitiv, d.h. primitiv als Idempotente von $Z(A)$, so sind die betrachteten Linksideale unzerlegbar als zweiseitige Ideale.

2.1.3 Satz

Besitzt ein Ring A eine Zerlegung

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n \quad (2.3)$$

in Linksideale mit $A_i \neq (0)$ für $i = 1, \dots, n$, so besitzt die 1 aus A eine eindeutige Zerlegung

$$1 = e_1 + \dots + e_n, \quad (2.4)$$

mit $e_i \in A_i$ für $i = 1, \dots, n$, wobei e_1, \dots, e_n paarweise orthogonale Idempotente sind. Sind die auftretenden Linksideale unzerlegbare Linksideale bzw. zweiseitige Ideale bzw. zweiseitige Ideale, die als zweiseitige Ideale unzerlegbar sind, so sind die Idempotente e_i für $i = 1, \dots, n$ sogar primitiv bzw. zentral bzw. zentral-primitiv.

2.2 Projektive Moduln

Ein wichtige Klasse von Moduln in der Darstellungstheorie sind die sogenannten projektiven Moduln. Im Folgenden wird der Begriff der Projektivität eines Moduls eingeführt.

Es sei A stets ein Ring (mit 1).

2.2.1 Definition

Ein A -Modul P heißt projektiv genau dann, wenn er direkter Summand eines freien A -Moduls ist.

Eine weitere Charakterisierung der Projektivität eines A -Moduls ist oft hilfreich.

2.2.2 Bemerkung

Es sei P ein A -Modul. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) P ist projektiv.
- (ii) Zu beliebigen A -Moduln X und Y , zu jedem surjektiven g aus $\text{Hom}_A(X, Y)$ und zu jedem f aus $\text{Hom}_A(P, Y)$ gibt es ein h aus $\text{Hom}_A(P, X)$ mit $f = g \circ h$, d.h. das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P \\
 & \nearrow h & \downarrow f \\
 X & \xrightarrow{g} & Y
 \end{array}$$

Beweis: Vergleiche Proposition 2.22 in [7]. ■

Unter den projektiven Moduln bedürfen die unzerlegbaren besonderer Beachtung.

2.2.3 Definition

Ein unzerlegbarer projektiver A -Modul heißt PIM.

2.2.4 Bemerkung

Erfüllt A die Krull-Schmidt-Eigenschaft, so gilt: Ist P ein PIM, dann ist $P \cong Ae$ für ein primitives Idempotent $e \in A$.

Beweis: Folgt aus Satz 2.1.3. ■

2.2.5 Satz

Es sei k ein Körper und A eine endlich dimensionale k -Algebra. Dann existiert eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von PIMs und den Isomorphieklassen einfacher A -Moduln gegeben durch $P \mapsto P/\text{rad}(P)$.

Insbesondere gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache A -Moduln.

Beweis: Siehe Theorem I.13.7 in [8]. ■

2.3 p -modulare Systeme und Zerlegungsmatrizen

Die modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen stellt einen Zusammenhang her zwischen den Darstellungen einer endlichen Gruppe über einem Körper der Charakteristik 0 und Darstellungen über Körpern von Primzahlcharakteristik. Diese Verbindung beruht unter anderem auf dem Begriff des „ p -modularen Systems“ und kann in einer sogenannten „Zerlegungsmatrix“ dargestellt werden. Beide Begriffe wollen wir in diesem Abschnitt einführen.

2.3.1 Definition (p -modulares System)

Es sei p eine Primzahl. Ein p -modulares System ist ein Tripel (K, R, k) mit:

- (i) R ist vollständiger diskreter Bewertungsring mit Bewertung ν_p und Jacobson-Radikal $J(R) = \pi R$, wobei π das bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmte Primelement in R ist.
- (ii) K ist ein Körper der Charakteristik 0, der Quotientenkörper von R .
- (iii) $k := R/J(R)$ ist der zu R gehörige Restklassenkörper der Charakteristik p .

2.3.2 Bemerkung

Es sei (K, R, k) ein p -modulares System. Die zu K gehörige Bewertung ν_p sei stets so normiert, dass $\nu_p(p) = 1$ ist. Man gehe sonst zu $\frac{1}{e}\nu_p$ über, wenn $p = u \cdot \pi^e$ mit $u \in R^*$ und $e \in \mathbb{Z}$ ist.

2.3.3 Beispiel

Es seien \mathbb{Q}_p der Körper der p -adischen Zahlen mit der p -adischen Bewertung, \mathbb{Z}_p der Ring der p -adischen Zahlen und \mathbb{F}_p der Körper mit p Elementen. Dann ist $(\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_p)$ ein p -modulares System.

Im Zusammenhang mit einem p -modularen System (K, R, k) führen wir folgende **Bezeichnungen** ein, die auch in späteren Abschnitten verwendet werden:

Es sei A eine R -Algebra, die endlich erzeugt und frei als R -Modul ist, und X ein A -Gitter. Mit KX werde die Konstantenerweiterung von X , d.h. $KX := K \otimes_R X$, bezeichnet.

In analoger Weise bezeichne KA die K -Algebra $K \otimes_R A$.

Mit $\bar{A} := A/\pi A$ und $\bar{X} := X/\pi X$ wird die jeweilige Reduktion modulo π bezeichnet. Damit ist \bar{A} eine k -Algebra.

A -Gitter, die eine Verbindung zwischen KA -Moduln und kA -Moduln herstellen, sind wegen dieser Eigenschaft von besonderer Bedeutung. Sie werden **Formen** genannt.

2.3.4 Definition (Form)

Sei V ein KA -Modul. Ein A -Gitter X heißt R -Form von V , wenn gilt: $KX \cong V$ als KA -Moduln.

2.3.5 Lemma

Es sei V ein KA -Modul. Dann existiert eine R -Form von V . Ist X eine R -Form von V , dann ist $\text{rk}_R(X) = \dim_K(V)$.

Beweis: Es sei v_1, \dots, v_n eine K -Basis von V und a_1, \dots, a_m eine R -Basis von A . Weiter sei $X \subseteq V$ der A -Modul, welcher von $\{a_i v_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ über R aufgespannt wird, d.h. $X = \langle \{a_i v_j \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\} \rangle_R$. Dann ist X endlich erzeugt und torsionsfrei als R -Modul, also ein A -Gitter und es gilt $V = KX \cong K \otimes_R X$.

Ist X ein A -Gitter, dann gilt: $\text{rk}_R(X) = \dim_K(K \otimes_R X)$, woraus die zweite Behauptung folgt. ■

Eine wichtige Eigenschaft der Formen ist die folgende:

2.3.6 Satz

Sei V ein KA -Modul, X und Y seien R -Formen von V .

Dann haben \overline{X} und \overline{Y} die gleichen Kompositionsfaktoren als \overline{A} -Moduln mit Vielfachheiten.

Beweis: Siehe Theorem I.17.7 in [8]. ■

Die Eigenschaft von R -Formen bei p -modularer Reduktion die gleichen Kompositionsfaktoren zu haben, führt zu folgender Definition:

2.3.7 Definition (Zerlegungsmatrix)

Es sei (K, R, k) ein p -modulares System und A eine endlich erzeugte R -freie R -Algebra, so dass KA halbeinfach ist. Seien V_1, \dots, V_n Repräsentanten der einfachen KA -Moduln und X_1, \dots, X_n beliebige zugehörige R -Formen. Weiter seien M_1, \dots, M_l Repräsentanten der einfachen \overline{A} -Moduln. Man definiert d_{ij} als die Vielfachheit von M_j als Kompositionsfaktor in \overline{X}_i . Die zugehörige Matrix $D := (d_{ij})$ für $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l$, heißt die Zerlegungsmatrix von A .

Es existiert eine Bijektion zwischen den Isomorphietypen endlich erzeugter projektiver A -Moduln und ebensolcher \overline{A} -Moduln.

2.3.8 Bemerkung

Es sei (K, R, k) ein p -modulares System und A eine endlich erzeugte R -freie R -Algebra, M ein endlich erzeugter projektiver \overline{A} -Modul. Dann existiert ein projektiver A -Modul X mit $\overline{X} \cong M$. Ist Y ein projektiver A -Modul mit $\overline{Y} \cong M$, dann ist $X \cong Y$.

Beweis: Man vergleiche Theorem I.13.7 [8]. ■

Eine weitere Interpretation der Zerlegungszahlen liefert der folgende Satz, der eine Verbindung zwischen den projektiven A -Moduln und der Zerlegungsmatrix von A herstellt.

2.3.9 Satz (Brauer-Reziprozität)

Es sei KA halbeinfach, K ein Zerfällungskörper von KA und k ein Zerfällungskörper von kA . Weiter seien P_1, \dots, P_l Repräsentanten der Isomorphieklassen der A -PIMs, so dass $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_l$ Repräsentanten der \overline{A} -PIMs sind und $M_i = \overline{P}_i / \text{rad}(\overline{P}_i)$ Repräsentanten der

einfachen \bar{A} -Moduln. Ist D die Zerlegungsmatrix von A , dann gilt (mit den Bezeichnungen aus Definition 2.3.7)

$$d_{ij} = \text{Vielfachheit von } KX_i = V_i \text{ in } KP_j.$$

Beweis: Siehe Theorem I.17.8 in [8]. ■

2.4 Brauercharaktere

Ab jetzt bezeichne G eine endliche Gruppe. Weiter sei p eine Primzahl und (K, R, k) ein p -modulares System.

Ziel ist es jedem kG -Modul M einen „Brauer-Charakter“ zu zuordnen. Der Begriff des Brauer-Charakters wird eingeführt, um mehr über die Struktur von kG , bzw. RG -Moduln zu erfahren.

Wir bezeichnen mit $G_{p'}$ die Menge der p -regulären Elemente von G , d.h.

$$G_{p'} := \{g \in G \mid p \nmid |g|\}.$$

Ist $g \in G_{p'}$, so bezeichnen wir g als ein p' -Element.

2.4.1 Definition (Liftbarkeit)

Es sei A eine endlich erzeugte R -freie R -Algebra und M ein endlich erzeugter \bar{A} -Modul. Dann heißt M liftbar, falls ein A -Gitter X existiert mit $\bar{X} \cong M$.

2.4.2 Satz

Ist p kein Teiler von $|G|$, so ist jedes RG -Gitter projektiv. Jeder endlich erzeugte kG -Modul ist projektiv und besitzt einen eindeutigen Lift zu einem RG -Gitter.

Beweis: Siehe Lemma III.3.3 [8]. ■

2.4.3 Definition (p -modulares Zerfällungssystem)

Das Tripel (K, R, k) heißt p -modulares Zerfällungssystem für G , falls K und k Zerfällungskörper für alle Algebren KH und kH für alle Untergruppen H von G sind.

Mit Hilfe des folgenden Satzes (vergleiche Proposition (16.21) in [7]) kann man ein p -modulares Zerfällungssystem für eine endliche Gruppe konstruieren.

2.4.4 Satz (Fortsetzungssatz)

Es sei $K' \supseteq K$ eine endliche Körpererweiterung, R (vollständiger) diskreter Bewertungsring in K und $k := R/\pi R$ mit πR maximales Ideal in R . Es gibt einen (vollständigen) diskreten Bewertungsring R' in K' mit $R = R' \cap K$, $\pi R = \pi' R' \cap K$, wobei $\pi' R'$ das maximale Ideal in R' ist. Insbesondere ist $k' = R'/\pi' R'$ ein Erweiterungskörper von k .

2.4.5 Satz

Es sei G eine endliche Gruppe. Weiterhin sei $K := \mathbb{Q}_p$, $K' := \mathbb{Q}_p(\varepsilon)$, $R := \mathbb{Z}_p$, $k := \mathbb{F}_p$ und ε eine primitive $|G|$ -te Einheitswurzel über K . Wir wählen R' und k' gemäß Satz 2.4.4. Dann ist (K', R', k') ein p -modulares Zerfällungssystem für G .

Beweis: Man vergleiche Korollar 17.2 in [7]. ■

Für die weitere Theorie sei ab jetzt (K, R, k) ein p -modulares Zerfällungssystem für G .

2.4.6 Definition (Brauercharakter)

Es sei M ein endlich erzeugter kG -Modul.

Der Brauercharakter φ_M von M ist die Abbildung

$$\varphi_M : G_{p'} \longrightarrow K, \quad g \longmapsto \varphi_M(g)$$

definiert durch

$$\varphi_M(g) := \chi_{KX}(g),$$

wobei X für $M_{\langle g \rangle}$ (d.h. M aufgefasst als $k\langle g \rangle$ -Modul) der $R\langle g \rangle$ -Lift von $M_{\langle g \rangle}$ ist. Der Lift X existiert, da wegen $p \nmid |g|$ der $R\langle g \rangle$ -Modul $M_{\langle g \rangle}$ projektiv ist.

Ist M einfach, so wird φ_M irreduzibler Brauercharakter genannt. Die Menge der irreduziblen Brauercharaktere werde mit

$$\text{IBr}_k(G) = \{\varphi_M \mid M \text{ einfacher } kG\text{-Modul}\}$$

bezeichnet.

Brauercharaktere sind in ihren Eigenschaften denen der gewöhnlichen Charaktere verwandt (man vergleiche dazu die Lemmata IV.2.1 und IV.3.6 in [8]):

2.4.7 Lemma

Es sei M ein kG -Modul, (K, R, k) ein p -modulares Zerfällungssystem für G und φ_M der zu M gehörige Brauer-Charakter.

Dann gilt:

(i) φ_M ist eine Klassenfunktion auf $G_{p'}$.

(ii) Es sei M liftbar zu X und χ_{KX} der zu X gehörige Charakter. Dann folgt:

$$\varphi_M = \chi_{KX} \upharpoonright_{G_{p'}}$$

(iii) Ist N ein kG -Modul mit $M \cong N$, dann gilt $\varphi_M = \varphi_N$.

(iv) Die Anzahl der p' -Konjugiertenklassen von G ist gleich $|\text{IBr}_k(G)|$.

2.5 Blöcke von Gruppenalgebren

In diesem Abschnitt wird eine der im ersten Abschnitt beschriebenen Zerlegungen eines Ringes behandelt. Dazu sei A ein Ring mit 1. Der Spezialfall einer Zerlegung von A in zweiseitige Ideale, die als solche unzerlegbar sind, ist besonders interessant.

Nach den Sätzen 2.1.2 und 2.1.3 aus Abschnitt 2.1 ist die Zerlegung

$$A = Ae_1 \oplus \cdots \oplus Ae_n \quad (2.5)$$

für eine Menge e_1, \dots, e_n zentral-primitiver Idempotente in A , eine Zerlegung in unzerlegbare zweiseitige Ideale.

Folglich ist es zweckmäßig den Begriff des Blockes eines Ringes auf folgende Weise festzulegen:

2.5.1 Definition (Block)

Es sei A ein Ring, der eine Zerlegung der Form (2.5) in zweiseitige Ideale, die als zweiseitige Ideale unzerlegbar sind, besitzt. Diese zweiseitigen Ideale Ae_i für $i = 1, \dots, n$ heißen die Blöcke von A . Die zentral-primitiven Idempotente e_i für $i = 1, \dots, n$ heißen dann Blockidempotente und die Zerlegung (2.5) heißt dann eine Blockzerlegung von A .

Man sagt, ein endlich erzeugter A -Modul M liegt in einem Block $B = Ae$ von A , falls $eM = M$ ist.

Es sei nun G eine endliche Gruppe und (K, R, k) ein p -modulares Zerfällungssystem für G .

Wir stellen einen Zusammenhang zwischen der Blockzerlegung von A und $\bar{A} = A/\pi A$ her:

2.5.2 Satz

Es sei A eine endlich erzeugte R -freie R -Algebra und für $e \in A$ sei \bar{e} das Bild von e in \bar{A} . Die Abbildung $e \mapsto \bar{e}$ definiert eine Bijektion zwischen den zentralen Idempotenten von A und denen von \bar{A} . Dabei ist e genau dann primitiv, wenn \bar{e} primitiv ist.

Beweis: Vergleiche Satz I.12.9 in [8]. ■

Folglich liefert jede Blockzerlegung von A im Sinne von 2.5 eine Blockzerlegung

$$\bar{A} = \bar{A}\bar{e}_1 \oplus \cdots \oplus \bar{A}\bar{e}_n$$

von \bar{A} . Die Umkehrung ist ebenfalls richtig, man vergleiche dazu Abschnitt I.12 in [8].

2.5.3 Definition (Block einer Gruppe)

Ein Block von G ist ein Block von RG . Wir sagen, dass ein gewöhnlicher Charakter $\chi \in \text{Irr}_K(G)$ in einem Block $B = eRG$ von G liegt, falls $\chi(e) \neq 0$ ist. Genauso sagen wir, dass ein Brauercharakter $\varphi \in \text{IBr}_k(G)$ in B liegt, falls ein einfacher kG -Modul M , der φ bewirkt, in $\bar{B} = \bar{e}kG$ im Sinne von Definition 2.5.1 liegt.

2.5.4 Bemerkung

Ein Charakter $\chi \in \text{Irr}_K(G)$ liegt in genau einem Block B von G . Ist $\varphi \in \text{IBr}_k(G)$ mit $\varphi \notin B$, dann ist die zugehörige Zerlegungszahl $d_{\chi\varphi} = 0$.

Beweis: Ist X ein RG -Gitter, das den Charakter χ bewirkt, dann ist X unzerlegbar, da χ irreduzibel ist. Aus der Blockzerlegung von RG folgt, dass es genau einen Block B gibt, so dass X in B liegt. Das Blockidempotent e operiert als Identität auf X . Folglich ist $\chi(e) = \chi(1) \neq 0$. Ist $B \neq B' = e'RG$ ein weiterer Block von G , dann operiert e' wegen $e'e = 0$ wie 0 auf X und damit gilt $\chi(e') = 0$.

Da \bar{e} ebenfalls wie die Identität auf \bar{X} operiert, liegt jeder Kompositionsfaktor von \bar{X} in \bar{B} . Damit folgt auch die zweite Behauptung. ■

Definition 2.5.3 folgend, werden die Mengen der Charaktere, die in einem vorgegebenen Block B liegen, wie folgt bezeichnet:

$$\text{Irr}(B) := \text{Irr}_K(B) = \{\chi \in \text{Irr}_K(G) \mid \chi \text{ liegt in } B\},$$

$$\text{IBr}(B) := \text{IBr}_k(B) = \{\varphi \in \text{IBr}_k(G) \mid \varphi \text{ liegt in } B\}.$$

Um die Blockenteilung der gewöhnlichen Charaktere von G zu erhalten, ohne die zugehörigen Blockidempotenten zu kennen, genügt eine Betrachtung der zentralen Charaktere.

Ist $C \subseteq G$ eine Konjugiertenklasse von G , so wird mit

$$C^+ = \sum_{x \in C} x$$

die zugehörige Konjugiertenklassensumme bezeichnet. Die Menge der Konjugiertenklassensummen ist eine Basis des Zentrums des Gruppenrings RG .

Zu einem $\chi \in \text{Irr}(G)$ sei ω_χ der zugehörige zentrale Charakter

$$\begin{aligned} \omega_\chi : Z(RG) &\longrightarrow R \\ C^+ &\longmapsto \frac{\chi(C^+)}{\chi(1)}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

wobei χ auf RG linear fortgesetzt wird.

Jeder solche zentrale Charakter ω_χ induziert in kanonischer Weise einen zentralen Charakter $\bar{\omega}_\chi : Z(kG) \rightarrow k$ vermöge $\bar{\omega}_\chi(C^+) = \overline{\omega_\chi(C^+)}$.

Mit Hilfe der zentralen Charaktere läßt sich die Blockzerlegung von G wie folgt angeben:

2.5.5 Satz

Es seien χ und χ' gewöhnliche irreduzible Charaktere von G und es gelten obige Bezeichnungen. Dann sind äquivalent:

(a) χ und χ' liegen im gleichen Block von G .

(b) $\overline{\omega_\chi} = \overline{\omega_{\chi'}}$

Beweis: Man vergleiche Lemma IV.4.2 in [8]. ■

2.5.6 Bemerkung

Man kann folglich nach Satz 2.5.5 jedem Block eindeutig einen k -Algebrenhomomorphismus zuordnen. Ist B ein p -Block von G und χ ein Charakter in B , so erhält man durch

$$\omega_B := \overline{\omega_\chi} \tag{2.7}$$

eine Bijektion zwischen der Menge der p -Blöcke von G und der Algebrenhomomorphismen von $Z(kG)$ nach k (man vergleiche Satz 15.30 in [16]). Der reduzierte zentrale Charakter ω_B wird deshalb der zentrale Charakter des Blocks B genannt.

Zum Abschluß dieses Abschnitts wird noch der wichtige Fall eingeführt, in dem ein Block genau einen Charakter enthält.

2.5.7 Satz

Sei B ein Block von G und $\chi \in \text{Irr}(B)$. Dann sind äquivalent:

(a) $|\text{Irr}(B)| = |\text{IBr}(B)|$

(b) $p \nmid \frac{|G|}{\chi(1)}$

(c) $\text{Irr}(B) = \{\chi\}$

(d) $D_B = (1)$, wobei D_B die Zerlegungsmatrix des Blocks bezeichne.

Beweis: Siehe Lemma IV.4.19 in [8]. ■

2.5.8 Definition (Defekt-0-Charakter)

Es seien B und χ wie in Satz 2.5.7. Der Block B heißt dann ein Block vom Defekt 0 und der einzige in ihm liegende Charakter χ heißt dann ein Charakter vom Defekt 0.

2.6 Defektgruppen von Blöcken

Es sei (K, R, k) ein p -modulares System und G eine endliche Gruppe. Der Kürze wegen bezeichne A den Gruppenring RG .

2.6.1 Definition

Es sei $D \leq G$ eine Untergruppe von G , die auf A durch Konjugation operiere. Mit A_D bezeichne man die Menge der Fixpunkte unter dieser Operation.

Die Spurabbildung Tr relativ zu D und G ist der R -Endomorphismus

$$\begin{aligned} \text{Tr}_D^G : A_D &\longrightarrow A_G = Z(A) \\ a &\longmapsto \sum_{x \in \mathcal{T}(G/D)} xa, \end{aligned} \tag{2.8}$$

wobei x eine beliebige Linkstransversale von D in G durchläuft.

2.6.2 Satz

Es sei $e \in Z(A)$ ein zentral-primitives Idempotent von A . Es existiert eine p -Untergruppe $D \leq G$ von G mit

- (i) $e \in \text{Tr}_D^G(A_D)$.
- (ii) Ist $D' \leq G$ mit $e \in \text{Tr}_{D'}^G(A_{D'})$, so ist D in G zu einer Untergruppe von D' konjugiert.

Beweis: Siehe Lemma III.6.5 in [8]. ■

2.6.3 Definition (Defektgruppen)

Es sei e ein zentral-primitives Idempotent von A . Die Untergruppen D von G aus Satz 2.6.2 von minimaler Ordnung mit $e \in \text{Tr}_D^G(A_D)$ heißen die Defektgruppen von e . Ist $B = Ae$ der zugehörige Block von G , so bezeichnet man eine Defektgruppe von e als Defektgruppe von B .

Ist D eine Defektgruppe von B mit $|D| = p^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$, dann heißt d der Defekt von B .

Abschließend folgt eine alternative Beschreibung des Defekts:

2.6.4 Satz

Es sei p^a die höchste Potenz von p , welche die Ordnung von G teilt, und B ein Block von G vom Defekt d . Dann ist p^{a-d} die höchste Potenz von p , die den Grad eines jeden gewöhnlichen und eines jeden Brauercharakters des Blocks teilt.

Beweis: Siehe Theorem IV.4.5 in [8]. ■

Defektgruppen haben eine Reihe von interessanten Eigenschaften (siehe [12]).

2.7 Brauerkorrespondenz

Es seien G eine endliche Gruppe und (K, R, k) ein p -modulares Zerfallungssystem für G .

Es sei H eine Untergruppe von G und s_H die Abbildung von $Z(RG)$ nach $Z(RH)$ die durch die R -lineare Fortsetzung der Abbildung

$$C^+ \mapsto (C \cap H)^+ := \sum_{h \in C \cap H} h$$

für jede Konjugiertenklasse C von G definiert ist. Dann induziert s_H eine k -lineare Abbildung

$$\overline{s_H} : Z(kG) \rightarrow Z(kH).$$

Ist b ein Block von H mit zentralem Charakter $\omega_b : Z(kH) \rightarrow k$, dann sei die Hintereinanderausführung von ω_b und $\overline{s_H}$ mit

$$\omega_{b^G} := \omega_b \circ \overline{s_H}$$

bezeichnet und es ist

$$\omega_{b^G} : Z(kG) \rightarrow k$$

eine k -lineare Abbildung.

2.7.1 Definition (Brauer-Korrespondent)

Es sei H eine Untergruppe von G und b ein Block von H . Ist die oben definierte Abbildung ω_{b^G} ein von Null verschiedener k -Algebrenhomomorphismus, so existiert nach Bemerkung 2.5.6 genau ein Block B von G mit $\omega_B = \omega_{b^G}$ und man sagt „ b^G ist definiert“. In diesem Fall heißt b^G der Brauerkorrespondent von b und man schreibt $b^G := B$.

Der Brauerkorrespondent ist im Allgemeinen nicht definiert. Für die Zwecke dieser Arbeit genügt es aber die Normalisatoren von p -Untergruppen zu betrachten. Der nächste Satz (siehe Satz III.9.4 in [8]) impliziert, dass die Brauer-Korrespondenten der Blöcke solcher Gruppen immer definiert sind.

2.7.2 Satz

Es seien p eine Primzahl, D eine p -Untergruppe von G und H eine Untergruppe von G mit $DC_G(D) \leq H \leq N_G(D)$. Wenn b ein p -Block von H ist, dann ist b^G definiert.

Der erste Hauptsatz von Brauer (Satz III.9.7 in [8]) verbindet die Begriffe Defektgruppe und Brauer-Korrespondent.

2.7.3 Satz (Erster Hauptsatz von Brauer)

Es sei D eine p -Untergruppe von G . Die Abbildung $b \mapsto b^G$ definiert eine Bijektion zwischen der Menge der Blöcke von $N_G(D)$ mit Defektgruppe D und der Menge der Blöcke von G mit Defektgruppe D .

Der erster Hauptsatz von Brauer zeigt, dass es zur Bestimmung der Blöcke von G mit Defektgruppe D genügt, diese Frage für $N_G(D)$ zu beantworten.

Es sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler und B ein Block von G . Ist b ein Block von N , dann ist sein Stabilisator $\text{Stab}_G(b)$ die Untergruppe von G , die aus den Elementen $g \in G$ mit $gbg^{-1} = b$ besteht. Da kN eine eindeutige Blockzerlegung besitzt und G auf kN durch Konjugation Automorphismen induziert, permutieren die Elemente von G die Blöcke von N .

Betrachtet man unter diesen Gesichtspunkten den Normalisator $N_G(D)$ von D , so erhält man eine andere Formulierung des ersten Hauptsatzes von Brauer, wie sie z.B. in [1] entwickelt wird. Diese wird sich in späteren Abschnitten als hilfreich erweisen, wenn die Gruppe \tilde{S}_n betrachtet wird.

2.7.4 Satz

Die Blöcke von G mit Defektgruppe D stehen in Bijektion zu den Bahnen des Normalisators $N_G(D)$ auf den Defekt-0-Blöcken β von $DC_G(D)/D$ für die gilt:

$$p \nmid |\text{Stab}_{N_G(D)}(\beta) : DC_G(D)|.$$

Beweis: Siehe Theorem IV.4 in [1]. ■

2.7.5 Definition (Überlagerung von Blöcken)

Ist B ein Block von G und b ein Block von $N \trianglelefteq G$, so sagt man „ B überlagert b “, falls für ein $\chi \in \text{Irr}(B)$ der eingeschränkte Charakter χ_N einen irreduziblen Konstituenten in $\text{Irr}(b)$ besitzt.

2.8 Blöcke von zyklischem Defekt

Es sei G eine endliche Gruppe und (K, R, k) ein p -modulares Zerfallungssystem für G . Weiter sei B ein Block von G mit zyklischer Defektgruppe D , $|D| = p^d$ für ein $d \in \mathbb{N}$.

Die Grundlage für die Theorie der Brauerbäume bildet der folgende Satz:

2.8.1 Satz (Brauer–Dade)

Es sei $e := |\text{Irr}(B)|$ die Anzahl der irreduziblen Brauercharaktere in B . Dann gilt:

(a) $e \mid p - 1$

(b) $|\text{Irr}(B)| = e + \frac{p^d - 1}{e}$

(c) Für die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von B gilt:

$$\text{Irr}(B) = \{\chi_1, \dots, \chi_e\} \cup \{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$$

mit einer Indexmenge Λ , $|\Lambda| = (p^d - 1)/e$, und

$$\hat{\chi}_\lambda = \hat{\chi}_{\lambda'}$$

für alle $\lambda, \lambda' \in \Lambda$. Dabei bezeichne $\hat{\chi}$ die Einschränkung von χ auf die p' -Klassen von G . Wir setzen

$$\chi_{e+1} := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda.$$

(d) Es seien Φ_1, \dots, Φ_e die PIMs von B . Dann gilt in obiger Notation

$$\Phi_i = \chi_{i(1)} + \chi_{i(2)},$$

wobei $i(1)$ und $i(2)$ in $\{1, \dots, e+1\}$ liegen und ungleich sind. Insbesondere sind alle Einträge der Zerlegungsmatrizen in B aus $\{0, 1\}$.

Beweis: Siehe Theorem 2.1.5. in [13]. ■

2.8.2 Definition (Exzeptioneller Charakter)

Ist $(p^d - 1)/e > 1$ in Satz 2.8.1, so werden die Charaktere χ_λ , $\lambda \in \Lambda$, die exzeptionellen Charaktere von B genannt. Ihre Anzahl $|\Lambda|$ wird als exzeptionelle Multiplizität bezeichnet.

Schreiben wir in der Zerlegungsmatrix von B nur eine Zeile für $\{\chi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ (falls $(p^d - 1)/e > 1$), so folgt aus Satz 2.8.1(d), dass die resultierende $(e+1) \times e$ -Matrix die Inzidenzmatrix eines Baumes Γ_B ist: Die Knoten von Γ_B entsprechen den $e+1$ Charakteren $\chi_1, \dots, \chi_{e+1}$ und zwei Knoten von Γ_B sind mit einer Kante genau dann inzident, wenn ihre korrespondierenden Knoten einen PIM von RG bilden.

2.8.3 Definition (Brauerbaum)

Der auf obige Weise konstruierte Baum Γ_B wird als Brauerbaum von B bezeichnet. Im Falle $(p^d - 1)/e > 1$ heißt der Knoten zu χ_{e+1} der exzeptionelle Knoten von Γ_B .

2.8.4 Definition (Selbstdualer Block)

Ein Block B von G heißt selbst-dual, falls die Mengen $\text{Irr}(B)$ und $\text{IBr}(B)$ invariant unter komplexer Konjugation sind.

Neben der Zerlegungsmatrix von B , die aus Γ_B ablesbar ist, erlaubt der Brauerbaum ebenfalls eine Darstellung der Struktur der unzerlegbaren kG -Moduln. Dazu ist die folgende Beobachtung von grundsätzlicher Bedeutung.

2.8.5 Satz

Es seien $\varphi \in \text{IBr}(B)$ und $\chi \in \text{Irr}(B)$, so dass die zugehörige Zerlegungszahl $d_{\chi, \varphi} \neq 0$ ist.

(a) Es existiert ein RG -Gitter X mit Charakter χ , so dass \overline{X} uniserial ist und der irreduzible kG -Modul, der φ bewirkt, isomorph zu $\overline{X}/\text{rad}\overline{X}$ ist.

- (b) Ist X' ein weiteres RG -Gitter mit Charakter χ , dessen Reduktion modulo π uniseriell ist, so erhält man die Kompositionsreihe von $\overline{X'}$ durch zyklische Permutation der Kompositionsfaktoren von \overline{X} .

Beweis: Man vergleiche Theorem 11.15 in [11]. ■

Wir können folglich die Kanten um einen Knoten so anordnen, dass wir die Kompositionsreihe des zugehörigen reduzierten Gitters ablesen können.

2.8.6 Definition (Eingebetteter Baum)

Ist Γ_B der Brauerbaum von B , so definieren wir den in die Ebene eingebetteten Brauerbaum Γ_B^e , indem wir die Kanten um jeden Knoten gemäß der Sequenz aus Satz 2.8.5 gegen den Uhrzeigersinn anordnen. Das heißt, dass die Kante φ_2 der Nachfolger der Kante φ_1 an Knoten χ ist, falls es ein RG -Gitter X mit Charakter χ gibt, dessen Reduktion modulo π uniseriell ist und φ_1 und φ_2 dabei aufeinanderfolgende Kompositionsfaktoren in der absteigenden Kompositionsreihe von \overline{X} sind.

Weitere nützliche Informationen über die Beschaffenheit von Brauerbäumen liefert der folgende Satz.

2.8.7 Satz

Es sei B selbst-dual und $p > 2$.

- (a) Ist χ ein Knoten von Γ_B und $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ die Reihenfolge der Kanten um χ , dann ist $(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)$ die Reihenfolge der Kanten um $\bar{\chi}$.
- (b) Die reellwertigen gewöhnlichen irreduziblen Charaktere und die reellwertigen irreduziblen Brauercharaktere bilden einen zusammenhängenden Teilgraphen S_B von Γ_B , der ein offenes Polygon ist. Dieser wird der reelle Stamm von Γ_B genannt.
- (c) Komplexe Konjugation induziert einen Graphautomorphismus des eingebetteten Baumes Γ_B^e , der einer Spiegelung entlang des reellen Stamms entspricht.

Beweis: Siehe Theorem 2.1.20. in [13]. ■

Um einen eingebetteten Brauerbaum darzustellen ist es allgemein üblich, ihn an seinem reellen Stamm auszurichten.

2.8.8 Bemerkung

Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.8.7. Ist S_B der reelle Stamm des Brauerbaumes Γ_B , so wird der eingebettete Baum Γ_B^e so dargestellt, dass S_B waagrecht liegt.

2.8.9 Beispiel

Es sei $G = \mathcal{S}_3$ und $p = 3$. Die zugehörige Zerlegungsmatrix lautet

	Φ_1	Φ_2
χ_1	1	0
χ_2	0	1
χ_3	1	1

Folglich gibt es genau einen 3-Block und dieser ist vom Defekt 1, insbesondere also zyklisch. Der zugehörige Brauerbaum besteht in diesem Fall nur aus einem reellen Stamm:



Eine nützliche Verallgemeinerung von Satz 2.8.7 ist der folgende Satz.

2.8.10 Satz

Ist α ein Gruppenautomorphismus von G und ist B invariant unter der Hintereinanderausführung von α und komplexer Konjugation, so bilden die invarianten Knoten einen zusammenhängenden Teilgraphen des Brauerbaumes Γ_B . Dieser Teilgraph ist ein offenes Polygon.

Beweis: Siehe Theorem 2.1.21. in [13]. ■

Kapitel 3

Charaktertafeln

In diesem Kapitel wird die gewöhnliche Darstellungstheorie der Überlagerungsgruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$ vorgestellt. Dabei beschränkt sich diese Vorstellung auf die Angabe der Charaktertafeln der Gruppen. Im Anschluss an die theoretische Behandlung werden einige Algorithmen in GAP vorgestellt, die einen Teil der Ergebnisse dieser Arbeit darstellen. Sie erlauben eine effiziente und schnelle Berechnung der interessierenden Charaktertafeln.

Wie bei der ihr auf das Engste verwandten Gruppe \mathcal{S}_n ist die Darstellungstheorie von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ von einer Kombinatorik gekennzeichnet, deren Objekte Partitionen von n sind.

3.1 Bezeichnungen und Definitionen

Wir wollen zunächst die grundlegenden Bezeichnungen fixieren, welche auch über dieses Kapitel hinaus ihre Gültigkeit behalten werden.

Die Bezeichnungen aus Abschnitt 1.2 gelten weiterhin. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht die in Abschnitt 1.2 eingeführte Überlagerungsgruppe der symmetrischen Gruppe $\tilde{\mathcal{S}}_n$, die in Form einer kurzen exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_n \xrightarrow{\theta} \mathcal{S}_n \longrightarrow 1$$

dargestellt werden kann.

Es bezeichne \mathcal{P}_n die Menge der Partitionen von n für ein $n \in \mathbb{N}$.

Für eine Partition $\lambda \in \mathcal{P}_n$ sei $[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell]$ die Liste ihrer Teile, wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_\ell > 0$ und $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i = n$.

Unter $l(\lambda)$ verstehen wir die Länge ℓ von λ .

Weiter sei $\sigma(\lambda) := n - \ell$ die Signatur und $\varepsilon(\lambda) := (-1)^{\sigma(\lambda)}$ das Signum von λ .

Damit sei $\mathcal{P}_n^+ := \{\lambda \in \mathcal{P} \mid \varepsilon(\lambda) = 1\}$ die Teilmenge aller geraden Partitionen und dazu analog $\mathcal{P}_n^- := \mathcal{P}_n \setminus \mathcal{P}_n^+$ die Menge aller ungeraden Partitionen von n .

Von besonderer Bedeutung werden auch die Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_n &:= \{\lambda \in \mathcal{P}_n \mid \text{alle } \lambda_i \text{ ungerade}\} \subseteq \mathcal{P}_n^+ \quad \text{und} \\ \mathcal{D}_n &:= \{\lambda \in \mathcal{P}_n \mid \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_\ell\}\end{aligned}$$

sein.

Zu guter letzt sei $\mathcal{D}_n^+ := \mathcal{D}_n \cap \mathcal{P}_n^+$ und $\mathcal{D}_n^- := \mathcal{D}_n \cap \mathcal{P}_n^-$.

Eine Partition aus \mathcal{D}_n bezeichnen wir auch als Balkenpartition.

3.2 Die Konjugiertenklassen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$

Der erste Schritt zur Bestimmung der Charaktertafel von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ist die Bestimmung ihrer Konjugiertenklassen.

Betrachtet man eine Konjugiertenklasse C gerader Permutationen von \mathcal{S}_n , so spaltet diese in zwei Konjugiertenklassen von \mathcal{A}_n auf, falls $n \geq 2$ und der zugehörige Zykeltyp π in $\mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n^+$ liegt (vgl. Lemma 1.2.10 in [18]). Ein ganz ähnliches Phänomen tritt bei der Überlagerungsgruppe auf.

3.2.1 Bemerkung

Es sei C eine Konjugiertenklasse der \mathcal{S}_n . Dann ist $\theta^{-1}(C)$ entweder eine Vereinigung zweier Konjugiertenklassen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, oder selbst eine Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Letzteres tritt genau dann ein, wenn für ein $s \in C$ mit $\theta^{-1}(s) = \{zg, g\}$ für ein $g \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ gilt, dass zg und g in $\tilde{\mathcal{S}}_n$ konjugiert sind.

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, dass $\theta^{-1}(C)$ eine Vereinigung von Konjugiertenklassen ist. Dies sieht man aber leicht: Sind $a, b \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ konjugiert und ist $a \in \theta^{-1}(C)$, dann ist auch b in $\theta^{-1}(C)$, da $\theta(a)$ und $\theta(b)$ in \mathcal{S}_n konjugiert sind.

Sind nun $a, b \in \theta^{-1}(C)$, so sind ihre Bilder unter θ in \mathcal{S}_n konjugiert, d.h. es existiert ein $d \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ mit $\theta(dad^{-1}) = \theta(b)$. Folglich ist $dad^{-1} = b$ oder $dad^{-1} = zb$. Damit ist $\theta^{-1}(C)$ eine Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, falls b und zb konjugiert ist. Sonst, falls es ein Element $b \in \theta^{-1}(C)$ gibt, das nicht zu zb konjugiert ist, ist $\theta^{-1}(C)$ die Vereinigung der Konjugiertenklassen von b und zb . ■

3.2.2 Definition (Spaltende Klasse)

Eine Konjugiertenklasse C von \mathcal{S}_n heißt aufspaltend, falls $\theta^{-1}(C)$ die Vereinigung zweier $\tilde{\mathcal{S}}_n$ Konjugiertenklassen ist.

3.2.3 Satz

Es sei C eine Konjugiertenklasse von \mathcal{S}_n , die Elemente des Zykeltyps $\pi \in \mathcal{P}_n$ enthält. Die Klasse C ist genau dann aufspaltend, wenn $\pi \in \mathcal{O}_n$ oder $\pi \in \mathcal{D}_n^-$ ist.

Beweis: Siehe Theorem 3.8 in [14]. ■

Falls eine Konjugiertenklasse aufspaltet, benötigt man für die nachfolgenden Abschnitte fixierte Bezeichnungen der entsprechenden Konjugiertenklassen in $\tilde{\mathcal{S}}_n$.

Für eine Konjugiertenklasse C von \mathcal{S}_n , die Elemente des Zykeltyps $\pi \in \mathcal{P}_n$ enthält, sei ihr Standardvertreter $s_\pi \in C$, wie folgt definiert:

$$s_\pi := s_1 \cdots \hat{s}_{i_1} \cdots \hat{s}_{i_m} \cdots s_{n-1} \in \mathcal{S}_n,$$

wobei $i_1 < \dots < i_m$ eine Zahlenfolge in $\{1, \dots, n\}$ mit möglichst groß gewählten Elementen ist. Dabei soll \hat{s}_i andeuten, dass das Element s_i im Produkt nicht vorkommt. Der Lift des Standardvertreters in die Gruppe $\tilde{\mathcal{S}}_n$ wird mit \tilde{s}_π bezeichnet, d.h. wir definieren

$$\tilde{s}_\pi := t_1 \cdots \hat{t}_{i_1} \cdots \hat{t}_{i_m} \cdots t_{n-1} \in \tilde{\mathcal{S}}_n,$$

wobei die t_i die Lifts der Transpositionen in der Präsentation aus Satz 1.2.2 sind. Ist $s_\pi = 1$, so setzen wir $\tilde{s}_\pi := 1 \in \tilde{\mathcal{S}}_n$.

Mit Hilfe dieses speziellen Elementes können wir die Konjugiertenklassen unterscheiden:

3.2.4 Definition

Ist C eine Konjugiertenklasse von \mathcal{S}_n , die Elemente des Zykeltyps $\pi \in \mathcal{P}_n$ enthält, dann wird die Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, die das Element \tilde{s}_π enthält, als erste Konjugiertenklasse bezeichnet, deren Elemente unter θ vom Zykeltyp π sind. Ist $\theta^{-1}(C)$ Vereinigung zweier Konjugiertenklassen, so wird die andere Klasse, die $z\tilde{s}_\pi$ enthält, als zweite Klasse bezeichnet, deren Elemente unter θ vom Zykeltyp π sind.

Die Klassen werden gemäß ihrer Herkunft aus \mathcal{S}_n ebenfalls mit den Partitionen von n indiziert, die angeben, welchen Zykeltyp die Elemente dieser Klasse unter dem Epimorphismus θ haben.

Ist $g \in \mathcal{S}_n$, so soll mit $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ ein Lift von g in $\tilde{\mathcal{S}}_n$ sein, d.h. $\tilde{g} \in \theta^{-1}(g)$. Spaltet die zu g gehörige Konjugiertenklasse auf, so wird \tilde{g} als ein Element der ersten Klasse angesehen, falls es nicht anders spezifiziert wird.

Aus Bemerkung 3.2.1 folgt sofort die Ordnung der Zentralisatoren der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ -Konjugiertenklassen, die wir abschließend festhalten wollen:

3.2.5 Bemerkung

Es sei $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{S}}_n$. Für die Ordnung des Zentralisators von \tilde{g} gilt

$$|C_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{g})| = 2|C_{\mathcal{S}_n}(g)|,$$

falls die \mathcal{S}_n -Konjugiertenklasse von g aufspaltend ist. Sonst entspricht die Ordnung von $C_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{g})$ der Ordnung des Zentralisators von g in \mathcal{S}_n .

3.3 Die Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$

Aus dem vorangegangenen Abschnitt sind Vertreter jeder Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bekannt. Aufbauend auf dieser Information können wir uns den irreduziblen Charakteren von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ widmen, um die zugehörige Charaktertafel bestimmen zu können.

Es sei $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ die Menge der irreduziblen Charaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Wir unterscheiden zwei Arten von irreduziblen Charakteren: Zum einen enthält $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ Charaktere χ , für die $\chi(z) = \chi(1)$ gilt. Zum anderen gibt es Charaktere χ mit $\chi(z) = -\chi(1)$.

Erstere sind bereits aus der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen bekannt, da wegen $\langle z \rangle \leq \text{Kern}(\chi)$ der Charakter χ mit einem irreduziblen Charakter des Faktors $\tilde{\mathcal{S}}_n / \langle z \rangle \cong \mathcal{S}_n$ zusammenfällt.

Deswegen werden im weiteren Verlauf nur die Charaktere $\chi \in \text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ mit $\chi(z) = -\chi(1)$ betrachtet.

3.3.1 Definition (Spincharakter)

Es sei

$$\text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n) := \{\chi \in \text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_n) \mid \chi(z) = -\chi(1)\}.$$

Ist $\chi \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n)$, so wird χ Spincharakter genannt.

Man kann sofort einige Werte der Charaktere angeben:

3.3.2 Bemerkung

Es sei $\chi \in \text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$. Um alle Werte des Charakters auf den Konjugiertenklassen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ zu kennen, genügt es sie auf den jeweils ersten Klassen gemäß Definition 3.2.4 zu kennen. Insbesondere gilt für ein $\chi \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ und ein $g \in \mathcal{S}_n$ einer nicht aufspaltenden Klasse, dass $\chi(\tilde{g}) = 0$ ist, d.h. Spincharaktere verschwinden auf Klassen, die ein volles θ -Urbild einer \mathcal{S}_n -Konjugiertenklasse sind.

Beweis: Es ist nur zu beachten, dass $\chi(z\tilde{g}) = -\chi(\tilde{g})$ ist, falls χ ein Spincharakter ist, und dass, falls χ kein Spincharakter ist, $\chi(\tilde{g}) = \chi(z\tilde{g})$ gilt.

Damit gilt für ein $\chi \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ und ein g einer nicht aufspaltenden Klasse von \mathcal{S}_n , dass $\chi(\tilde{g}) = \chi(z\tilde{g}) = -\chi(\tilde{g})$ ist, also folgt auch die zweite Behauptung. ■

Wir erweitern die Definition von ε aus Abschnitt 3.1, um es auch auf Elemente von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ anwenden zu können. Dazu bezeichne $\varepsilon : \tilde{\mathcal{S}}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ auch die Inflation der alternierenden Darstellung von \mathcal{S}_n auf $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Da für ein $\pi \in \mathcal{P}_n$ das Signum $\varepsilon(\pi)$ der Partition dem Signum eines Elementes von \mathcal{S}_n vom Zykelyp π entspricht, ist dieser notationelle Missbrauch verzeihlich.

3.3.3 Definition (Assoziierter Charakter)

Für ein $\chi \in \text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ definiert man $\chi^a := \varepsilon \otimes \chi$ und nennt χ^a den zu χ assoziierten Charakter. Gilt $\chi^a = \chi$, so heißt der Charakter χ selbst-assoziiert.

3.3.4 Bemerkung

Es sei $\chi \in \text{Irr}(\tilde{S}_n)$ ein selbst-assoziiertes Charakter. Dann verschwindet er auf allen Klassen, deren Elemente unter θ vom Zykeltyp π für ein $\pi \in \mathcal{P}_n^-$ sind.

Beweis: Ist \tilde{g} aus einer Klasse, die durch eine ungerade Partition indiziert ist, so ist $\varepsilon(\tilde{g}) = -1$. Damit gilt offensichtlich $\chi(\tilde{g}) = \chi^a(\tilde{g}) = -\chi(\tilde{g})$. ■

Es folgt nun das Hauptergebnis von Schurs Arbeit (vgl. [28]), das eine vollständige Beschreibung aller Spincharaktere liefert.

Mit i bezeichnen wir eine primitive vierte Einheitswurzel, die wir für den Rest dieser Arbeit fest wählen.

3.3.5 Satz

Eine vollständige Auflistung aller Spincharaktere von \tilde{S}_n ergibt sich wie folgt:
Jedes $\lambda \in \mathcal{D}_n^+$ indiziert einen selbst-assoziierten Spincharakter, der mit $\langle \lambda \rangle$ bezeichnet wird. Zu jedem $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$ gibt es ein Paar assoziierter Charaktere, die mit $\langle \lambda \rangle$ und $\langle \lambda \rangle^a$ bezeichnet werden. Ihre Werte auf den Konjugiertenklassen lassen sich wie folgt angeben. Dabei bezeichne $\langle \lambda \rangle(\pi)$ den Wert des Charakters auf der ersten Konjugiertenklasse (vgl. 3.2.4), die durch π indiziert ist.

	$\pi \in \mathcal{P}_n^+$		$\pi \in \mathcal{P}_n^-$	
	$\pi \in \mathcal{O}_n$	$\pi \notin \mathcal{O}_n$	$\pi \in \mathcal{D}_n^-$	$\pi \notin \mathcal{D}_n^-$
$\lambda \in \mathcal{D}_n^+$ $\langle \lambda \rangle = \langle \lambda \rangle^a$	⊗	0	0	0
$\lambda \in \mathcal{D}_n^-$ $\langle \lambda \rangle$	⊗	0	$\begin{cases} 0 & \text{falls } \lambda \neq \pi \\ i^{\frac{\sigma(\lambda)+1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_1 \cdots \lambda_\ell}{2}} & \text{falls } \lambda = \pi \end{cases}$	0
$\langle \lambda \rangle^a$	$\langle \lambda \rangle(\pi)$	0	$-\langle \lambda \rangle(\pi)$	0

Die mit ⊗ gekennzeichneten Werte werden mit Hilfe von Satz 3.4.8 bestimmt.

Beweis: siehe [28]. ■

3.3.6 Definition (Exzeptioneller Wert)

Ist $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$, so wird der Charakterwert $\langle \lambda \rangle(\lambda)$ als exzeptioneller Charakterwert bezeichnet.

Da der Assoziierte eines Charakters erst festliegt, nachdem wir aus dem Paar $\{\langle \lambda \rangle, \langle \lambda \rangle^a\}$ einen Charakter fest gewählt haben, wollen wir noch festsetzen, welchen Charakter wir für jetzt und alle Zeit mit $\langle \lambda \rangle$ bezeichnen wollen.

3.3.7 Definition

Es sei $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$. Mit $\langle \lambda \rangle$ wird derjenige Charakter bezeichnet, für den gilt:

$$\langle \lambda \rangle(\lambda) = i^{\frac{\sigma(\lambda)+1}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_1 \cdots \lambda_\ell}{2}}.$$

3.4 Morris' Rekursionsformel

Bei den symmetrischen Gruppen lassen sich die Werte der irreduziblen Charaktere durch rekursive Berechnung ermitteln. Dies ist für gewisse Klassen auch der Fall bei den Überlagerungsgruppen. Das Analogon zur Murnaghan–Nakayama Formel (vgl. Satz 21.1 in [17]) ist die sogenannte Morris'sche Rekursionsformel. Doch bevor wir diesen wichtigen Satz formulieren, sind noch einige Definitionen notwendig:

Es sei $l \in \mathbb{N}$ eine ungerade natürliche Zahl und $\lambda \in \mathcal{D}_n$.

In Analogie zum Vorgang des Hakenentfernens bei symmetrischen Gruppen (vgl. Abschnitt 21 in [17]) werden bei ihren Überlagerungsgruppen sogenannte „Balken“ entfernt. Dazu definieren wir das Entfernen eines l -Balkens. Die folgenden Operationen überführen λ in ein Element aus \mathcal{D}_{n-l} .

3.4.1 Definition (Balkenentfernung)

Bei gegebenem λ und l definiert man folgende Operationen, die jeweils als Entfernung eines l -Balkens bezeichnet werden:

- (i) Man subtrahiere l von einem Teil λ_i von λ , falls $\lambda_i > l$ und die resultierende Partition in \mathcal{D}_{n-l} liegt.
Diese Operation wird auch als Entfernung eines Balkens vom Typ '+' bezeichnet.
- (ii) Man entferne einen Teil l von λ .
Dies wird auch als Entfernung eines Balkens vom Typ '0' bezeichnet.
- (iii) Man entferne zwei Teile λ_i und λ_j von λ , falls $\lambda_i + \lambda_j = l$ ist.
Dieser Vorgang wird auch als Entfernung eines Balkens vom Typ '-' bezeichnet.

Dieser kombinatorische Prozess wird am besten durch einen Abakus beschrieben.

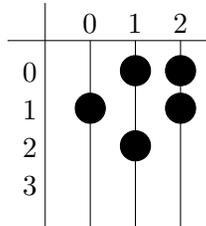
3.4.2 Definition (Abakus)

Der zu λ gehörige l -Abakus ist ein Abakus mit l Spalten, die durch $0, \dots, l-1$ indiziert sind. Seine Zeilen sind durch \mathbb{N} indiziert. Eine Kugel befindet sich genau dann in Position (i, j) , wenn $il + j$ ein Teil von λ ist.

Die Positionen $(0, j)$ und $(0, l-j)$ für $1 \leq j \leq \frac{l-1}{2}$ heißen konjugiert.

3.4.3 Beispiel

Es sei $\lambda = [7, 5, 3, 2, 1]$ und $l = 3$.



Der Abakus ermöglicht eine sehr anschauliche Interpretation der l -Balkenentfernung.

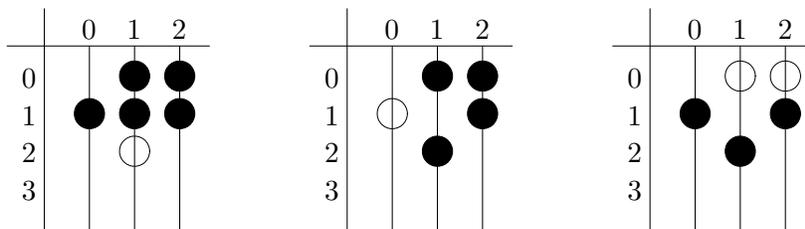
3.4.4 Bemerkung

Übertragen auf den l -Abakus von λ aus 3.4.2 übersetzen sich die Operationen aus 3.4.1 in:

- (i) Man schiebe eine Kugel entlang einer Spalte um einen Platz nach oben, ohne Position $(0, 0)$ zu treffen und vorausgesetzt, dass die Zielposition frei ist.
- (ii) Man schiebe eine Kugel von $(1, 0)$ nach $(0, 0)$ und entferne sie dann aus dem Abakus.
- (iii) Man entferne zwei Kugeln des Abakus, die sich in konjugierten Positionen (insbesondere in Zeile 0) befinden.

3.4.5 Beispiel

Dies ist eine Fortführung obigen Beispiels. Die unausgefüllten Kugeln des Abakus deuten an, dass Perlen entfernt wurden. Die ausgefüllten stellen die momentane Perlenkonfiguration dar. Gleichzeitig illustrieren die Abaki die Entfernung eines Balkens vom '+'-, '0'- bzw. '-'-Typ.



Die resultierenden Partitionen sind $[5, 4, 3, 2, 1]$, $[7, 5, 2, 1]$ und $[7, 5, 3]$.

Entfernt man im Fall der symmetrischen Gruppen gemäß der Murnaghan–Nakayama–Formel Haken aus dem zu einem irreduziblen Charakter gehörenden Young–Diagramm, so spielt die Beinlänge des entfernten Hakens eine besondere Rolle (man vergleiche Satz 21.1 in [17]). Von ganz ähnlicher Bedeutung sind bei $\tilde{\mathcal{S}}_n$ die sogenannten „Beinlängen“ der entfernten Balken.

3.4.6 Definition (Beinlänge)

Es sei $\mu \in \mathcal{D}_{n-l}$ durch Entfernung eines l –Balkens aus λ hervorgegangen. Man bezeichnet mit $L_\lambda(\mu)$ die Beinlänge des entfernten l –Balkens und definiert sie in Abhängigkeit vom Typ der Entfernung wie folgt:

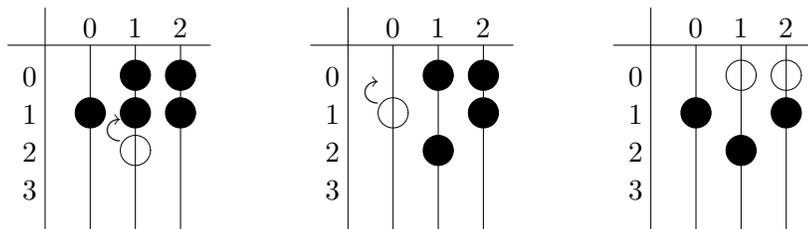
- (i) Bei einem '+' oder '0' Typ beträgt $L_\lambda(\mu)$ die Anzahl der Kugeln des Abakus, die durch Verschieben einer Kugel gemäß 3.4.4 übersprungen werden.
- (ii) Liegt der '-' Typ vor, so ist $L(\mu)$ die Summe aus der kleineren konjugierten Position und der Anzahl der Kugeln des Abakus, die zwischen den beiden konjugierten Positionen liegen.

Die Motivation, diese kombinatorisch festgelegten Größen Beinlängen zu nennen, liegt darin begründet, dass man eine der Kombinatorik der symmetrischen Gruppen verwandte Theorie als Ansatz wählen kann, um zu denselben Ergebnissen zu gelangen. In diesem Fall werden sogenannte verschoben–symmetrische Diagramme betrachtet, bei denen die l –Balkenentfernung einer l –Hakenentfernung im klassischen Sinne entspricht, so dass man in natürlicher Weise einem l –Balken eine Beinlänge zuweisen kann. Eine Darstellung dieses Zugangs findet sich in Kapitel 10 von [14].

Da sich dieser Zugang aber schlecht für eine rechnerische Implementierung der Morris'schen Rekursionsformel eignet, wird in dieser Arbeit im Hinblick auf Abschnitt 3.8 dieser Weg nicht weiter verfolgt.

3.4.7 Beispiel

Wir führen obiges Beispiel weiter fort. Aus den Abaki



erkennt man, dass der entfernte Balken vom '+'–Typ eine Beinlänge von 1 besitzt, da eine Kugel beim Verschieben „übersprungen“ wird. Der Balken vom '0'–Typ, der im mittleren Abakus entfernt wird, hat eine Beinlänge von 2. Aus dem letzten Abakus liest man ab, dass der entfernte Balken vom '-'–Typ wieder die Beinlänge 1 besitzt.

Mit Hilfe der entwickelten Kombinatorik kann jetzt ein sehr wichtiger Satz formuliert werden:

3.4.8 Satz (Morris' Rekursionsformel)

Es seien $\lambda \in \mathcal{D}_n$, $\pi \in \mathcal{O}_n$ und l ein Teil von π . Weiter bezeichne $B_l(\lambda) \subseteq \mathcal{D}_{n-l}$ die Menge aller Partitionen, die aus λ durch Entfernung eines l -Balkens hervorgehen. Dann gilt

$$\langle \lambda \rangle(\pi) = \sum_{\mu \in B_l(\lambda)} (-1)^{L_\lambda(\mu)} 2^{m(\mu)} \langle \mu \rangle(\pi \setminus l). \quad (3.1)$$

Dabei ist $L_\lambda(\mu)$ die Beinlänge des entfernten Balkens und $m(\mu) = 1$, falls μ ungerade und λ gerade ist, sonst ist $m(\mu) = 0$. Durch $\pi \setminus l$ wird diejenige Partition aus \mathcal{O}_{n-l} bezeichnet, die aus allen Teilen von π ausser l besteht. Per Konvention fasst man die leere Partition $[\]$ als eine Partition ungerader Teile auf und setzt $\langle [\] \rangle([\]) := 1$.

Beweis: Siehe Theorem 10.1 in [14]. ■

3.4.9 Beispiel

Für $\lambda = [7, 5, 3, 2, 1]$ und $\pi = [5, 5, 5, 3]$ und $l = 3$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle 7, 5, 3, 2, 1 \rangle(5, 5, 5, 3) = \\ - \langle 5, 4, 3, 2, 1 \rangle(5, 5, 5) + \langle 7, 5, 2, 1 \rangle(5, 5, 5) - \langle 7, 5, 3 \rangle(5, 5, 5) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Die Koeffizienten ergeben sich aus den Beinlängen, die wir in 3.4.7 abgelesen haben. Da λ eine ungerade Partition ist, können keine geraden Koeffizienten auftreten.

Im Spezialfall von $l = 1$ erhält man aus 3.4.8 sofort Formeln, wie sich Spincharaktere nach Induktion nach $\tilde{\mathcal{S}}_{n+1}$ oder Einschränken auf $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}$ in Irreduzible zerlegen lassen. Dies sind die sogenannten Branching-Rules.

Es gelten folgende **Bezeichnungen**:

Es bezeichne $M(\lambda) \subseteq \mathcal{D}_{n-1}$ die Menge aller Partitionen, die aus λ durch Subtraktion von 1 von einem Teil von λ , ohne dass ein Teil 0 wird, hervorgehen. Ist $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}, 1]$, dann sei $\lambda^- = [\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell-1}]$. Umgekehrt sei $N(\lambda) \subseteq \mathcal{D}_{n+1}$, die Menge aller Partitionen, die aus λ entstehen, wenn man 1 zu einem Teil addiert. Ist $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_\ell]$ und $\lambda_\ell > 1$, dann sei $\lambda^+ = [\lambda_1, \dots, \lambda_\ell, 1]$.

Weiter sei

$$\langle \lambda \rangle^* = \begin{cases} \langle \lambda \rangle & \text{falls } \varepsilon(\lambda) = 1, \\ \langle \lambda \rangle + \langle \lambda \rangle^a & \text{falls } \varepsilon(\lambda) = -1. \end{cases}$$

3.4.10 Folgerung (Branching–Rules)

Mit obigen Bezeichnungen gilt

$$\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{S}}_{n-1} = \delta_{1, \lambda_\ell} \langle \lambda^- \rangle + \sum_{\mu \in M(\lambda)} \langle \mu \rangle^* \quad (3.3)$$

$$\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{\mathcal{S}}_{n+1} = (1 - \delta_{1, \lambda_\ell}) \langle \lambda^+ \rangle + \sum_{\mu \in N(\lambda)} \langle \mu \rangle^* \quad (3.4)$$

Analoge Regeln gelten für den assoziierten Charakter $\langle \lambda \rangle^a$. In diesem Fall stehen auf der rechten Seite der Gleichungen die assoziierten Charaktere $\langle \lambda^- \rangle^a$ bzw. $\langle \lambda^+ \rangle^a$.

Beweis: Wir beweisen zuerst (3.3). Es sei $\pi \in \mathcal{P}_{n-1}$. Um den Wert von des Charakters $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{S}}_{n-1}$ auf der ersten Klasse der Elemente mit Zykeltyp π zu bestimmen, muss man $\langle \lambda \rangle$ auf der Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ auswerten, welche die entsprechenden Elemente enthält. Es gilt folglich zur Bestimmung von $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{S}}_{n-1}(\pi)$ den Wert $\langle \lambda \rangle(\pi, 1)$ zu berechnen.

Ist $\pi \in \mathcal{P}_{n-1}^- \setminus \mathcal{D}_{n-1}^-$ oder $\pi \in \mathcal{P}_{n-1}^+ \setminus \mathcal{O}_{n-1}$ so ist jeweils auch die Partition $(\pi, 1)$ vom selben Typ. Nach Satz 3.3.5 steht damit auf beiden Seiten der Gleichung von (3.3) in beiden Fällen eine Null und (3.3) gilt.

Ist $\pi \in \mathcal{D}_{n-1}^-$, so ist auf der rechten Seite $\langle \mu \rangle(\pi)$ nur dann ungleich null, wenn $\mu = \pi$ ist. In diesem Fall ist aber $\langle \mu \rangle$ nicht selbst-assoziiert und deshalb ist $\langle \mu \rangle^*(\pi) = 0$. Folglich reduziert sich die rechte Seite zu $\delta_{1, \lambda_\ell} \langle \lambda^- \rangle(\pi)$. Ist $\lambda^- \neq \pi$, so folgt, dass auch $\lambda \neq (\pi, 1)$ ist und auf beiden Seiten von (3.3) steht eine Null. Ist $\lambda^- = \pi$, so ist auch $\lambda = (\pi, 1)$ und beide Seiten von (3.3) sind gleich $\langle \lambda^- \rangle(\pi)$.

Es bleibt also nur der Fall ' $\pi \in \mathcal{O}_{n-1}$ ' zu betrachten. Ist $\pi \in \mathcal{O}_{n-1}$, so kann man mit Hilfe der Rekursionsformel von Morris durch Entfernung von 1–Balken zum gewünschten Ergebnis gelangen.

Um die Koeffizienten von (3.1) zu bestimmen, erfolgt zunächst eine Vorbetrachtung, wann $m(\mu)$ aus Satz 3.4.8 für $\mu \in M(\lambda)$ ungleich 0 ist:

Ist $\mu \in \mathcal{D}_{n-1}^+$ gerade, dann ist $m(\mu) = 0$. Im anderen Fall ist $\mu \in \mathcal{D}_{n-1}^-$ eine ungerade Partition. Wegen $\mu \in M(\lambda)$ ist $\ell(\mu) = \ell(\lambda)$, also ist λ gerade und damit $m(\mu) = 1$. Das jeweilige Vorzeichen der Koeffizienten ist positiv, da die Beinlänge eines 1–Balkens immer null ist. Die Koeffizienten aus (3.1) sind damit bestimmt und eine direkte Anwendung von Satz 3.4.8 mit $l = 1$ ergibt dann:

$$\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{S}}_{n-1}(\pi) = \delta_{1, \lambda_\ell} \langle \lambda^- \rangle(\pi) + \sum_{\substack{\mu \in M(\lambda) \\ \varepsilon(\mu) = -1}} 2 \langle \mu \rangle(\pi) + \sum_{\substack{\mu \in M(\lambda) \\ \varepsilon(\mu) = 1}} \langle \mu \rangle(\pi). \quad (3.5)$$

Beachtet man, dass wegen $\pi \in \mathcal{O}_{n-1}$ für die Charakterwerte $\langle \mu \rangle(\pi) = \langle \mu \rangle^a(\pi)$ für alle $\mu \in M(\lambda)$ (man vgl. Satz 3.3.5) gilt, so kann man in (3.5) sowohl $2 \langle \mu \rangle$ für ungerades μ

als auch $\langle \mu \rangle$ für gerades μ durch $\langle \mu \rangle^*$ ersetzen.

Insgesamt gilt (3.3) für alle Klassen von $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}$ und damit ist (3.3) bewiesen.

Zum Beweis von (3.4) folgt mit Frobenius Reziprozität für ein $\mu \in \mathcal{D}_{n+1}$, dass $\langle \mu \rangle$ genau dann ein Konstituent von $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{\mathcal{S}}_{n+1}$ ist, wenn $\langle \lambda \rangle$ ein Konstituent von $\langle \mu \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{S}}_n$ ist. Dies ist nach (3.3) genau dann der Fall, wenn λ durch Entfernung eines 1-Balkens aus μ hervorgeht. Folglich ist $\langle \mu \rangle$ dann und nur dann ein Konstituent von $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{\mathcal{S}}_{n+1}$, wenn μ aus λ durch Hinzufügen eines 1-Balkens entsteht.

Ist μ ungerade, so folgt aus (3.3) wegen

$$\langle \mu \rangle^a \downarrow \tilde{\mathcal{S}}_n = \delta_{1, \mu_1(\mu)} \langle \mu^- \rangle^a + \sum_{\lambda \in M(\mu)} \langle \lambda \rangle^*,$$

dass mit $\langle \mu \rangle$ auch der irreduzible Charakter $\langle \mu \rangle^a$ im induzierten von $\langle \lambda \rangle$ enthalten ist. Ist 1 kein Teil von λ , dann ist von den beiden assoziierten Charakteren $\langle \lambda, 1 \rangle$ und $\langle \lambda, 1 \rangle^a$ gemäß (3.3) nur $\langle \lambda, 1 \rangle = \langle \lambda^+ \rangle$ ein Konstituent von $\langle \lambda \rangle \uparrow \tilde{\mathcal{S}}_{n+1}$, auch wenn λ eine ungerade Partition ist. Damit folgt (3.4). ■

3.5 Die Klassen und Charaktere von $\tilde{\mathcal{A}}_n$

In diesem Abschnitt wollen wir in Analogie zu den vorangegangenen Abschnitten die Konjugiertenklassen und Spincharaktere der Gruppen $\tilde{\mathcal{A}}_n$ betrachten.

Bekanntlich gibt es zu einem $\pi \in \mathcal{P}_n$ genau dann zwei Konjugiertenklassen dieses Zykeltyps in der \mathcal{A}_n , wenn $n \geq 2$ und $\pi \in \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n^+$ ist (vgl. Lemma 1.2.10 in [18]). In diesem Fall liegt es nahe eine Bezeichnung einzuführen, die es erlaubt die beiden Konjugiertenklassen zu unterscheiden. Ist also eine durch π indizierte Klasse der \mathcal{S}_n die Vereinigung zweier \mathcal{A}_n -Konjugiertenklassen, so werden diese mit π_+ bzw. π_- bezeichnet. Dabei bezeichne π_+ diejenige Klasse, welche das Element $(1, \dots, \pi_1)(\pi_1 + 1, \dots, \pi_1 + \pi_2) \cdots (\dots, n) \in \mathcal{S}_n$ enthält.

Wie beim Übergang von \mathcal{S}_n zu $\tilde{\mathcal{S}}_n$ gibt es auch beim Übergang von \mathcal{A}_n zu $\tilde{\mathcal{A}}_n$ aufspaltende Klassen (vgl. 3.2.3):

3.5.1 Satz

Eine Konjugiertenklasse von \mathcal{A}_n , die Elemente des Zykeltyps $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ enthält, spaltet genau dann in zwei Klassen der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ auf, wenn $\pi \in \mathcal{O}_n$ oder $\pi \in \mathcal{D}_n^+ \setminus \mathcal{O}_n$ ist.

Beweis: Siehe Theorem 3.9 in [14]. ■

Wie im Fall der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ können wir die Zentralisatorordnungen der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ -Konjugiertenklassen daraus folgern, ob die zugehörigen \mathcal{A}_n -Konjugiertenklassen aufspalten oder nicht. Wir erhalten:

3.5.2 Bemerkung

Es sei $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{A}}_n$ und $g = \theta(\tilde{g}) \in \mathcal{A}_n$. Für die Ordnung des Zentralisators von \tilde{g} gilt

$$|C_{\tilde{\mathcal{A}}_n}(\tilde{g})| = 2|C_{\mathcal{A}_n}(g)|,$$

falls die \mathcal{A}_n -Konjugiertenklasse von g aufspaltend ist. Sonst entspricht die Ordnung von $C_{\tilde{\mathcal{A}}_n}(\tilde{g})$ der Ordnung des Zentralisators von g in \mathcal{A}_n .

Da die Spincharaktere der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bekannt sind, kann man ihre Entsprechungen im Fall der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ durch Anwendung der Clifford-Theorie erhalten. In Abschnitt 1.2 haben wir gesehen, dass $\tilde{\mathcal{S}}_0 \cong \tilde{\mathcal{A}}_0$ und $\tilde{\mathcal{S}}_1 \cong \tilde{\mathcal{A}}_1$ ist, so dass eine Anwendung der Clifford-Theorie nur für $n \geq 2$ sinnvoll ist.

3.5.3 Satz

Für $n \geq 2$ gilt für die Einschränkung eines irreduziblen Spincharakters $\langle \lambda \rangle$ der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ auf die Untergruppe $\tilde{\mathcal{A}}_n$:

$$\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{A}}_n = \phi + \phi', \quad (3.6)$$

falls $\lambda \in \mathcal{D}_n^+$, wobei ϕ und ϕ' irreduzible, konjugierte Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ sind. Ist $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$, so gilt

$$\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{A}}_n \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{A}}_n), \quad (3.7)$$

d.h. die Restriktion ist selbst ein irreduzibler Spincharakter von $\tilde{\mathcal{A}}_n$. Die Menge der so gewonnenen Charaktere ist $\text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{A}}_n)$.

Beweis: Siehe Theorem 4.2 in [14]. ■

3.5.4 Definition (Komplement)

Es sei $n \geq 2$ und $\lambda \in \mathcal{D}_n^+$. Wir bezeichnen die Differenzen $\phi - \phi'$ und $\phi' - \phi$ der irreduziblen Konstituenten von $\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{A}}_n$ Schur folgend als Komplemente des Spincharakters $\langle \lambda \rangle$.

3.5.5 Satz

Für eines der Komplemente δ_λ eines Spincharakters $\langle \lambda \rangle$ gilt:

$$\delta_\lambda(\pi_\pm) = \begin{cases} \pm \sqrt{-1}^{\frac{n-l(\pi)}{2}} \sqrt{\prod_j^{l(\pi)} \pi_j} & , \quad \pi = \lambda \\ 0 & , \quad \pi \neq \lambda. \end{cases} \quad (3.8)$$

Dabei ist $\delta_\lambda(\pi)$ als Wert von δ_λ auf der ersten durch π indizierten Klasse von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ gemeint. Spaltet die Konjugiertenklasse der \mathcal{A}_n , die Elemente des Zykeltyps π enthält, beim Übergang in die \mathcal{S}_n nicht auf, so ist in (3.8) auf der linken Seite der Index und auf der rechten Seite das Vorzeichen wegzulassen.

Beweis: Siehe Abschnitt IX in [28]. ■

Mit Hilfe des Satzes 3.5.5 lassen sich die irreduziblen Spincharaktere der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ aus Satz 3.5.3 genau angeben. Wir definieren:

$$\langle \lambda \rangle_+ := \frac{1}{2}(\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{A}}_n + \delta_\lambda), \quad (3.9)$$

$$\langle \lambda \rangle_- := \frac{1}{2}(\langle \lambda \rangle \downarrow \tilde{\mathcal{A}}_n - \delta_\lambda). \quad (3.10)$$

Sind folglich die Werte der Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bekannt, so erhält man aus ihnen leicht ihre Entsprechungen in $\tilde{\mathcal{A}}_n$.

3.6 Die Charaktere der isoklinen Gruppe $\hat{\mathcal{S}}_n$

Es soll nun genauer auf die Bedeutung der Isoklinie für die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ eingegangen werden. Im Vordergrund steht die Frage, wie sich die Darstellungstheorie dieser Gruppen voneinander unterscheidet. Insbesondere wird in diesem Abschnitt die Rechtfertigung geliefert, warum es genügt die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ zu betrachten, wie es in dieser Arbeit getan wird. Das wichtige Ergebnis ist, dass man jede irreduzible Darstellung von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ in eine solche von $\hat{\mathcal{S}}_n$ überführen kann. Das Verfahren Darstellungen ineinander zu überführen kann explizit formuliert werden. Es ist in einem allgemeineren Kontext in [5] in Abschnitt III.5 zu finden.

Wir betrachten die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ für $n \geq 2$ (für $n < 1$ sind sie isomorph). Mit z bzw. y bezeichnen wir das jeweilige zentrale Element aus Satz 1.2.2 und wir setzen $Z := \langle z \rangle \leq \tilde{\mathcal{S}}_n$ und $Y := \langle y \rangle \leq \hat{\mathcal{S}}_n$.

Es sei $\tilde{\chi} : \tilde{\mathcal{S}}_n \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{C})$ eine irreduzible Spinmatrixdarstellung von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, d.h. $\tilde{\chi}(z) = -E_m$, wobei E_m die m -dimensionale Einheitsmatrix ist. Mit dem Lemma von Schur gilt

$$\tilde{\chi}_Z = \lambda E_m,$$

wobei λ der lineare Charakter von Z ist, der z auf das Körperelement -1 abbildet.

Es sei $L := \tilde{\mathcal{S}}_n \wedge_{\mathcal{S}_n} \hat{\mathcal{S}}_n$ das subdirekte Produkt von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\hat{\mathcal{S}}_n$ bezüglich \mathcal{S}_n , d.h.

$$L = \{(\tilde{g}, \hat{g}) \in \tilde{\mathcal{S}}_n \times \hat{\mathcal{S}}_n \mid \tilde{\pi}(\tilde{g}) = \hat{\pi}(\hat{g})\} \leq \tilde{\mathcal{S}}_n \times \hat{\mathcal{S}}_n,$$

mit den Epimorphismen $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{S}}_n \twoheadrightarrow \mathcal{S}_n$ und $\hat{\pi} : \hat{\mathcal{S}}_n \twoheadrightarrow \mathcal{S}_n$. Damit ist L selbst eine zentrale Erweiterung von \mathcal{S}_n mit zugehörigem Epimorphismus $\pi : L \twoheadrightarrow \mathcal{S}_n$, $(\tilde{g}, \hat{g}) \mapsto \tilde{\pi}(\tilde{g})$. Weiter ist $Z = \text{Kern}(\tilde{\pi})$ und $Y = \text{Kern}(\hat{\pi})$.

Nach Satz 1.2.6 existiert ein Isomorphismus $\xi : \tilde{\mathcal{S}}'_n \rightarrow \hat{\mathcal{S}}'_n$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n & \xrightarrow{c_1} & \tilde{\mathcal{S}}'_n \\ \text{id} \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \xi \\ \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n & \xrightarrow{c_2} & \hat{\mathcal{S}}'_n \end{array}$$

wobei c_1 und c_2 die Kommutatorabbildungen sind, d.h. für $\tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ gilt:

$$\begin{aligned} c_1 : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n &\rightarrow \tilde{\mathcal{S}}'_n, \\ (\tilde{\pi}(\tilde{g}), \tilde{\pi}(\tilde{h})) &\mapsto [\tilde{g}, \tilde{h}] \end{aligned}$$

und analog für c_2 .

Sind $\tilde{g}, \tilde{h} \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ mit $\tilde{\pi}(\tilde{g}) = g \in \mathcal{S}_n$ und $\hat{\pi}(\tilde{h}) = h \in \mathcal{S}_n$, so folgt damit

$$\xi([\tilde{g}, \tilde{h}]) = \xi \circ c_1((g, h)) = c_2((g, h)) = [\hat{g}, \hat{h}],$$

und $\hat{\pi}(\hat{g}) = g$, sowie $\hat{\pi}(\hat{h}) = h$. Damit sind (\tilde{g}, \hat{g}) und (\tilde{h}, \hat{h}) Elemente von L und wir erhalten $[(\tilde{g}, \hat{g}), (\tilde{h}, \hat{h})] = ([\tilde{g}, \tilde{h}], \xi([\tilde{g}, \tilde{h}]))$ und folglich ist

$$L' = \{(\tilde{g}', \xi(\tilde{g}')) \mid \tilde{g}' \in \tilde{\mathcal{S}}'_n\}. \quad (3.11)$$

Ist $\tilde{\tau} : L \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}_n$ der Epimorphismus, der L auf $\tilde{\mathcal{S}}_n$ vermöge $\tilde{\tau}((\tilde{g}, \hat{g})) = \tilde{g}$ abbildet, so ist $\text{Kern}(\tilde{\tau}) = \{(1, 1), (1, y)\}$ und damit ist $\text{Kern}(\tilde{\tau}) \cap L' = \{(1, 1)\}$. Folglich induziert $\tilde{\tau}$ einen Isomorphismus $\tilde{\tau}|_{L'} : L' \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}'_n$, der einen Isoklinismus $(\text{id}, \tilde{\tau}|_{L'})$ von (L, π) nach $(\tilde{\mathcal{S}}_n, \tilde{\pi})$ liefert.

Unser Ziel ist es, den linearen Charakter λ auf L zu einem Charakter μ^* fortzusetzen, um mit seiner Hilfe irreduzible Spindarstellungen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ in solche von $\hat{\mathcal{S}}_n$ zu überführen. Dazu verfahren wir wie folgt:

Es sei mit \tilde{t}_1 und \hat{t}_1 jeweils der Lift der Transposition s_1 aus Satz 1.2.2 in die Gruppe $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bzw. $\hat{\mathcal{S}}_n$ bezeichnet.

Für $n = 2$ rechnen wir nach, dass $L = \langle (1, y) \rangle \times \langle (\tilde{t}_1, \hat{t}_1) \rangle$ ist. Die Untergruppe $U := \langle (\tilde{t}_1, \hat{t}_1) \rangle$ ist zyklisch von Ordnung vier und enthält die Einbettung von Z in L als Untergruppe.

Wir können folglich λ auf U zu μ fortsetzen, indem wir (\tilde{t}_1, \hat{t}_1) auf eine primitive vierte Einheitswurzel abbilden. Durch Inflation auf L erhalten wir so einen linearen Charakter μ^* von L :

$$\begin{aligned} \mu^* : L &\longrightarrow \mathbb{C}^*, \\ (\tilde{g}, \hat{g}) &\longmapsto \mu((\tilde{g}, \hat{g})U). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für $n = 3$ ist wegen der Isoklinie von $\tilde{\mathcal{S}}_3$ und L die Kommutatorgruppe L' isomorph zu einer zyklischen Gruppe mit drei Elementen. Die Faktorgruppe L/L' ist abelsch und eine Rechnung ergibt, dass $L/L' = \langle (1, y)L' \rangle \times \langle (\tilde{t}_1, \hat{t}_1)L' \rangle = YL'/L' \times UL'/L'$ ist, wobei wir wieder $U := \langle (\tilde{t}_1, \hat{t}_1) \rangle$ setzen. Da $Z \cong ZL'/L' \leq UL'/L' \cong U$ ist, können wir λ auf $Z(L)L'/L'$ zu μ durch

$$\begin{aligned} \mu : Z(L)L'/L' &\longrightarrow \mathbb{C}^*, \\ (1, 1)L' &\longmapsto 1 \\ (z, 1)L' &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

fortsetzen. Der Charakter μ lässt sich auf UL'/L' zu μ' wie im Fall $n = 2$ fortsetzen: wir bilden den Erzeuger $(\tilde{t}_1, \hat{t}_1)L'$ auf eine primitive vierte Einheitswurzel ab. Durch Inflation wird μ' zu einem Charakter von L/L' und wir erhalten wie im Fall $n = 2$ eine Fortsetzung μ^* des Charakters λ :

$$\begin{aligned} \mu^* : L &\longrightarrow \mathbb{C}^*, \\ (\tilde{g}, \hat{g}) &\longmapsto \mu'((\tilde{g}, \hat{g})L'). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es sei nun $n \geq 4$. Dann ist das Zentrum $Z(L)$ von L gerade das direkte Produkt von Z und Y . Desweiteren ist wegen (3.11) $L' \cap Z(L) = D := \langle (z, y) \rangle$ und aufgrund der Isoklinie von L und $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ist $L' \cong \tilde{\mathcal{A}}_n$.

Wegen $Z(L)L'/L' \cong Z(L)/D \cong Z$, kann man λ auf $Z(L)L'/L'$ zu μ wie im Fall $n = 3$ fortsetzen. Die Gruppe L/L' ist eine abelsche Gruppe mit vier Elementen. Das Element $(\tilde{t}_1, \hat{t}_1)L' \in L/L'$ hat gerade die Ordnung vier. Folglich ist L/L' zyklisch und μ lässt sich auf L/L' fortsetzen, indem man $(\tilde{t}_1, \hat{t}_1)L'$ auf eine primitive vierte Einheitswurzel abbildet. Durch Inflation erhält man einen linearen Charakter von L :

$$\begin{aligned} \mu^* : L &\longrightarrow \mathbb{C}^*, \\ (\tilde{g}, \hat{g}) &\longmapsto \mu((\tilde{g}, \hat{g})L'). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Für ein $n \geq 2$ liefert die entsprechende Konstruktion eine irreduzible Matrixdarstellung von L :

$$\mathfrak{X} : (\tilde{g}, \hat{g}) \mapsto \mu^*(\tilde{g}, \hat{g})\tilde{\mathfrak{X}}(\tilde{g}).$$

Wegen $\mathfrak{X}(z, 1) = \mu^*(z, 1)\tilde{\mathfrak{X}}(z) = \lambda(z)\tilde{\mathfrak{X}}(z) = (-1)(-E_n) = E_n$, liegt $X := \{(z, 1) | z \in Z\}$ im Kern von \mathfrak{X} . Damit ist wegen $L/X \cong \hat{\mathcal{S}}_n$ (vermöge $\hat{\tau} : L \rightarrow \hat{\mathcal{S}}_n, (\tilde{g}, \hat{g}) \mapsto \hat{g}$), durch obige Konstruktionen auch eine irreduzible Darstellung $\hat{\mathfrak{X}}$ von $\hat{\mathcal{S}}_n$ gegeben:

$$\hat{\mathfrak{X}}(\hat{g}) := \mu^*(\tilde{g}, \hat{g})\tilde{\mathfrak{X}}(\tilde{g}), \quad (3.15)$$

wobei $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ ein beliebiges Element mit $\tilde{\pi}(\tilde{g}) = \hat{\pi}(\hat{g})$ ist.

Der Wert von $\hat{\mathfrak{X}}$ ist unabhängig von der Wahl von \tilde{g} , denn wählt man statt \tilde{g} das Element $z\tilde{g}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{X}}(\hat{g}) &= \mu^*(z\tilde{g}, \hat{g})\tilde{\mathfrak{X}}(z\tilde{g}) \\ &= \mu^*(z, 1)\tilde{\mathfrak{X}}(z)\mu^*(\tilde{g}, \hat{g})\tilde{\mathfrak{X}}(\tilde{g}) \\ &= \mu^*(\tilde{g}, \hat{g})\tilde{\mathfrak{X}}(\tilde{g}). \end{aligned}$$

Ist $\tilde{g} \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ das Element $\tilde{g} = \tilde{t}_j \cdots \tilde{t}_{j+s-1}$ für geeignete j und s , so ergibt eine kurze Rechnung:

(i) Im Fall, dass s gerade ist, gilt

$$\mu^*(\tilde{g}, \hat{g}) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } s \equiv 0 \pmod{4} \\ -1 & , \text{ falls } s \equiv 2 \pmod{4}. \end{cases} \quad (3.16)$$

(ii) Im Fall, dass s ungerade ist, gilt

$$\mu^*(\tilde{g}, \hat{g}) = \begin{cases} \pm i & , \text{ falls } s \equiv 1 \pmod{4} \\ \mp i & , \text{ falls } s \equiv -1 \pmod{4}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Dabei ist das Vorzeichen in letzterem Fall davon abhängig, ob man λ in (3.12) oder μ in (3.13) und (3.14) durch i oder $-i$ fortsetzt.

Wegen der Linearität von μ^* lässt sich bis auf ein Vorzeichen bestimmen, wie die Werte der Spincharaktere von $\hat{\mathcal{S}}_n$ aus denen der Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ hervorgehen, d.h. ob sie sich tatsächlich nur um ein Vorzeichen unterscheiden, oder ob sie mit einer primitiven vierten Einheitswurzel multipliziert werden müssen. Ist $\hat{\mathfrak{X}}$ eine der oben in (3.15) konstruierten irreduziblen Darstellungen und $\hat{g} \in \hat{\mathcal{S}}_n$ ein Element von $\hat{\mathcal{S}}_n = \langle y, \hat{t}_1, \dots, \hat{t}_{n-1} \rangle$, so gilt:

(i) Ist $\hat{\pi}(\hat{g})$ vom Zykeltyp $\pi \in \mathcal{P}_n^+$, d.h. \hat{g} enthält als Produkt der \hat{t}_i und y geschrieben eine gerade Anzahl von Faktoren, für die (3.17) gilt, so ist

$$\mu^*(\tilde{g}, \hat{g}) = \pm 1. \quad (3.18)$$

Die Charakterwerte unterscheiden sich von denen der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ höchstens um ein Vorzeichen.

- (ii) Ist $\hat{\pi}(\hat{g})$ vom Zykeltyp $\pi \in \mathcal{P}_n^-$, d.h. \hat{g} enthält als Produkt der \hat{t}_i und y geschrieben eine ungerade Anzahl Faktoren, für die (3.17) gilt, so ist

$$\mu^*(\tilde{g}, \hat{g}) = \pm i. \quad (3.19)$$

Die Charakterwerte von $\hat{\mathcal{S}}_n$ gehen folglich aus denen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ durch Multiplikation mit i oder $-i$ hervor.

Spaltet eine \mathcal{S}_n -Klasse auf, so lässt sich der Wert eines Spincharakters auf der zugehörigen ersten $\tilde{\mathcal{S}}_n$ -Konjugiertenklasse in den Wert, den er auf der zugehörigen zweiten $\tilde{\mathcal{S}}_n$ -Klasse annimmt, durch Multiplikation mit -1 überführen und umgekehrt.

Für die isokline Gruppe $\hat{\mathcal{S}}_n$ gelten Bemerkung 3.2.1 und Satz 3.2.3 in analoger Weise. Wir können folglich durch Wahl, welche $\hat{\mathcal{S}}_n$ -Konjugiertenklasse wir im Falle eines Aufspaltens einer \mathcal{S}_n -Konjugiertenklasse als zugehörige erste, bzw. zweite Klasse bezeichnen wollen, das Vorzeichen in (3.18) und (3.19) vernachlässigen.

Es sei C eine Konjugiertenklasse von $\hat{\mathcal{S}}_n$. Mit $\pi \in \mathcal{P}_n$ sei der Zykeltyp ihrer Elemente unter der kanonischen Projektion auf \mathcal{S}_n bezeichnet. Für ein $\lambda \in \mathcal{D}_n$ sei mit $\langle \hat{\lambda} \rangle$ der irreduzible Spincharakter von $\hat{\mathcal{S}}_n$ bezeichnet, der aus $\langle \lambda \rangle \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ durch obige Konstruktion der irreduziblen Spindarstellungen von $\hat{\mathcal{S}}_n$ entsteht.

Ist $\pi \in \mathcal{O}_n$, so bezeichnen wir C als die erste Klasse von $\hat{\mathcal{S}}_n$, deren Elemente unter der kanonischen Projektion auf \mathcal{S}_n vom Zykeltyp π sind, falls der Wert eines Spincharakters (und damit der Wert jedes Spincharakters) von $\hat{\mathcal{S}}_n$ dasselbe Vorzeichen hat, wie der Wert des zugehörigen Spincharakters von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ auf der gemäß Definition 3.2.4 definierten ersten Klasse von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, die durch π indiziert ist.

Ist $\pi \in \mathcal{D}_n^-$, so bezeichnen wir C als die erste Klasse von $\hat{\mathcal{S}}_n$, deren Elemente unter der kanonischen Projektion auf \mathcal{S}_n vom Zykeltyp π sind, falls für ein $g \in C$ und den Spincharakter $\langle \hat{\pi} \rangle$ von $\hat{\mathcal{S}}_n$ gilt:

$$\langle \hat{\pi} \rangle(g) = i \langle \pi \rangle(\pi),$$

wobei der Wert $\langle \pi \rangle(\pi)$ Satz 3.3.5 zu entnehmen ist.

Ist $\pi \in \mathcal{P}_n^+ \setminus \mathcal{O}_n$ oder $\pi \in \mathcal{P}_n^- \setminus \mathcal{D}_n^-$ so gibt es nur eine Klasse, welche durch π indiziert ist. Die Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ verschwinden auf C (man vergleiche Satz 3.3.5) und nach obiger Konstruktion der irreduziblen Spindarstellungen von $\hat{\mathcal{S}}_n$ damit auch die bewirkten Charaktere von $\hat{\mathcal{S}}_n$.

Somit lassen sich die Vorzeichen in (3.18) und (3.19) vernachlässigen und man erhält unmittelbar daraus und aus (3.15), dass, um die Spincharaktere von $\hat{\mathcal{S}}_n$ zu erhalten, nur die exceptionellen Werte der Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ mit der vierten Einheitswurzel i multipliziert werden müssen.

In GAP lassen sich ohne Umstände die Charaktertafeln isokliner Gruppen ausgeben. Man verwende dafür den Befehl `CharacterTableIsoclinic`, um die Charaktertafel der isoklinen Gruppe zu erzeugen.

3.7 Elementordnungen und Potenzabbildungen

Die vorhergehenden Abschnitte dieses Kapitels versetzen uns fast in die Lage die Charaktertafeln von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$ vollständig zu beschreiben. Zu unserem Ziel, diese vollständige Beschreibung zu ermöglichen, fehlt nur noch die Kenntnis der Elementordnungen der Konjugiertenklassen und der Potenzabbildungen.

Wir wollen zunächst in diesem Abschnitt jeder Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ die Ordnungen ihrer Elemente zuweisen. Dazu werden wir die Frage der Ordnung eines Elements von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ für die gelifteten Standardvertreter jeden Zykeltyps (vgl. Vorbemerkung zu Definition 3.2.4) beantworten.

Es bezeichne $C_s := (i, i+1, \dots, i+s-1) \in \mathcal{S}_n$ einen Zyklus der Länge s . Wir können C_s folglich als Produkt der Länge $s-1$ von Transpositionen darstellen:

$$C_s = s_i s_{i+1} \cdots s_{i+s-2}.$$

Mit C'_s bezeichnen wir

$$C'_s = t_i t_{i+1} \cdots t_{i+s-2},$$

was wir als den Standardlift von C_s nach $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bezeichnen wollen. Über die Ordnung dieses Elementes gibt folgendes Lemma Auskunft, das sich in einer Fußnote in [28] findet.

3.7.1 Lemma

Ist s ungerade, so gilt:

$$|C'_s| = \begin{cases} s & , \text{ falls } \frac{s^2-1}{8} \equiv 0 \pmod{2} \\ 2s & , \text{ falls } \frac{s^2-1}{8} \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Ist s gerade, so gilt:

$$|C'_s| = \begin{cases} s & , \text{ falls } \frac{s}{2} \equiv 0 \text{ oder } 3 \pmod{4} \\ 2s & , \text{ falls } \frac{s}{2} \equiv 1 \text{ oder } 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Beweis: Siehe Abschnitt III.11 in [28]. ■

Bevor wir die Ordnung eines Konjugiertenklassenvertreters von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ angeben können, benötigen wir noch die folgende Beobachtung, die sich unmittelbar aus der Präsentation von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ergibt.

3.7.2 Bemerkung

Für $r, s \in \mathbb{N}$ seien $C'_s = t_i t_{i+1} \cdots t_{i+s-2}$ und $C'_r = t_j t_{j+1} \cdots t_{j+r-2}$ für geeignete i und j mit $j - i - s + 2 > 1$. Damit gilt:

$$C'_s C'_r = \begin{cases} C'_r C'_s & , \text{ falls } s \text{ oder } r \text{ ungerade.} \\ C'_r C'_s z & , \text{ falls } s \text{ und } r \text{ gerade.} \end{cases}$$

Beweis: Aus der letzten Relation der Präsentation von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ (Satz 1.2.2), folgt $C'_s C'_r = C'_r C'_s z^{(s-1)(r-1)}$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Unter Benutzung von Bemerkung 3.7.2 ist es möglich beliebige Potenzen von Produkten gelifteter Zyklen explizit anzugeben:

3.7.3 Lemma

Es seien $\nu_1, \dots, \nu_l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $C'_{\nu_1}, \dots, C'_{\nu_l} \in \tilde{\mathcal{S}}_n$, so dass C_{ν_i} und $C_{\nu_{i+1}}$ für $i = 1, \dots, l-1$ die Voraussetzung von Bemerkung 3.7.2 erfüllen. Mit k sei die Anzahl der geraden ν_i bezeichnet. Damit gilt für $m \geq 1$

$$(C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l})^m = C'^m_{\nu_1} \cdots C'^m_{\nu_l} z^{(1+2+\cdots+m-1)(1+2+\cdots+k-1)}.$$

Dabei ist die Summe $1 + 2 + \cdots + k - 1 = 0$, falls $k = 0$ oder $k = 1$ ist.

Beweis: Die Behauptung ergibt sich aus wiederholter direkter Anwendung von Bemerkung 3.7.2. Wir beweisen sie durch Induktion nach m . Für $m = 1$ ist die Behauptung trivial erfüllt. Wir erhalten als Induktionsannahme, dass

$$(C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l})^m = C'^m_{\nu_1} \cdots C'^m_{\nu_l} z^{(1+2+\cdots+m-1)(1+2+\cdots+k-1)}$$

für ein $m \geq 1$ gilt. Beim Übergang von m nach $m + 1$ erhalten wir wegen der Induktionsannahme:

$$(C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l})^{m+1} = C'^m_{\nu_1} \cdots C'^m_{\nu_l} C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l} z^{(1+2+\cdots+m-1)(1+2+\cdots+k-1)}. \quad (3.20)$$

Durch wiederholte Vertauschungen verschieben wir die rechten C'_{ν_i} in der Reihenfolge $i = 1$ bis $i = l$ zu ihren entsprechenden Potenzen nach links. Wir zählen die C'_{ν_i} , deren ν_i gerade sind, von links nach rechts durch. Ist C_{ν_i} dabei der r -te geliftete Zykel mit geradem ν_i , so müssen $m(k - r)$ Vertauschungen mit einem C_{ν_j} mit geradem ν_j durchgeführt werden. Folglich sind insgesamt $m(1 + 2 + \cdots + k - 1)$ dieser Vertauschungen nötig, um das Zykelprodukt $C'^{m+1}_{\nu_1} \cdots C'^{m+1}_{\nu_l}$ zu erhalten. Damit ergibt sich aus (3.20) und Bemerkung 3.7.2 die Behauptung. ■

Mit Hilfe dieses Lemmas und Lemma 3.7.1 können wir von jeder $\tilde{\mathcal{S}}_n$ -Konjugiertenklasse (und damit auch von jeder $\tilde{\mathcal{A}}_n$ -Konjugiertenklasse) die Ordnung der Elemente bestimmen. Dazu sei s_π der Standardvertreter (vgl. Definition 3.2.4) der \mathcal{S}_n -Konjugiertenklasse, deren

Elemente vom Zykeltyp π sind. Dann lässt sich sein Standardlift \tilde{s}_π für geeignete ν_i als das Produkt $C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}$ schreiben und seine Ordnung mittels der beiden Lemmata ermitteln. Wir können $n \geq 1$ annehmen, da für $n = 0$ die Menge $\mathcal{P}_n = \{[\]\}$ ist und der Lift von $s_{[\]} = 1$ definitionsgemäß $1 \in \tilde{\mathcal{S}}_0$ ist.

3.7.4 Folgerung (Elementordnungen)

Es sei $n \geq 1$ und $s_\pi \in \mathcal{S}_n$ der Standardvertreter vom Zykeltyp $\pi \in \mathcal{P}_n$ und \tilde{s}_π sein Lift nach $\tilde{\mathcal{S}}_n$.

Mit a bezeichnen wir die Anzahl der ungeraden Teile π_i von π , für die $\frac{\pi_i^2-1}{8} \equiv 1 \pmod{2}$ ist und $|s_\pi|/\pi_i$ ungerade ist. Mit b sei die Anzahl der geraden Teile π_i von π bezeichnet, für die $\frac{\pi_i}{2} \equiv 1$ oder $2 \pmod{4}$ ist und $|s_\pi|/\pi_i$ ungerade ist. Schließlich setzen wir $c := 1$, falls sowohl die Anzahl der geraden Teile von π als auch $|s_\pi|$ kongruent 2 oder 3 modulo 4 ist. Sonst ist $c = 0$. Damit gilt:

Die Ordnung von \tilde{s}_π ist genau dann $2|s_\pi|$, falls $a + b + c$ ungerade ist. Sonst ist $|\tilde{s}_\pi| = |s_\pi|$.

Beweis: Die technisch anmutenden Größen a , b und c entstehen beim Durchlaufen der Zyklen von \tilde{s}_π . Die Größen a und b entstehen, indem wir für jeden Faktor der Form C'_{π_i} überprüfen, ob Potenzieren mit der Ordnung von s_π diesen Zykel verschwinden lässt, oder ob ein z stehen bleibt. Da $1 + \cdots + k - 1 = k(k-1)/2$ ist und $k(k-1)/2 \equiv 1 \pmod{2}$ genau dann, wenn $k \equiv 2$ oder $3 \pmod{4}$ ist (und analog für $|s_\pi|$), ergeben sich aus Lemma 3.7.3 auch die Bedingungen an c . ■

Ist $\tilde{s}_\pi = C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}$ und liegt s_π in einer aufspaltende Klasse von \mathcal{S}_n , so liegt $zC'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}$ in der zugehörigen zweiten Klasse nach Definition 3.2.4. Die Ordnung von $zC'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}$ lässt sich leicht aus der Ordnung von $C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}$ gewinnen:

3.7.5 Folgerung

Es sei o die Ordnung von $\tilde{s}_\pi = C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}$ und $d = |s_\pi|$ die Ordnung von s_π . Dann gilt

(a) Ist $o = d$

$$|zC'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}| = \begin{cases} o & , \text{ falls } d \text{ gerade} \\ 2o & , \text{ falls } d \text{ ungerade} \end{cases}$$

(b) Ist $o = 2d$

$$|zC'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l}| = \begin{cases} o & , \text{ falls } d \text{ gerade} \\ o/2 & , \text{ falls } d \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beweis: Es ist $(zC'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l})^o = z^o$. Ist also $o = d$, so ist $z^o = 1$, nur wenn d gerade ist. Sonst ist $z^o = z$ und die Ordnung ist $2o$.

Es sei $o = 2d$ und damit ist $(C'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l})^d = z$. Ist d gerade, so ist wegen $(zC'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l})^d = z$ die Ordnung gerade $2d = o$. Anderenfalls ist d ungerade und damit ist $(zC'_{\nu_1} \cdots C'_{\nu_l})^d = 1$, also die Ordnung in diesem Fall genau $d = o/2$. ■

Da wir nun die Elementordnungen jeder Konjugiertenklasse kennen, können wir diese Information dazu verwenden, die sogenannten Potenzabbildungen der jeweiligen Gruppen zu bestimmen.

3.7.6 Definition (p -te Potenzabbildung)

Es sei G eine endliche Gruppe und p eine Primzahl, welche die Gruppenordnung teilt. Mit $\mathcal{C}(G)$ sei die Menge der Konjugiertenklassen von G bezeichnet. Ist $C \in \mathcal{C}(G)$ und $g \in C$, dann sei $C' \in \mathcal{C}(G)$ diejenige Konjugiertenklasse, die g^p enthält.

Die p -te Potenzabbildung ς_p ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \varsigma_p : \mathcal{C}(G) &\longrightarrow \mathcal{C}(G) \\ C &\longmapsto C', \end{aligned}$$

d.h. jeder Konjugiertenklasse wird diejenige Klasse zugeordnet, welche die p -te Potenz ihrer Vertreter enthält.

Wir wollen im Folgenden darlegen, wie man sowohl für die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ als auch für die Gruppen $\tilde{\mathcal{A}}_n$ entscheiden kann, in welcher Konjugiertenklasse die p -te Potenz eines Elementes liegt.

Wir betrachten zunächst die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Bei den symmetrischen Gruppen liegt eine Konjugiertenklasse durch den Zykeltyp der in ihr enthaltenen Elemente fest. Die Potenzabbildungen der symmetrischen Gruppen sind deshalb leicht zu bestimmen (man vergleiche [24]). Bei ihren Überlagerungsgruppen hat Abschnitt 3.2 gezeigt, dass eine Betrachtung des Zykeltyps der Elemente von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ unter θ nicht mehr in allen Fällen ausreicht. Wir unterscheiden deshalb mehrere Fälle.

3.7.7 Bemerkung

Es sei $g \in \tilde{\mathcal{S}}_n$. Mit $\lambda \in \mathcal{P}_n$ bezeichnen wir den Zykeltyp von $\theta(g)$. Analog sei mit $\pi \in \mathcal{P}_n$ der Zykeltyp von $\theta(g^p)$ bezeichnet.

Spaltet die zu $\theta(g^p)$ gehörende Konjugiertenklasse nicht auf, d.h. ist $\pi \notin \mathcal{O}_n \cup \mathcal{D}_n^-$, so liegt die Konjugiertenklasse von g^p eindeutig durch π fest, da es nur eine $\tilde{\mathcal{S}}_n$ -Klasse gibt, deren Elemente unter θ vom Zykeltyp π sind.

Im anderen Fall ist $\pi \in \mathcal{O}_n \cup \mathcal{D}_n^-$. Folglich gibt es zwei $\tilde{\mathcal{S}}_n$ -Konjugiertenklassen, die durch π indiziert sind.

Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\pi \in \mathcal{O}_n$ ist. Dann ist die Ordnung von $\theta(g^p)$ ungerade und damit d in Folgerung 3.7.5 ebenfalls ungerade. Die beiden $\tilde{\mathcal{S}}_n$ -Konjugiertenklassen, deren Elemente unter θ vom Zykeltyp π sind, haben unterschiedliche Elementordnungen. Damit liegt die Konjugiertenklasse von g^p durch die Ordnung $|g^p|$ fest.

Ist $\pi \in \mathcal{D}_n^-$, so lassen sich die beiden durch π indizierten Klasse nicht mehr durch die Ordnungen ihrer Elemente unterscheiden (vgl. Folgerung 3.7.5, d ist jetzt gerade). In diesem Fall können wir aber die Klasse von g^p durch eine Betrachtung der Charakterwerte

ermitteln: Da $\pi \in \mathcal{D}_n$ und π der Zykeltyp der p -ten Potenz von $\theta(g)$ ist, besteht auch λ , der Zykeltyp von $\theta(g)$, nur aus verschiedenen Teilen und p teilt nicht die Ordnung von g . Damit ist folglich $\pi = \lambda$ und $\langle \lambda \rangle(g) \neq 0$ (vgl. Satz 3.3.5).

Ist ζ eine $|g|$ -te Einheitswurzel, so liegt der Charakterwert $\langle \lambda \rangle(g)$ in der endlichen Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)$ von \mathbb{Q} . Mit $*p$ bezeichnen wir den Galoisautomorphismus von $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$, der ζ auf $\zeta^{*p} = \zeta^p$ abbildet. Für den Wert des Charakters $\langle \lambda \rangle$ auf der Klasse, in der g^p liegt, gilt

$$\langle \lambda \rangle(g^p) = \langle \lambda \rangle(g)^{*p}.$$

Die Frage, in welcher der beiden durch π indizierten Klassen g^p liegt, lässt sich folglich auf die Frage zurückführen, ob $\langle \lambda \rangle(g)$ und $\langle \lambda \rangle(\pi)$, bzw. $-\langle \lambda \rangle(\pi)$ p -te Galoisconjugierte sind, d.h. ob $\langle \lambda \rangle(g)^{*p} = \langle \lambda \rangle(\pi)$ oder $\langle \lambda \rangle(g)^{*p} = -\langle \lambda \rangle(\pi)$ ist.

Die Potenzabbildungen der Gruppen $\tilde{\mathcal{A}}_n$ können mit ähnlichen Methoden bestimmt werden. Es müssen dazu nur mehrere Fälle unterschieden werden, die sich aus dem Aufspalten von Konjugiertenklassen ergeben. Da die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$ für $n = 0$ und $n = 1$ isomorphe Gruppen sind, entsprechen die Potenzabbildungen von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ in diesen Fällen den bereits bestimmten von $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Wir nehmen also für die folgenden Ausführungen $n \geq 2$ an.

3.7.8 Bemerkung

Es sei jetzt $g \in \tilde{\mathcal{A}}_n$ und $\lambda \in \mathcal{P}_n^+$ der Zykeltyp von $\theta(g) \in \mathcal{A}_n$. Mit $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ sei wieder der Zykeltyp von $\theta(g^p)$ bezeichnet.

Im einfachsten Fall existiert genau eine Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathcal{A}}_n$, deren Elemente unter θ den Zykeltyp π haben. Nach den Sätzen 3.2.3 und 3.5.1 tritt dies genau dann ein, wenn $\pi \notin \mathcal{O}_n \cup \mathcal{D}_n^+$ ist. Also liegt in diesem Fall die Klasse von g^p durch den Zykeltyp π fest.

Ist $\pi \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{D}_n^+$, so ist die \mathcal{A}_n -Konjugiertenklasse von $\theta(g)$ zwar aufspaltend, mit Folgerung 3.7.5 ist aber ersichtlich (da dort d in diesem Fall ungerade ist), dass die beiden $\tilde{\mathcal{A}}_n$ -Konjugiertenklassen, deren Elemente unter θ vom Zykeltyp π sind, unterschiedliche Elementordnungen haben. Damit liegt die Konjugiertenklasse von g^p durch die Ordnung $|g^p|$ eindeutig fest.

Ist $\pi \in \mathcal{D}_n^+ \setminus \mathcal{O}_n$, so ist auch $\lambda \in \mathcal{D}_n^+$ und g ist ein p' -Element. Damit ist $\pi = \lambda$ und $\langle \lambda \rangle_+(g) \neq 0$ (vgl. Satz 3.5.5). Wie bei der Überlagerungsgruppe der symmetrischen Gruppe kann g^p eindeutig einer der beiden Klassen zugeordnet werden, indem die Charakterwerte betrachtet werden. Dies bedeutet, dass es wieder genügt zu überprüfen, ob $\langle \lambda \rangle_+(g)$ und $\langle \lambda \rangle_+(\pi)$, bzw. $-\langle \lambda \rangle_+(\pi)$ p -te Galoisconjugierte sind.

Der schwierigste Fall tritt ein, wenn $\pi \in \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n^+$ ist. In diesem Fall gibt es insgesamt vier $\tilde{\mathcal{A}}_n$ -Konjugiertenklassen, deren Elemente unter θ den Zykeltyp π haben. Wir können das Problem, g^p einer dieser vier Klasse zuzuordnen, darauf reduzieren, dass wir nur noch zwischen zwei Klassen entscheiden müssen. Es ist nämlich $\pi \in \mathcal{O}_n$ und damit die Ordnung von $\theta(g)$ ungerade. Somit liefert Folgerung 3.7.5, da dort d in diesem Fall wieder ungerade

ist, dass die ersten und zweiten durch π_+ oder π_- indizierte Klassen von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ unterschiedliche Ordnungen haben. Wir können folglich anhand der Ordnung von g^p entscheiden, ob g^p Element einer ersten oder zweiten Klasse ist.

Um die verbleibende offene Frage zu beantworten, ob g^p in einer durch π_+ oder π_- indizierten Klasse liegt, verfahren wir wie zuvor: Da π nur verschiedene Teile besitzt, muss dies auch für λ gelten und g ein p' -Element sein. Damit gilt wieder $\lambda = \pi$ und $\langle \lambda \rangle_{\pm}(g) \neq 0$. Wir entscheiden uns für eine der beiden fraglichen Klassen, indem wir überprüfen, welcher der zugehörigen Werte des Charakters $\langle \lambda \rangle_+$ ein p -tes Galoiskonjugiertes von $\langle \lambda \rangle_+(g)$ ist.

3.8 Effiziente Berechnung der Charaktertafeln

Ein Ziel dieser Diplomarbeit ist es, eine effiziente GAP-Implementation (vgl. [10]) der Charaktertafeln der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$ zu entwickeln. In diesem Abschnitt sollen die Algorithmen vorgestellt werden, die es ermöglichen ganze Charaktertafeln rasch zu berechnen.

Wir werden dabei aber nicht noch einmal das Rad erfinden, d.h. es genügt eine schnelle Implementierung zur Berechnung der Spincharaktere zu entwickeln, da die restlichen Charaktere im wesentlichen die der \mathcal{S}_n sind (vgl. Abschnitt 3.3). Für diese existieren bereits Berechnungsverfahren von Götz Pfeiffer, die in GAP implementiert und bis heute konkurrenzlos schnell sind (vgl. [24]). Die Ideen, die Götz Pfeiffer für die symmetrischen Gruppen entwickelt hat, werden wir aufgreifen und sie für den Fall der Überlagerungsgruppen adaptieren.

Der Schlüssel zur Berechnung der Spincharaktere der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ liegt in Satz 3.3.5, der bereits für alle bis auf die durch ein $\pi \in \mathcal{O}_n$ indizierten Konjugiertenklassen explizite Werte angibt. Die verbleibenden Lücken werden durch Morris' Rekursionsformel (Satz 3.4.8) geschlossen, die nun genauer betrachtet werden soll.

Will man zum Beispiel für ein $\lambda \in \mathcal{D}_9$ die Werte des zugehörigen Spincharakters $\langle \lambda \rangle$ auf der Klasse $[5, 3, 1]$ berechnen, so besagt Morris' Rekursionsformel für $l = 5$

$$\langle \lambda \rangle(\pi) = \sum_{\mu \in B_l(\lambda)} c_{\mu} \langle \mu \rangle(\pi \setminus l), \quad (3.21)$$

dass der Wert $\langle \lambda \rangle([5, 3, 1])$ eine Summe der Werte gewisser Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_4$ auf der Klasse $[3, 1]$ ist, wobei die Koeffizienten c_{μ} der einzelnen Summanden Elemente aus $\{\pm 1, \pm 2\}$ sind, die aus den Partitionen $\mu \in B_5(\lambda)$ resultieren. In gleicher Weise kann eine Auswertung des Charakters $\langle \lambda \rangle$ auf einer Klasse vom Zykeltyp $[3, 3, 1, 1]$ im Verlauf der Rekursion ebenfalls Werte aus der Spalte $[3, 1]$ der Charaktertafel der $\tilde{\mathcal{S}}_4$ benötigen.

Bei einer naiven, wenn auch zunächst natürlichen, Implementation riefte man also zur Berechnung der Spincharakterwerte Morris' Rekursionsformel für jeden benötigten Wert

einzelnen auf. Dieses Vorgehen verschenkt aber wie an obigem Beispiel ersichtlich ist, viel Rechenzeit, da sehr viele Werte mehrfach neu berechnet werden. Wie kann man aber eine Redundanz vermeidende Berechnung ermöglichen?

Anstatt sich jeden berechneten Wert zu merken und bei Bedarf später darauf zurückzugreifen, beißt man einmal in den sauren Apfel und errechnet eine Datenstruktur, die eine effiziente Implementation von Morris' Rekursionsformel ermöglicht. Die somit gewonnene Geschwindigkeit wiegt alle vermeintlichen Nachteile auf.

Zu diesem Zweck sei `spinscheme` eine Liste der Länge n . Für jede Partition $\lambda \in \mathcal{D}_m$ für ein $m \leq n$ und jedes ungerade $k \leq m$ enthält diese Liste die Information, welche Partitionen μ aus λ durch Entfernung eines k -Balkens entstehen und was der jeweils zugehörige Koeffizient c_μ in der Summe (3.21) ist. Ist etwa λ die i -te Partition von m (dabei sei die Nummerierung der Partitionen durch ihre Reihenfolge in GAP vorgegeben), dann enthält `spinscheme[m][i][k]` eine Liste von 2-Tupeln, falls k ungerade ist, sonst ist es eine leere Liste. An erster Stelle eines solchen 2-Tupels steht die Nummer der Partition von $m - k$, die aus λ durch Entfernung eines k -Balkens entsteht. An zweiter Stelle steht der zugehörige Koeffizient aus (3.21). Der folgende Algorithmus erzeugt die Datenstruktur `spinscheme`. Sie wird in GAP durch den Befehl `SpinInductionScheme` aufgerufen.

3.8.1 Algorithmus

Zu vorgegebenem n bestimmt dieser Algorithmus den mehrdimensionalen Array `spinscheme`, d.h. es werden alle Partitionen und ihre Koeffizienten in (3.21) berechnet, die aus Partitionen von $m \leq n$ durch Entfernung eines Balkens hervorgehen. Wir können die Entfernung eines Balkens von '+'- und '0'-Typ wegen ihrer großen Ähnlichkeit als ein Fall behandeln.

Beim Aufruf hat m den Wert 1.

- 1 Initialisiere `bpm[m] $\leftarrow \mathcal{D}_m$` , `spinscheme[m] $\leftarrow \emptyset$` und $i \leftarrow 1$.
- 2 Setze $\lambda \leftarrow \text{bpm}[m][i]$ und $l \leftarrow 1$.
 - 2.1 Für alle $k \leq \lambda_l$ initialisiere `brs[k] $\leftarrow \emptyset$` . Für alle ungeraden k entferne, falls möglich, einen k -Balken b_k vom '+'- oder '0'-Typ von λ : $\gamma \leftarrow \lambda \setminus b_k$. Bestimme die Position von γ in `bpm[m-k]` und berechne den zugehörigen Koeffizienten c_γ . Füge das 2-Tupel aus Position und Koeffizient an die Liste `brs[k]` an. Falls $l \neq l(\lambda)$, ersetze $l \leftarrow l + 1$ und gehe zu Schritt 2.1.
 - 2.2 Für alle ungeraden $k \leq m$ entferne, falls möglich einen k -Balken b_k vom '-'-Typ von λ : $\gamma \leftarrow \lambda \setminus b_k$ und bestimme den zugehörigen Koeffizienten. Füge das Paar (Position von γ in `bpm[m-k]`, Koeffizient) an `brs[k]` an.
- 3 Falls $i \neq |\mathcal{D}_m|$, ersetze $i \leftarrow i + 1$. Gehe zu Schritt 2.
- 4 Speichere `spinscheme[m] $\leftarrow \text{brs}$` . Falls $m \neq n$ gehe zu Schritt 1 mit $m \leftarrow m + 1$. Sonst gib `spinscheme` zurück.

Zum besseren Verständnis dieser Datenstruktur betrachten wir folgendes Beispiel, in welchem `SpinInductionScheme` für $n = 3$ berechnet wird.

3.8.2 Beispiel

Der Aufruf `SpinInductionScheme(3)` erzeugt folgende Liste:

```
gap> sp:=SpinInductionScheme(3);
[[ [[ [ [ 1, 1 ] ] ] ], [ [ [ [ 1, 1 ] ], [ ] ] ], [ [ [ [ 1, 1 ] ], [ ], [
[ 1, -1 ] ] ], [ [ [ 1, 2 ] ], [ ], [ [ 1, 1 ] ] ] ] ] ]
```

Die Elemente dieser Liste erklären sich wie folgt:

```
gap> sp[1];
[[ [ [ [ 1, 1 ] ] ] ] ]
```

Es gibt nur eine Partition der 1 und entfernt man aus dieser einen 1–Balken, so erhält man die leere Partition `[]`. Der zugehörige Koeffizient ist 1.

```
gap> sp[2];
[[ [ [ [ 1, 1 ] ], [ ] ] ] ]
```

Es gibt nur eine Partition von 2 in verschiedene Teile, nämlich `[2]`. Da nur ungerade Balken entfernt werden können, ist die zweite Liste leer. In der ersten Liste ist ersichtlich, dass man durch Entfernung eines 1–Balkens von `[2]` zu der ersten Partition von 1 gelangt und der zugehörige Koeffizient ist 1.

```
gap> sp[3];
[[ [ [ [ 1, 1 ] ], [ ], [ [ 1, -1 ] ] ], [ [ [ 1, 2 ] ], [ ], [ [ 1, 1 ] ] ] ] ]
```

Der dritte Eintrag von `SpinInductionScheme` enthält zwei Unterlisten, da es zwei Partitionen von 3 in verschiedene Teile gibt, nämlich `[2, 1]` und `[3]`. Die erste Unterliste zeigt, dass man aus `[2, 1]` durch Entfernung eines 1–Balkens, die erste Partition aus \mathcal{D}_2 erhält mit zugehörigem Koeffizienten 1, und dass man aus `[2, 1]` durch Entfernung eines 3–Balkens, die erste Partition aus \mathcal{D}_0 mit Koeffizienten -1 erhält. Auf gleiche Art ist die zweite Unterliste zu lesen, die Informationen über die Partition `[3]` enthält.

Anhand des einführenden Beispiels wurde illustriert, dass sich die Spalte `[5, 3, 1]` des Spinanteils der Charaktertafel von $\tilde{\mathcal{S}}_9$ durch Kenntnis der Spalten des Spinanteils der Charaktertafel der $\tilde{\mathcal{S}}_4$ ermitteln lässt. Allgemein zeigt (3.21), dass sich eine Spalte $\pi \in \mathcal{O}_n$ mit größtem Teil $k \in \pi$ des Spinanteils der Charaktertafel der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ aus den Spalten des Spinanteils der zu $\tilde{\mathcal{S}}_{n-k}$ gehörigen Tafel berechnen lässt.

Bezeichnet t die zu $\pi \setminus k$ gehörige Spalte des Spinanteils der Charaktertafel von $\tilde{\mathcal{S}}_{n-k}$ als Liste der Charakterwerte, so lässt sich (3.21) mit dem multidimensionalen Array `spinscheme` in

$$\langle \lambda \rangle(\pi) = \sum_{a \in \text{spinscheme}[n][i][k]} a_2 t[a_1] \quad (3.22)$$

umschreiben. Dabei bezeichnet a_i den i -ten Eintrag von a für $i = 1, 2$.

Die Werte der Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, die mit Hilfe der Morris'schen Rekursionsformel berechnet werden, lassen sich durch Ausnutzung von (3.22) aus den Werten von Spincharakteren von $\tilde{\mathcal{S}}_{n-k}$ bestimmen, denen ebenfalls die Morris'sche Rekursionsformel zugrunde liegt.

Zu diesem Zweck betrachten wir eine quadratische Matrix $O(n)$, deren Spalten mit Partitionen $\pi \in \mathcal{O}_n$ und deren Zeilen mit Partitionen $\lambda \in \mathcal{D}_n$ indiziert sind. Der Eintrag $o_{\lambda,\pi}$ bezeichnet den Wert des Spincharakters $\langle \lambda \rangle$ auf der ersten Klasse, die durch π indiziert ist.

Die Anwendung von (3.22) erlaubt nun eine Entwicklung der Spalten von $O(n)$ aus den Spalten der kleineren Matrix $O(n-k)$.

Diese Entwicklung ist eng mit dem folgenden Algorithmus zur Erzeugung der Menge \mathcal{O}_n verknüpft (man vergleiche [24]):

Für ein ungerades $k \in \mathbb{N}$ bezeichne \mathcal{O}_m^k die Menge aller Partitionen aus \mathcal{O}_m , deren Teile kleiner oder gleich k sind. Wir halten zunächst einige Vereinfachungen fest: Ist $k \geq m$, so gilt $\mathcal{O}_m^k = \mathcal{O}_m^m = \mathcal{O}_m$. Für ein $m > 0$ ist \mathcal{O}_m^0 die leere Menge. Da wir die leere Partition $[\]$ als eine Partition der Null in ungerade Teile auffassen (vgl. Satz 3.3.5) ist $\mathcal{O}_0^0 = \mathcal{O}_0 = \{[\]\}$.

Es gilt für alle ungeraden $k \geq 3$

$$\mathcal{O}_m^k = \mathcal{O}_m^{k-2} \cup [k]\mathcal{O}_{m-k}^k, \quad (3.23)$$

wobei $[k]\mathcal{O}_{m-k}^k$ so verstanden werden soll, dass jeder Partition aus \mathcal{O}_{m-k}^k der Teil k hinzugefügt wird. Für $k = 1$ erhalten wir $\mathcal{O}_m^1 = [1]\mathcal{O}_{m-1}^1$.

Die Menge aller Partitionen von einem vorgegebenen n in ungerade Teile lässt sich mit Hilfe obiger Mengen wie folgt erhalten:

$$\mathcal{O}_n = \bigcup_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^n [k]\mathcal{O}_{n-k}^{\min(k,n-k)}. \quad (3.24)$$

Folglich müssen wir zur Konstruktion von \mathcal{O}_n wegen (3.24) die Mengen $\mathcal{O}_{n-k}^{\min(k,n-k)}$ für alle ungeraden k von 1 bis n kennen. Für $k \geq \frac{n}{2}$ ist dabei $\mathcal{O}_{n-k}^{\min(k,n-k)} = \mathcal{O}_{n-k}$ und für $k \leq \frac{n}{2}$ ist $\mathcal{O}_{n-k}^{\min(k,n-k)} = \mathcal{O}_{n-k}^k$.

Um die erforderlichen Mengen für (3.24) zu erhalten, konstruieren wir für jedes ungerade $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ sukzessiv vermöge (3.23) die Mengen $\mathcal{O}_k^k, \mathcal{O}_{k+1}^k, \dots, \mathcal{O}_{n-k}^k$. Dabei ist $\mathcal{O}_{k+1}^k = \mathcal{O}_{k+1}$.

In einem zweiten Schritt erzeugen wir dann durch direkte Anwendung von (3.24) ganz \mathcal{O}_n .

Aus einer als Liste ihrer Einträge gegebenen Spalte t der Matrix $O(n-k)$ wird mit folgendem Algorithmus eine neue Spalte der Matrix $O(n)$ erzeugt:

3.8.3 Algorithmus

Dieser Algorithmus erzeugt zu gegebenem n und k , $n \geq k$, aus einer gegebenen Spalte t der Matrix $O(n-k)$ eine Spalte der Matrix $O(n)$.

- 1 Initialisiere $\text{val} \leftarrow 0$, $\text{col} \leftarrow \emptyset$ und wähle $\pi \in \text{spinscheme}[n]$.
- 2 Setze $\text{val} \leftarrow 0$. Für $a \in \pi[k]$ setze $\text{val} \leftarrow \text{val} + a_1 t[a_2]$ und füge val an col an. Wähle, falls möglich, nächstes $\pi \in \text{spinscheme}[m]$, setze $\text{val} \leftarrow 0$ und wiederhole Schritt 2. Sonst gehe zu Schritt 3.
- 3 Gib col zurück.

Um die ganze Matrix $O(n)$ zu erzeugen, bedient man sich des oben dargestellten Verfahrens zur Erzeugung der Menge \mathcal{O}_n . Der einzige Unterschied besteht darin, dass man statt Anfügens eines Teils zu einer Partition, eine neue Spalte berechnet. Die GAP–Umsetzung dieses Algorithmus wird durch `OddSpinVals` aufgerufen.

3.8.4 Algorithmus

Dieser Algorithmus konstruiert aus den Elementen von `spinscheme` durch Anwendung von Algorithmus 3.8.3 die quadratische Matrix $O(n)$ der Spincharakterwerte auf \mathcal{O}_n .

- 1 Ist $n = 0$ so gib `[[1]]` zurück und beende den Algorithmus. Sonst initialisiere `scheme` $\leftarrow \text{SpinInductionScheme}(n)$ und $k \leftarrow 1$.
- 2 Bestimme mit Algorithmus 3.8.3 aus der Spalte der Matrix $O(0) = [[1]]$ eine Spalte t der Matrix $O(k)$. Speichere `pk[k]` $\leftarrow t$. Für $m \in \{k+1, \dots, n-k\}$ bestimme für alle berechneten Spalten t der Matrix $O(m-k)$ in `pk[m-k]` die entsprechenden Spalten t^* der Matrix $O(m)$ gemäß Algorithmus 3.8.3. Speichere `pk[m]` $\leftarrow t^*$. Falls $k+2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ersetze $k \leftarrow k+2$ und gehe zu Schritt 2.
- 3 Für alle ungeraden $k \leq n$ konstruiere aus jeder Spalte t der Matrix $O(n-k)$ in `pk[n-k]` mit Algorithmus 3.8.3 eine Spalte `col` der Matrix $O(n)$. Speichere `res[i]` $\leftarrow \text{col}$.
- 4 Transponiere `res` und gib `res` zurück.

Um nun alle Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ zu erhalten, kann man direkt auf Satz 3.3.5 zurückgreifen. Durch `MatrixSpinCharsSn` kann man in GAP zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die Spincharaktere berechnen lassen. Dazu werden in einem Algorithmus alle Partitionen $\lambda \in \mathcal{D}_n$ und $\pi \in \mathcal{P}_n$ durchlaufen und je nach Fall aus Satz 3.3.5 der entsprechende Wert in eine Liste eingetragen. Bei aufspaltenden Klassen muss beachtet werden, dass der Wert auf der zweiten Konjugiertenklasse ebenfalls angehängt wird. Die Charakterwerte, für die eine Berechnung mit Morris' Rekursionsformel nötig ist, werden einfach aus der durch `OddSpinVals` erzeugten Matrix nach Bedarf ausgelesen. Dazu merkt man sich durch einen Zähler `counter`

lediglich, welche Werte für den jeweiligen Charakter bereits ausgelesen worden sind. Die gegebenenfalls existierenden assoziierten Charaktere werden simultan durch Änderung des Vorzeichens des Charakterwertes auf gewissen Klassen erzeugt. Sind für eine Partition λ auf diese Weise ein Charakter und sein assoziierter fertiggestellt, so werden beide, bzw. nur der erste, wenn $\langle \lambda \rangle$ selbstassoziiert ist, in einer Matrix gespeichert.

Der Befehl `MatrixSpinCharsSn` startet folgenden Algorithmus:

3.8.5 Algorithmus

Dieser Algorithmus berechnet zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ die Matrix der Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Dabei ist die Reihenfolge der Werte durch die Reihenfolge der Konjugiertenklassen festgelegt, die wiederum durch die in GAP festgelegte lexikographische Ordnung der Partitionen vorgegeben ist.

- 1 Initialisiere `oddvals` \leftarrow `OddSpinVals(n)`, `pars` \leftarrow \mathcal{P}_n und `bars` \leftarrow \mathcal{D}_n . Setze $i \leftarrow 1$ (mit i werden die Balkenpartitionen durchnummeriert).
- 2 Setze `char` \leftarrow \emptyset , `achar` \leftarrow \emptyset und `counter` \leftarrow 1. Nimm erstes $\pi \in \mathcal{P}_n$.
 - 2.1 Falls $\pi \in \mathcal{O}_n$ füge `oddvals[i][counter]` und `-oddvals[i][counter]` an `char` an. Wiederhole für `achar`. Erhöhe Zähler `counter` \leftarrow `counter` + 1. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n$ und gehe zu Schritt 2.1. Sonst gehe zu Schritt 3.
 - 2.2 Falls $\lambda := \text{bars}[i]$ ungerade und $\lambda = \pi$, dann füge den exceptionellen Charakterwert (vgl. Definition 3.3.6) an `char` an, sowie sein negatives an `achar`. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n$ und gehe zu Schritt 2.1. Sonst gehe zu Schritt 3.
 - 2.3 Füge 0 an `char` und `achar` an und wiederhole dies, falls $\pi \in \mathcal{D}_n^+$. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n$ und gehe zu Schritt 2.1. Sonst gehe zu Schritt 3.
- 3 Speichere `matrix` \leftarrow `char`. Falls λ ungerade, speichere `matrix` \leftarrow `achar`. Ist $i \neq |\mathcal{D}_n|$, erhöhe $i \leftarrow i + 1$ und gehe zu Schritt 2.
- 4 Gib `matrix` zurück.

Nachdem nun die Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ berechenbar sind, können wir unsere Aufmerksamkeit den Spincharakteren der Gruppen $\tilde{\mathcal{A}}_n$ zuwenden. Wir beschränken uns dabei auf die Fälle $n \geq 2$, da wegen der Isomorphie von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$ für $n \leq 1$ die Charaktertafeln von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ den Tafeln von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ in diesen Fällen entsprechen.

Mit den Sätzen 3.5.3 und 3.5.5 ergibt sich, dass man durch Kenntnis der Spincharakterwerte von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ eine vollständige Beschreibung der Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ erhält.

In analoger Weise zu Algorithmus 3.8.5 kann man eine auf die Bedürfnisse der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ abgestimmte Version von Satz 3.3.5 implementieren. Hierbei durchläuft man die Partitionen $\lambda \in \mathcal{D}_n^+$ und fügt für jedes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ den entsprechenden Charakterwert an eine Liste an.

Wieder müssen mehrere Fälle unterschieden und darauf geachtet werden, dass bei aufspaltenden Klassen der entsprechende Charakterwert der zweiten Klasse angehängt wird. Indiziert λ gemäß Satz 3.5.3 zwei irreduzible Spincharaktere, dann werden die beiden Charaktere $\langle \lambda \rangle_+$ und $\langle \lambda \rangle_-$ simultan erzeugt. Die GAP-Implementation wird durch den Befehl `MatrixSpinCharsAn` aufgerufen, dem folgender Algorithmus zugrunde liegt.

3.8.6 Algorithmus

Für $n \geq 2$ gibt dieser Algorithmus die Matrix der Spincharaktere von $\tilde{\mathcal{A}}_n$ als Liste ihrer Werte zurück. Dabei ist die Reihenfolge der Werte durch die lexikographische Ordnung der Partitionen gegeben. Existieren zwei Konjugiertenklassen von $\tilde{\mathcal{A}}_n$, die Elemente desselben Zykeltyps π enthalten, so folgt π_- auf π_+ (man vergleiche die Bemerkung zu Beginn von Abschnitt 3.5).

- 1 Initialisiere `oddvals` \leftarrow `OddSpinVals(n)`. Nimm erstes $\lambda \in \mathcal{D}_n$.
- 2 Setze `char1` \leftarrow \emptyset , `char2` \leftarrow \emptyset , `counter` \leftarrow 1 und $i \leftarrow$ Position von λ in \mathcal{D}_n .
Nimm erstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$.
- 3 Ist λ ungerade, gehe zu Schritt 4.
 - 3.1 Falls $\pi \in \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n^+$, setze $\alpha \leftarrow \frac{1}{2}(\text{oddvals}[i][\text{counter}] + \delta_\lambda(\pi))$ und $\beta \leftarrow \frac{1}{2}(\text{oddvals}[i][\text{counter}] - \delta_\lambda(\pi))$. Füge an `char1` die Liste $[\alpha, -\alpha, \beta, -\beta]$ und an `char2` die Liste $[\beta, -\beta, \alpha, -\alpha]$ an. Erhöhe `counter` um 1. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 3.1. Sonst gehe zu Schritt 5.
 - 3.2 Falls $\pi \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{D}_n^+$, füge an `char1` den Wert $\frac{1}{2}\text{oddvals}[i][\text{counter}]$ und sein negatives an. Mache das gleiche für `char2` und erhöhe `counter` um 1. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 3.1. Sonst gehe zu Schritt 5.
 - 3.3 Falls $\pi \in \mathcal{D}_n^+ \setminus \mathcal{O}_n$, füge an `char1` die Liste $[\frac{1}{2}\delta_\lambda(\pi), -\frac{1}{2}\delta_\lambda(\pi)]$ und $[-\frac{1}{2}\delta_\lambda(\pi), \frac{1}{2}\delta_\lambda(\pi)]$ an `char2` an. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 3.1.
 - 3.4 Füge an `char1` und `char2` den Wert 0 an und nimm, falls möglich, nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 2. Sonst gehe zu Schritt 5.
- 4 λ ist ungerade.
 - 4.1 Falls $\pi \in \mathcal{O}_n \cap \mathcal{D}_n^+$, füge an `char1` die Liste $[w, -w, w, -w]$ an, wobei $w := \text{oddvals}[i][\text{counter}]$ ist. Erhöhe `counter` um 1. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 4.1. Sonst gehe zu Schritt 5.
 - 4.2 Falls $\pi \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{D}_n^+$, füge an `char1` den Wert `oddvals[i][counter]` und sein negatives an. Erhöhe `counter` um 1. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 4.1. Sonst gehe zu Schritt 5.
 - 4.3 Falls $\pi \in \mathcal{D}_n \setminus \mathcal{O}_n$, füge an `char1` die Liste $[0, 0]$ an. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 4.1. Sonst gehe zu Schritt 5.

- 4.4 Füge an `char1` den Wert 0 an. Falls möglich, nimm nächstes $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ und gehe zu Schritt 4.1.
- 5 Speicher `matrix` \leftarrow `char1` und gegebenenfalls `matrix` \leftarrow `char2`. Nimm, falls möglich, nächstes $\lambda \in \mathcal{D}_n$ und gehe zu Schritt 2. Sonst gib `matrix` zurück.

Diese Algorithmen versetzen uns in die Lage die Spincharaktere der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ effizient zu berechnen. Um die Effizienz dieser Verfahren zu demonstrieren und eine Vorstellung der Laufzeiten zu bekommen, betrachte man folgende Tabellen, die auf einem AMD-K6 System mit 300Mhz entstanden sind. Die linke Tabelle gibt dabei die Werte für die Berechnung der Spincharaktere der $\tilde{\mathcal{S}}_n$, die rechte Tabelle die der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ an.

n	Laufzeit	n	Laufzeit
< 17	< 1s	< 18	< 1s
17	1.36s	18	1.12s
20	4.38s	20	2.55s
23	14.76s	23	8.35s
25	28.90s	25	17.59s
27	73.63s	27	39.49s
30	229.71s	30	109.51s

Selbst die Spincharaktere der $\tilde{\mathcal{A}}_n$ und $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bei relativ großem n lassen sich also mit akzeptabler Wartezeit berechnen. Zur genauen Implementation sei an dieser Stelle auf den Anhang A verwiesen.

Mit Hilfe der vorgestellten Methoden zur Bestimmung der Elementordnungen der Konjugiertenklassen und der zugehörigen Potenzabbildungen bilden diese Algorithmen das Rückgrad der Berechnung der vollständigen Charaktertafeln dieser Gruppen. Für die übrigen Nicht-Spincharaktere müssen nur die bekannten irreduziblen Charaktere der entsprechenden symmetrischen, bzw. alternierenden Gruppe inflationiert werden.

Wir sind folglich in der Lage die gesamten Charaktertafeln der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$ zügig zu berechnen. Der Befehl zur Berechnung der vollständigen Charaktertafel von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ lautet `SpinCharacterTable(n)`. Mit `AlternatingSpinCharacterTable(n)` für $n \geq 2$ wird sein Pendant für die Überlagerungsgruppen der alternierenden Gruppen aufgerufen.

3.8.7 Bemerkung

Die vorgestellten Methoden haben sich im Verlauf der vorliegenden Arbeit auch als hilfreich erwiesen, die GAP-Implementation der Charaktertafeln der alternierenden Gruppen wesentlich zu beschleunigen.

Um die Charaktere der Gruppen \mathcal{A}_n aus denen der Gruppen \mathcal{S}_n zu gewinnen, kann man sich desselben Prinzips bedienen, wie es oben zur Anwendung gekommen ist. Die Vor-

aussetzung dafür ist, dass sich die Charakterwerte der irreduziblen Charaktere der alternierenden Gruppen in ähnlicher Weise aus denen der symmetrischen Gruppen gewinnen lassen. Für eine genauere Darlegung dieser Zusammenhänge sei an Abschnitt 2.5 in [18] verwiesen.

Die Verbesserung beruht auf dem oben vorgestellten Verfahren, dass man einmal die Matrix der Charakterwerte der symmetrischen Gruppe erzeugt und aus ihr dann bei Bedarf die benötigten Werte nur noch auszulesen braucht.

Der so erreichte Geschwindigkeitsgewinn ist insbesondere bei großem n erheblich. So benötigt die Berechnung der Charaktertafel der alternierenden Gruppe auf $n = 15$ Punkten in der aktuellen GAP Version auf einem AMD-K6 Rechner mit 300Mhz ca. 6.1 Sekunden. In der neuen Fassung wird für die gleiche Rechnung nur ca. eine Sekunde benötigt. Für $n = 20$ ist der Unterschied noch bedeutender: hier benötigt die gegenwärtige GAP – Implementation 5.50min, während obige Methoden diesselbe Charaktertafel in 9.5s liefern.

Kapitel 4

Blöcke und lokale Analyse in ungerader Charakteristik

In diesem Kapitel wenden wir uns der modularen Darstellungstheorie von \tilde{S}_n zu. Hierbei werden wir aber nur p -modulare Systeme betrachten, deren Charakteristik des Restklassenkörpers ungerade ist. Dies bringt eine erhebliche Erleichterung mit sich. In ungerader Charakteristik hat man, wie wir sehen werden, eine einfache Blockeinteilung, deren Blöcke entweder ausschließlich aus Spincharakteren oder Nichtspincharakteren bestehen. In Charakteristik 2 ist dies nicht der Fall und die Blockzerlegung ist wesentlich schwieriger. Der interessierte Leser sei an [3] und [4] verwiesen.

Nachdem wir die p -Blöcke von \tilde{S}_n vollständig bestimmt haben, wenden wir uns im zweiten Abschnitt der lokalen Situation zu, um einige Ergebnisse für die Brauerbäume dieser Gruppen zu gewinnen.

4.1 Blockzerlegung

Die Blockzerlegung der symmetrischen Gruppen in ungerader Charakteristik ist durch die sogenannte Vermutung von Nakayama festgelegt (vgl. 6.1.21 in [18]): zwei irreduzible Charaktere einer symmetrischen Gruppe liegen genau dann im selben p -Block, wenn ihre p -Kerne gleich sind.

In diesem Abschnitt werden wir das Analogon zum p -Kern einer Partition einführen. Im Mittelpunkt steht der wichtige Begriff des \bar{p} -Kerns, der es uns erlaubt eine vollständige Blockzerlegung von \tilde{S}_n für eine ungerade Primzahl p anzugeben.

Es sei p eine ungerade Primzahl und (K, R, k) ein p -modulares Zerfällungssystem von \tilde{S}_n . Die Blöcke von \tilde{S}_n gliedern sich in zwei Arten auf:

4.1.1 Bemerkung

Ist B ein p -Block von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, so besteht $\text{Irr}(B)$ nur aus Spincharakteren oder nur aus Nicht-Spincharakteren. Ein Block, der nur Spincharaktere enthält, wird Spinblock genannt.

Insbesondere ist B genau dann ein Spinblock, wenn $\omega_B(z) = -1$ ist.

Beweis: Ist z das nichttriviale zentrale Element von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\chi \in \text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$, so gilt wegen des Lemmas von Schur, dass $\chi(z) = \chi(1)$ ist, falls $\chi \notin \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n)$, und $\chi(z) = -\chi(1)$, falls $\chi \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ ist. Folglich ist $\omega_\chi(z) = -1$ bzw. $\omega_\chi(z) = 1$, je nach dem, ob χ ein Spincharakter ist oder nicht.

Aus Satz 2.5.5 ist bekannt, dass zwei irreduzible Charaktere χ und χ' von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ genau dann im selben p -Block liegen, wenn $\overline{\omega_\chi} = \overline{\omega_{\chi'}}$ ist. ■

Im weiteren Verlauf betrachten wir nur Spinblöcke und das ist, um es mit Klaus Wowe-reits Worten zu sagen, auch gut so. Die Blocktheorie der Nicht-Spinblöcke von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ist im wesentlichen die der symmetrischen Gruppen (man vergleiche die Bemerkung zu Beginn von Abschnitt 3.3). Dem interessierten Leser sei neben Kapitel 6 in [18] auch [29] genannt, um mehr über die Brauerbäume der symmetrischen Gruppen zu erfahren.

Betrachten wir einen Charakter eines Spinblocks von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, so ist dieser durch eine Partition λ indiziert, die aus lauter verschiedenen Teilen besteht, d.h. $\lambda \in \mathcal{D}_n$. In Abschnitt 3.4 wurde der Prozess des Balkenentfernens eingeführt (Definition 3.4.1). Führen wir diesen Prozess an dem zu λ gehörenden p -Abakus durch, so stellt sich in natürlicher Weise die Frage, welche Bedeutung die verbleibende Partition nach Iteration des Balkenentfernens hat, wenn aus ihr keine weiteren Balken entfernt werden können. Im Folgenden werden wir sehen, dass sie das Rückgrat der p -modularen Darstellungstheorie von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bildet.

4.1.2 Definition (\bar{p} -Kern)

Ist $\lambda \in \mathcal{D}_n$ eine Balkenpartition, so bezeichnet man die Partition $\lambda_{(\bar{p})}$, die aus λ entsteht, indem man sukzessiv p -Balken entfernt, bis sich kein Balken mehr entfernen lässt, als den \bar{p} -Kern von λ .

Offensichtlich ist der \bar{p} -Kern wohldefiniert und eindeutig. Die \bar{p} -Kerne der Balkenpartitionen von n kontrollieren die Blockzerlegung von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, wie es bereits ihre Cousins, die p -Kerne, im Fall der symmetrischen Gruppen tun.

4.1.3 Satz (Morris' Vermutung)

Es seien λ und μ Balkenpartitionen von n .

- (i) Die Spincharaktere $\langle \lambda \rangle$ und $\langle \mu \rangle$ liegen genau dann im selben p -Block von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, wenn $\lambda_{(\bar{p})} = \mu_{(\bar{p})}$ ist.
- (ii) Es sei $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$
 Ist $\lambda \neq \lambda_{(\bar{p})}$, dann liegen $\langle \lambda \rangle$ und $\langle \lambda \rangle^a$ im selben p -Block von $\tilde{\mathcal{S}}_n$.
 Ist $\lambda = \lambda_{(\bar{p})}$, dann bilden $\langle \lambda \rangle$ und $\langle \lambda \rangle^a$ jeweils einen eigenen Block vom Defekt 0.

Beweis: Siehe Theorem 1.1 in [15]. ■

Um zu entscheiden, welchem Block ein irreduzibler Spincharakter von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ angehört, genügt es folglich seinen \bar{p} -Kern zu kennen. Darüber hinaus kennt man alle Spincharaktere eines Blocks, wenn man ihren gemeinsamen \bar{p} -Kern kennt, den man dann auch als \bar{p} -Kern des Blocks bezeichnet. Um eine vollständige Liste aller Spincharaktere eines Blocks zu gegebenem \bar{p} -Kern zu erhalten, muss lediglich der Prozess des p -Balkenentfernens in sein Gegenteil verkehrt werden: die p -Balkenaddition.

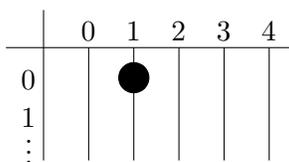
4.1.4 Definition (p -Balkenaddition)

Es sei $\lambda \in \mathcal{D}_n$ und man betrachte den zu λ gehörenden p -Abakus. Jede der folgenden Abakusoperationen wird dann als Addition eines p -Balkens bezeichnet.

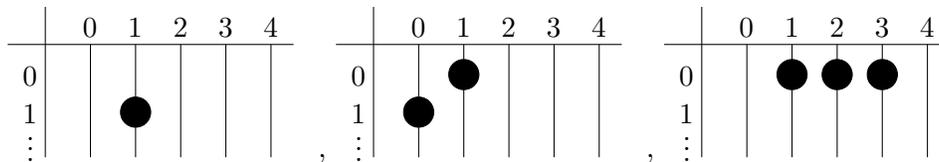
- (i) Man schiebt eine Kugel des Abakus entlang eines Läufers um eine Position nach unten, vorausgesetzt dass diese frei ist. In Analogie zur Entfernung eines Balkens wird dies als Hinzufügen eines Balkens vom Typ '+' bezeichnet.
- (ii) Ist die Position (1, 0) des Abakus unbesetzt, fügt man eine Kugel an Position (0, 0) ein und schiebt sie auf Position (1, 0). In diesem Fall hat man einen Balken vom Typ '0' hinzugefügt.
- (iii) Sind in der Nullzeile des Abakus zwei konjugierte Positionen unbesetzt, so besetzt man sie mit zwei neuen Kugeln. Dies ist eine Balkenaddition vom Typ '-'.

4.1.5 Beispiel

Es sei $\lambda = [1]$ und $p = 5$. Der zugehörige 5-Abakus ist



Damit lassen sich durch Addition eines Balkens vom Typ '+', '0' bzw. '-' die folgenden Abaki und Partitionen erhalten:



Folglich enthält der Block von $\tilde{\mathcal{S}}_6$ mit dem $\bar{5}$ -Kern [1] die Charaktere $\langle [6] \rangle$, $\langle [5, 1] \rangle$ und $\langle [3, 2, 1] \rangle$ und damit gemäß Satz 4.1.3 auch die Charaktere $\langle [6] \rangle^a$ und $\langle [3, 2, 1] \rangle^a$. Dies sind alle Charaktere des Blocks.

4.1.6 Definition (\bar{p} -Gewicht)

Die Anzahl der p -Balken, die aus einer Partition $\lambda \in \mathcal{D}_n$ entfernt werden können, bis man ihren \bar{p} -Kern erreicht, nennt man das \bar{p} -Gewicht von λ . Es wird mit $w_{\bar{p}}(\lambda)$ bezeichnet. Da alle Charaktere eines p -Blocks B durch Balkenpartitionen indiziert sind, die alle dasselbe \bar{p} -Gewicht haben, spricht man auch vom \bar{p} -Gewicht des Blocks und setzt $w_{\bar{p}}(B) := w_{\bar{p}}(\lambda)$ für ein $\langle \lambda \rangle \in \text{Irr}(B)$.

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass das \bar{p} -Gewicht eines p -Blocks von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ für kleine Gewichte mit dem Defekt des Blocks zusammenfällt.

4.2 Lokale Analyse

Zur Bestimmung der Brauerbäume von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ist die Kenntnis der Defektgruppen der Blöcke nötig, um unter ihnen diejenigen zu ermitteln, die zyklisch sind. Deswegen werden wir im Folgenden die Frage der Defektgruppen dieser Gruppen beantworten. Im Anschluss daran werden wir in einer sogenannten „lokalen Analyse“, die Normalisatoren und Zentralisatoren zyklischer Defektgruppen betrachten, um auf diesem Wege weitere Informationen über die Blöcke von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ zu gewinnen. Insbesondere werden wir in einem Vorgriff auf Kapitel 5 ein Ergebnis über die exzeptionelle Multiplizität (vgl. Definition 2.8.2) eines Blocks von zyklischem Defekt erhalten.

4.2.1 Bemerkung

Für $1 \leq m \leq n$ sehen wir \mathcal{S}_m als die Untergruppe von \mathcal{S}_n , die jedes Element von $\{m+1, \dots, n\}$ festläßt. Da $\theta^{-1}(\mathcal{S}_m) = \langle z, t_1, \dots, t_{m-1} \rangle \leq \tilde{\mathcal{S}}_n$ und diese Gruppe isomorph zu $\tilde{\mathcal{S}}_m$ ist, werden wir $\tilde{\mathcal{S}}_m$ als Untergruppe von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ betrachten.

4.2.2 Satz

Es sei B ein Spinblock von $\tilde{\mathcal{S}}_n$.

Hat B das \bar{p} -Gewicht $w := w_{\bar{p}}(B)$, dann sind die Defektgruppen von B isomorph zu p -Sylowgruppen von $\tilde{\mathcal{S}}_{pw}$, d.h. für den Defekt $d(B)$ gilt

$$d(B) = \nu_p((pw)!).$$

Beweis: Siehe Theorem A und insbesondere die darauffolgende Bemerkung in [6]. ■

Mit Hilfe dieses Satzes kann man leicht die Spinblöcke von zyklischem Defekt bestimmen:

4.2.3 Folgerung

Ein Spinblock B von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ ist genau dann von zyklischem Defekt, wenn sein Defekt $d(B) \leq 1$ ist. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn sein \bar{p} -Gewicht $w_{\bar{p}}(B) \leq 1$ ist.

Da wir an den Brauerbäumen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ interessiert sind, verstehen wir im Folgenden unter einem Block von zyklischem Defekt, einen solchen vom Defekt 1.

4.2.4 Satz (Struktur des Zentralisators)

Es sei D eine p -Untergruppe von \tilde{S}_n und $\bar{D} := \theta(D)$ ihr Bild unter θ .

Damit erhält man die kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow C_{\tilde{S}_n}(D) \xrightarrow{\theta} C_{S_n}(\bar{D}) \longrightarrow 1$$

Beweis: Es ist klar, dass $Z = \text{Kern}(\theta)$ ist und dass $\theta(C_{\tilde{S}_n}(D)) \leq C_{S_n}(\bar{D})$ gilt. Es ist also nur die Surjektivität von θ zu zeigen. Ist dazu $x \in C_{S_n}(\bar{D})$ und $g \in \theta^{-1}(x)$, so liegt auch gdg^{-1} für jedes $d \in D$ in $\theta^{-1}(d)$. Folglich ist gdg^{-1} entweder d oder zd . Die Elemente gdg^{-1} und d haben p -Potenzordnung, während zd von gerader Ordnung ist. Also ist $gdg^{-1} = d$ und g zentralisiert D . Insgesamt liegt das Urbild von $C_{S_n}(\bar{D})$ unter θ im Zentralisator von D in \tilde{S}_n und damit folgt die Behauptung. ■

4.2.5 Folgerung

Ist D eine Defektgruppe eines Blocks von zyklischem Defekt von \tilde{S}_n (dabei sei o.B.d.A. $\bar{D} \leq S_p \leq S_n$; vgl. Satz 4.2.2), so gilt mit den Bezeichnungen aus Satz 4.2.4

$$C_{\tilde{S}_n}(D) = D \times \tilde{S}_{\{p+1, \dots, n\}}.$$

Beweis: Bekanntlich gilt $C_{S_n}(\bar{D}) = \bar{D} \times S_{\{p+1, \dots, n\}}$. Damit folgt nach Satz 4.2.4 die Behauptung. ■

4.2.6 Satz (Struktur des Normalisators)

Mit den Voraussetzungen von Satz 4.2.4 erhält man die kurze exakte Sequenz:

$$1 \longrightarrow Z \hookrightarrow N_{\tilde{S}_n}(D) \xrightarrow{\theta} N_{S_n}(\bar{D}) \longrightarrow 1$$

Beweis: In Analogie zum Beweis von Satz 4.2.4 ist nur die Surjektivität von θ zu zeigen. Dazu sei $x \in N_{S_n}(\bar{D})$. Ist $\theta^{-1}(x) = \{g, zg\} \subset \tilde{S}_n$, so ist zu zeigen, dass für ein beliebiges $d \in D$ das konjugierte Element gdg^{-1} ebenfalls in D liegt. Da $gdg^{-1} \in \theta^{-1}(\bar{D}) = Z \times D$ und gdg^{-1} von p -Potenzordnung ist, kann gdg^{-1} nur in D liegen. ■

4.2.7 Bemerkung

Ist $D \leq \tilde{S}_n$ eine Untergruppe der Ordnung p , so gilt für den Index ihres Zentralisators in ihrem Normalisator

$$|N_{\tilde{S}_n}(D) : C_{\tilde{S}_n}(D)| = p - 1.$$

Beweis: Satz 3.3.5 zeigt, dass alle Spincharaktere von \tilde{S}_n auf Klassen, die durch ein $\pi \in \mathcal{P}_n^+$ indiziert sind, ganzzahlige Werte annehmen. Da die übrigen Charaktere von \tilde{S}_n inflationierte Charaktere von S_n sind, nehmen folglich alle irreduziblen Charaktere auf diesen Klassen nur ganzzahlige Werte an. Somit folgt: ist g ein Element einer dieser Klassen, so ist g konjugiert zu g^k für alle $k \in \mathbb{N}$, die teilerfremd zur Ordnung von g sind.

Da $D \leq \tilde{\mathcal{A}}_n$ ist, trifft dies auf die Elemente von D zu und wir erhalten, dass $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D)$ sich surjektiv auf $\text{Aut}(D)$ abbilden lässt. Folglich ist $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D)/C_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D) \cong \text{Aut}(D) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$. ■

Da für die Brauerkorrespondenz nach Satz 2.7.4 die Operation des Normalisators auf den Charakteren des Zentralsators eine Rolle spielt, wollen wir diese Operation nun genauer betrachten (man vergleiche [6]).

Dazu betrachten wir zunächst die Untergruppe $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$. Für ihren Normalisator gilt

$$N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}) = \theta^{-1}(\mathcal{S}_p \times \mathcal{S}_{\{p+1, \dots, n\}}) = \langle z, t_1, \dots, t_{p-1}, t_{p+1}, \dots, t_{n-1} \rangle,$$

denn ist $x \in N_{\mathcal{S}_n}(\mathcal{S}_{\{p+1, \dots, n\}})$ und $s \in \tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$, so gilt für $g \in \theta^{-1}(x)$, dass gsg^{-1} in $\theta^{-1}(\mathcal{S}_{\{p+1, \dots, n\}}) = \tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ liegt und damit $\theta^{-1}(x) \subseteq N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$ ist. Da umgekehrt auch jedes Element aus $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$ unter θ im Normalisator von $\mathcal{S}_{\{p+1, \dots, n\}}$ in \mathcal{S}_n liegt, folgt obige Gleichheit. Somit läßt sich die natürliche Operation von $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$ auf $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ durch eine Betrachtung der Erzeuger beschreiben.

Die Elemente $z, t_{p+1}, \dots, t_{n-1}$ operieren alle via innerer Automorphismen, da sie selbst Erzeuger von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ sind. Die Konjugation eines Elementes aus $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ mit jedem der übrigen Elemente t_1, \dots, t_{p-1} liefert nach Betrachtung der definierenden Relationen der Gruppe $\tilde{\mathcal{S}}_n$ (Satz 1.2.2) den Automorphismus

$$\begin{aligned} \iota : \tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}} &\longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}, \\ t_i &\longmapsto z t_i = t_i^{-1}, \\ z &\longmapsto z. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Ist $x \in \tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$, so erhält man folglich

$$\iota(x) = z^{\alpha(x)} x,$$

wobei $\alpha(x) \in \{0, 1\}$ und $(-1)^{\alpha(x)} = \varepsilon(x)$ und ε ist die Inflation des Signumcharakters auf $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Die Operation von $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$ auf $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ lässt sich damit für die Charaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ wie folgt beschreiben: Ist $\chi \in \text{Irr}_-(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$ ein irreduzibler Spincharakter, so bewirkt der Automorphismus ι

$$\chi^\iota := \chi \circ \iota = \varepsilon \otimes \chi,$$

d.h. gemäß Definition 3.3.3 wird χ auf seinen assoziierten Charakter $\chi^a = \varepsilon \otimes \chi$ abgebildet. Ist $\chi \in \text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$ ein inflationierter Charakter der symmetrischen Gruppe $\mathcal{S}_{\{p+1, \dots, n\}}$, so ist $\chi^\iota = \chi$ gemäß der Bemerkung zu Beginn von Abschnitt 3.3.

Nach Satz 2.7.4 existiert eine Bijektion zwischen den Blöcken von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ mit Defektgruppe D und den Bahnen von $N(D)$ auf den Defekt-0-Blöcken von $C(D)/D$, für die der Index

von $C(D)$ in ihrem Stabilisator teilerfremd zu p ist. Im Fall eines Blockes von zyklischem Defekt lassen sich folgende Präzisierungen vornehmen:

Nach Bemerkung 4.2.7 ist die letzte Bedingung immer erfüllt. Aus Satz 4.2.4 ist bekannt, dass $C(D) \cong D \times \tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ ist. Folglich kann man anstelle von $C(D)/D$ die isomorphe Gruppe $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ annehmen. Da $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$, bzw. $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D)$ das volle Urbild von $N_{\mathcal{S}_n}(\mathcal{S}_{\{p+1, \dots, n\}})$, bzw. $N_{\mathcal{S}_n}(\bar{D})$ ist (man vergleiche obige Bemerkung und Satz 4.2.6) und $N_{\mathcal{S}_n}(\bar{D}) \leq N_{\mathcal{S}_n}(\mathcal{S}_{\{p+1, \dots, n\}})$ gilt, ist auch $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D)$ eine Untergruppe von $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$. Folglich operiert auch $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D)$ vermöge ι auf den Charakteren von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$.

Wir machen noch die folgende Beobachtung: Ist ϑ ein Defekt-0-Charakter von $C(D)/D$, der zu einem Block B von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ korrespondiert, so sei β der Block von $C(D)$, der die Inflation von ϑ auf $C(D)$ enthält. Nach Satz 2.7.2 ist $\beta^{\tilde{\mathcal{S}}_n}$ definiert und wegen der bestehenden Korrespondenz ist $\beta^{\tilde{\mathcal{S}}_n} = B$. Nach Bemerkung 4.1.1 ist ein Block von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ genau dann ein Spinblock, wenn sein zentraler Charakter auf dem Element z den Wert -1 annimmt. Damit gilt wegen $\omega_{\beta^{\tilde{\mathcal{S}}_n}}(z) = \omega_{\beta}(z)$ (man vergleiche die Ausführungen zu Beginn von Abschnitt 2.7), dass B genau dann ein Spinblock ist, wenn ϑ ein Spincharakter ist.

Wir erhalten damit eine auf die Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ angepasste Formulierung von Satz 2.7.4.

4.2.8 Satz (Brauerkorrespondenz der $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bei zyklischem Defekt)

Es gibt eine Bijektion zwischen den Blöcken von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ mit Defektgruppe D , $|D| = p$, und den ι -Bahnen auf den Defekt-0-Charakteren von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$. Dabei ist ein Block von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ genau dann ein Spinblock, wenn der korrespondierende Defekt-0-Charakter von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ ein Spincharakter ist.

Im Fall von Spinblöcken ist diese Bijektion in natürlicher Weise durch die \bar{p} -Kerne der Spinblöcke gegeben.

4.2.9 Satz

Es sei $\mu \in \mathcal{D}_{n-p}$. Die Bijektion aus Satz 4.2.8 für Spinblöcke ist gegeben, indem ein Defekt-0-Charakter $\langle \mu \rangle$, bzw. ein Paar $\{\langle \mu \rangle, \langle \mu \rangle^a\}$ von Defekt-0-Charakteren von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ genau dann zu einem Block B von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ korrespondiert, wenn μ der \bar{p} -Kern von B ist.

Beweis: Es sei b ein Block von $N := N(D)$, der zu B korrespondiert. Mit C sei der Zentralisator von D in $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bezeichnet.

Es sei $\vartheta \in \text{Irr}(C/D)$ so gewählt, dass die Inflation $\hat{\vartheta}$ auf C in einem Block β von C liegt, der von b überlagert wird. Da N/C zyklisch ist (vgl. Beweis zu Bemerkung 4.2.7), ist $\hat{\vartheta}$ fortsetzbar auf $T := T_N(\vartheta)$, der Trägheitsgruppe von ϑ , die auch die Trägheitsgruppe von β ist. Mit $\hat{\hat{\vartheta}}$ sei eine Fortsetzung bezeichnet. Nach Clifford ist der induzierte Charakter $\hat{\hat{\vartheta}}^N$ irreduzibel und liegt im Block b von N . Weiter ist $D \leq \text{Kern}(\hat{\hat{\vartheta}}^N)$ und es gilt mit obigen Bezeichnungen: Ist $\mathcal{T}(N/T)$ eine Transversale von T in N , so ist $(\hat{\hat{\vartheta}}^N)_C = \sum_{g \in \mathcal{T}(N/T)} \hat{\vartheta}^g$.

Weiter sei $\langle \lambda \rangle \in \text{Irr}(B)$ so gewählt, dass λ durch eine p -Balkenaddition vom '+'- oder '-'-Typ aus $\lambda_{(\bar{p})}$ entstanden ist.

Mit Lemma 4.4.6 aus [13] folgt, wobei die rechte Seite bis auf ein Vorzeichen bestimmt ist:

$$\langle \lambda \rangle(xy) = \pm \sum_{g \in \mathcal{T}(N/T)} \hat{\vartheta}^g(x) = \pm \sum_{g \in \mathcal{T}(N/T)} \vartheta^g(\bar{x}), \quad (4.2)$$

Dabei ist $\langle y \rangle = D$ und $x \in C$, bzw. $\bar{x} \in C/D$ ein p' -Element. Da N auf den irreduziblen Charakteren von C/D vermöge des Automorphismus ι operiert (man vergleiche die Bemerkungen vor Satz 4.2.8), lässt sich (4.2) wie folgt vereinfachen. Ist ϑ ein selbst-assoziierter Charakter, so reduziert sich die Summe der rechten Seite von (4.2) zu $\pm \vartheta(\bar{x})$. Ist ϑ nicht selbst-assoziiert, so erhält man als rechte Seite $\pm(\vartheta(\bar{x}) + \vartheta^a(\bar{x}))$.

Bezüglich der linken Seite von (4.2) ist zu beachten, dass das Element $xy \in \tilde{\mathcal{S}}_n$ einem Element entspricht, das unter der kanonischen Projektion auf \mathcal{S}_n vom Zykeltyp (π, p) ist, wobei $\pi \in \mathcal{P}_{n-p}$ ist und keinen durch p teilbaren Teil besitzt. Es genügt den Fall $\pi \in \mathcal{O}_{n-p}$ zu betrachten, da in den übrigen Fällen, d.h. wenn $\pi \in \mathcal{P}_{n-p} \setminus \mathcal{O}_{n-p}$ ist, die zugehörigen Charakterwerte 0 sind (man vgl. Satz 3.3.5 und beachte, dass p kein Teil von λ ist). In diesem Fall liefert die Anwendung von Satz 3.4.8, dass

$$\langle \lambda \rangle(xy) = (-1)^{L_\lambda(\lambda_{(\bar{p})})} \langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle(\bar{x})$$

ist, falls λ ungerade ist, bzw.

$$\begin{aligned} \langle \lambda \rangle(xy) &= (-1)^{L_\lambda(\lambda_{(\bar{p})})} 2 \langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle(\bar{x}) = \\ &= (-1)^{L_\lambda(\lambda_{(\bar{p})})} (\langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle(\bar{x}) + \langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle^a(\bar{x})) \end{aligned}$$

ist, falls λ gerade ist. Da $\langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle$ und ϑ Defekt-0-Charaktere sind, verschwinden sie auf den p -singulären Klassen von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$.

Berücksichtigen wir, dass $\langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle$ und ϑ irreduzibel sind und das (4.2) insbesondere für $x = 1$ gilt, so liefert ein Vergleich beider Seiten von (4.2) damit folgendes Ergebnis: Ist λ eine ungerade Partition, so gilt $\langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle = \vartheta$. Ist λ eine gerade Partition, so erhalten wir $\langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle = \vartheta$ oder $\langle \lambda_{(\bar{p})} \rangle^a = \vartheta$. Daraus folgt die Behauptung. ■

4.2.10 Satz (Exzeptionelle Multiplizität)

Ist B ein Spinblock von zyklischem Defekt und D eine Defektgruppe von B , so ist die exzeptionelle Multiplizität von B höchstens 2.

Beweis: In den Ausführungen vor Satz 4.2.8 haben wir gesehen, dass die Operation von $N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}})$ auf $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$ die Spincharaktere mit ihren assoziierten vertauscht. Eine Bahn unter dieser Operation kann folglich höchstens die Länge 2 haben.

Es seien $N(D) := N_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D)$ und $C(D) := C_{\tilde{\mathcal{S}}_n}(D)$. Wir betrachten die Operation auf den Defekt-0-Spincharakteren von $\tilde{\mathcal{S}}_{\{p+1, \dots, n\}}$. Ist ϑ ein solcher Charakter, der nach Satz

4.2.8 zu B korrespondiert, so erhält man für die exzeptionelle Multiplizität $m = \frac{p-1}{e}$ (vgl. Definition 2.8.2), wobei $e = |\text{Stab}(\vartheta) : C(D)| = |\text{IBr}(B)|$ ist, wegen

$$p - 1 = |N(D) : C(D)| = |N(D) : \text{Stab}(\vartheta)| |\text{Stab}(\vartheta) : C(D)|,$$

dass $m = |N(D) : \text{Stab}(\vartheta)|$ und damit $m \leq 2$ ist. ■

4.2.11 Folgerung

Aus 4.2.9 und Satz 4.2.10 folgt unmittelbar, dass ein Spinblock B vom \bar{p} -Gewicht 1 eine exzeptionelle Multiplizität von 1 hat, falls der \bar{p} -Kern von B eine gerade Partition ist. Im anderen Fall eines ungeraden \bar{p} -Kerns ist seine exzeptionelle Multiplizität genau 2.

Dieses Kapitel hat gezeigt, dass der \bar{p} -Kern einer Balkenpartition eine wichtige Rolle in der p -modularen Darstellungstheorie von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ spielt. Die Menge der möglichen \bar{p} -Kerne der Balkenpartitionen vom \bar{p} -Gewicht 1 liefert sofort die Blockzerlegung von $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Darüber hinaus lassen sich durch Hinzufügen jeweils eines p -Balkens zu dem \bar{p} -Kern alle Charaktere eines Spinblocks bestimmen. Schließlich lässt sich sogar nur durch Betrachtung des \bar{p} -Kerns eines Spinblocks vom Defekt 1 entscheiden, wie groß seine exzeptionelle Multiplizität ist und wieviele Brauercharaktere im Block liegen.

Im nächsten Kapitel werden wir darüber hinaus noch weitere Information über die Struktur der Brauerbäume aus den \bar{p} -Kernen gewinnen können.

Kapitel 5

Brauerbäume von $\tilde{\mathcal{S}}_n$

In diesem Kapitel werden die gesammelten Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel dazu verwendet, die Struktur der Brauerbäume der Überlagerungsgruppen der symmetrischen Gruppen zu untersuchen.

Zunächst werden einige generische Beispiele vorgestellt, die einen guten Einblick in die Struktur der Brauerbäume geben. An ihnen lässt sich bereits die allgemeine Struktur erkennen, die im zweiten Teil dieses Kapitels bewiesen werden soll.

Bei der Untersuchung der Brauerbäume machen wir eine Einschränkung: wir werden weder im allgemeinen Fall, noch in den generischen Beispielen in der Lage sein, bis auf wenige Ausnahmen genaue Bezeichnungen für die einzelnen Knoten der Bäume angeben zu können. Die Konstituenten der projektiv unzerlegbaren Moduln werden nur bis auf Assoziiertheit bestimmt, d.h. uns genügt es die Balkenpartitionen zu kennen, deren zugehörige Charaktere eine PIM bilden, ohne aber zwischen einem Charakter und seinem Assoziierten (man vergleiche Definition 3.3.7) zu unterscheiden.

5.1 Generische Beispiele

In diesem Abschnitt werden die Brauerbäume der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_p$, $\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}$ und $\tilde{\mathcal{S}}_{p+2}$ in ungerader Charakteristik p bestimmt. Auf diese Weise wird nicht nur die allgemeine Struktur der Bäume angedeutet, sondern auch vorgestellt, wie sie sich bestimmen lassen.

5.1.1 Der Fall $\tilde{\mathcal{S}}_p \bmod p$

Nach Satz 4.2.9 genügt es zur Bestimmung der Spinblöcke vom Defekt 1, alle möglichen Partitionen vom \bar{p} -Gewicht 0 in \mathcal{D}_0 zu bestimmen. In diesem Fall gibt es nur die leere Partition $[\]$, die als \bar{p} -Kern vorkommen kann. Es gibt also genau einen Spinblock B vom

Defekt 1, nämlich derjenige, dessen \bar{p} -Kern $B_{(\bar{p})} = []$ ist. Zur Bestimmung der zugehörigen irreduziblen Spincharaktere von B bedienen wir uns der p -Balkenaddition gemäß Definition 4.1.4: Der p -Abakus von $B_{(\bar{p})}$ ist leer, d.h. es können keine Balken vom Typ '+' hinzugefügt werden. Aus der p -Balkenaddition vom Typ '0' geht genau ein Charakter hervor, nämlich $\langle [p] \rangle$. Da in der 0-Zeile des p -Abakus alle $\frac{p-1}{2}$ konjugierten Positionen unbesetzt sind, erhält man durch Hinzufügen von Balken des '-' Typs ebensoviele Partitionen, die Spincharaktere aus $\text{Irr}(B)$ indizieren. Insgesamt gilt folglich

$$\text{Irr}(B) = \{ \langle [p] \rangle \} \cup \{ \langle [p-k, k] \rangle, \langle [p-k, k] \rangle^a \mid 1 \leq k \leq (p-1)/2 \}.$$

Um die Zerlegungsmatrix von B zu bestimmen, benutzt man folgende Strategie: Ist χ ein Charakter einer Gruppe G und ϕ ein Charakter von $H \leq G$ einer Untergruppe, so besagt die Frobenius-Reziprozität, dass $(\phi^G, \chi) = (\phi, \chi_H)$ ist. Man betrachtet also die Konstituenten der auf \tilde{S}_{p-1} eingeschränkten Charaktere von B und induziert diese hoch auf \tilde{S}_p . Da p die Gruppenordnung von \tilde{S}_{p-1} nicht teilt, sind die Konstituenten der Einschränkungen projektiv. Durch Induktion überträgt sich diese Eigenschaft auf die resultierenden Charaktere. Auf diese Weise erhält man eine Fülle von projektiven Charakteren, die gemäß der Frobenius-Reziprozität Konstituenten in B haben, um die Brauer-Reziprozität (Satz 2.3.9) auszunutzen. Das Einschränken und Induzieren erfolgt mittels der Branching-Rules und wir erhalten (mit den Bezeichnungen aus Folgerung 3.4.10):

$$\begin{aligned} \langle [p] \rangle_{\tilde{S}_{p-1}} &= \langle [p-1] \rangle^* = \langle [p-1] \rangle + \langle [p-1] \rangle^a \\ \langle [p-1, 1] \rangle_{\tilde{S}_{p-1}} &= \langle [p-1] \rangle + \langle [p-2, 1] \rangle^* = \langle [p-1] \rangle + \langle [p-2, 1] \rangle \end{aligned}$$

Für $2 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle [p-k, k] \rangle_{\tilde{S}_{p-1}} &= \langle [p-k-1, k] \rangle^* + \langle [p-k, k-1] \rangle^* = \\ &= \langle [p-k-1, k] \rangle + \langle [p-k, k-1] \rangle \end{aligned}$$

Und für den Fall $k = \frac{p-1}{2}$ gilt:

$$\langle [p-k, k] \rangle_{\tilde{S}_{p-1}} = \langle [p-k, k-1] \rangle^* = \langle [p-k, k-1] \rangle$$

Sämtliche Konstituenten der eingeschränkten Charaktere des Blocks sind also wieder 2-Teil-Partitionen-Charaktere. Das heißt induziert man diese 2-Teil-Partitionen-Charaktere von \tilde{S}_{p-1} , so haben sie Konstituenten, die in B liegen.

Durch Anwendung der Branching-Rules folgt dann:

$$\begin{aligned} \langle [p-1] \rangle_{\tilde{S}_p} &= \langle [p-1, 1] \rangle + \langle [p] \rangle \\ (\langle [p-1] \rangle^a)_{\tilde{S}_p} &= \langle [p-1, 1] \rangle^a + \langle [p] \rangle \\ \langle [p-2, 1] \rangle_{\tilde{S}_p} &= \langle [p-1, 1] \rangle^* + \langle [p-2, 2] \rangle^* = \\ &= \langle [p-1, 1] \rangle + \langle [p-1, 1] \rangle^a + \langle [p-2, 2] \rangle + \langle [p-2, 2] \rangle^a \end{aligned}$$

Für $2 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle [p-k-1, k] \rangle^{\tilde{S}_p} &= \langle [p-k-1, k, 1] \rangle + \langle [p-k, k] \rangle^* + \langle [p-k-1, k+1] \rangle^* \\ &= \langle [p-k, k, 1] \rangle + \langle [p-k, k] \rangle + \langle [p-k, k] \rangle^a \\ &\quad + \langle [p-k-1, k+1] \rangle + \langle [p-k-1, k+1] \rangle^a \end{aligned}$$

Stellt man nun die Matrix auf, die angibt wie sich die induzierten projektiven Charaktere in die gewöhnlichen aus $\text{Irr}(B)$ zerlegen, so kann man die Form des Brauerbaumes ablesen. Dabei kann man die oben auftretenden 3-Teil-Partitionen-Charaktere gemäß Bemerkung 2.5.4 weglassen, da sie Defekt-0-Charaktere von \tilde{S}_p sind. Es ergibt sich:

	$\langle [p-1] \rangle^{\tilde{S}_p}$	$\langle [p-1] \rangle^{a\tilde{S}_p}$	$\langle [p-2, 1] \rangle^{\tilde{S}_p}$	$\langle [p-2, 2] \rangle^{\tilde{S}_p}$	$\langle [p-3, 3] \rangle^{\tilde{S}_p}$...	$\langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-3}{2}] \rangle^{\tilde{S}_p}$
$\langle [p] \rangle$	1	1	0	0	0	...	0
$\langle [p-1, 1] \rangle$	1	0	1	0	0	...	0
$\langle [p-1, 1] \rangle^a$	0	1	1	0	0	...	0
$\langle [p-2, 2] \rangle$	0	0	1	1	0	...	0
$\langle [p-2, 2] \rangle^a$	0	0	1	1	0	...	0
$\langle [p-3, 3] \rangle$	0	0	0	1	1	...	0
$\langle [p-3, 3] \rangle^a$	0	0	0	1	1	...	0
$\langle [p-4, 4] \rangle$	0	0	0	0	1	...	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots
$\langle [\frac{p+3}{2}, \frac{p-3}{2}] \rangle$	0	0	0	0	0	...	1
$\langle [\frac{p+3}{2}, \frac{p-3}{2}] \rangle^a$	0	0	0	0	0	...	1
$\langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}] \rangle$	0	0	0	0	0	...	1
$\langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}] \rangle^a$	0	0	0	0	0	...	1

Fängt man nun an spaltenweise aufzuschlüsseln, wie die PIMs sich zusammensetzen, dann erkennt man sofort, dass die Knoten von $\langle [p] \rangle$ und $\langle [p-1, 1] \rangle$, sowie $\langle [p] \rangle$ und $\langle [p-1, 1] \rangle^a$ adjazent sind. Betrachtet man die dritte Spalte, so ergibt sich unter Beachtung der Tatsache, dass Bäume kreisfreie Graphen sind, dass entweder $\langle [p-1, 1] \rangle$ und

$\langle [p-2, 2] \rangle$, sowie $\langle [p-1, 1] \rangle^a$ und $\langle [p-2, 2] \rangle^a$, oder $\langle [p-1, 1] \rangle$ und $\langle [p-2, 2] \rangle^a$, sowie $\langle [p-1, 1] \rangle^a$ und $\langle [p-2, 2] \rangle$ einen PIM bilden. Da wir aber nur an den Konstituenten einer PIMs bis auf Assoziiertheit interessiert sind, genügt die Information, dass die Knoten mit den Bezeichnungen $[p-1, 1]$ und $[p-2, 2]$ mit einer Kante des Baumes inzident sind. Führt man dieses Verfahren spaltenweise fort, so erhält man schließlich als Baum Γ_B ein offenes Polygon.

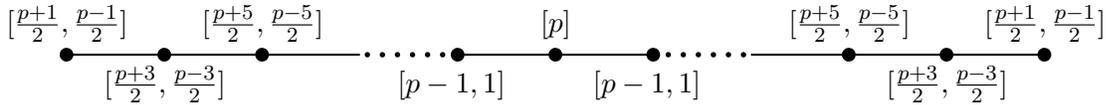
Um diesen Baum gemäß Bemerkung 2.8.8 in die Ebene einzubetten, genügt es zu überprüfen, ob einer der 2-Teil-Partitionen-Charaktere $\langle [\lambda_1, \lambda_2] \rangle$ auf der Klasse $[\lambda_1, \lambda_2]$ reelle oder nichtreelle Werte annimmt, da dies nur auf dieser Klasse geschehen kann (vgl. Satz 3.3.5). Dabei gilt

$$\langle [\lambda_1 \lambda_2] \rangle ([\lambda_1, \lambda_2]) = \sqrt{-1}^k \sqrt{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{2}},$$

wobei $k := \frac{p-1}{2}$ ist.

Es genügt also $k \bmod 2$ zu betrachten, um die Frage, ob der Charakter $\langle [\lambda_1, \lambda_2] \rangle$ auch nichtreelle Werte annimmt oder nicht, zu beantworten. Es ist $\frac{p-1}{2} \equiv 0 \pmod 2$ genau dann, wenn $p-1 \equiv 0 \pmod 4$ ist und $\frac{p-1}{2} \equiv 1 \pmod 2$ genau dann, wenn $p-1 \equiv 2 \pmod 4$ ist. Der Baum Γ_B ist also im Fall von $p \equiv 1 \pmod 4$ ein reeller Stamm, der waagrecht in die Ebene eingebettet ist, und im Fall von $p \equiv -1 \pmod 4$ ein senkrecht in die Ebene eingebettetes offenes Polygon, dessen einziger nur reell-wertiger Charakter $\langle [p] \rangle$ ist.

Es ergibt sich also insgesamt



für den Fall, dass $p \equiv 1 \pmod 4$ ist. Im anderen Fall geht der Baum aus dem hier abgebildeten durch eine Drehung von 90° um $\langle [p] \rangle$ hervor.

5.1.2 Der Fall $\tilde{\mathcal{S}}_{p+1} \bmod p$

Der einzig mögliche \bar{p} -Kern einer Partition $\lambda \in \mathcal{D}_{p+1}$, deren \bar{p} -Gewicht 1 ist, ist $\lambda_{(\bar{p})} = [1]$. Es gibt folglich genau einen Spinblock B vom Defekt 1. Im zugehörigen p -Abakus seines \bar{p} -Kerns ist nur die Position $(0, 1)$ besetzt. Durch Verschieben dieser Kugel und dem Hinzufügen weiterer gemäß der p -Balkenaddition erhält man wieder alle Charaktere von $\text{Irr}(B)$. Durch Balkenaddition vom Typ '0' erhält man den Charakter $\langle [p, 1] \rangle$. Durch das Verschieben von der Kugel in Position $(0, 1)$ werden zwei assoziierte Charaktere von $\text{Irr}(B)$ erzeugt, nämlich $\langle [p+1] \rangle$ und $\langle [p+1] \rangle^a$. Da noch $\frac{p-3}{2}$ konjugierte Positionen in der Nullzeile des Abakus frei sind, erhält man ebensoviele Balkenpartitionen, die irreduzible

Spincharaktere aus B indizieren. Da jeweils nur eine der konjugierten Positionen gerade ist, entstehen auf diese Weise ungerade Partitionen, die folglich Paare assoziierter Charaktere indizieren. Insgesamt ist

$$\text{Irr}(B) = \{ \langle [p, 1] \rangle, \langle [p+1] \rangle, \langle [p+1]^a \rangle \} \cup \\ \{ \langle [p-k, k, 1] \rangle, \langle [p-k, k, 1]^a \rangle \mid 2 \leq k \leq (p-1)/2 \}.$$

Die Anwendung der Branching-Rules zur Bestimmung der Konstituenten aus $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_p)$ der eingeschränkten Charaktere von $\text{Irr}(B)$ liefert folgende Ergebnisse:

Für $3 \leq k \leq \frac{p-2}{2}$ gilt:

$$\langle [p-k, k, 1] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_p}^{(a)} = \langle [p-k, k] \rangle^{(a)} + \langle [p-k-1, k, 1] \rangle + \langle [p-k, k-1, 1] \rangle$$

Für $k = 2$

$$\langle [p-2, 2, 1] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_p}^{(a)} = \langle [p-2, 2] \rangle^{(a)} + \langle [p-3, 2, 1] \rangle$$

und für $k = \frac{p-1}{2}$

$$\langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}, 1] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_p}^{(a)} = \langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}] \rangle^{(a)} + \langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-3}{2}, 1] \rangle$$

Da die 3-Teil-Partitionen-Charaktere Defekt-0-Charaktere in $\tilde{\mathcal{S}}_p$, also insbesondere projektiv sind, sind auch ihre Induzierten projektive Charaktere.

Für diese gilt:

$$\langle [p-k-1, k, 1] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}} = \langle [p-k, k, 1] \rangle + \langle [p-k-1, k+1, 1] \rangle + \langle [p-k-1, k, 2] \rangle + \\ + \langle [p-k, k, 1]^a \rangle + \langle [p-k-1, k+1, 1]^a \rangle + \langle [p-k-1, k, 2]^a \rangle$$

dabei entfallen für $k = \frac{p-1}{2}$ jeweils die letzten beiden Summanden und für $k = 2$ jeweils der letzte Summand jeder Zeile.

Wie im Fall von $\tilde{\mathcal{S}}_p$ erhält man auf diese Weise eine gute Übersicht über den größten Teil des Baumes. Lediglich die Knoten der Charaktere zu den Partitionen $[p+1]$ und $[p, 1]$ sind nicht auf diese Weise erschließbar, da sie auf Charaktere einschränken, deren irreduzible Konstituenten keine Defekt-0-Charaktere sind:

$$\langle [p, 1] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_p} = \langle [p] \rangle + \langle [p-1, 1] \rangle + \langle [p-1, 1]^a \rangle \\ \langle [p+1] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_p} = \langle [p] \rangle$$

Da aber die Konstituenten der PIMs der Gruppe $\tilde{\mathcal{S}}_p \bmod p$ bis auf Assoziiertheit bekannt sind, kann man die verbleibenden Lücken im Baum schließen. Dazu induziert man die projektiven Charaktere $\varrho_1 := \langle [p] \rangle + \langle [p-1, 1] \rangle$ und $\varrho_2 := \langle [p-1, 1] \rangle^{(a)} + \langle [p-2, 2] \rangle$.

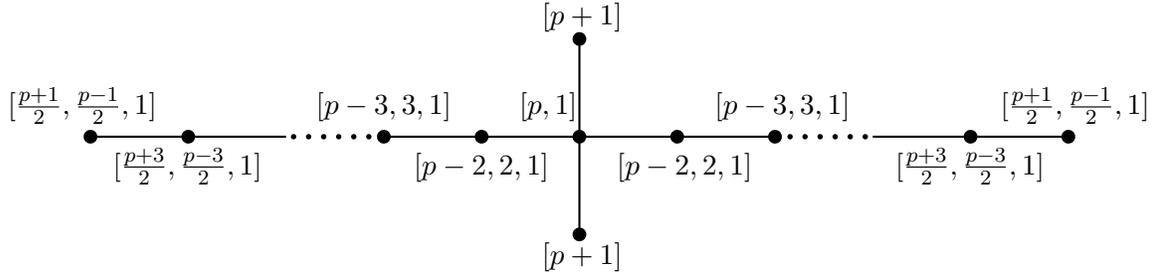
Dabei sollen die Klammern andeuten, dass ϱ_2 nur bis auf Assoziiertheit bekannt ist. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\varrho_1^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}} &= 2\langle [p, 1] \rangle + \langle [p+1] \rangle + \langle [p+1] \rangle^a + \langle [p-1, 2] \rangle \\ \varrho_2^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}} &= \langle [p, 1] \rangle + 2\langle [p-1, 2] \rangle + \langle [p-2, 3] \rangle + \langle [p-2, 2, 1] \rangle\end{aligned}$$

Stellt man nun die gewonnenen Zerlegungen der projektiven Charaktere in ihre gewöhnlichen Konstituenten des Blocks in einer Matrix dar, so läßt sich wieder der Brauerbaum ablesen.

	$\varrho_1^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$	$\varrho_2^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$	$(\varrho_2^a)^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$	$\langle [p-3, 2, 1] \rangle^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$	$\langle [p-4, 3, 1] \rangle^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$	$\langle [p-5, 4, 1] \rangle^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$	\dots	$\langle [\frac{p+7}{2}, \frac{p-5}{2}, 1] \rangle^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$	$\langle [\frac{p+5}{2}, \frac{p-3}{2}, 1] \rangle^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}}$
$\langle [p, 1] \rangle$	2	1	1	0	0	0	\dots	0	0
$\langle [p+1] \rangle$	1	0	0	0	0	0	\dots	0	0
$\langle [p+1] \rangle^a$	1	0	0	0	0	0	\dots	0	0
$\langle [p-2, 2, 1] \rangle$	0	1	0	1	0	0	\dots	0	0
$\langle [p-2, 2, 1] \rangle^a$	0	0	1	1	0	0	\dots	0	0
$\langle [p-3, 3, 1] \rangle$	0	0	0	1	1	0	\dots	0	0
$\langle [p-3, 3, 1] \rangle^a$	0	0	0	1	1	0	\dots	0	0
$\langle [p-4, 4, 1] \rangle$	0	0	0	0	1	1	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
$\langle [\frac{p+3}{2}, \frac{p-3}{2}, 1] \rangle$	0	0	0	0	0	0	\dots	1	1
$\langle [\frac{p+3}{2}, \frac{p-3}{2}, 1] \rangle^a$	0	0	0	0	0	0	\dots	1	1
$\langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}, 1] \rangle$	0	0	0	0	0	0	\dots	0	1
$\langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}, 1] \rangle^a$	0	0	0	0	0	0	\dots	0	1

In Analogie zu dem Fall $\tilde{\mathcal{S}}_p \bmod p$ in Abschnitt 5.1.1 führt eine iterierte, spaltenweise Aufschlüsselung der Matrix zu der Grundform des Baumes:



Um diesen Baum wieder in die Ebene einzubetten, muss die endgültige Orientierung des Baumes geklärt werden. Dazu genügt es den Charakterwert $\langle [p+1] \rangle([p+1])$ zu betrachten. Durch einen analogen Schluß wie im Fall $\tilde{\mathcal{S}}_p \bmod p$ erhält man, dass der Hauptteil des Baumes waagrecht liegt, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist und sonst im Fall $p \equiv -1 \pmod{4}$ senkrecht steht. Der oben abgebildete Baum entspricht folglich dem Fall, dass $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist, und ist bis auf Assoziiertheit in die Ebene eingebettet.

5.1.3 Der Fall $\tilde{\mathcal{S}}_{p+2} \bmod p$

Auch in diesem Fall gibt es nur eine mögliche Partition, die als \bar{p} -Kern eines Blocks vom \bar{p} -Gewicht 1 infrage kommt. Es gibt folglich nur einen Spinblock B vom Defekt 1 in $\tilde{\mathcal{S}}_{p+2}$ und sein \bar{p} -Kern ist $[2]$. Wie in den vorhergehenden Fällen lassen sich durch p -Balkenaddition alle Charaktere von $\text{Irr}(B)$ bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Irr}(B) = \{ & \langle [p+2] \rangle, \langle [p, 2] \rangle, \langle [p, 2] \rangle^a, \langle [p-1, 2, 1] \rangle \} \\ & \cup \{ \langle [p-k, k, 2] \rangle \mid 3 \leq k \leq (p-1)/2 \} \end{aligned}$$

Die Anwendung der Branching-Rules zur Bestimmung der Konstituenten aus $\text{Irr}(\tilde{\mathcal{S}}_{p+1})$ der eingeschränkten Charaktere von $\text{Irr}(B)$ liefert folgende Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \langle [p+2] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}} &= \langle [p+1] \rangle + \langle [p+1] \rangle^a \\ \langle [p, 2] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}} &= \langle [p-1, 2] \rangle + \langle [p, 1] \rangle \\ \langle [p-1, 2, 1] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}} &= \langle [p-1, 2] \rangle + \langle [p-2, 2, 1] \rangle + \langle [p-2, 2, 1] \rangle^a \end{aligned}$$

Für $3 \leq k \leq \frac{p-1}{2}$:

$$\begin{aligned} \langle [p-k, k, 2] \rangle_{\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}} = & \langle [p-k-1, k, 2] \rangle + \langle [p-k-1, k, 2] \rangle^a \\ & + \langle [p-k, k-1, 2] \rangle + \langle [p-k, k-1, 2] \rangle^a \\ & + \langle [p-k, k, 1] \rangle + \langle [p-k, k, 1] \rangle^a \end{aligned}$$

Wobei auf der rechten Seite Summanden gegebenenfalls wegfallen, falls die indizierenden Partitionen keine Balkenpartitionen sind.

Da die Blockstruktur von $\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}$ bekannt ist, lassen sich leicht die Defekt-0-Konstituenten identifizieren. Eine Induktion dieser liefert:

$$\begin{aligned} \langle [p-1, 2] \rangle^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+2}} = & \langle [p-1, 2, 1] \rangle + \langle [p, 2] \rangle + \langle [p, 2] \rangle \\ & + \langle [p-1, 3] \rangle + \langle [p-1, 3] \rangle^a \end{aligned}$$

und für $3 \leq k \leq \frac{p-3}{2}$

$$\begin{aligned} \langle [p-k-1, k, 2] \rangle^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+2}} = & \langle [p-k-1, k, 2, 1] \rangle + \langle [p-k, k, 2] \rangle \\ & + \langle [p-k-1, k+1, 2] \rangle + \langle [p-k-1, k, 3] \rangle \end{aligned}$$

dabei entfällt für $k = 3$ der letzte Summand.

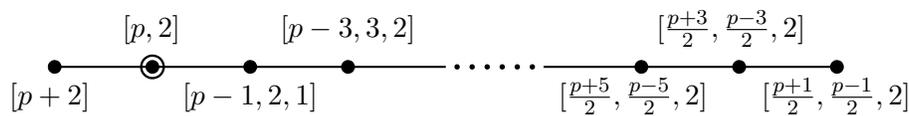
Da wieder Lücken verbleiben, die nicht durch Induktion von Defekt-0-Charakteren geschlossen werden können, werden diese wie im Fall $\tilde{\mathcal{S}}_{p+1}$ durch Induktion von geeigneten projektiven Charakteren geschlossen. Hierzu nehmen wir die Charaktere $\varrho_1 := \langle [p+1] \rangle^{(a)} + \langle [p, 1] \rangle$ und $\varrho_2 := \langle [p-2, 2, 1] \rangle^{(a)1} + \langle [p-3, 3, 1] \rangle^{(a)2}$, die sich in Abschnitt 5.1.2 als projektiv erwiesen haben (bis auf Assoziiertheit). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \varrho_1^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+2}} &= \langle [p+2] \rangle + \langle [p+1, 1] \rangle^{(a)} + \langle [p+1, 1] \rangle + \langle [p+1, 1] \rangle^a \\ &\quad + \langle [p, 2] \rangle + \langle [p, 2] \rangle^a \\ \varrho_2^{\tilde{\mathcal{S}}_{p+2}} &= \langle [p-1, 2, 1] \rangle + 2\langle [p-2, 3, 1] \rangle + \langle [p-3, 4, 1] \rangle + \langle [p-3, 3, 2] \rangle \end{aligned}$$

Mit diesen Informationen läßt sich wieder eine Matrix aufstellen, die darstellt wie sich die induzierten projektiven Charaktere in B zerlegen. Sie ist auch ausreichend die Struktur des Baumes zu bestimmen.

	\tilde{S}_{p+2}^1	$\langle [p-1, 2] \rangle_{\tilde{S}_{p+2}}$	\tilde{S}_{p+2}^2	$\langle [p-4, 3, 2] \rangle_{\tilde{S}_{p+2}}$	$\langle [p-5, 4, 2] \rangle_{\tilde{S}_{p+2}}$	$\langle [p-6, 5, 2] \rangle_{\tilde{S}_{p+2}}$	\dots	$\langle [\frac{p+7}{2}, \frac{p-5}{2}, 2] \rangle_{\tilde{S}_{p+2}}$	$\langle [\frac{p+5}{2}, \frac{p-3}{2}, 2] \rangle_{\tilde{S}_{p+2}}$
$\langle [p+2] \rangle$	1	0	0	0	0	0	\dots	0	0
$\langle [p, 2] \rangle$	1	1	0	0	0	0	\dots	0	0
$\langle [p, 2] \rangle^a$	1	1	0	0	0	0	\dots	0	0
$\langle [p-1, 2, 1] \rangle$	0	1	1	0	0	0	\dots	0	0
$\langle [p-3, 3, 2] \rangle$	0	0	1	1	0	0	\dots	0	0
$\langle [p-4, 4, 2] \rangle$	0	0	0	1	1	0	\dots	0	0
$\langle [p-5, 5, 2] \rangle$	0	0	0	0	1	1	\dots	0	0
$\langle [p-6, 6, 2] \rangle$	0	0	0	0	0	1	\dots	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
$\langle [\frac{p+3}{2}, \frac{p-3}{2}, 2] \rangle$	0	0	0	0	0	0	\dots	1	1
$\langle [\frac{p+1}{2}, \frac{p-1}{2}, 2] \rangle$	0	0	0	0	0	0	\dots	0	1

In diesem Fall lässt sich der zugehörige Brauerbaum leicht aus der Matrix ablesen. Wie wir sehen, ist der Baum in diesem Fall ein offenes Polygon. Die Charaktere $\langle [p, 2] \rangle$ und $\langle [p, 2] \rangle^a$ gleichen sich auf den p' -Klassen und bilden nach Satz 2.8.1 dabei den exzeptionellen Knoten des Baumes. Aus Satz 3.3.5 wissen wir, dass somit alle den Knoten zugeordneten Charaktere nur reelle Werte annehmen können. Die Einbettung in die Ebene gestaltet sich demzufolge leicht. Durch diese Überlegungen erhalten wir schließlich:



5.2 Zur allgemeinen Struktur

Kommen wir nun zur allgemeinen Struktur der Brauerbäume in ungerader Charakteristik. Dabei wollen wir diese nur bis auf Assoziiertheit angeben. Auch werden wir nicht in der Lage sein, den Knoten explizit Labellings zu zuschreiben. Der Vollständigkeit wegen werden am Ende dieser Arbeit einige Ergebnisse aus einer Arbeit von J. Müller (siehe [23]) angeführt. Die Grundlage von [23] ist die vorliegende Arbeit. Die Bezeichnungen sind so gewählt, dass sie den Bezeichnungen in [23] entsprechen, um dem interessierten Leser das Weiterlesen zu vereinfachen.

Es sei p eine ungerade Primzahl, (K, R, k) ein p -modulares Zerfallungssystem für $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und B ein Defekt-1-Spinblock von $\tilde{\mathcal{S}}_n$. Weiter bezeichne $\lambda_{(\bar{p})}$ seinen \bar{p} -Kern, d.h. $\lambda_{(\bar{p})}$ ist der \bar{p} -Kern aller Balkenpartitionen, welche die Charaktere $\langle \lambda \rangle \in \text{Irr}(B)$ indizieren.

Da ein Block vom Defekt 1 ein Block vom \bar{p} -Gewicht 1 ist (vgl. Folgerung 4.2.3), besteht der zu $\lambda_{(\bar{p})}$ gehörende p -Abakus nur aus lückenlosen „Türmen“ von Kugeln, so dass von jedem Paar konjugierter Positionen höchstens eine Position davon besetzt ist. Dies legt folgende Definition nahe:

5.2.1 Definition (s -Invariante)

Die Anzahl der besetzten Positionen der Nullzeile des zu $\lambda_{(\bar{p})}$ gehörenden p -Abakus wird mit s bezeichnet und die s -Invariante von B genannt.

Sind s Positionen aus der Nullzeile des p -Abakus von $\lambda_{(\bar{p})}$ besetzt, so verbleiben noch $\frac{p-1}{2} - s$ Paare konjugierter Positionen, die unbesetzt sind. Es folgt:

5.2.2 Bemerkung

Es sei s die s -Invariante von B . Dann gilt:

- (i) Es gehen genau s Balkenpartitionen aus $\lambda_{(\bar{p})}$ durch Hinzufügen eines p -Balkens vom '+'-Typ hervor. Diese werden mit $\lambda_1^+, \dots, \lambda_s^+$ bezeichnet.
- (ii) Durch Addition eines p -Balkens vom '0'-Typ entsteht unabhängig von s immer eine Balkenpartition, die mit λ^0 bezeichnet werden soll.
- (iii) Besetzt man im p -Abakus von $\lambda_{(\bar{p})}$ durch Hinzufügen eines p -Balkens vom '-'-Typ ein freies Paar konjugierter Positionen, so erhält man $\frac{p-1}{2} - s$ Balkenpartitionen, die mit $\lambda_1^-, \dots, \lambda_{\frac{p-1}{2}-s}^-$ bezeichnet werden.

Die resultierenden Partitionen λ_i^+ , $1 \leq i \leq s$, und λ_j^- , $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} - s$, enthalten keinen Teil, der ein Vielfaches von p ist. Nur λ_0 enthält einen durch p teilbaren Teil, nämlich p selbst.

5.2.3 Definition (Signum eines Blocks)

Wir definieren $\varepsilon(B) := \varepsilon(\lambda_{(\bar{p})})$ und nennen $\varepsilon(B)$ das Signum von B .

Um das Signum der in Bemerkung 5.2.2 erzeugten Balkenpartitionen zu bestimmen, genügt es wegen

$$\varepsilon(\lambda) = (-1)^{n-\ell(\lambda)}$$

zu untersuchen, wie sich die Länge ändert.

5.2.4 Lemma

Durch Hinzufügen eines p -Balkens vom '+'-Typ oder '-'-Typ zum \bar{p} -Kern erhalten wir eine Partition, deren Signum das umgekehrte Signum des Blocks ist, d.h.

$$\varepsilon(\lambda_i^+) = -\varepsilon(B) = \varepsilon(\lambda_j^-),$$

für $1 \leq i \leq s$ und $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} - s$.

Beim Hinzufügen eines p -Balkens vom Typ '0' bleibt das Signum des Blocks erhalten, d.h.

$$\varepsilon(\lambda^0) = \varepsilon(B).$$

Beweis: Für ein $1 \leq i \leq s$ betrachte man die Signatur von λ_i^+ . Es ist $\sigma(\lambda_i^+) = n - \ell(\lambda_i^+)$. Da sich bei einer p -Balkenaddition vom '+'-Typ die Länge der resultierenden Partition nicht von der ihres \bar{p} -Kerns unterscheidet, kann man dies zurückführen auf

$$\sigma(\lambda_i^+) = n - p - \ell(\lambda_{(\bar{p})}) + p = \sigma(\lambda_{(\bar{p})}) + p.$$

Folglich entspricht das Signum von λ_i^+ wegen $\varepsilon(\lambda_i^+) = (-1)^{\sigma(\lambda_i^+)}$, dem negativen des Signums von $\lambda_{(\bar{p})}$. Berücksichtigt man weiter wie sich die Längen der resultierenden Partitionen bei den Typen '0' und '-' von der des \bar{p} -Kerns unterscheidet, erhält man $\sigma(\lambda^0) = \sigma(\lambda_{(\bar{p})}) + p - 1$ und $\sigma(\lambda_j^-) = \sigma(\lambda_{(\bar{p})}) + p - 2$ für ein $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} - s$. Somit entspricht das Signum von λ_0 dem seines \bar{p} -Kerns, während die Partitionen, die durch eine Balkenaddition vom '-'-Typ entstanden sind, das gleiche Signum besitzen wie die Partitionen, die aus $\lambda_{(\bar{p})}$ durch Hinzufügen eines '+'-Balkens erzeugt wurden. ■

Da mit jedem Charakter, dessen indizierende Partition kein \bar{p} -Kern ist, auch sein assoziierter im selben Block liegt, erlaubt die vorangegangene Bemerkung, die Blöcke im allgemeinen Fall vollständig zu beschreiben:

5.2.5 Folgerung

Ist $\varepsilon(B) = 1$, so besteht $\text{Irr}(B)$ genau aus den p Charakteren $\langle \lambda^0 \rangle$, $\langle \lambda_i^+ \rangle$, $\langle \lambda_i^+ \rangle^a$, $\langle \lambda_j^- \rangle$ und $\langle \lambda_j^- \rangle^a$ für $1 \leq i \leq s$ und $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} - s$.

Im Fall $\varepsilon(B) = -1$, bilden genau die $\frac{p+3}{2}$ Charaktere $\langle \lambda^0 \rangle$, $\langle \lambda^0 \rangle^a$, $\langle \lambda_i^+ \rangle$ und $\langle \lambda_j^- \rangle$ für $1 \leq i \leq s$ und $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2}$ die Menge $\text{Irr}(B)$.

5.2.1 Der Fall $\varepsilon(B) = 1$

Es soll zunächst der reelle Stamm S_B von Γ_B bestimmt werden. Um diesen zu identifizieren, müssen zunächst alle Charaktere bestimmt werden, die nur reelle Werte annehmen. In diesem Fall kommt dem Signum des Blocks eine besondere Bedeutung zu.

Das Signum von B ist genau dann 1, wenn $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) \equiv 0 \pmod{4}$ oder $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) \equiv 2 \pmod{4}$ ist.

5.2.6 Satz

Es ist $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv 1 \pmod{4}$ genau dann, wenn die Charaktere $\langle \lambda_i^+ \rangle$ und $\langle \lambda_i^+ \rangle^a$ von $\text{Irr}(B)$ nur reelle Werte annehmen, während die Charaktere $\langle \lambda_j^- \rangle$ und $\langle \lambda_j^- \rangle^a$ auch nichtreelle Werte annehmen. Umgekehrt ist $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv -1 \pmod{4}$ genau, dann wenn die Charaktere $\langle \lambda_i^+ \rangle$ und $\langle \lambda_i^+ \rangle^a$ von $\text{Irr}(B)$ auch nichtreelle Werte annehmen, während die Charaktere $\langle \lambda_j^- \rangle$ und $\langle \lambda_j^- \rangle^a$ nur reellwertig sind.

Beweis: Um zu entscheiden, ob ein Spincharakter $\langle \lambda \rangle$ mit $\lambda \in \mathcal{D}_n^-$ nichtreelle Werte annimmt, genügt es seinen exzeptionellen Wert zu bestimmen. Gemäß Satz 3.3.5 kann er nur dort nicht reellwertig sein. Für seinen exzeptionellen Wert gilt

$$\langle \lambda \rangle (\lambda) = \sqrt{-1}^{\frac{\sigma(\lambda)+1}{2}} \sqrt{\prod_t \lambda_t}.$$

Die Frage lässt sich folglich weiter reduzieren auf die Frage, wann

$$\frac{\sigma(\lambda)+1}{2} \equiv 0 \pmod{2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sigma(\lambda)+1}{2} \equiv 1 \pmod{2}$$

ist, bzw. äquivalent dazu, wann

$$\sigma(\lambda) \equiv -1 \pmod{4} \quad \text{oder} \quad \sigma(\lambda) \equiv 1 \pmod{4}$$

ist.

Es sei zunächst $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) \equiv 0 \pmod{4}$. Wegen $\sigma(\lambda_i^+) = \sigma(\lambda_{(\bar{p})}) + p$ (vgl. Beweis zu Lemma 5.2.4) ist der exzeptionelle Charakterwert von $\langle \lambda_i^+ \rangle$ reell genau dann, wenn $p \equiv -1 \pmod{4}$ ist. Ist $p \equiv 1 \pmod{4}$, so folgt $\frac{\sigma(\lambda_i^+)+1}{2} \equiv 1 \pmod{2}$ und der exzeptionelle Wert von $\langle \lambda_i^+ \rangle$ ist nichtreell. Da $\sigma(\lambda_j^-) = \sigma(\lambda_{(\bar{p})}) + p - 2$ ist, verhält es sich für $\langle \lambda_j^- \rangle$ genau umgekehrt: sein exzeptioneller Wert ist reell, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist, und nichtreell, wenn $p \equiv -1 \pmod{4}$ ist.

Im anderen Fall ist $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) \equiv 2 \pmod{4}$. Durch zum ersten Fall analoge Schlüsse erhalten wir, dass die exzeptionellen Werte der $\langle \lambda_i^+ \rangle$ gerade reell sind, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist. Ist $p \equiv -1 \pmod{4}$, so nehmen sie auch nichtreelle Werte an. Wieder gilt für die Charaktere $\langle \lambda_j^- \rangle$ das genaue Gegenteil.

Insgesamt lassen sich die vier betrachteten Fälle zu den Fällen $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv 1 \pmod{4}$ und $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv -1 \pmod{4}$ zusammenfassen, woraus die Behauptung folgt. ■

Da λ^0 eine gerade Partition ist, kann der zugehörige irreduzible Spincharakter $\langle \lambda^0 \rangle$ nach Satz 3.3.5 nur reelle Werte annehmen. Damit lässt sich mit obigem Satz unmittelbar der reelle Stamm des Baumes ableiten:

5.2.7 Folgerung

Ist $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv 1 \pmod{4}$, so bildet die Menge der Charaktere $\langle \lambda^0 \rangle$, $\langle \lambda_i^+ \rangle$ und $\langle \lambda_i^+ \rangle^a$, $1 \leq i \leq s$, den reellen Stamm S_B von B .

Ist $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv -1 \pmod{4}$, so sind die Knoten von S_B gerade die Charaktere $\langle \lambda^0 \rangle$, $\langle \lambda_j^- \rangle$ und $\langle \lambda_j^- \rangle^a$ für $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} - s$.

Um mehr über die Anordnung der Charaktere zu erfahren, setzen wir den in Abschnitt 4.2 eingeführten Homomorphismus ι auf $\tilde{\mathcal{S}}_n$ fort.

5.2.8 Definition

Es gelten die Bezeichnungen aus Satz 1.2.2. Wir betrachten $\tilde{\mathcal{S}}_n$ als Untergruppe von $\tilde{\mathcal{S}}_{n+2}$ und bezeichnen mit ι den Automorphismus von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, der eine Konjugation mit t_{n+1} bewirkt. Für die Erzeuger von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ aus ihrer Präsentation folgt durch Betrachtung der letzten Relation:

$$\begin{aligned} \iota : \tilde{\mathcal{S}}_n &\longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}_n, \\ t_i &\longmapsto t_i^{-1}, \\ z &\longmapsto z. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Wie in Abschnitt 4.2 erhalten wir, dass ι auf den irreduziblen Spincharakteren von B operiert, indem ein Charakter auf seinen Assoziierten abgebildet wird. Damit ist B nach Satz 4.1.3 invariant unter ι . Folglich induziert ι auf Γ_B einen Graphenautomorphismus. Mit dessen Hilfe lässt sich die allgemeine Struktur des Brauerbaumes von B beweisen.

5.2.9 Satz

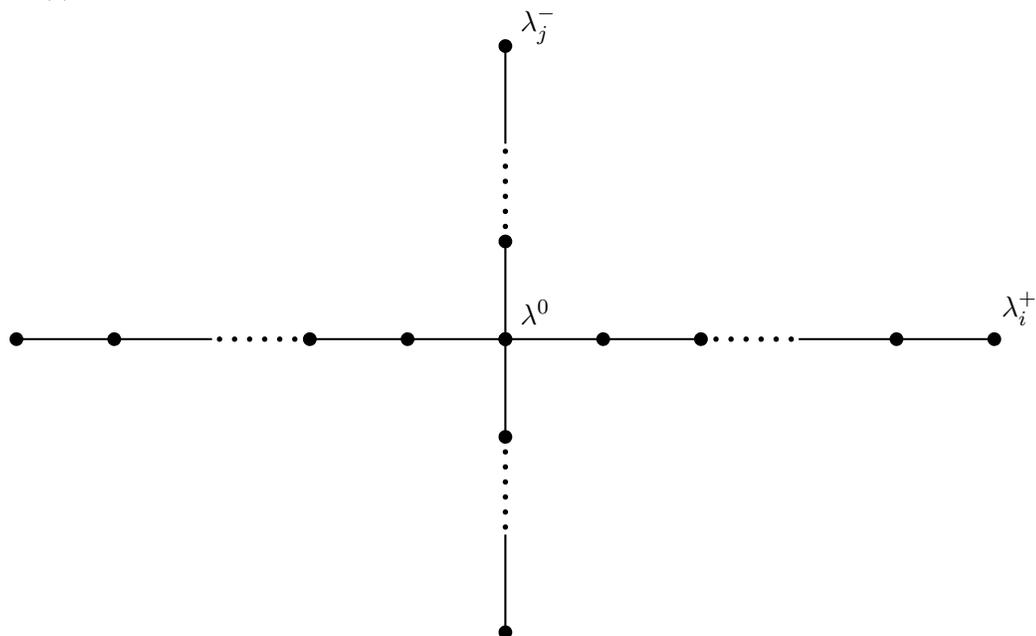
Der Brauerbaum Γ_B von B ist ein vierarmiger Stern, dessen Mittelpunkt durch den Charakter $\langle \lambda^0 \rangle$ gegeben ist. Die Charaktere $\langle \lambda_i^+ \rangle$, $1 \leq i \leq s$, und $\langle \lambda_j^- \rangle$, $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} - s$, bilden jeweils zwei sich gegenüberliegender Arme, auf denen jeweils die zwei Charaktere, die durch dieselbe Partition indiziert sind, den gleichen Abstand von $\langle \lambda^0 \rangle$ haben.

Beweis: Es bezeichne κ die komplexe Konjugation. Da B invariant unter dem Gruppenautomorphismus ι und unter κ ist, ist B ebenfalls invariant unter $\kappa \circ \iota$. Nach Satz 2.8.10 bilden die Knoten der Fixmenge einen zusammenhängenden Teilgraphen T_ι in Form eines offenen Polygons. Durch Inspektion der möglichen Charakterwerte in Satz 3.3.5, ist ersichtlich, dass diese Fixmenge genau aus dem Knoten $\langle \lambda^0 \rangle$ und den Spincharakteren von $\text{Irr}(B)$, deren exzeptioneller Charakterwert nichtreell ist, besteht. Folglich ist Γ_B ein vierarmiger Stern, der den Charakter $\langle \lambda^0 \rangle$, welcher den Schnittpunkt der beiden offenen Polygone S_B und T_ι bildet, im Mittelpunkt enthält.

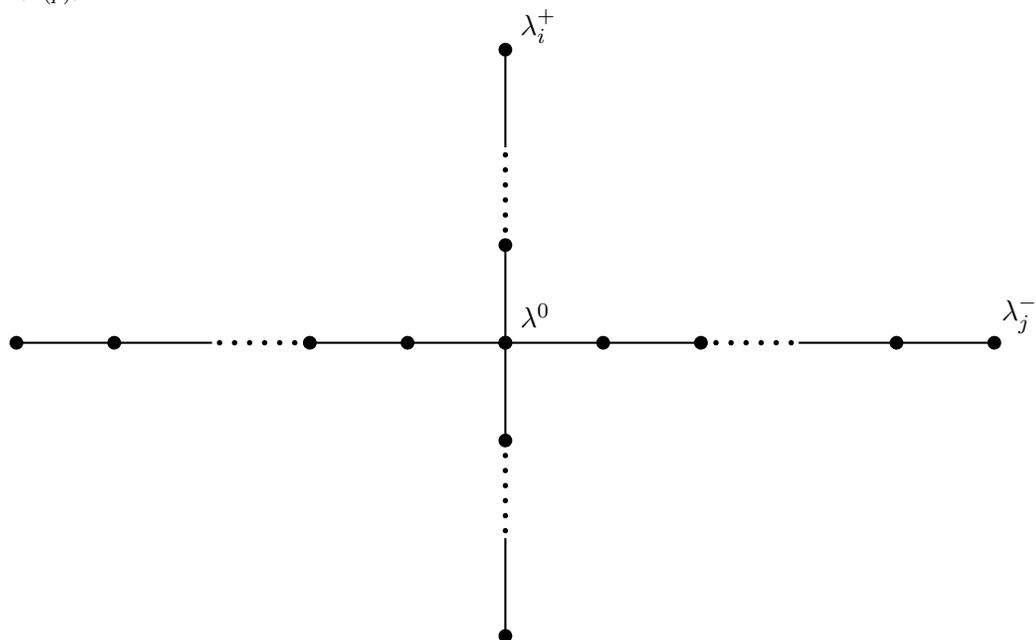
Der durch ι bewirkte Graphenautomorphismus des Brauerbaumes hat Ordnung 2 und lässt sowohl den reellen Stamm S_B als auch die Menge der $(\kappa \circ \iota)$ -Fixpunkte invariant. Demzufolge wird durch ihn eine Punktspiegelung an $\langle \lambda^0 \rangle$ bewirkt, so dass alle Knoten, deren Charaktere durch dieselbe Partition indiziert sind, den gleichen Abstand von $\langle \lambda^0 \rangle$ haben müssen. ■

5.2.10 Folgerung

Für $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv 1 \pmod{4}$ ist Γ_B :



Für $\sigma(\lambda_{(\bar{p})}) - p \equiv -1 \pmod{4}$ ist Γ_B :



Dabei sollen die Bezeichnungen λ_i^+ und λ_j^- jeweils andeuten, welche Charaktere die Knoten der offenen Polygone bilden.

5.2.2 Der Fall $\varepsilon(B) = -1$

Das wesentliche Ergebnis dieses Abschnitts ist der folgende Satz, der bereits aus den bisherigen Ergebnissen folgt. Zum Beweis werden wir diese aber noch einmal aufgreifen und darstellen.

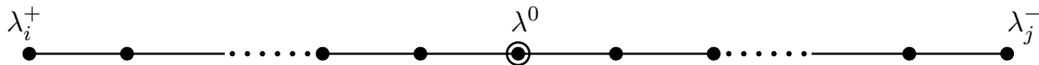
5.2.11 Satz

Der Brauerbaum Γ_B eines Spinblocks B mit $\varepsilon(B) = -1$ ist ein reeller Stamm, der einen exzeptionellen Knoten von der Vielfachheit 2 besitzt. Der exzeptionelle Knoten besteht genau aus den exzeptionellen Charakteren $\langle \lambda^0 \rangle$ und $\langle \lambda^0 \rangle^a$.

Beweis: Nach Lemma 5.2.4 sind die Partitionen λ_i^+ , $1 \leq i \leq s$, und λ_j^- , $1 \leq j \leq \frac{p-1}{2} - s$, gerade Balkenpartitionen. Zu jeder dieser Partitionen gibt es folglich genau einen selbst-assoziierten Charakter, der gemäß Satz 3.3.5 nur ganzzahlige Werte annehmen kann.

Nach Satz 4.2.10 enthält B einen exzeptionellen Charakter, dessen Multiplizität 2 ist. Die Partition λ^0 ist die einzige Partition, die aus $\lambda_{(\bar{p})}$ entsteht und einen durch p teilbaren Teil besitzt. Demzufolge ist die Einschränkung der Charaktere $\langle \lambda^0 \rangle$ und $\langle \lambda^0 \rangle^a$ auf die p' -Klassen gleich: sie unterscheiden sich nur in ihrem exzeptionellen Wert, dieser wird aber auf der Klasse, die durch λ indiziert ist, angenommen, also keine p' -Klasse ist. Nach dem Satz von Brauer und Dade (Satz 2.8.1) sind es folglich genau die beiden assoziierten Charaktere $\langle \lambda^0 \rangle$ und $\langle \lambda^0 \rangle^a$, die den exzeptionellen Knoten des Baumes Γ_B bilden. Dieser ist nach Satz 3.3.5 ebenfalls reellwertig. ■

Die allgemeine Struktur von Γ_B in Analogie zu Folgerung 5.2.10 muss an dieser Stelle ohne einen Beweis auskommen. Es zeigt sich, dass der exzeptionelle Knoten die Charaktere deren Partitionen der Art λ_i^+ , bzw. λ_j^- sind, separiert. Auf der einen Seite des Knotens zu λ^0 befinden sich alle Charaktere, die durch Balkenpartitionen indiziert sind, die einen p -Balken vom '+'-Typ enthalten, während auf der anderen Seite all jene Charaktere sind, deren Balkenpartitionen einen p -Balken vom '-'-Typ enthalten. Der Brauerbaum von B lässt sich demgemäß wie folgt darstellen.



Dabei sollen die angegebenen Partitionen darstellen, welcher Art die jeweiligen Partitionen sind, welche die Charaktere indizieren, die jeweils links und rechts vom exzeptionellen Knoten liegen.

Zum Beweis dieser Darstellung wird Information über die Brauerbäume der Überlagerungsgruppen der alternierenden Gruppen benötigt, was über den Rahmen dieser Arbeit hinausgeht. Hierzu sei an Abschnitt 4.9 in [23] verwiesen.

5.2.3 Explizite Labellings

Abschließend wollen wir uns noch mit der expliziten Verteilung der Spincharaktere auf die Knoten der Brauerbäume beschäftigen, um eine vollständige Beschreibung der Bäume zu erhalten. Auch in diesem Fall wird dies nur bis auf Assoziiertheit der Charaktere geschehen. Das unten vorgestellte Ergebnis ist das Hauptergebnis von [23], worin die Theorie aus [29] mit Ergebnissen aus [19] verbunden wird, um bis auf Assoziiertheit die Anordnung der Spincharaktere zu ermitteln (man vergleiche Abschnitt 6.2 in [23]).

Die Anordnung der Spincharaktere beantwortet folgender Satz:

5.2.12 Satz

Sowohl im Fall $\varepsilon(B) = 1$ als auch im Fall $\varepsilon(B) = -1$ sind die Spincharaktere in der Reihenfolge der Beinlängen ihres p -Balkens angeordnet. D.h. durchläuft man den Brauerbaum Γ_B indem man vom Ende des Zweigs, dessen Charaktere durch Partitionen indiziert sind, die einen p -Balken vom '+'-Typ enthalten, über den Knoten λ^0 zum Ende des Zweigs, dessen Partitionen von der Art λ_j^- sind, so durchläuft man die Partitionen des Blocks gerade in aufsteigender Reihenfolge ihrer Beinlängen.

Beweis: Man vergleiche Korollar 6.4 in [23]. ■

Mit diesem Ergebnis sind die Brauerbäume von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bis auf Assoziiertheit ihrer Knoten vollständig bekannt. Es bleibt folglich nur noch die Frage offen, wie die entsprechenden Bäume der zweiten Überlagerungsgruppen $\hat{\mathcal{S}}_n$ aussehen.

5.2.4 Die Bäume der isoklinen Gruppen

Wir betrachten ein letztes Mal die zu $\tilde{\mathcal{S}}_n$ isokline Gruppe $\hat{\mathcal{S}}_n$.

In Abschnitt 3.6 haben wir gesehen, wie sich die irreduziblen Spincharaktere von $\hat{\mathcal{S}}_n$ von denen, die hauptsächlich in dieser Arbeit betrachtet werden, unterscheiden: sie unterscheiden sich nur auf den exzeptionellen Charakterwerten und lassen sich ineinander überführen, indem man die exzeptionellen Werte der Charaktere von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ mit i multipliziert.

Durch Wahl der ersten und zweiten Klassen von $\hat{\mathcal{S}}_n$ gemäß Abschnitt 3.6 existiert eine Bijektion $\gamma : \mathcal{C}(\hat{\mathcal{S}}_n) \rightarrow \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{S}}_n)$ zwischen den Konjugiertenklassen der Gruppen $\hat{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{S}}_n$, welche die ersten, bzw. zweiten durch ein $\pi \in \mathcal{P}_n$ indizierten Klassen von $\hat{\mathcal{S}}_n$ auf die ersten, bzw. zweiten durch π indizierten Klassen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ abbildet. Es bezeichne τ die Klassenfunktion von $\tilde{\mathcal{S}}_n$, welche auf den durch ein $\pi \in \mathcal{D}_n^-$ indizierten Klassen den Wert i und auf den übrigen Klassen den Wert 1 annimmt. Dann wird durch $(\langle \tilde{\lambda} \rangle \otimes \tau) \circ \gamma$ der irreduzible Spincharakter $\langle \tilde{\lambda} \rangle$ von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ in den irreduziblen Spincharakter

$$\langle \hat{\lambda} \rangle = (\langle \tilde{\lambda} \rangle \otimes \tau) \circ \gamma$$

von $\hat{\mathcal{S}}_n$ überführt. Durch dieselbe Konstruktion ergeben sich die irreduziblen Brauercharaktere von $\hat{\mathcal{S}}_n$ aus denjenigen von $\tilde{\mathcal{S}}_n$.

Folglich sind die Einträge der Zerlegungsmatrix eines Blocks B von $\hat{\mathcal{S}}_n$ dieselben, wie die Einträge der Zerlegungsmatrix des zu B in obigem Sinne korrespondierenden Blocks von $\hat{\mathcal{S}}_n$. Die Brauerbäume von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ bleiben in Form und in den Bezeichnungen ihrer Knoten bei diesem Übergang erhalten. Da sich aber gerade die Rollen der reellwertigen Spincharaktere und der Spincharaktere, deren exzeptionelle Werte nichtreell sind, ändern, ist ein Brauerbaum gegebenenfalls zu drehen, um ihn in die Ebene einzubetten.

Diese Überlegungen beweisen den folgenden Satz, der die Brauerbäume von $\hat{\mathcal{S}}_n$ herleitet:

5.2.13 Satz

Ist B ein Block von zyklischem Defekt von $\hat{\mathcal{S}}_n$, so gilt: Im Fall $\varepsilon(B) = -1$ entspricht der Brauerbaum von B dem Brauerbaum des Blocks von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ mit demselben \bar{p} -Kern. Im Fall $\varepsilon(B) = 1$ geht der Brauerbaum von B aus dem Brauerbaum des Blocks von $\tilde{\mathcal{S}}_n$ mit demselben \bar{p} -Kern hervor, indem man diesen um 90° um den zu $\langle \lambda^0 \rangle$ gehörenden Knoten dreht.

Damit ist auch letztlich der Beweis erbracht, dass es genügt, sich bei der Betrachtung der Brauerbäume, auf eine der zueinander isoklinen Überlagerungsgruppen zu beschränken.

Anhang A

GAP –Routinen

In diesem Anhang werden einige GAP Programme vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind. Neben den in Abschnitt 3.8 entwickelten Algorithmen zur effizienten Berechnung von ganzen Charaktertafeln der Gruppen \tilde{S}_n werden auch deren Unterprogramme vorgestellt, die zur Berechnung der Tafeln nötig sind.

Zusätzlich enthält dieser Anhang auch Code von Programmen, die es ermöglichen einzelne Charaktere zu berechnen, ohne dass die gesamte Tafel dafür unnötiger Weise konstruiert wird.

A.1 Zum Erzeugen von Partitionen

Die Grundlage der Kombinatorik der Gruppen \tilde{S}_n sind Partitionen. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig Algorithmen zur Verfügung zu haben, welche die verschiedenen benötigten Mengen \mathcal{P}_n , \mathcal{O}_n und \mathcal{D}_n schnell konstruieren.

Da die gegenwärtig in GAP implementierte Routine `Partitions` wesentlich langsamer ist, als die von Götz Pfeiffer in [24] vorgestellte Methode, wurde in dieser Arbeit letztere verwendet. Aus diesem Grund soll sie hier vorgestellt werden. Aus ihr lassen sich leicht die Konstruktionen der Mengen \mathcal{O}_n und \mathcal{D}_n ableiten.

Der neue Algorithmus `Partitions` zur Erzeugung der Menge \mathcal{P}_n entspricht im Prinzip dem in Abschnitt 3.8 vorgestellten Verfahren zur Erzeugung der Menge \mathcal{O}_n . Es ist dazu lediglich a.a.O. \mathcal{O}_n durch \mathcal{P}_n zu ersetzen und die Einschränkung, dass k ungerade sein muss, aufzuheben.

```
Programm : Partitions
Eingabe  :  $n$ , eine natürliche Zahl
Ausgabe  : Alle Partitionen von  $n$ 
```

```

Partitions:=function(n)
  local  pk, m, k, t, s, res;

  if n=0 then
    return [[]];
  fi;

  pk:=List([1..n-1],x->[]);
  for k in [1..QuoInt(n,2)] do
    Add(pk[k],[k]);
    for m in [k+1..n-k] do
      for t in pk[m-k] do
        s:=[k];
        Append(s,t);
        Add(pk[m],s);
      od;
    od;
  od;

  res:=[];
  for k in [1..n-1] do
    for t in pk[n-k] do
      s:=[k];
      Append(s,t);
      Add(res,s);
    od;
  od;
  Add(res,[n]);
  return res;
end;

```

Beschränken wir uns auf das Anhängen von ungeraden Teilen, erhält man den in Abschnitt 3.8 beschriebenen Algorithmus zur Erzeugung aller Partitionen, die nur aus ungeraden Teilen bestehen:

Programm : OddPartPartitions

Eingabe : n , eine natürliche Zahl

Ausgabe : Alle Partitionen von n in ungeraden Teilen

```

OddPartPartitions:=function(n)
  local  pk, m, k, t, s, res;

  if n=0 then
    return [[]];
  fi;

  pk:=List([1..n-1],x->[]);
  for k in [1..QuoInt(n,2)] do
    if k mod 2 = 1 then #gerade Teile
                          #ignorieren
      Add(pk[k],[k]);
      for m in [k+1..n-k] do
        for t in pk[m-k] do
          s:=[k];
          Append(s,t);
          Add(pk[m],s);
        od;
      od;
    od;
  od;

  res:=[];
  for k in [1..n-1] do
    if k mod 2 = 1 then #gerade Teile
                          #ignorieren
      for t in pk[n-k] do
        s:=[k];
        Append(s,t);
        Add(res,s);
      od;
    fi;
  od;

  if n mod 2 = 1 then #gerade Teile
                          #ignorieren
    Add(res,[n]);
  fi;
  return res;
end;

```

Analog kann man durch Vermeidung von gleichen Teilen, die Menge \mathcal{D}_n erzeugen.

Programm : BarPartitions
 Eingabe : n , eine natürliche Zahl
 Ausgabe : Alle Balkenpartitionen von n

```
BarPartitions := function(n)
  local B,j,k,l,p;

  if n=0 then return [[]]; fi;

  B := List([1..n-2],x->[]);
  for k in [1..QuoInt(n-1,2)] do
    j := n-k-1;
    while j >= k+1 do #vermeide
                        #gleiche Teile
      for p in B[j-k] do
        l := [n-j];
        Append(l,p);
        l[2] := k;
        Add(B[j],l);
      od;
      j := j - 1;
    od;
    Add(B[k], [n-k,k]);
  od;

  l := Concatenation(B{[n-2,n-3..1]});
  Add(l, [n]);
  return l;
end;
```

A.2 Nützliches im Umgang mit Partitionen

Für die weiteren Algorithmen ist es erforderlich, Routinen zur Verfügung zu haben, die es erlauben, zu überprüfen, ob eine Partition in einer der oben konstruierten Mengen liegt. Da wir auch zwischen geraden und ungeraden Partitionen unterscheiden müssen, wird ebenfalls die GAP-Implementation von ε aus Abschnitt 3.3 dargestellt.

Das Programm `IsOddPartPartition` überprüft, ob eine gegebene Partition λ in \mathcal{O}_n liegt.

Programm : IsOddPartPartition
 Eingabe : λ , eine Partition
 Ausgabe : true oder false

```
IsOddPartPartition:=function(lambda)
  local t;
  t:=List(lambda, x->x mod 2);
  t:=Set(t);
  t:=Product(t);
  if t = 1 then
    return true;
  else
    return false;
  fi;
end;
```

Mit Hilfe des Programms `IsBarPartition` können wir überprüfen, ob eine gegebene Partition eine Balkenpartition ist, also ob alle ihre Teile verschieden sind.

Programm : `IsBarPartition`
 Eingabe : λ , eine Partition
 Ausgabe : `true` oder `false`

```
IsBarPartition:=function(lambda)
  if Length(Set(lambda))=Length(lambda) then
    return true;
  else
    return false;
  fi;
end;
```

Abschließend folgt auf der Basis der direkten GAP–Umsetzung des Signums einer Partition, eine Kontrollfunktion, die angibt, ob eine Partition gerade oder ungerade ist.

Programm : `IsOddPartition`
 Eingabe : λ , eine Partition
 Ausgabe : `true` oder `false`

```
IsOddPartition:=function(lambda)
  if (Sum(lambda) - Length(lambda)) mod 2 = 0 then
    return false;
  else
    return true;
  fi;
end;;
```

Es folgen noch zwei Routinen, die wichtig für die weiteren Programme sind. Da wir später häufig die Position von Teilen einer Partition in der Liste ihrer Teile ermitteln müssen, ist es vorteilhaft, die Liste zu sortieren, um einen schnellen Zugriff per `PositionSorted` zu haben.

Aus diesem Grunde erlaubt das kleine Programm `GT`, wenn es von `SortedList` aufgerufen wird, eine natürliche Sortierung der Partitionsteile.

Programm : `GT`
 Eingabe : zwei natürliche Zahlen a und b
 Ausgabe : `true`, falls a größer als b ist, sonst `false`

```
GT:=function(a,b)
  return LT(b,a);
```

Die folgende Funktion dient dazu, aus einer absteigend sortierten Liste ein bestimmtes Element zu entfernen. Die Sortierung ist dabei wesentlich, um nicht zu viel Rechenzeit mit Suchen zu verschwenden.

Programm : RemovePart
 Eingabe : list, eine absteigend sortierte Liste
 el, ein Element von list
 Ausgabe : Eine Kopie von list, ohne el.

```
RemovePart:=function(list, el)
  local pos, res;
  pos:=PositionSorted(list, el, GT);
  res:=list{[1..pos-1]};
  Append(res,list{[pos+1..Length(list)]});
  return res;
end;
```

A.3 Zur Berechnung einzelner Charaktere

Die in Abschnitt 3.8 vorgestellten Algorithmen dienen dem Zweck, den gesamten Spinanteil einer Charaktertafel zu berechnen. Gilt das Interesse nur einzelnen Charakteren, so ist die Berechnung der gesamten Tafel ein Overkill, auch wenn die Laufzeiten bei kleinem n gering sind.

Aus diesem Grund sind im Verlauf dieser Arbeit auch Programme entstanden, die dazu gedacht sind, nur für einzelne Werte aufgerufen zu werden.

Das Berechnen vieler Spincharaktere mit diesen Methoden sollte vermieden werden.

Die erste Funktion `MorrisRecursion` ist eine direkte Implementierung der Rekursionsformel von Morris (Satz 3.4.8).

Programm : MorrisRecursion
 Input : λ , eine Balkenpartition einer nat"urlichen Zahl n
 π , eine Partition von n in ungeraden Teilen
 Output : Der Wert des Spincharakters $\langle \lambda \rangle$ auf der ersten
 durch π indizierten Klasse.

<pre>MorrisRecursion:=function(lambda,pi) local n, sigma, e, k, P, i, j, rho, val, sign, m, gamma, l; n:=Sum(lambda); sigma:=QuoInt(n-Length(lambda),2);</pre>	<pre>e:= sigma mod 2; #der base case if pi=[] then return 1; fi; #hole groessten Teil</pre>
--	---

```

k:=pi[1];

#Grad-Fall; Benutze Gradformel
if k=1 then
  #berechne Grad
  P:=1;
  for i in [1..Length(lambda)] do
    for j in [i+1..Length(lambda)] do
      P := (lambda[i]-lambda[j]) /
            (lambda[i]+lambda[j]) * P;
    od;
    P := P / Factorial(lambda[i]);
  od;

  return 2^sigma * Factorial(n) * P;

fi;

rho:=pi{[2..Length(pi)]};
val:=0;

for i in lambda do
  #'+'- und '0'-Balkenentfernung
  if i >= k and
    not i-k in lambda then

    #Paritaet der Beinlaenge
    sign:=1;
    for j in [i-k+1..i-1] do
      if j in lambda then
        sign:=-sign;
      fi;
    od;

    #2 power
    m:=1;

    if i>k then
      if (-1)^(n-Length(lambda))>0
        then m:=2; fi;
    fi;

    #berechne neues lambda
    gamma:=RemovePart(lambda, i);
    if i > k then
      Add(gamma, i-k);
      Sort(gamma, GT);
    fi;

    val:=val + sign * m *
      MorrisRecursion(gamma,rho);
  fi;
od;

return val;
end;

```

Die Funktion `CalcSpinCharacter` berechnet den Wert eines vorgegebenen Spincharakters auf einer vorgegebenen Klasse. Dabei benutzen wir lediglich Satz 3.3.5. D.h. es werden die in Satz 3.3.5 auftretenden Fälle unterschieden und der entsprechende Wert direkt

berechnet oder gegebenenfalls Morris' Rekursionsformel aufgerufen.

Programm : CalcSpinCharacter
 Input : λ , eine Balkenpartition von n
 π , eine Partition von n in ungeraden Teilen
 Output : Wert des Spincharakters $\langle \lambda \rangle$ auf der ersten
 Klasse, die durch π indiziert ist.

```
CalcSpinCharacter:=function(lambda, pi)
  local n, sigma, e;

  n:=Sum(lambda);

  sigma:=function(l)
    return n-Length(l);
  end;

  e:= function(l)
    return sigma(l) mod 2;
  end;

  if e(pi)=0 then # pi ist gerade
    if IsOddPartPartition(pi) = false
      then #pi ist nicht in 0_n
        return 0;
    else #pi ist in 0_n
      return MorrisRecursion(lambda, pi);
    fi;
  else #pi is ungerade
    if IsBarPartition(pi) = false then
      return 0;
    else #pi ist Balkenpartition
      if e(lambda)=0 or lambda <> pi then
        return 0;
      else #exzeptioneller Fall
        return E(4)^((sigma(lambda)+1)/2)
          * ER(Product(lambda)/2);
      fi;
    fi;
  fi;
end;
```

A.4 Spinscheme und Co.

In diesem Abschnitt kann man die konkrete Implementation der Algorithmen aus Abschnitt 3.8 nachlesen, die eine schnelle Berechnung der Charaktertafeln der Gruppen $\tilde{\mathcal{S}}_n$ und $\tilde{\mathcal{A}}_n$ ermöglichen.

Eine detaillierte Beschreibung findet man a.a.O., so dass sich eine ausführliche Darlegung der Algorithmen an dieser Stelle erübrigt.

Den Anfang macht die wichtige Funktion `SpinInductionScheme`, die das sogenannte Spininductionscheme einer natürlichen Zahl n berechnet. Dadurch werden aus allen möglichen Balkenpartitionen von n alle möglichen ungeraden Balken entfernt und die entsprechenden Koeffizienten, die sich in Morris' Rekursionsformel ergeben, notiert. Damit läßt sich schließlich eine effizientere Version der genannten Rekursionsformel implementieren.

Programm : SpinInductionScheme
 Eingabe : n , eine natürliche Zahl
 Ausgabe : Das SpinInductionScheme von n

```

SpinInductionScheme:=function(n)
  local bpm, scheme, bars, i, lambda;

  bpm:=[]; #Balkenpartitionen von m
  scheme:=[];

  bars:=function(lambda)
    local m, brs, i, z, sign, max, j, gamma, l;

    m:=Sum(lambda);

    brs:=[];          #initialisiere
    for i in [1..m] do #Balkenliste
      brs[i]:=[];
    od;

    z:=1;
    if (m-Length(lambda)) mod 2 = 0
      then z := 2; fi;

    for i in lambda do

      sign:=1;
      for j in [1..i] do
        if i-j in lambda then
          sign:=-sign;
        else
          if j mod 2 = 1 then

            if j = m then
              if i<>j then
                Add(brs[m],[1,sign*z]);
              else
                Add(brs[m],[1,sign]);
              fi;
            else
              gamma:=RemovePart(lambda,i);
              if i<>j then
                Add(gamma,i-j);
                Sort(gamma,GT);
                Add(brs[j],[Position(bpm[m-j],gamma),sign*z]);
              else
                Add(brs[j],[Position(bpm[m-j],gamma),sign]);
              fi;
            fi;
          fi;
        fi;
      fi;
    fi;
  end;
end;

```

```

        fi;
      fi;
    od;
  od;

  #'-' Balkenentfernung
  max:=m;
  if max mod 2 = 0 then
    max:=max-1;
  fi;
  for j in [3,5..max] do #j-Balkenentfernung von Partition lambda
    for i in [1..(j-1)/2] do
      if i in lambda and j-i in lambda then
        if j = m then
          sign:=(-1)^i;
          Add(brs[m], [1, sign*z]);
        else
          #Parit"at der Beinl"ange
          sign:=(-1)^i;
          for l in [i+1..j-1-i] do
            if l in lambda then
              sign:=-sign;
              fi;
            od;

            gamma := RemovePart(lambda, i);
            gamma := RemovePart(gamma, j-i);

            Add(brs[j], [Position(bpm[m-j], gamma), sign * z]);
          fi;
        fi;
      od;
    od;
  return brs;
end;

for i in [1..n] do
  bpm[i]:=BarPartitions(i);
  scheme[i]:=[];
  for lambda in bpm[i] do
    Add(scheme[i], bars(lambda));
  od;
od;
return scheme;
end;

```

Die nächste Funktion `OddSpinVals` erzeugt die Matrix $O(n)$ aus Abschnitt 3.8.

Programm : `OddSpinVals`
 Eingabe : n , eine natürliche Zahl
 Ausgabe : Matrix der Werte der Spincharaktere auf den ersten Klassen,
 die durch Partitionen aus ungeraden Teilen indiziert sind

```
OddSpinVals:=function(n)
  local scheme, charCol, pm, m, k, t, np, res, col, i, max;

  if n=0 then return [[1]]; fi; #Trivialfall n=0

  scheme:=SpinInductionScheme(n);

  charCol:=function(m,t,k) # t Spalte der Char.tafel von S_{m-k}
    local i, col, pi, val;

    col:=[];
    for pi in scheme[m] do
      val:=0;
      for i in pi[k] do
        val := val + i[2] * t[ i[1] ];
      od;
      Add(col,val);
    od;
    return col;
  end;

  pm:=List([1..n-1], x-> []);
  max:=QuoInt(n,2);
  if max mod 2 = 0 then max := max - 1; fi;
  for m in [1,3..max] do #nur ungerade Balken koennen entf. werden

    Add(pm[m], charCol(m, [1], m));

    for k in [m+1..n-m] do
      for t in pm[k-m] do
        Add(pm[k], charCol(k,t,m));
      od;
    od;
  od;

  np:=Length(scheme[n]);
  res:=List([1..np], x->[]);
  for k in [1..n-1] do
```

```

    if k mod 2 = 1 then
      for t in pm[n-k] do
        col:=charCol(n,t,k);
        for i in [1..np] do
          Add(res[i], col[i]);
        od;
      od;
    fi;
  od;

  col:=charCol(n, [1], n);
  for i in [1..np] do
    Add(res[i], col[i]);
  od;

  return res;
end;

```

Den Abschluss bilden die beiden Funktionen aus Abschnitt 3.8, welche die Spincharaktere der Gruppen \tilde{S}_n und \tilde{A}_n als Liste ihrer Werte erzeugen.

Zunächst wird die Funktion `MatrixSpinCharsSn` für die Gruppen \tilde{S}_n vorgestellt.

Programm : `MatrixSpinCharsSn`
 Eingabe : n , eine natürliche Zahl
 Ausgabe : Matrix der Werte aller Spincharaktere auf allen Klassen der Überlagerungsgruppe der symmetrischen Gruppe

```

MatrixSpinCharsSn:=function(n)
  local matrix, char, achar, counter, pars, bars, oddvals,
        sigma, e, i, pi;

  matrix:=[];
  char:=[];
  achar:=[];
  counter:=1;
  pars:=Partitions(n);
  bars:=BarPartitions(n);
  oddvals:=OddSpinVals(n);

  sigma:=function(l) #Signatur
    return n-Length(l);
  end;

```

```

e:= function(l)          #Signum
  return sigma(l) mod 2;
end;

for i in [1..Length(bars)] do
  for pi in pars do
    if IsOddPartPartition(pi)=true then
      Add(char,oddvals[i][counter]);
      Add(char,-oddvals[i][counter]);
      Add(achar,oddvals[i][counter]);
      Add(achar,-oddvals[i][counter]);

      counter:=counter+1;

    elif e(bars[i]) = 1 and bars[i] = pi then
      Add(char, E(4)^((sigma(bars[i])+1)/2) * ER(Product(bars[i])/2));
      Add(char, -char[Length(char)]);

      Add(achar, char[Length(char)]);
      Add(achar, -achar[Length(achar)]);

    else
      Add(char,0);
      Add(achar,0);
      if IsBarPartition(pi)=true and e(pi)=1 then
        Add(char, 0);
        Add(achar,0);
      fi;
    fi;
  od;
  Add(matrix,ShallowCopy(char));
  Print(".\c");
  if e(bars[i]) = 1 then
    Add(matrix,ShallowCopy(achar));
  fi;

  char:=[];
  achar:=[];
  counter:=1;
od;
Print("\n");
return matrix;
end;

```

Die folgende Funktion `MatrixSpinCharsAn` ist die in Abschnitt 3.8 vorgestellte Routine zur Erzeugung des Spinanteils der Charaktertafel der Gruppen $\tilde{\mathcal{A}}_n$.

Programm : MatrixSpinCharsAn
 Eingabe : n , eine natürliche Zahl, die größer als 1 ist.
 Ausgabe : Matrix der Werte aller Spincharaktere auf allen Klassen der
 Überlagerungsgruppe der alternierenden Gruppe

```

MatrixSpinCharsAn:=function(n)
  local  matrix, char1, char2, evenpars, counter, pars, bars,
         oddvals, sigma, e, pi, i, delta, alpha, beta;

  matrix:=[];
  char1:=[];
  char2:=[];
  evenpars:=[];
  counter:=1;
  pars:=Partitions(n);
  bars:=BarPartitions(n);
  oddvals:=OddSpinVals(n);

  sigma:=function(l)
    return n-Length(l);
  end;

  e:= function(l)
    return sigma(l) mod 2;
  end;

  for pi in pars do
    if e(pi) = 0 then
      Add(evenpars, pi);
    fi;
  od;

  for i in [1..Length(bars)] do
    for pi in evenpars do

      if e(bars[i])=0 then ## 2 konj Char.

        delta:=0;

        if IsOddPartPartition(pi)=true then ##Fall pi unger.

          if bars[i]=pi then
            delta:=E(4)^(QuoInt(sigma(pi),2) mod 4)*ER(Product(pi));
          fi;
        fi;
      fi;
    fi;
  fi;

```

```

alpha:=(oddvals[i][counter]+delta)/2;
beta:=(oddvals[i][counter]-delta)/2;

if IsBarPartition(pi)=true then
  Add(char1,ShallowCopy(alpha));Add(char2,ShallowCopy(beta));
  Add(char1,-ShallowCopy(alpha));Add(char2,-ShallowCopy(beta));
  Add(char1,ShallowCopy(beta));Add(char2,ShallowCopy(alpha));
  Add(char1,-ShallowCopy(beta));Add(char2,-ShallowCopy(alpha));
  counter:=counter+1;
else
  Add(char1,oddvals[i][counter]/2);
  Add(char2,oddvals[i][counter]/2);
  Add(char1,-oddvals[i][counter]/2);
  Add(char2,-oddvals[i][counter]/2);
  counter:=counter+1;
fi;

elif IsBarPartition(pi)=true then ##pi ger.

  if bars[i]=pi then
    delta:=E(4)^(QuoInt(sigma(pi),2) mod 4)*ER(Product(pi));
    fi;

    Add(char1,ShallowCopy(delta)/2);
    Add(char1,-ShallowCopy(delta)/2);
    Add(char2,-ShallowCopy(delta)/2);
    Add(char2,ShallowCopy(delta)/2);
  else
    Add(char1,0);
    Add(char2,0);
  fi;

else ##eingeschraenkter Char. ist irred.
  if IsOddPartPartition(pi)=true then ###pi unger.
    if IsBarPartition(pi)=true then
      Add(char1,oddvals[i][counter]);
      Add(char1,-oddvals[i][counter]);
      Add(char1,oddvals[i][counter]);
      Add(char1,-oddvals[i][counter]);
      counter:=counter+1;
    else
      Add(char1,oddvals[i][counter]);
      Add(char1,-oddvals[i][counter]);
      counter:=counter+1;
    fi;
  elif IsBarPartition(pi)=true then ### pi in D^+ ohne 0_n

```

```
        Add(char1,0);Add(char1,0);
    else
        Add(char1,0);
    fi;
fi;
od;

Add(matrix,ShallowCopy(char1));
char1:=[];
Print(".\c");
if e(bars[i])=0 then
    Add(matrix,ShallowCopy(char2));
    char2:=[];
fi;
counter:=1;
od;
Print("\n");
return matrix;
end;;
```


Bibliographie

- [1] J. L. ALPERIN, Local representation theory, Cambridge University Press, 1993.
- [2] C. BESSENRODT, A. O. MORRIS UND J. B. OLSSON, Decomposition matrices for spin characters of symmetric groups at characteristic 3, *J. Algebra* **164** (1994), 146–172.
- [3] C. BESSENRODT UND J. B. OLSSON, Heights of spin characters in characteristic 2, *Progr. Math.* **141** (1997), 51–71.
- [4] ———, The 2–blocks of the covering groups of the symmetric groups, *Adv. Math.* **129** (1997), 261–300.
- [5] F. R. BEYL UND J. TAPPE, Group Extensions, Representations, and the Schur Multiplier, Springer-Verlag, 1982.
- [6] M. CABANES, Local Structure of the p –blocks of \tilde{S}_n , *Math. Z.* **198** (1988), 519–543.
- [7] C. CURTIS UND I. REINER, Methods of Representation Theory With Applications to Finite Groups and Orders I, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, 1990.
- [8] W. FEIT, The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland, 1982.
- [9] ———, Possible Brauer trees, *Illinois J. Math.* **18** (1984), 43–56.
- [10] THE GAP GROUP, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4, Aachen, St Andrews, 1998. (<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap>).
- [11] D. M. GOLDSCHMIDT, Lectures on Character Theory, Publish or Perish, Inc., 1980.
- [12] J. GREEN, Some remarks on defect groups, *Math. Z.* **107** (1968), 133–150.
- [13] G. HISS UND K. LUX, Brauer Trees of Sporadic Groups, Oxford University Press, 1989.

-
- [14] P. N. HOFFMAN UND J. F. HUMPHREYS, Projective Representations of the Symmetric Groups, Oxford University Press, 1992.
- [15] J. F. HUMPHREYS, Blocks of projective representations of the symmetric groups, *J. London Math. Soc.* **33** (1986), 441–452.
- [16] M. ISAACS, Character Theory of Finite Groups, Academic Press, New York, 1976.
- [17] G. D. JAMES, The Representation Theory of the Symmetric Groups, no. 682 in Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1978.
- [18] G. D. JAMES UND A. KERBER, The Representation Theory of the Symmetric Group, Addison-Wesley, 1981.
- [19] R. KESSAR, Blocks and Source Algebras for the Double Covers of the Symmetric and Alternating Groups, Dissertation, Ohio State University, 1994.
- [20] A. O. MORRIS, The spin representation of the symmetric group, *Proc. London Math. Soc.* **12** (1962), 55–76.
- [21] ———, The spin representation of the symmetric group, *Canad. J. Math.* **17** (1965), 543–549.
- [22] A. O. MORRIS UND A. K. YASEEN, Decomposition matrices for spin characters of symmetric groups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **108A** (1988), 145–164.
- [23] J. MÜLLER, Brauer Trees for the Schur Cover of the Symmetric Group, *to appear* (2002).
- [24] G. PFEIFFER, Character tables of Weyl groups in GAP, *Bayreuth. Math. Schr.* **47** (1994), 165–222.
- [25] W. POPANZ UND M. SCHMU, Fragen, die die Welt bewegen!, Dissertation, Technische Universität Vaduz, 1978.
- [26] I. SCHUR, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. Reine Angew. Math.* **127** (1904), 20–50.
- [27] ———, Untersuchung über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. Reine Angew. Math.* **132** (1907), 85–137.
- [28] ———, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. Reine Angew. Math.* **139** (1911), 155–250.
- [29] J. SCOPES, Cartan matrices and Morita equivalence for blocks of the symmetric groups, *J. Algebra* **142** (1991), 441–455.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.