

Frank Lübeck

Charaktertafeln

für die Gruppen

$\mathrm{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$

und

$\mathrm{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$

Diese Arbeit wurde von der Fakultät für Mathematik der Universität Heidelberg als  
Dissertation anerkannt.

Gutachter waren Priv. Doz. Dr. G. Hiß und Prof. Dr. B. H. Matzat.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Definitionen und Vorbemerkungen</b>	<b>6</b>
<b>2 Überblick über die Berechnung der Charaktertafeln</b>	<b>16</b>
2.1 Charakterformel für Deligne-Lusztig-Charaktere und Lusztig-Serien . . . . .	16
2.2 Charaktertafeln für $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade, und $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	18
<b>3 Maximale Tori von <math>\mathbf{G}^F</math> und ihre komplexen Charaktere</b>	<b>22</b>
<b>4 Berechnung der Konjugiertenklassen</b>	<b>26</b>
4.1 Halbeinfache Konjugiertenklassen . . . . .	26
4.2 Unipotente Konjugiertenklassen . . . . .	37
4.3 Gemischte Klassen und vollständige Listen der Konjugiertenklassen . . . . .	44
<b>5 Greenfunktionen</b>	<b>48</b>
<b>6 Lusztig-Serien und Berechnung der Deligne-Lusztig-Charaktere</b>	<b>54</b>
<b>7 Zerlegung der Deligne-Lusztig-Charaktere in irreduzible Konstituenten</b>	<b>58</b>
<b>8 Berechnung der Senkrechtfunktionen</b>	<b>66</b>
<b>9 Schlußbemerkungen zu den Charaktertafeln</b>	<b>78</b>
<b>10 Eine Anwendung in der konstruktiven Galoistheorie</b>	<b>82</b>
<b>Tabellen</b>	<b>86</b>
1. Operation der Weylgruppe . . . . .	86
2. Konjugiertenklassen der Weylgruppe vom Typ $C_3$ . . . . .	87
3. Repräsentanten maximaler Tori in $\mathbf{CSp}_6(q)$ und $\mathbf{Sp}_6(q)$ . . . . .	88
4. Maximale Tori in der dualen Gruppe . . . . .	89
5. Interpretation der Elemente der dualen Tori als Charaktere . . . . .	90
6. Parameter für halbeinfache Klassentypen . . . . .	91
7. Zentralisatoren halbeinfacher Elemente . . . . .	92
8. Halbeinfache Klassen von $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	94
9. Halbeinfache Klassen von $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	98
10. Halbeinfache Klassen von $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	100

11. Halbeinfache Elemente zu Greenfunktionen, $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	101
12. Halbeinfache Elemente zu Greenfunktionen, $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	108
13. Konjugiertenklassen von $\mathbf{CSp}_6(q)$ und $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	113
14. Konjugiertenklassen von $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	116
15. Greenfunktionen zu $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	118
16. Greenfunktionen zu $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	122
17. Parameter für Lusztig-Serien-Typen . . . . .	125
18. Lusztig-Serien von $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	126
19. Lusztig-Serien von $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	129
20. Parameter für Deligne-Lusztig-Charaktere von $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	131
21. Parameter für Deligne-Lusztig-Charaktere von $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	133
22. Charaktertafel der Weylgruppe vom Typ $C_3$ . . . . .	134
23. Die irreduziblen Charaktere von $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade, und $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade .	135
24. Werte der Senkrechtfunktionen von $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	139
25. Werte der Senkrechtfunktionen von $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	140
26. Tafel der unipotenten Charaktere von $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade . . . . .	141
27. Tafel der unipotenten Charaktere von $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade . . . . .	146
28. Charakterwerte für Strukturkonstante . . . . .	150

**Literatur**

**151**

## Einleitung

In dieser Arbeit wird die explizite Berechnung der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere für zwei Serien von endlichen Gruppen vom Lie-Typ besprochen. Das Hauptergebnis besteht aus den generischen Charaktertafeln der konformen symplektischen Gruppen

$$\mathbf{CSp}_6(q) \quad \text{mit } q = p^n, p \text{ ungerade Primzahl, } n \in \mathbb{N},$$

und der symplektischen Gruppen

$$\mathbf{Sp}_6(q) \quad \text{mit } q = 2^n, n \in \mathbb{N}.$$

Das Wort *generisch* bedeutet in diesem Zusammenhang, daß für jede der beiden Serien von Gruppen die Konjugiertenklassen, Charaktere und Charakterwerte in geschlossener Form mit der Primzahlpotenz  $q$  als Parameter angegeben werden. Zusätzlich werden noch Repräsentanten für die Konjugiertenklassen der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  angegeben.

Die Charaktertafel für  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  wurde bereits von Looker in [27] bestimmt. Die hier vorgestellte Berechnung ist aber völlig unabhängig von der zitierten Arbeit durchgeführt worden.

Die oben genannten Gruppen werden hier als rationale Punkte von zusammenhängenden reductiven algebraischen Gruppen mit zusammenhängendem Zentrum betrachtet. Erhebliche Fortschritte auf dem Gebiet der Darstellungstheorie solcher Gruppen vom Lie-Typ wurden durch die Theorie von Deligne und Lusztig erzielt, beginnend mit der Arbeit [10]. Insbesondere gilt die gewöhnliche Charaktertheorie dieser Gruppen „im Prinzip“ als gelöst — zumindest, wenn die zugehörige algebraische Gruppe ein zusammenhängendes Zentrum hat. In dieser Situation liegt die Frage nahe, inwiefern die theoretischen Fortschritte auch die explizite Berechnung von Charaktertafeln erleichtern. In der vorliegenden Arbeit wird an einem konkreten Beispiel gezeigt, wie sich mit Hilfe der Deligne-Lusztig-Charaktere systematisch große Teile der gesuchten Charaktertafeln konstruieren lassen. Als Stichworte seien an dieser Stelle nur Lusztigs Jordan-Zerlegung für Charaktere und die Parametrisierung unipotenter Charaktere genannt. Die dann noch fehlenden Teile der Tafeln werden mit Hilfe von expliziter Harish-Chandra-Induktion und einigen elementaren Eigenschaften von Charakteren gefunden.

Nach einigen einführenden Definitionen und Bemerkungen in Abschnitt 1 wird in Abschnitt 2 ein Überblick über die verwendete Theorie und die einzelnen Schritte zur Berechnung der Tafeln gegeben. Details zu den Berechnungen sind in den Abschnitten 3 bis 8 enthalten, und in Abschnitt 9 sind noch verschiedene Anmerkungen gesammelt.

Die Idee, als Beispiel für diese Arbeit 6-dimensionale symplektische Gruppen zu betrachten, wurde durch die Dissertation von Frank Häfner [22] angeregt, in der die Realisierbarkeit der einfachen Gruppen  $\mathbf{PSp}_6(p)$  mit gewissen Einschränkungen an  $p$  als Galoisgruppen über  $\mathbb{Q}(t)$  vermutet wurde. Der Teil des Beweises, der in [22] nicht erbracht werden konnte, wird im Abschnitt 10 dieser Arbeit nachgeholt. Er besteht aus der Bestimmung einer gewissen Strukturkonstanten, die aus Charakterwerten dieser Gruppen berechnet wird.

Zwei weitere Anwendungen der Tafeln sind zunächst noch geplant: Einmal der Test von Vermutungen aus der modularen Charaktertheorie der endlichen Gruppen vom Lie-Typ, die noch längst nicht so weit entwickelt ist wie ihre gewöhnliche Charaktertheorie. Zum anderen die Verwendung einiger der hier berechneten Charakterwerte (von nicht-uniformen Funktionen) für die Bestimmung von Werten der unipotenten Charaktere der exceptionalen Gruppen vom Typ  $F_4$  (die Standard-Leviuntergruppen vom Typ  $C_3$  besitzen, zu dem auch die hier betrachteten Gruppen gehören).

Leser, die nun zuerst in den letzten Seiten der Arbeit nach dem „Ergebnis“ suchen, müssen leider enttäuscht werden, denn das explizite Ausdrücken der Tafeln sprengte den Umfang dieser Arbeit. In den Tabellen im Anhang sind jedoch die Werte der unipotenten Charaktere enthalten und auch sonst genug Informationen, um (mit etwas Aufwand) jeden Charakterwert konkret zu konstruieren.

An dieser Stelle soll auf das Computer-Algebra-System CHEVIE hingewiesen werden, das nun für alle Interessenten frei erhältlich ist (für einen Überblick siehe [21]). Ein Teil dieses Systems befaßt sich mit der Erstellung einer Bibliothek von generischen Charaktertafeln und der Entwicklung von Programmen, die das Rechnen mit solchen Tafeln unterstützen. Vom Autor der vorliegenden Arbeit wurden ein Teil dieser Programme geschrieben und natürlich die hier berechneten Charaktertafeln in Form von Computerdateien zur Verfügung gestellt.

Durch die Möglichkeit, das Ergebnis dieser Arbeit und auch alle anderen bekannten generischen Charaktertafeln mit Hilfe von Computerprogrammen komfortabel für praktische Rechnungen verwenden zu können, werden sich bestimmt in Zukunft weitere Anwendungen solcher expliziter Charaktertafeln ergeben.

Auch für das Ausrechnen der in dieser Arbeit bestimmten Tafeln ist die Verwendung von Computern zweckmäßig. Hierbei ist neben der Zeitersparnis der wesentliche Aspekt die Sicherheit der Ergebnisse, wo immer sich die notwendigen Rechnungen automatisieren lassen. (Im Prinzip sollten alle Rechnungen noch mit etwas Geduld per Hand machbar sein, aber vermutlich wären auch bei gewissenhafter Arbeit Rechen- und Schreibfehler kaum zu vermeiden.)

Einen guten Überblick über die in dieser Arbeit verwendete Theorie bieten die Bücher von Digne und Michel [13] sowie von Carter [6]. Beide Bücher enthalten zu Beginn eine Zusammenfassung der benötigten Ergebnisse aus der Theorie der linearen algebraischen Gruppen, deren Beweise etwa im Buch von Springer [38] zu finden sind. Dies macht es möglich, für einen großen Teil der in dieser Arbeit benutzten Aussagen einheitliche Referenzen anzugeben.

Die Darstellung der Rechenergebnisse der einzelnen Abschnitte erfordert zumeist lange Tabellen, die häufig über mehrere Seiten gehen. Zur besseren Übersichtlichkeit sind alle Tabellen, die länger als wenige Zeilen sind, im Anhang gesammelt. Hierzu sollte noch gesagt werden, daß viele Tabelleneinträge mit Hilfe von Computerprogrammen erstellt wurden, in der Hoffnung, die Anzahl der Druckfehler dadurch zu minimieren.

Die Computerrechnungen und das Setzen dieses Textes mit  $\text{\LaTeX}$  wurden auf verschiedenen Workstations der Firma SUN am Interdisziplinären Zentrum für Wissenschaftliches Rechnen (IWR) der Universität Heidelberg und der Firma NeXT am Mathematischen

Institut der Universität Heidelberg, sowie einem privaten IBM-kompatiblen PC durchgeführt.

Den Schluß dieser Einleitung möchte ich benutzen, mich bei denjenigen zu bedanken, die wesentlich zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben. Hier sind zuerst Prof. Dr. B. H. Matzat und Priv. Doz. Dr. G. Hiß zu nennen, denen ich die Anregung zur Beschäftigung mit dem hier behandelten Thema verdanke. Wertvolle Hilfe bei der Einarbeitung in das Thema und bei Fragen zu Einzelheiten der Arbeit bekam ich von Dr. G. Hiß, Dr. G. Malle und Dr. M. Geck. Schließlich sei auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des DFG-Projektes *Charaktere endlicher Gruppen* gedankt.

Heidelberg, Oktober 1993

Frank Lübeck

# 1 Definitionen und Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die uns interessierenden Gruppen als Matrixgruppen definieren und sehen, wie wir diese als endliche Gruppen vom Lie-Typ betrachten können. Dann werden noch einige grundlegende Informationen zusammengestellt, die in den folgenden Abschnitten gebraucht werden.

Sei  $p$  eine Primzahl und  $q$  eine Potenz von  $p$ . Weiter sei  $\mathbb{F}_q$  der Körper mit  $q$  Elementen und  $\mathbf{K}$  sein algebraischer Abschluß. Für eine natürliche Zahl  $l \in \mathbb{N}$  bezeichne  $\tilde{I}$  die  $l \times l$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

über  $\mathbb{F}_p$  und  $J$  die  $2l \times 2l$ -Matrix

$$\begin{pmatrix} & \tilde{I} \\ -\tilde{I} & \end{pmatrix}$$

(außerhalb der Nebendiagonalen seien alle Einträge Null).

Mit  $F$  bezeichnen wir den Automorphismus der allgemeinen linearen Gruppe  $\mathbf{GL}_{2l}(\mathbf{K})$ , der die Matrixeinträge mit  $q$  potenziert. Für eine Menge  $M$  invertierbarer Matrizen bezeichnen wir mit  $M^F$  die  $F$ -invarianten Elemente von  $M$ , also die Teilmenge der Matrizen von  $M$ , deren Koeffizienten bereits in  $\mathbb{F}_q$  liegen.

Wir definieren nun Untergruppen der  $\mathbf{GL}_{2l}(\mathbf{K})$  als Isometriegruppe beziehungsweise als konforme Isometriegruppe der durch  $J$  auf  $\mathbf{K}^{2l}$  und  $\mathbb{F}_q^{2l}$  gegebenen Bilinearform ( $A^t$  sei die Transponierte einer Matrix  $A$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K}) &:= \{A \in \mathbf{GL}_{2l}(\mathbf{K}) \mid A^t J A = J\} \\ \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K}) &:= \{A \in \mathbf{GL}_{2l}(\mathbf{K}) \mid \text{es gibt } \lambda \in \mathbf{K}^\times \text{ mit } A^t J A = \lambda J\} \\ \mathbf{Sp}_{2l}(q) &:= \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})^F \\ \mathbf{CSp}_{2l}(q) &:= \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})^F \end{aligned}$$

Dabei heißt  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  *symplektische Gruppe* (der Dimension  $2l$ ) über  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$  *konforme symplektische Gruppe* über  $\mathbf{K}$ . Entsprechend heißt  $\mathbf{Sp}_{2l}(q)$  *symplektische Gruppe* über  $\mathbb{F}_q$  und  $\mathbf{CSp}_{2l}(q)$  *konforme symplektische Gruppe* über  $\mathbb{F}_q$ .

Schließlich führen wir noch die zugehörigen *projektiven* Gruppen ein. Diese entstehen durch Restklassenbildung modulo den in der Gruppe enthaltenen skalaren Matrizen. Wir benutzen hierfür die Bezeichnungen  $\mathbf{PSp}_{2l}(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{PCSp}_{2l}(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{PSp}_{2l}(q)$  und  $\mathbf{PCSp}_{2l}(q)$ . (Die Gruppen  $\mathbf{PSp}_{2l}(q)$  sind einfach, außer für  $l = 1$  und  $q = 2, 3$  sowie  $l = 2$  und  $q = 2$ ; siehe Huppert [24, II.9].)

Für eine Matrix  $A \in \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$  mit  $A^t J A = \lambda J$  nennen wir  $\lambda(A) := \lambda$  den *Multiplikator* von  $A$ . Die Abbildung  $\lambda : \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{K}^\times$  ist ein Homomorphismus und für  $A \in \mathbf{CSp}_{2l}(q)$  ist der Multiplikator  $\lambda(A) \in \mathbb{F}_q$ .

Wir fassen die Gruppen  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$ ,  $\mathbf{PSp}_{2l}(\mathbf{K})$  und  $\mathbf{PCSp}_{2l}(\mathbf{K})$  als *lineare algebraische Gruppen* über  $\mathbf{K}$  auf (die ersten beiden Gruppen sind laut Definition Nullstellenmengen gewisser algebraischer Gleichungen in den Koeffizienten der Matrizen, also



Zariski-abgeschlossene Teilmengen von  $\mathbf{GL}_{2l}(\mathbf{K})$ ; für die projektiven Gruppen siehe etwa Springer [38, 5.2.5]). Die Abbildung  $F$  induziert *Frobeniusmorphisms* auf diesen Gruppen (siehe Digne-Michel [13, Ch.3, insbesondere 3.9]), so daß wir die oben definierten endlichen Gruppen als *endliche Gruppen vom Lie-Typ* ansehen können.

Untergruppen einer algebraischen Gruppe mit Frobeniusmorphismus  $F$ , die  $F$ -invariant sind, nennen wir auch *rationale Untergruppen*.

In den folgenden zwei Bemerkungen fassen wir einige Aussagen über die Gruppen  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  und  $\mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$  zusammen. Insbesondere führen wir Bezeichnungen für gewisse wichtige Untergruppen ein.

**Bemerkung 1.1** Sei  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$ , dann gilt:

- (a)  $\mathbf{G}$  ist eine halbeinfache zusammenhängende lineare algebraische Gruppe. Insbesondere ist  $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ , wobei wir mit  $\mathbf{G}'$  die Kommutatoruntergruppe von  $\mathbf{G}$  bezeichnen.
- (b) Das Zentrum von  $\mathbf{G}$  ist  $Z(\mathbf{G}) = \{\pm \text{Id}\}$ . Es ist also trivial und damit zusammenhängend, falls die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  gleich zwei ist, und sonst nicht zusammenhängend.
- (c) Die Untergruppe  $\mathbf{B}$  der oberen Dreiecksmatrizen von  $\mathbf{G}$  ist eine rationale Boreluntergruppe.
- (d) Die Untergruppe  $\mathbf{T}$  der Diagonalmatrizen von  $\mathbf{G}$  ist ein maximal zerfallender Torus von  $\mathbf{G}$  (das heißt,  $\mathbf{T}$  ist ein rationaler maximaler Torus, der in einer rationalen Boreluntergruppe enthalten ist). Die Elemente von  $\mathbf{T}$  haben die Form

$$\left( \begin{array}{ccccccc} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_l & & & & \\ & & & \lambda_l^{-1} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_1^{-1} \end{array} \right), \quad \lambda_i \in \mathbf{K}^\times, \quad 1 \leq i \leq l.$$

Diese Elemente schreiben wir im folgenden als  $h(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ .

- (e) Die Untergruppe  $\mathbf{U}$  von  $\mathbf{B}$  der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen (Diagonaleinträge sind 1) ist das unipotente Radikal von  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{B}$  läßt sich als semidirektes Produkt  $\mathbf{B} = \mathbf{U} \rtimes \mathbf{T}$  schreiben. Die Dimension von  $\mathbf{U}$  (als algebraische Gruppe) ist  $l^2$ . In  $\mathbf{U}$  liegen die folgenden Wurzeluntergruppen  $\mathbf{U}_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq l$  (Es sei  $I$  die  $l \times l$ -Einheitsmatrix und  $E_{i,j}$  die  $l \times l$ -Elementarmatrix, die an der  $(i, j)$ -ten Stelle den Eintrag 1 und an allen anderen Stellen den Eintrag 0 hat.):

$$\mathbf{U}_{i,j} := \left\{ \begin{array}{l} \left\{ u_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} I + aE_{i,j} & 0 \\ 0 & I - aE_{l-j+1, l-i+1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{K} \right\} \quad \text{für } 1 \leq i < j \leq l \\ \left\{ u_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} I & a(E_{i, l-j+1} + E_{j, l-i+1}) \\ 0 & I \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{K} \right\} \quad \text{für } 1 \leq j < i \leq l \\ \left\{ u_{i,j}(a) = \begin{pmatrix} I & aE_{i, l-i+1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{K} \right\} \quad \text{für } 1 \leq i = j \leq l \end{array} \right.$$



Diese schreiben wir im folgenden als  $h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda)$ . Für die Multiplikatorabbildung gilt dann  $\lambda(h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda)) = \lambda$ .

- (e) Die Wurzeluntergruppen von  $\mathbf{G}$  liegen schon in  $\mathbf{G}'$  und sind bereits in Bemerkung 1.1 beschrieben. Die Wurzelabbildungen  $\alpha_{i,j} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{K}^\times$  sehen nun so aus:

$$\alpha_{i,j}(h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda)) = \begin{cases} \lambda_i \lambda_j^{-1} & \text{für } 1 \leq i < j \leq l \\ \lambda_i \lambda_j \lambda^{-1} & \text{für } 1 \leq j < i \leq l \\ \lambda_i^2 \lambda^{-1} & \text{für } 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

Die  $l$  einfachen Wurzeln sind wieder  $\alpha_{i,i+1}$ ,  $1 \leq i \leq l-1$ , und  $\alpha_{l,l}$ .

- (f) Die Ordnung von  $\mathbf{G}^F$  ist

$$|\mathbf{G}^F| = (q-1)|\mathbf{Sp}_{2l}(q)|.$$

**Beweis:** (b) Das Zentrum von  $\mathbf{G}$  besteht nur aus skalaren Matrizen (nach dem Lemma von Schur). Andererseits liegen offenbar alle skalaren Matrizen in  $\mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$ .

Die Inklusion  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K}) \subseteq \mathbf{G}'$  gilt, da schon  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})' = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  ist (Bemerkung 1.1(a)). Die Multiplikatorabbildung  $\lambda : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{K}^\times$  ist ein Homomorphismus, deshalb ist der Multiplikator jedes Kommutators  $\lambda(ABA^{-1}B^{-1}) = 1$ . Also ist auch  $\mathbf{G}' \subseteq \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$ .

Genau dann ist  $\mu \text{Id} \in \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$ , wenn  $\lambda(\mu \text{Id}) = \mu^2 = 1$  ist; das ergibt  $Z(\mathbf{G}) \cap \mathbf{G}' = \{\pm \text{Id}\}$ . Die Aussage  $\mathbf{G} = Z(\mathbf{G})\mathbf{G}'$  sehen wir so: Ist  $A \in \mathbf{G}$ ,  $\lambda(A) = \lambda \in \mathbf{K}^\times$  und  $\mu \in \mathbf{K}$  mit  $\mu^2 = \lambda$ , so haben wir  $A = \mu \text{Id} \cdot (\mu^{-1}A)$  mit  $\mu \text{Id} \in Z(\mathbf{G})$  und  $\lambda(\mu^{-1}A) = \mu^{-2}\lambda = 1$ , also  $\mu^{-1}A \in \mathbf{G}'$ .

Ist die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  gleich zwei, so ist  $Z(\mathbf{G}) \cap \mathbf{G}'$  trivial und die obige Zerlegung zeigt  $\mathbf{G} \cong Z(\mathbf{G}) \times \mathbf{G}'$ .

(a) Aus (b) wissen wir, daß  $Z(\mathbf{G})$  zusammenhängend ist und nach Bemerkung 1.1 ist auch  $\mathbf{G}'$  zusammenhängend. Da  $\mathbf{G}$  das Produkt dieser Untergruppen ist, ist auch  $\mathbf{G}$  zusammenhängend (siehe etwa Springer [38, 6.1(i)]).

Die Reduktivität von  $\mathbf{G}$  ist genauso wie im Fall  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  zu sehen.

(c) bis (e) sind auch wie im Fall der vorhergehenden Bemerkung zu sehen.

(f) Wir betrachten die Multiplikatorabbildung  $\lambda : \mathbf{G}^F \rightarrow \mathbb{F}_q^\times$ . Der Kern dieser Abbildung ist genau  $\mathbf{Sp}_{2l}(q)$  und außerdem ist  $\lambda$  surjektiv, denn

$$\lambda \left( \begin{pmatrix} I & \\ & \lambda I \end{pmatrix} \right) = \lambda.$$

Dies ergibt  $|\mathbf{G}^F| = (q-1)|\mathbf{Sp}_{2l}(q)|$ . □

Der Unterschied zwischen den Gruppen  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  und  $\mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$ , auf den es uns ankommt, ist das zusammenhängende Zentrum der konformen symplektischen Gruppen. Diese Voraussetzung erleichtert die Parametrisierung und Berechnung der irreduziblen Charaktere der endlichen Gruppen beträchtlich.

Der Fall der Charakteristik zwei muß in weiten Teilen als Ausnahmefall behandelt werden. Das ist schon aus der Definition der Matrix  $J$  für die symplektische Form zu vermuten. In diesem Fall sind die Gruppen  $\mathbf{Sp}_{2l}(q)$ ,  $\mathbf{PSp}_{2l}(q)$  und  $\mathbf{PCSp}_{2l}(q)$  isomorph und  $\mathbf{CSp}_{2l}(q) \cong \mathbf{Sp}_{2l}(q) \times Z(\mathbf{CSp}_{2l}(q))$ . Wir kennen also die Charaktertafeln all dieser

Gruppen, wenn wir die von  $\mathbf{Sp}_{2l}(q)$  kennen. Da hier das Zentrum von  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  schon zusammenhängend ist, werden wir für gerades  $q$  die konformen symplektischen Gruppen gar nicht betrachten.

Eine reduktive algebraische Gruppe  $\mathbf{G}$  ist bis auf Isomorphie durch ihr Wurzeldatum bestimmt. Ist  $F$  ein Frobeniusmorphismus von  $\mathbf{G}$ , so ist  $\mathbf{G}^F$  bis auf Isomorphie durch das Wurzeldatum von  $\mathbf{G}$  bezüglich eines maximal zerfallenden Torus und die Operation von  $F$  darauf bestimmt. Die Struktur des Wurzeldatums von  $\mathbf{G}$  ist viel übersichtlicher, als die der Gruppe selbst, und wir werden sehen, daß wir einen großen Teil der Informationen zur Berechnung unserer Charaktertafeln durch Kalkulationen mit Wurzeldatum und Weylgruppe von  $\mathbf{G}$  gewinnen können. Nur an wenigen Stellen werden wir im Rest der Arbeit die ursprünglichen Definitionen benutzen und direkt mit Matrizen rechnen.

In diesem Abschnitt wollen wir noch für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  und  $\mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$  die Wurzeldaten, die Operation des Frobeniusmorphismus darauf, sowie ihre Weylgruppen und deren Konjugiertenklassen beschreiben. Bevor wir die Aussagen in der Bemerkung 1.3 zusammenfassen, sollen die gerade benutzten Begriffe kurz erläutert und dabei einige Bezeichnungen eingeführt werden. Für eine ausführlichere Darstellung sei auf die Abschnitte 1.9, 1.18 und 1.19 in Carters Buch [6] verwiesen.

Seien  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  oder  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$ ,  $F$  der Frobeniusmorphismus auf  $\mathbf{G}$  sowie  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{U}_{i,j}$ ,  $\alpha_{i,j}$  und  $h(\lambda_1, \dots)$  wie in Bemerkung 1.1 beziehungsweise 1.2 erklärt.

Sei  $X$  die Gruppe der Homomorphismen algebraischer Gruppen von  $\mathbf{T}$  nach  $\mathbf{K}^\times$ . Dann heißt  $X$  *Charaktergruppe* von  $\mathbf{T}$  und besteht genau aus den Abbildungen der Form  $h(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \mapsto \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_l^{m_l}$  beziehungsweise  $h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda) \mapsto \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_l^{m_l} \lambda^{m_{l+1}}$  mit  $m_i \in \mathbb{Z}$  für  $1 \leq i \leq l+1$ . Somit ist  $X$  isomorph zu  $\mathbb{Z}^l$  beziehungsweise  $\mathbb{Z}^{l+1}$ . Wir legen  $\mathbb{Z}$ -Basen für  $X$  fest: Im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  nehmen wir  $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_l\}$  mit  $\hat{e}_i : h(\lambda_1, \dots, \lambda_l) \mapsto \lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , und im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$  wählen wir  $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_l, \hat{e}_{l+1}\}$  mit  $\hat{e}_i : h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda) \mapsto \lambda_i$  für  $1 \leq i \leq l$  und  $\hat{e}_{l+1} : h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda) \mapsto \lambda$ .

In gleicher Weise führen wir die *Kocharaktergruppe*  $Y$  als Gruppe der Homomorphismen algebraischer Gruppen von  $\mathbf{K}^\times$  nach  $\mathbf{T}$  ein. Diese besteht aus den Abbildungen der Form  $\rho \mapsto h(\rho^{m_1}, \dots, \rho^{m_l})$  beziehungsweise  $\rho \mapsto h(\rho^{m_1}, \dots, \rho^{m_l}, \rho^{m_{l+1}})$ ,  $m_i \in \mathbb{Z}$ ,  $1 \leq i \leq l+1$ . Auch  $Y$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}^l$  beziehungsweise  $\mathbb{Z}^{l+1}$  und wir können wieder  $\mathbb{Z}$ -Basen festlegen: Im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  sei dies  $\{e_1, \dots, e_l\}$  mit  $e_i : \rho \mapsto h(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ ,  $\lambda_i = \rho$  und  $\lambda_j = 1$  für  $j \neq i$ ,  $1 \leq i \leq l$ . Und im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$  nehmen wir  $\{e_1, \dots, e_l, e_{l+1}\}$  mit  $e_i : \rho \mapsto h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda)$ ,  $\lambda_i = \rho$ ,  $\lambda_j = 1$  für  $j \neq i$  und  $\lambda = 1$ ,  $1 \leq i \leq l$ , und  $e_{l+1} : \rho \mapsto h(1, \dots, 1, \rho)$ .

Wir schreiben die Gruppenoperationen in  $X$  und  $Y$  *additiv*.

Die Komposition eines  $\gamma \in Y$  und eines  $\chi \in X$  ergibt einen Homomorphismus algebraischer Gruppen von  $\mathbf{K}^\times$  nach  $\mathbf{K}^\times$ . Dieser hat die Form  $\chi \circ \gamma : \rho \mapsto \rho^n$  für ein  $n \in \mathbb{Z}$ . Die Zuordnung  $(\chi, \gamma) \mapsto \langle \chi, \gamma \rangle := n$  liefert eine exakte Paarung zwischen (den  $\mathbb{Z}$ -Moduln)  $X$  und  $Y$ . Die von uns gewählten Basen von  $X$  und  $Y$  sind dual bezüglich dieser Paarung.

Weiter wollen wir mit  $N(\mathbf{T})$  den Normalisator von  $\mathbf{T}$  in  $\mathbf{G}$  bezeichnen und mit  $\mathbf{W}$  die Restklassengruppe  $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ . Die Gruppe  $\mathbf{W}$  ist endlich und heißt *Weylgruppe* von  $\mathbf{G}$ .

Die Wurzelabbildungen  $\alpha_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq l$ , können wir als Elemente von  $X$  (und von  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ) auffassen. Sie bilden die *positiven Wurzeln*  $\Phi^+$  eines *Wurzelsystems*  $\Phi \subset X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

Die übrigen Wurzeln von  $\Phi$  sind die negativen der angegebenen; sie gehören zu den Wurzelabbildungen der Wurzeluntergruppen in der Boreluntergruppe  $\mathbf{B}^-$  der unteren Dreiecksmatrizen von  $\mathbf{G}$ . Für  $1 \leq i, j \leq l$  bezeichnen wir die Wurzeluntergruppe in  $\mathbf{B}^-$  zur Wurzel  $-\alpha_{i,j}$  mit  $\mathbf{U}_{i,j}^-$  und ihre Elemente mit  $u_{i,j}^-(a)$ ,  $a \in \mathbf{K}$ .

Dann induzieren die Zuordnungen

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto u_{i,j}(a), \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \mapsto u_{i,j}^-(a)$$

einen Homomorphismus algebraischer Gruppen  $\phi_{i,j}$  von  $\mathbf{SL}_2(\mathbf{K})$  auf die Untergruppe  $\langle \mathbf{U}_{i,j}, \mathbf{U}_{i,j}^- \rangle$  von  $\mathbf{G}$ . Die Abbildung  $\alpha_{i,j}^\vee : \mathbf{K}^\times \rightarrow \mathbf{T}$ ,  $\rho \mapsto \phi_{i,j} \left( \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho^{-1} \end{pmatrix} \right)$  liegt in  $Y$  und ist die zu  $\alpha_{i,j}$  gehörende *Kowurzel*.

Die Kowurzeln bilden ein Wurzelsystem  $\Phi^\vee \subset Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ .

Das Quadrupel  $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$  heißt *Wurzeldatum* von  $\mathbf{G}$ .

Die Weylgruppe  $\mathbf{W}$  von  $\mathbf{G}$  ist isomorph zu den Coxetergruppen, die durch die Reflexionen an den Wurzeln eines Fundamentalsystems von  $\Phi \subseteq X$  beziehungsweise von  $\Phi^\vee \subseteq Y$  erzeugt werden. (Zu einer Wurzel  $\alpha$  mit Kowurzel  $\alpha^\vee$  ist die Reflexion auf  $X$  durch  $\chi \mapsto \chi - \langle \chi, \alpha^\vee \rangle \alpha$  und auf  $Y$  durch  $\gamma \mapsto \gamma - \langle \alpha, \gamma \rangle \alpha^\vee$  definiert.) Wir beschreiben noch kurz diesen Isomorphismus:  $N(\mathbf{T})$  operiert auf  $\mathbf{T}$  vermöge Konjugation, und da  $\mathbf{T}$  abelsch ist, hängt die Operation von  $n \in N(\mathbf{T})$  nur von der Restklasse  $w := n\mathbf{T} \in \mathbf{W} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  ab. (Wir verwenden für diese Operation von  $\mathbf{W}$  auf  $\mathbf{T}$  dann auch die Schreibweise  $t^w := t^n = n^{-1}tn$  und  ${}^wt := {}^nt = ntn^{-1}$ .) In kanonischer Weise sind hierdurch auch Operationen von  $\mathbf{W}$  auf  $X$  und  $Y$  erklärt, für  $w \in \mathbf{W}$ ,  $\chi \in X$ ,  $\gamma \in Y$ ,  $t \in \mathbf{T}$  und  $\rho \in \mathbf{K}^\times$  schreiben wir:

$$\chi^w(t) := \chi(t^w) \quad \text{und} \quad \gamma^w(\rho) := \gamma(\rho)^w$$

(die Schreibweise für die Operation auf  $X$  ist invers zu der bei Carter [6, Seite 18]; dies wird in Abschnitt 3 begründet). Dabei gilt für alle  $w \in \mathbf{W}$ , daß  $w(\Phi) = \Phi$  und  $w(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$  ist. Die Abbildung, die  $w$  die Operation von  $w$  auf  $X$  zuordnet, liefert den Isomorphismus von  $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  auf die Coxetergruppe zu  $\Phi$  und entsprechend für  $Y$ . Sei  $\alpha_{i,j} \in \Phi^+$  und  $s_{i,j}$  die Reflexion an  $\alpha_{i,j}$  oder an  $\alpha_{i,j}^\vee$ , dann ist ein Vertreter  $n_{i,j} \in N(\mathbf{T})$  eines Urbildes von  $s_{i,j}$  unter diesen Isomorphismen durch  $n_{i,j} = \phi_{i,j} \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)$  gegeben.

Da unser maximaler Torus  $\mathbf{T}$  rational ist, operiert auch der Frobeniusmorphismus  $F$  auf  $\mathbf{T}$ . Hierdurch werden Operationen von  $F$  auf  $X$  und  $Y$  bestimmt, die wir ebenfalls mit  $F$  bezeichnen. Diese haben in beiden Fällen die Form  $F = q \cdot F_0$ , wobei  $F_0$  die Wurzeln beziehungsweise Kowurzeln permutiert und eine endliche Ordnung hat.

Wir wollen noch eine Sprechweise festlegen: Der *Dynkin-Typ* einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe mit Frobeniusmorphismus sei das zugeordnete Dynkin-Diagramm *zusammen* mit der induzierten Operation des Frobeniusmorphismus darauf. Dies ist in Carter [6, 1.11 und 1.18] erklärt. Wir verwenden die Standard-Bezeichnungen für die Dynkin-Typen, wie sie in [6, 1.19] aufgeführt sind, mit einem

Zusatz: Besitzt ein Wurzelsystem Wurzeln von zwei verschiedenen Längen, so verwenden wir für ein Teilwurzelsystem vom Typ  $A$  die Bezeichnung  $A_m$ , falls es aus kurzen Wurzeln besteht, und die Bezeichnung  $\tilde{A}_m$ , falls es aus langen Wurzeln besteht.

Jetzt formulieren wir unsere Bemerkung.

### Bemerkung 1.3

- (a) Sei zunächst  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$ . Das Wurzelsystem  $\Phi \subset X$  von  $\mathbf{G}$  besteht aus den  $2l^2$  Elementen  $\pm(\hat{e}_i \pm \hat{e}_j)$ ,  $\pm 2\hat{e}_i$  für  $1 \leq i, j \leq l$ ,  $j \neq i$ . Der Index des davon erzeugten  $\mathbb{Z}$ -Gitters ist  $(X : \mathbb{Z}\Phi) = 2$ . Die Teilmenge  $\{\alpha_i := \hat{e}_i - \hat{e}_{i+1}, \alpha_l := 2\hat{e}_l \mid 1 \leq i \leq l-1\}$  ist ein Fundamentalsystem von  $\Phi$ . Die Kowurzeln  $\alpha_{i,j}^\vee$  werden, als Elemente von  $Y$  betrachtet, durch

$$\alpha_{i,j}^\vee = \begin{cases} e_i - e_j & \text{für } 1 \leq i < j \leq l \\ e_i + e_j & \text{für } 1 \leq j < i \leq l \\ e_i & \text{für } 1 \leq i = j \leq l \end{cases}$$

beschrieben. Das Kowurzelsystem  $\Phi^\vee$  besteht also aus den Elementen  $\pm(e_i \pm e_j)$ ,  $\pm e_i$  für  $1 \leq i, j \leq l$ ,  $j \neq i$ . Für das davon aufgespannte  $\mathbb{Z}$ -Gitter gilt  $\mathbb{Z}\Phi^\vee = Y$ . Ein Fundamentalsystem von  $\Phi^\vee$  ist  $\{\alpha_i^\vee := e_i - e_{i+1}, \alpha_l^\vee := e_l \mid 1 \leq i \leq l-1\}$ .

Der Frobeniusmorphismus  $F$  operiert auf  $X$  und  $Y$  durch Multiplikation mit  $q$  ( $F_0$  ist also trivial).

Hieraus ergibt sich, daß  $\mathbf{G}$  die einfache, einfach zusammenhängende Gruppe vom Dynkin-Typ  $C_l$  ist. Die endliche Gruppe  $\mathbf{G}^F$  ist die Gruppe  $(C_l)_{sc}(q)$  (für die Bezeichnungsweise siehe [6, 1.19]).

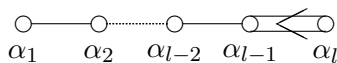
- (b) Sei nun  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$ . Der Dynkin-Typ von  $\mathbf{G}$  ist gleich dem von  $\mathbf{G}' = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$ , also  $C_l$ . Jetzt spannt jedoch das Wurzelsystem  $\Phi$  einen  $l$ -dimensionalen Teilraum im  $(l+1)$ -dimensionalen euklidischen Raum  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  auf, es besteht aus den Elementen  $\pm(\hat{e}_i - \hat{e}_j)$ ,  $\pm(\hat{e}_i + \hat{e}_j - \hat{e}_{l+1})$  und  $(2\hat{e}_i - \hat{e}_{l+1})$  für  $1 \leq i, j \leq l$ ,  $j \neq i$ . Ein Fundamentalsystem wird von den Wurzeln  $\alpha_i := (\hat{e}_i - \hat{e}_{i+1})$ ,  $1 \leq i \leq l-1$ , und  $\alpha_l := (2\hat{e}_l - \hat{e}_{l+1})$  gebildet. Das System der Kowurzeln können wir mit Hilfe der  $e_i$  genauso wie in (a) hinschreiben.
- (c) Die Weylgruppe  $\mathbf{W}$  vom Typ  $C_l$  ist isomorph zu einem Kranzprodukt der symmetrischen Gruppe  $S_l$  auf  $l$  Elementen und einer zyklischen Gruppe der Ordnung zwei, sie besitzt also  $2^l l!$  Elemente. Als Coxetergruppe wird  $\mathbf{W}$  von  $l$  Involutionen  $s_1, \dots, s_l$  erzeugt. Wir wollen alle oben erwähnten Interpretationen von  $\mathbf{W}$  genau beschreiben, indem wir jeweils die Elemente  $s_i$  angeben. Die Identifikation der  $s_i$  in den verschiedenen Fällen liefert dann die Isomorphismen, die oben erläutert wurden.
- $\mathbf{W}$  als Teilmenge von  $\text{Aut}(X)$ : Seien  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , die Wurzeln des in (a) beziehungsweise (b) gefundenen Fundamentalsystems von  $\Phi$ . Dann sei  $s_i$  die Reflektion an  $\alpha_i$ .
- $\mathbf{W}$  als Teilmenge von  $\text{Aut}(Y)$ : Die Kowurzeln  $\alpha_i^\vee$  zu den  $\alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , bilden das in (a) beziehungsweise (b) gefundene Fundamentalsystem von  $\Phi^\vee$ . Hier sei  $s_i$  die Reflektion an  $\alpha_i^\vee$ .



Die Gleichung  $\mathbb{Z}\Phi^\vee = Y$  ist klar, weil die Basisvektoren  $e_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , von  $Y$  zum Kowurzelsystem gehören.

Die Operation des Frobeniusmorphismus  $F$  auf  $X$  und  $Y$  ergibt sich daraus, daß  $F$  einfach die Einträge der Matrizen aus  $\mathbf{T}$  mit  $q$  potenziert.

Aus der expliziten Angabe der Fundamentalsysteme von  $\Phi$  und  $\Phi^\vee$  können wir die Einträge der Cartan-Matrix  $(\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle)_{1 \leq i, j \leq l}$  von  $\mathbf{G}$  berechnen und erhalten daraus das folgende Dynkin-Diagramm von  $\mathbf{G}$ :



Dieses Dynkin-Diagramm wird mit  $C_l$  bezeichnet. Die Gruppe  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  ist einfach, weil sie nach 1.1(a) halbeinfach ist und ein zusammenhängendes Dynkin-Diagramm besitzt. Sie wird wegen der Gleichheit  $Y = \mathbb{Z}\Phi^\vee$  einfach zusammenhängend genannt (siehe Carter [6, 1.11]).

(b) Die Überlegungen gehen genauso wie in (a), nur daß jetzt Bemerkung 1.2(e) benutzt wird.

(c) Die Isomorphismen zwischen den verschiedenen Interpretationen der Weylgruppe  $\mathbf{W}$  haben wir bereits weiter oben erklärt. Die Struktur und Ordnung von  $\mathbf{W}$  ergibt sich sofort aus der konkreten Beschreibung von  $\mathbf{W}$  als Teilmenge von  $\text{Aut}(X)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$ .

(d) Das folgt aus (c), denn mit den angegebenen Matrizen  $n_1, \dots, n_l$  sehen wir, daß es Repräsentanten für die Elemente der Weylgruppe in  $N(\mathbf{T})$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_p$  gibt.

(e) Hier können wir auf den Artikel [4] von Carter verweisen.  $\square$

Am Schluß dieses Abschnittes wollen wir noch einige Notationen festlegen. Wir betrachten die Gruppen  $\mathbf{K}^\times$  und  $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ , wobei  $\mathbb{Q}_{p'}$  die additive Gruppe der rationalen Zahlen, die sich mit nicht durch  $p$  teilbarem Nenner schreiben lassen, bezeichne. Diese beiden Gruppen sind isomorph und wir wollen uns einen Isomorphismus  $\varphi_1 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}^\times$  für den Rest dieser Arbeit fest gewählt denken (vergleiche Carter [6, 3.1.3]). Die Elemente von  $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  sollen mittels Repräsentanten  $\frac{r}{s}$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}$ ,  $s \neq 0$ ,  $p \nmid s$ , in  $\mathbb{Q}_{p'}$  geschrieben werden.

Außerdem definieren wir noch die Einbettung  $\varphi_2 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $\frac{r}{s} \mapsto e^{\frac{2\pi ir}{s}}$  (das Bild von  $\varphi_2$  besteht genau aus den Einheitswurzeln mit zu  $p$  teilerfremder Ordnung) und treffen die folgende Vereinbarung.

#### Vereinbarung 1.4

(a) Seien  $\varphi_1 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{K}^\times$  und  $\varphi_2 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$  die oben erklärten Abbildungen. In der folgenden Tabelle werden für gewisse Elemente in  $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  Namen ihrer Bilder unter  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  festgelegt. Diese Namen sollen im Rest der Arbeit benutzt werden, um Elemente aus  $\mathbf{K}^\times$  und Charakterwerte explizit hinzuschreiben.

$\mu \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$	$\varphi_1(\mu) \in \mathbf{K}^\times$	$\varphi_2(\mu) \in \mathbb{C}^\times$
$\frac{1}{q^n-1}$	$\tilde{\zeta}_n$	$\zeta_n$
$\frac{1}{q^n+1}$	$\tilde{\xi}_n$	$\xi_n$
$\frac{1}{(q^n+1)(q-1)}$	$\tilde{\eta}_n$	$\eta_n$
$\frac{1}{2(q^n-1)}$	$\tilde{\rho}_n$	$\rho_n$



- (b) Wir werden  $\phi_i$  als abkürzende Schreibweise für das  $i$ -te Kreisteilungspolynom in der Variablen  $q$  verwenden (wie in Carter [6, 13.9]). Bei uns kommen vor:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= q - 1 \\ \phi_2 &= q + 1 \\ \phi_3 &= q^2 + q + 1 \\ \phi_4 &= q^2 + 1 \\ \phi_6 &= q^2 - q + 1\end{aligned}$$

## 2 Überblick über die Berechnung der Charaktertafeln

Wir zitieren zuerst zwei wichtige Sätze aus der Theorie von Deligne und Lusztig, an denen wir unser Vorgehen zur Berechnung der Charaktertafeln orientieren wollen. Danach geben wir einen Überblick über die Teilaufgaben, die in den folgenden Abschnitten ausführlich erklärt und gelöst werden.

### 2.1 Charakterformel für Deligne-Lusztig-Charaktere und Lusztig-Serien

Sei  $\mathbf{G}$  eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe,  $F$  ein Frobeniusmorphismus von  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{L}$  eine rationale Leviuntergruppe von  $\mathbf{G}$ . Dazu gibt es den *Lusztig-Funktor*  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$ , der einer (komplexwertigen) Klassenfunktion von  $\mathbf{L}^F$  eine Klassenfunktion von  $\mathbf{G}^F$  zuordnet (genauer werden verallgemeinerte Charaktere auf verallgemeinerte Charaktere aber nicht immer Charaktere auf Charaktere abgebildet). Eine Definition von  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  ist im Kapitel 11 des Buches von Digne und Michel [13] zu finden. Der Spezialfall  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ , in dem  $\mathbf{L} = \mathbf{T}$  ein maximaler Torus ist, wird im Buch von Carter [6, Chapter 7] erklärt. Wir betrachten zunächst nur diesen Fall  $\mathbf{L} = \mathbf{T}$  und bezeichnen mit  $\hat{\mathbf{T}}^F$  die Gruppe der irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{T}^F$ . Die verallgemeinerten Charaktere  $\{R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta \mid \mathbf{T} \text{ rationaler maximaler Torus von } \mathbf{G}, \theta \in \hat{\mathbf{T}}^F\}$  heißen die *Deligne-Lusztig-Charaktere* von  $\mathbf{G}^F$ . Der Deligne-Lusztig-Charakter  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$  hängt nur von der  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklasse des Paares  $(\mathbf{T}, \theta)$  ab und auf den unipotenten Klassen von  $\mathbf{G}^F$  sogar nur von der  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklasse von  $\mathbf{T}$ . Die auf die unipotenten Klassen eingeschränkten Deligne-Lusztig-Charaktere heißen *Greenfunktionen*, und wir schreiben dafür  $Q_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ .

**Satz 2.1 (Charakterformel für  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$ )** Sei  $g \in \mathbf{G}^F$  und  $g = su = us$  mit  $s$  halbeinfach und  $u$  unipotent die Jordan-Zerlegung von  $g$ . Sei  $\mathbf{C} = C_{\mathbf{G}}(s)$  der Zentralisator von  $s$  in  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{C}^0$  die Zusammenhangskomponente der Eins in  $\mathbf{C}$ . Dann gilt:

(a)

$$(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta)(g) = \frac{1}{|(\mathbf{C}^0)^F|} \sum_{\substack{x \in \mathbf{G}^F \\ x^{-1}sx \in \mathbf{T}^F}} \theta(x^{-1}sx) Q_{x\mathbf{T}x^{-1}}^{\mathbf{C}^0}(u)$$

(b) Sei jetzt zusätzlich der Zentralisator von  $s$  zusammenhängend, also  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^0$ , und seien  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_k \subseteq \mathbf{C}$  Repräsentanten der  $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{C}$ , die in der  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklasse des Torus  $\mathbf{T}$  von  $\mathbf{G}$  liegen. Ist  $x \in \mathbf{G}^F$  mit  $s' := s^x \in \mathbf{T}^F$ , so hängt die  $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklasse von  ${}^x\mathbf{T}$  nur von  $s'$  (und nicht vom speziellen  $x$ ) ab. Seien also  $s_{r1}, \dots, s_{rl_r} \in \mathbf{T}^F$  für  $1 \leq r \leq k$  die verschiedenen Elemente der Form  $s^x \in \mathbf{T}^F$  mit  $x \in \mathbf{G}^F$ , für die der Torus  ${}^x\mathbf{T}$  in der  $\mathbf{C}^F$ -Klasse von  $\mathbf{T}_r$  liegt. Dann ist

$$(R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta)(g) = \sum_{r=1}^k \left( \sum_{t=1}^{l_r} \theta(s_{rt}) \right) Q_{\mathbf{T}_r}^{\mathbf{C}}(u).$$

**Beweis:** (a) Dies ist Theorem 7.2.8 aus Carter [6]. Die Formel ist der Spezialfall einer entsprechenden Charakterformel für den Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$ ; siehe Digne-Michel [13, 12.2].

(b) Seien  $x, y \in \mathbf{G}^F$ , dann gilt:  $s^x = s^y \Leftrightarrow c := yx^{-1} \in \mathbf{C}^F$ . Ist also  $s^x = s^y$ ,  $y = cx$  und  ${}^x\mathbf{T} \subseteq \mathbf{C}$ , so ist auch  ${}^y\mathbf{T} = {}^c({}^x\mathbf{T}) \subseteq \mathbf{C}$  und  ${}^y\mathbf{T}$  liegt in der gleichen  $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklasse wie  ${}^x\mathbf{T}$ . Die Formel in (b) ist somit nur eine Umformulierung der Formel aus (a) im Spezialfall  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^0$ .  $\square$

Jeder irreduzible Charakter von  $\mathbf{G}^F$  kommt als Konstituent eines Deligne-Lusztig-Charakters vor. Um zu beschreiben, welche  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$  gemeinsame Konstituenten besitzen, ist es nützlich, die *duale Gruppe*  $\mathbf{G}^*$  von  $\mathbf{G}$  zu betrachten. Ist  $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$  das Wurzeldatum von  $\mathbf{G}$ , so ist  $\mathbf{G}^*$  die zusammenhängende reductive algebraische Gruppe, die bis auf Isomorphie durch das Wurzeldatum  $(Y, \Phi^\vee, X, \Phi)$  bestimmt ist (die Rollen von  $X$  und  $Y$ , sowie von Wurzeln und Kowurzeln werden vertauscht). Die Operation des Frobeniusmorphismus  $F$  auf  $X$  und  $Y$  gehört dann zu einem Frobeniusmorphismus  $F^*$  von  $\mathbf{G}^*$  und dadurch ist  $\mathbf{G}^{*F^*}$  bis auf Isomorphie bestimmt. Es ist nun möglich, die Paare  $(\mathbf{T}, \theta)$  von  $\mathbf{G}$  mit Paaren  $(\mathbf{T}^*, s)$  von rationalen maximalen Tori  $\mathbf{T}^*$  von  $\mathbf{G}^*$  und halbeinfachen Elementen  $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$  zu identifizieren. Dabei sind  $(\mathbf{T}_1, \theta_1)$  und  $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$  genau dann  $\mathbf{G}^F$ -konjugiert, wenn die zugehörigen Paare  $(\mathbf{T}_1^*, s_1)$  und  $(\mathbf{T}_2^*, s_2)$  unter  $\mathbf{G}^{*F^*}$  konjugiert sind. Die Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_{\mathbf{T}_1}^{\mathbf{G}}\theta_1$  und  $R_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{G}}\theta_2$  haben höchstens dann gemeinsame Konstituenten, wenn die Paare  $(\mathbf{T}_1, \theta_1)$  und  $(\mathbf{T}_2, \theta_2)$  *geometrisch konjugiert* sind und dies ist genau dann der Fall, wenn  $s_1$  und  $s_2$  geometrisch, also in der algebraischen Gruppe  $\mathbf{G}^*$ , konjugiert sind. Die Menge der irreduziblen Konstituenten der  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$ , die auf diese Weise zur geometrischen Konjugiertenklasse eines halbeinfachen Elementes  $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$  gehören, heißt die *zu  $s$  assoziierte Lusztig-Serie*; wir schreiben dafür  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ . Betrachten wir speziell  $s = 1 \in \mathbf{G}^{*F^*}$ , so gehören dazu die Deligne-Lusztig-Charaktere der Form  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}1$ . Ihre irreduziblen Konstituenten, die Charaktere der Lusztig-Serie  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (1))$ , heißen *unipotente Charaktere*.

Wir wollen nun noch voraussetzen, daß die Gruppe  $\mathbf{G}$  ein *zusammenhängendes Zentrum* hat. Dann sind die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^*$  stets zusammenhängend, und halbeinfache Elemente von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  sind genau dann geometrisch konjugiert, wenn sie  $\mathbf{G}^{*F^*}$ -konjugiert sind. Die hier aufgezählten Begriffe und Aussagen sind im Kapitel 13 des Buches von Digne und Michel [13] erklärt. Aus diesem Kapitel zitieren wir nun einen weiteren grundlegenden Satz.

**Satz 2.2 (Jordan-Zerlegung der Charaktere endlicher Gruppen vom Lie-Typ)**  
*Die Charaktere einer Lusztig-Serie  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$  stehen in Bijektion zu  $\mathcal{E}(C_{\mathbf{G}^*}(s)^{F^*}, (1))$ , also zu den unipotenten Charakteren des Zentralisators von  $s$  in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^{*F^*}$ . Diese Bijektion läßt sich so wählen, daß bei  $\mathbb{Z}$ -linearer Fortsetzung  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$  in  $\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)^0} \cdot \varepsilon_{\mathbf{G}} R_{\mathbf{T}^*}^{C_{\mathbf{G}^*}(s)} 1$  übergeht (wie oben sollen wieder die Paare  $(\mathbf{T}, \theta)$  und  $(\mathbf{T}^*, s)$  zusammengehören). Für den Vorfaktor gilt dabei  $\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*}(s)^0} \cdot \varepsilon_{\mathbf{G}} \in \{+1, -1\}$ .*

**Beweis:** Siehe Digne-Michel [13, Theorem 13.23].  $\square$

Diese beiden Sätze ermöglichen für sich natürlich noch nicht die konkrete Berechnung von Charaktertafeln. Zu Satz 2.1 muß noch gesagt werden, daß sich die dort vorkommenden Greenfunktionen auch praktisch berechnen lassen. Und Satz 2.2 ist sehr nützlich, weil Lusztig in mehreren Arbeiten für alle zusammenhängenden reductiven Gruppen  $\mathbf{G}$  Parametrisierungen der unipotenten Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  sowie ihre jeweiligen Vielfachheiten in den Deligne-Lusztig-Charakteren  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}1$  bestimmt hat.

Wenn wir alle diese Informationen ausnutzen, bleibt aber noch eine Schwierigkeit übrig. Die Deligne-Lusztig-Charaktere spannen nämlich im allgemeinen nur einen echten Teilraum des Raumes der Klassenfunktionen von  $\mathbf{G}^F$  auf, die Funktionen in diesem Teilraum heißen *uniforme Funktionen*. Das bedeutet, daß es Lusztig-Serien geben kann, in denen es mehr irreduzible Charaktere als zugehörige Deligne-Lusztig-Charaktere gibt. In diesen Fällen werden also zusätzliche nicht-uniforme Klassenfunktionen einschließlich ihrer Zerlegung in irreduzible Konstituenten benötigt. In neueren Arbeiten von Lusztig über Charaktergarben wurde gezeigt, wie sich im Prinzip bis auf die Bestimmung gewisser Einheitswurzeln auch solche nicht-uniformen Klassenfunktionen konstruieren lassen. Wir werden in den von uns betrachteten Fällen diese Ergebnisse aber nicht verwenden (siehe unten).

## 2.2 Charaktertafeln für $\mathbf{CSp}_6(q)$ , $q$ ungerade, und $\mathbf{Sp}_6(q)$ , $q$ gerade

Sei nun  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  bei ungerader oder  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  bei gerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$ . Nach Bemerkung 1.3(a) und (b) ist die Kommutatorgruppe  $\mathbf{G}'$  von  $\mathbf{G}$  einfach zusammenhängend und daraus folgt nach einem Satz von Steinberg, daß die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente von  $\mathbf{G}$  zusammenhängend sind. Wir können also für die Berechnung der Deligne-Lusztig-Charaktere die Formel aus Satz 2.1(b) verwenden. Außerdem ist nach Bemerkung 1.1(b) beziehungsweise 1.2(b) das Zentrum von  $\mathbf{G}$  zusammenhängend, so daß auch die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^*$  zusammenhängend sind.

Jetzt werden die einzelnen Schritte, die zur vollständigen Berechnung der Charaktertafel von  $\mathbf{G}^F$  für beide Fälle von  $\mathbf{G}$  führen, kurz erläutert. Jeder Schritt wird in einem der folgenden Abschnitte genauer erklärt und dessen Ergebnisse angegeben (auch Literaturverweise sind im jeweiligen Abschnitt zu finden).

Unter *Berechnung* wollen wir folgendes verstehen: Die Konjugiertenklassen sollen mit Hilfe von Repräsentanten beschrieben werden, und die Parametrisierung der Klassen und Charaktere sowie die Angabe der Charakterwerte soll so genau sein, daß das konkrete Rechnen mit den Charakteren auf einem Computer möglich ist.

- Maximale Tori und ihre komplexen Charaktere:

Alle maximalen Tori von  $\mathbf{G}$  lassen sich in der algebraischen Gruppe  $\mathbf{G}$  auf den Torus  $\mathbf{T}$  der Diagonalelemente von  $\mathbf{G}$  konjugieren. Dies liefert eine Bijektion zwischen den  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori und den Konjugiertenklassen der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$ . Wir beschreiben für Repräsentanten  $\tilde{\mathbf{T}}$  der  $\mathbf{G}^F$ -Klassen rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{G}$  die endlichen Gruppen  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  mittels Untergruppen von  $\mathbf{T}$ . In ganz analoger Weise lassen sich für Repräsentanten  $\tilde{\mathbf{T}}^*$  der  $\mathbf{G}^{*F^*}$ -Klassen rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{G}^*$  die  $\tilde{\mathbf{T}}^{*F^*}$  als Untergruppen von  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  angeben.

Schließlich berechnen wir für diese Repräsentanten noch explizit die Zuordnung von Paaren  $(\tilde{\mathbf{T}}^*, s)$  zu Paaren  $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$ . Wir benötigen für diesen Teil nur die Operationen der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$  auf  $X$  und  $\mathbf{T}$  aus Bemerkung 1.3(c).

- Parametrisierung der Konjugiertenklassen:

Jedes  $g \in \mathbf{G}^F$  besitzt eine eindeutige Jordan-Zerlegung  $g = su = us$  mit  $s$  halbeinfach und  $u$  unipotent. Wir bestimmen zuerst Repräsentanten für die halbeinfachen Klassen sowie deren Zentralisatoren und dann die unipotenten Klassen in diesen Zentralisatoren. So bekommen wir Repräsentanten für alle Konjugiertenklassen von  $\mathbf{G}^F$  zusammen mit ihrer Jordan-Zerlegung, was für die Anwendung der Formel in 2.1(b) wichtig ist. Die Bestimmung der Konjugiertenklassen führen wir zusätzlich zu den oben genannten Gruppen für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  durch. Dies erfordert kaum Mehraufwand, und wir erhalten auch die Fusion der Klassen von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  in  $\mathbf{CSp}_6(q)$ .

1. Halbeinfache Konjugiertenklassen, ihre Zentralisatoren und Repräsentanten in den maximalen Tori:

Wir fassen die halbeinfachen Klassen von  $\mathbf{G}^F$  zu *halbeinfachen Klassentypen* zusammen, wobei zwei halbeinfache Elemente im gleichen Klassentyp liegen, wenn sie  $\mathbf{G}^F$ -konjugierte Zentralisatoren in  $\mathbf{G}$  besitzen. Durch Konjugation (in  $\mathbf{G}$ ) der halbeinfachen Elemente von  $\mathbf{G}^F$  in den Torus  $\mathbf{T}$  werden wir sehen, daß sich diese Klassentypen mit Hilfe des Wurzelsystems und der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$  parametrisieren lassen. Insbesondere ist dies unabhängig vom speziellen  $F$  (beziehungsweise  $q$ ). Für die Anwendung der Formel aus 2.1(b) müssen wir noch für jede halbeinfache Klasse alle Vertreter in unseren Repräsentanten der  $\mathbf{G}^F$ -Klassen maximaler Tori sowie in ihrem Zentralisator  $\mathbf{C}$  die  $\mathbf{C}^F$ -Klassen rationaler maximaler Tori kennen. Auch diese Informationen lassen sich mit Hilfe der Weylgruppe beschreiben und zwar für alle Klassen in einem Typ einheitlich. Wir benötigen bis hierher wieder nur die Beschreibung des Wurzeldatums aus Bemerkung 1.3. Für die Berechnung des genauen Isomorphietyps der Zentralisatoren werden wir jedoch auf  $\mathbf{G}^F$  als Matrixgruppe zurückgreifen.

2. Unipotente Klassen von  $\mathbf{G}^F$  und ihre Zentralisatorordnung:

Die unipotenten Klassen von  $\mathbf{G}^F$  bestimmen wir mit einem völlig elementaren Verfahren, dem die eindeutige Bruhat-Zerlegung der Elemente aus  $\mathbf{G}^F$  zugrundeliegt. Wir rechnen zunächst mit den Kommutatorrelationen der Wurzeluntergruppen, die sich sofort aus 1.1(e) ergeben, und dann auch wieder mit den Gruppenelementen als Matrizen.

3. Unipotente Klassen in Zentralisatoren  $\mathbf{C}^F$  von halbeinfachen Elementen mit  $\mathbf{C}^F \not\cong \mathbf{G}^F$ :

Die Zentralisatoren  $\mathbf{C}$  halbeinfacher Elemente aus  $\mathbf{G}^F \setminus Z(\mathbf{G}^F)$  lassen sich mit Hilfe einfacher Gruppen vom Lie-Typ beschreiben, deren halbeinfacher Rang kleiner als der von  $\mathbf{G}$  ist. Für diese sind die Charaktertafeln und damit die Konjugiertenklassen bekannt. Wir können also die unipotenten Klassen in diesen  $\mathbf{C}^F$ , deren genauen Isomorphietyp wir schon bestimmt haben, im wesentlichen aus der Literatur zusammensuchen.

Die Anzahl der unipotenten Klassen im Zentralisator eines halbeinfachen Elementes

von  $\mathbf{G}^F$  hängt immer nur von dessen halbeinfachem Klassentyp (und nicht vom speziellen  $q$ ) ab. Diese Tatsache und das Zusammenfassen der halbeinfachen Klassen zu Klassentypen ermöglichen es, die Konjugiertenklassen der Gruppen  $\mathbf{G}^F$  *generisch*, also mit  $q$  als Parameter, zu beschreiben.

- Greenfunktionen:

Die meisten Greenfunktionen, die wir benötigen, lassen sich aus einigen allgemeinen Eigenschaften von Greenfunktionen ohne Rechenaufwand gewinnen. Es bleiben nur die Greenfunktionen für Gruppen vom Typ  $C_2$  und  $C_3$ . Diese sind aus der Literatur zu entnehmen, wobei sich jedoch einige technische Fragen stellen, die wir genauer erörtern wollen. Es wird auch gezeigt, wie wir die fehlenden Greenfunktionen selbst neu berechnen können.

- Parametrisierung der Lusztig-Serien, Berechnung der zugehörigen Paare  $(\mathbf{T}, \theta)$  und der Deligne-Lusztig-Charaktere:

Diese Aufgabe ist damit gleichbedeutend, die halbeinfachen Klassen in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^{*F^*}$  und Repräsentanten der zugehörigen  $\mathbf{G}^{*F^*}$ -Klassen von Paaren  $(\mathbf{T}^*, s)$  zu finden. Aus dem Abschnitt über die maximalen Tori kennen wir schon die Zuordnung der Paare  $(\mathbf{T}^*, s)$  zu den Paaren  $(\mathbf{T}, \theta)$ . Wir können hier völlig analog zur Bestimmung der halbeinfachen Klassen in  $\mathbf{G}^F$  vorgehen, nur daß wir jetzt  $X$  statt  $Y$  und die Kowurzeln statt der Wurzeln benutzen. Insbesondere fassen wir auch die halbeinfachen Klassen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  zu Klassentypen zusammen und bekommen so *Typen von Lusztig-Serien*. Diese Typen von Lusztig-Serien werden dann wieder unabhängig vom speziellen  $q$  mit Hilfe der Kowurzeln und der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$  parametrisiert. Von den Zentralisatoren  $\mathbf{C}^*$  halbeinfacher Elemente von  $\mathbf{G}^*$  brauchen wir nur den Dynkin-Typ zu kennen, und dieser ergibt sich sofort aus der Parametrisierung der halbeinfachen Klassentypen. Wir müssen also *nicht* den genauen Isomophietyp von  $\mathbf{C}^{*F^*}$ , insbesondere nicht den von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  herausfinden. Alle Informationen, die wir über die duale Gruppe benötigen, bekommen wir aus der Beschreibung des Wurzelsystems von  $\mathbf{G}$  und der Operation des Frobeniusmorphisms gemäß Bemerkung 1.3. Die Anzahl der Deligne-Lusztig-Charaktere zu einer Lusztig-Serie ist gleich der Anzahl der  $F^*$ -Konjugiertenklassen der Weylgruppe des zugehörigen Zentralisators  $\mathbf{C}^*$ , also unabhängig von  $q$ .

Nach diesen Vorbereitungen lassen sich alle Deligne-Lusztig-Charaktere, sortiert nach Lusztig-Serien, unter Ausnutzung der Formel aus 2.1(b) hinschreiben.

- Zerlegung der Deligne-Lusztig-Charaktere in irreduzible Konstituenten:

Nach Satz 2.2 müssen wir hierzu in allen Zentralisatoren  $\mathbf{C}^{*F^*}$  halbeinfacher Elemente in  $\mathbf{G}^{*F^*}$  die Parametrisierung der unipotenten Charaktere und ihre Vielfachheiten in den  $R_{\mathbf{T}^*}^{\mathbf{C}^*}$  kennen; diese Informationen entnehmen wir der Literatur (es kommt hier nur auf den Dynkin-Typ von  $\mathbf{C}^*$  an). Wir bekommen jeweils für alle Lusztig-Serien vom gleichen Typ eine einheitliche Beschreibung, wie sich die zugehörigen Deligne-Lusztig-Charaktere in irreduzible Charaktere zerlegen. Für die meisten unserer Typen von Lusztig-Serien ist die Anzahl der irreduziblen Charaktere gleich der Anzahl der Deligne-Lusztig-Charaktere. In diesen Fällen geben wir sofort die irreduziblen Charaktere als Linearkombinationen der Deligne-Lusztig-Charaktere an, wozu im wesentlichen die Charaktertafel der Weylgruppe des zugehörigen Zen-

tralisators  $\mathbf{C}^*$  berechnet werden muß. In zwei Typen von Lusztig-Serien fehlen uns jeweils eine und in einem Typ (zu dem die unipotenten Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  gehören) je zwei nicht-uniforme Funktionen zur vollständigen Berechnung der irreduziblen Charaktere. In diesen Fällen *definieren* wir einfach formal gewisse zusätzliche Klassenfunktionen, die senkrecht auf allen uniformen Funktionen stehen, und geben dann die irreduziblen Charaktere als Linearkombinationen der Deligne-Lusztig-Charaktere und dieser Senkrechtfunktionen an.

Die Zerlegung der Deligne-Lusztig-Charaktere zu einer Lusztig-Serie hängt nur vom Dynkin-Typ des zugehörigen Zentralisators in der dualen Gruppe ab, insbesondere ist sie unabhängig von  $q$ . Durch das Zusammenfassen der Lusztig-Serien zu Typen ist es uns möglich, auch die Charaktere der Gruppen  $\mathbf{G}^F$  generisch zu beschreiben.

- Charakterwerte der Senkrechtfunktionen:

Der vorige Schritt liefert die vollständige Charaktertafel von  $\mathbf{G}^F$ , wenn wir noch die Werte der formal eingeführten Senkrechtfunktionen kennen. Wir deuten kurz an, wie wir diese in unserem Fall erhalten. Mit Hilfe bekannter Charaktertafeln berechnen wir in zwei Leviuntergruppen  $\mathbf{L}^F$  von  $\mathbf{G}^F$  Senkrechtfunktionen zu den uniformen Funktionen von  $\mathbf{L}^F$ . Wird auf diese der Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  angewendet, so ergeben sich Senkrechtfunktionen für  $\mathbf{G}^F$ . Für eine der beiden Leviuntergruppen ist  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  die *Harish-Chandra-Induktion*, die sich auch mit Hilfe „klassischer“ Induktion beschreiben läßt. Dies ermöglicht uns die explizite Konstruktion von einigen der Senkrechtfunktionen, und für diese ergibt sich aus der Theorie der Hecke-Algebren auch ihre Zerlegung in irreduzible Konstituenten. Die Berechnung der Werte dieser Senkrechtfunktionen wird noch dadurch erleichtert, daß sie nur auf „wenigen“ Klassen Werte ungleich Null haben können. Für den Fall der anderen Leviuntergruppe lassen sich wenigstens noch einige Werte der Lusztig-induzierten Senkrechtfunktionen explizit ermitteln. Die restlichen Werte und die Zerlegung dieser Funktionen in irreduzible Charaktere bekommen wir schließlich mit Hilfe einiger Ad-hoc-Argumente. Hier wird vor allem die Charakterformel für den Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  nützlich sein, die zwar nicht die gesuchten Werte selbst, aber wichtige Informationen darüber liefert.

### 3 Maximale Tori von $\mathbf{G}^F$ und ihre komplexen Charaktere

In diesem Abschnitt sei  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  oder  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  bei beliebiger Charakteristik von  $\mathbf{K}$ . Wir wollen die maximalen Tori von  $\mathbf{G}^F$  und ihre komplexen Charaktere bestimmen. Letztere sollen mit Hilfe der maximalen Tori in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^{*F^*}$  beschrieben werden.

Maximale Tori von  $\mathbf{G}^F$  sind die Fixgruppen  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  rationaler maximaler Tori  $\tilde{\mathbf{T}}$  von  $\mathbf{G}$ . Der Isomorphietyp von  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  hängt nur von der  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklasse von  $\tilde{\mathbf{T}}$  ab. Um einen Überblick über die  $\mathbf{G}^F$ -Klassen rationaler maximaler Tori zu bekommen, verwenden wir den maximal zerfallenden Torus  $\mathbf{T}$  der Diagonalelemente von  $\mathbf{G}$  als Referenztorus.

Jeder rationale maximale Torus  $\tilde{\mathbf{T}}$  läßt sich in der algebraischen Gruppe in den Torus  $\mathbf{T}$  konjugieren; sei etwa  $g \in \mathbf{G}$  mit  $\tilde{\mathbf{T}}^g = \mathbf{T}$ . Dann ist  $n := g^{-1}F(g) \in N(\mathbf{T})$ , und die Operation des Frobeniusmorphisms auf  $\tilde{\mathbf{T}}$  entspricht auf  $\mathbf{T}$  der Operation  $(Fn^{-1}) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ ,  $t \mapsto {}^nF(t)$  (denn es gilt  $F(\tilde{t})^g = {}^nF(\tilde{t}^g)$ ). Da  $\mathbf{T}$  abelsch ist, ist diese Operation schon durch die Restklasse  $w := n\mathbf{T} \in \mathbf{W} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  in der Weylgruppe bezüglich  $\mathbf{T}$  festgelegt. Wir schreiben auch  $(Fw^{-1}) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$ ,  $t \mapsto {}^wF(t)$ , und nennen dies den *mit  $w$  getwisteten Frobeniusmorphismus* von  $\mathbf{T}$ . Wir sagen, daß  $\tilde{\mathbf{T}}$  aus  $\mathbf{T}$  durch *Twisten mit  $w$*  entsteht.

Zwei rationale maximale Tori  $\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\mathbf{T}}_2$  mit  $\tilde{\mathbf{T}}_i^{g_i} = \mathbf{T}$ ,  $w_i = g_i^{-1}F(g_i)\mathbf{T} \in \mathbf{W}$ ,  $i = 1, 2$ , sind genau dann  $\mathbf{G}^F$ -konjugiert, wenn  $w_1$  und  $w_2$  in der gleichen  $F$ -Konjugiertenklasse liegen, das heißt, wenn es ein  $v \in \mathbf{W}$  mit  $w_1 = vw_2F(v^{-1})$  gibt (siehe etwa Digne-Michel [13, 3.23]). Da nach Bemerkung 1.3(d) in unserem Fall  $F$  trivial auf der Weylgruppe operiert, sind die  $F$ -Konjugiertenklassen gleich den Konjugiertenklassen von  $\mathbf{W}$ .

Wir können also die  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{G}$  beschreiben, indem wir aus jeder Konjugiertenklasse von  $\mathbf{W}$  ein Element  $w$  auswählen und die Fixgruppe  $\mathbf{T}^{(Fw^{-1})}$  berechnen.

In Bemerkung 1.3(e) ist angegeben, in welcher Weise die Konjugiertenklassen von  $\mathbf{W}$  durch Doppelpartitionen  $(\alpha, \beta)$  mit  $|\alpha| + |\beta| = 3$  parametrisiert werden. Mit Hilfe von Tabelle 1 läßt sich leicht zu jeder Doppelpartition ein Repräsentant in der zugehörigen Klasse und seine Operation auf  $\mathbf{T}$  finden. Als Ergebnis erhalten wir:

**Satz 3.1** *Sei  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  oder  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ . Die Weylgruppe  $\mathbf{W}$  von  $\mathbf{G}$  hat 48 Elemente in 10 Konjugiertenklassen. In Tabelle 2 ist zu jeder Konjugiertenklasse die Doppelpartition, ein Vertreter  $w_i$  als Produkt in den erzeugenden Elementen  $s_1, s_2, s_3$  von  $\mathbf{W}$ , die Ordnung des Zentralisators  $C_{\mathbf{W}}(w_i)$  sowie die Ordnung des Torus  $\mathbf{T}_i^F := \mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$  angegeben. Für die Ordnung von  $\mathbf{T}_i^F$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  ist jeweils ein Faktor  $\phi_1 = q - 1$  hinzuzufügen. Die Tabelle 3 enthält eindeutige Parametrisierungen der Elemente in den Gruppen  $\mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$  für beide Fälle von  $\mathbf{G}$ . (Es werden die in 1.1(d), 1.2(d) und 1.4 eingeführten Schreibweisen für Torus- und Körperelemente benutzt.)*

Wir nennen ab jetzt einen rationalen maximalen Torus  $\tilde{\mathbf{T}}$  vom Typ  $\mathbf{T}_i$ , wenn die  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklasse von  $\tilde{\mathbf{T}}$  durch die Klasse von  $w_i$  aus Tabelle 2 parametrisiert wird.

Nun kommen wir zur Bestimmung der Gruppen  $\hat{\mathbf{T}}_i^F$  der irreduziblen komplexen Charaktere von  $\mathbf{T}_i^F$ . Es ist natürlich nicht schwierig, die Charaktere der abelschen Gruppen



$\mathbf{T}_i^F$  irgendwie zu parametrisieren; aber im vorigen Abschnitt wurde erläutert, daß es für uns zweckmäßig ist, diese Charaktere als Elemente von Tori in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^*$  aufzufassen. Wir beschreiben zuerst einen Referenztorus  $\mathbf{T}^*$  in der dualen Gruppe, berechnen wie oben Repräsentanten für die Klassen rationaler maximaler Tori in  $\mathbf{G}^*$  und geben schließlich explizit die Zuordnung ihrer Elemente zu Charakteren der  $\mathbf{T}_i^F$  an. (Das Konzept der dualen Gruppe ist etwa bei Digne-Michel [13, Chapter 13] und Carter [6, 3.1, 3.2 und Chapter 4] erklärt.)

Sei  $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$  das Wurzeldatum von  $\mathbf{G}$ . Dann ist die duale Gruppe  $\mathbf{G}^*$  die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte zusammenhängende reduktive Gruppe mit Wurzeldatum  $(Y, \Phi^\vee, X, \Phi)$ . Die Operation des Frobeniusmorphismus  $F$  auf  $X$  und  $Y$  (Multiplikation mit  $q$ ) gehört auch zu einem Frobeniusmorphismus  $F^*$  von  $\mathbf{G}^*$ . Dies legt die Gruppe  $\mathbf{G}^{*F^*}$  bis auf Isomorphie fest.

Ein maximaler Torus  $\mathbf{T}^*$  von  $\mathbf{G}^*$  ist isomorph zu  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{K}^\times$  und damit vermöge  $\varphi_1$  aus Vereinbarung 1.4 zu  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  (siehe Digne-Michel [13, 0.20], analog hätten wir oben statt  $\mathbf{T}$  auch  $Y \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{K}^\times$  nehmen können). Bezüglich der  $\mathbb{Z}$ -Basis  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_4$  von  $X$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  haben die Elemente aus  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  die Form

$$s(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) := \sum_{i=1}^4 \hat{e}_i \otimes \mu_i \quad \text{mit } \mu_i \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}, 1 \leq i \leq 4.$$

(Im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  ist hier und im folgenden jeweils die vierte Komponente wegzulassen.) Die Operation des Frobeniusmorphismus  $F^*$  auf  $\mathbf{T}^*$  wird durch seine Operation auf  $X$  induziert:

$$F^*(s(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)) = \sum_{i=1}^4 q\hat{e}_i \otimes \mu_i = \sum_{i=1}^4 \hat{e}_i \otimes q\mu_i = s(q\mu_1, q\mu_2, q\mu_3, q\mu_4)$$

Ebenso ist die Operation der Weylgruppe  $\mathbf{W}$  auf dem Torus  $\mathbf{T}^*$  durch die Operation auf  $X$  induziert. Dies ermöglicht die Berechnung der Fixgruppen  $\mathbf{T}_i^{*F^*} := (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})^{(Fw_i)}$ , die isomorph zu  $\hat{\mathbf{T}}_i^F$  sind (siehe Carter [6, 3.2.4 und 3.3.4]). An den Stellen, an denen wir zur Berechnung der  $\mathbf{T}_i^F$  die Elemente  $w_i^{-1}$  benutzt haben, müssen wir also jetzt die inversen Elemente  $w_i$  nehmen (Um dies schon in der Schreibweise deutlich zu machen, haben wir in Abschnitt 1 (siehe Seite 11) die Operation von  $\mathbf{W}$  auf  $X$  invers zur Notation von Carter [6, 1.9] definiert.) Wir geben nun den Isomorphismus  $\mathbf{T}_i^{*F^*} \cong \hat{\mathbf{T}}_i^F$  explizit an.

Zunächst gilt  $X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \cong \text{Hom}(Y, \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})$ , vermöge  $\chi \otimes \mu \mapsto (\gamma \mapsto \langle \chi, \gamma \rangle \mu)$  oder, mit Hilfe unserer  $\mathbb{Z}$ -Basen von  $X$  und  $Y$  geschrieben:

$$\sum_{i=1}^4 \hat{e}_i \otimes \mu_i \mapsto \left( \sum_{i=1}^4 a_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^4 a_i \mu_i \right)$$

(Carter [6, 3.1.1]). Für ein  $s \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  sei  $\tilde{\theta} : Y \rightarrow \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  der zugeordnete Homomorphismus. Genau dann ist  $s \in \mathbf{T}_i^{*F^*}$ , wenn die Untergruppe  $(Fw_i^{-1} - 1)Y$  im Kern von  $\tilde{\theta}$  liegt. Dies folgt aus der Identität  $\langle (Fw_i - 1)\chi, \gamma \rangle = \langle \chi, (Fw_i^{-1} - 1)\gamma \rangle$  (siehe Carter [6, 3.2.1 und 3.3.4]) und daraus, daß die Paarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nicht ausgeartet ist. Einen solchen

Homomorphismus  $\tilde{\theta}$  können wir auch als Homomorphismus  $\theta : \mathbf{T}_i^F \mapsto \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  auffassen, weil es eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Y \xrightarrow{(Fw_i^{-1}-1)} Y \xrightarrow{\pi_i} \mathbf{T}_i^F \longrightarrow 1$$

gibt; es sei  $\theta$  die eindeutig bestimmte Abbildung mit  $\theta \circ \pi_i = \tilde{\theta}$ . Schließlich haben wir die Isomorphie  $\hat{\mathbf{T}}_i^F \cong \text{Hom}(\mathbf{T}_i^F, \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})$ , die durch die Einbettung  $\varphi_2 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}^\times$  aus Vereinbarung 1.4 vermittelt wird. Es bleibt jetzt nur noch die Abbildung  $\pi_i : Y \rightarrow \mathbf{T}_i^F$  in der exakten Sequenz zu erklären: Sei  $n \in \mathbb{N}$  mit  $w_i^n = 1$ ,  $\tilde{\zeta}_n \in \mathbf{K}$  wie in 1.4 und  $\gamma \in Y$ . Dann ist  $t := \gamma(\tilde{\zeta}_n) \in \mathbf{T}$  und  $\pi_i$  durch

$$\pi_i(\gamma) := t \cdot (Fw_i^{-1})(t) \cdot (Fw_i^{-1})^2(t) \cdots (Fw_i^{-1})^{n-1}(t)$$

definiert (vergleiche Digne-Michel [13, 13.7(ii)]).

Die Anwendung dieser Überlegungen liefert den folgenden Satz.

**Satz 3.2** *Sei  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  oder  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ . Für  $1 \leq i \leq 10$  seien  $w_i \in \mathbf{W}$  die Vertreter der Konjugiertenklassen aus Tabelle 2. In Tabelle 4 sind für beide Fälle von  $\mathbf{G}$  die Elemente der Fixgruppen  $\mathbf{T}_i^{*F*} := (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})^{(Fw_i)}$  parametrisiert und Tabelle 5 ist die Interpretation dieser Elemente als Charaktere von  $\mathbf{T}_i^F$  zu entnehmen. Die Charakterwerte in Tabelle 5 sind als Elemente in  $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  geschrieben; die komplexen Charaktere entstehen durch Verknüpfung mit der Einbettung  $\varphi_2$  aus Vereinbarung 1.4.*

Das Vorgehen in diesem Abschnitt wird in einem Rechenbeispiel illustriert.

**Beispielrechnung:** Wir zeigen die Berechnung von  $\mathbf{T}_5^F$  und  $\hat{\mathbf{T}}_5^F$ . Sei also die Doppelpartition  $(2, 1)$  vorgegeben, die eine Konjugiertenklasse der Weylgruppe  $\mathbf{W}$  parametrisiert.

Repräsentant in  $\mathbf{W}$ : Nach Bemerkung 1.3(e) liegt das Element von  $\mathbf{W}$ , das auf der Basis  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  von  $X$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  die Abbildung

$$\hat{e}_1 \mapsto \hat{e}_2, \hat{e}_2 \mapsto \hat{e}_1, \hat{e}_3 \mapsto -\hat{e}_3$$

bewirkt, in dieser Klasse. Aus Tabelle 1 ist zu sehen, daß dieses Element sich als  $w_5 := s_1 s_3$  schreiben läßt.

Zentralisatorordnung von  $w_5$ : Diese läßt sich hier einfach durch Abzählen der Klasse von  $w_5$  ermitteln. (Im nächsten Abschnitt wird ein Computerprogramm für umfangreichere Rechnungen in der Weylgruppe benutzt, damit ergeben sich die Zentralisatorordnungen erneut; außerdem läßt sich damit sehen, daß die  $w_i$  in Tabelle 2 sogar als reduzierte Wörter in  $s_1, s_2, s_3$  geschrieben sind.)

Berechnung von  $\mathbf{T}^{(Fw_5^{-1})}$  für  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ : Die Operation von  $w_5$  auf  $\mathbf{T}$  ist ebenfalls aus Tabelle 1 abzulesen, dies ergibt:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{(Fw_5^{-1})} &= \{t \in \mathbf{T} \mid t = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) = F(h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda))^{s_3 s_1}\} \\ &= \{t \in \mathbf{T} \mid t = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) = h(\lambda_1^q, \lambda_2^q, \lambda_3^q, \lambda^q)^{s_3 s_1}\} \\ &= \{t \in \mathbf{T} \mid t = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) = h(\lambda_2^q, \lambda_1^q, \lambda^q \lambda_3^{-q}, \lambda^q)\} \\ &= \{h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \in \mathbf{T} \mid \lambda_1^{q^2-1} = \lambda^{q-1} = 1, \lambda_2 = \lambda_1^q, \lambda_3^{q+1} = \lambda\} \end{aligned}$$

In Vereinbarung 1.4 haben wir gewisse Körperelemente definiert; so ist  $\tilde{\zeta}_1 \in \mathbf{K}$  ein Element der Ordnung  $q - 1$ ,  $\tilde{\zeta}_2 \in \mathbf{K}$  von der Ordnung  $q^2 - 1$  und  $\tilde{\xi}_1 \in \mathbf{K}$  von der Ordnung  $q + 1$ . Zwischen ihnen gilt noch die Beziehung  $\tilde{\zeta}_2^{q+1} = \tilde{\zeta}_1$ . Die Elemente aus  $\mathbf{T}_5^F = \mathbf{T}^{(Fw_5^{-1})}$  sind also genau die Elemente der Form  $h(\tilde{\zeta}_2^{j_1}, \tilde{\zeta}_2^{qj_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2} \tilde{\zeta}_2^{j_3}, \tilde{\zeta}_1^{j_3})$ .

Berechnung von  $\mathbf{T}^{(Fw_5^{-1})}$  für  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ : Dieser Torus besteht aus der Teilmenge der eben berechneten Elemente mit  $\lambda = 1$  ( $j_3 = 0$ ).

Berechnung von  $\mathbf{T}_5^{*F*} = (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})^{(Fw_5)}$ : Das geht genauso wie die Berechnung von  $\mathbf{T}^{(Fw_5^{-1})}$ , nur daß jetzt die Operation von  $\mathbf{W}$  auf  $X$  aus Tabelle 1 benutzt wird.

Interpretation von Elementen aus  $\mathbf{T}_5^{*F*}$  als Charaktere aus  $\text{Hom}(\mathbf{T}_5^F, \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ : Sei  $s := s_5(l_1, l_2, l_3) = s\left(\frac{l_1}{q^2-1}, \frac{ql_1}{q^2-1}, \frac{l_2}{q+1}, \frac{l_2}{q^2-1} + \frac{l_3}{q-1}\right)$  ein Element aus  $\mathbf{T}_5^{*F*}$ . Zu diesem Element gehört der folgende Homomorphismus  $\tilde{\theta} : Y \rightarrow \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ :

$$\sum_{j=1}^4 a_j e_j \mapsto \frac{a_1 l_1 + qa_2 l_1 + a_4 l_2}{q^2 - 1} + \frac{a_3 l_2}{q + 1} + \frac{a_4 l_3}{q - 1}$$

Sei nun  $t := t_5(j_1, j_2, j_3) = h(\tilde{\zeta}_2^{j_1}, \tilde{\zeta}_2^{qj_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2} \tilde{\zeta}_2^{j_3}, \tilde{\zeta}_1^{j_3}) \in \mathbf{T}_5^F$ . Wir berechnen ein Urbild  $\gamma \in Y$  von  $t$  unter der oben beschriebenen Abbildung  $\pi_5$ : Dazu machen wir den Ansatz  $\gamma := \sum_{j=1}^4 a_j e_j$ . Das Element  $w_5 \in \mathbf{W}$  hat die Ordnung 2. Mit dem Hilfselement  $t' := \gamma(\tilde{\zeta}_2) = h(\tilde{\zeta}_2^{a_1}, \tilde{\zeta}_2^{a_2}, \tilde{\zeta}_2^{a_3}, \tilde{\zeta}_2^{a_4})$  ist also

$$\pi_5(\gamma) = t' \cdot {}^{w_5}F(t') = h(\tilde{\zeta}_2^{a_1+qa_2}, \tilde{\zeta}_2^{a_2+qa_1}, \tilde{\zeta}_2^{qa_4-(q-1)a_3}, \tilde{\zeta}_2^{(q+1)a_4}).$$

Aus der Gleichung  $\pi_5(\gamma) = t$  ist zu sehen, daß  $\gamma = j_1 e_1 - j_2 e_3 + qj_3 e_4$  eines der gesuchten Urbilder ist. Für den zu  $s$  gehörenden Charakter  $\theta := \theta_5(l_1, l_2, l_3) \in \text{Hom}(\mathbf{T}_5^F, \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})$  gilt damit  $\theta(t) = \tilde{\theta}(\gamma)$ , also:

$$\theta : t_5(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{j_1 l_1 + qj_3 l_2}{q^2 - 1} + \frac{-j_2 l_2}{q + 1} + \frac{j_3 l_3}{q - 1}$$

(im letzten Term wurde benutzt, daß in  $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  die Gleichheit  $qj_3 l_3/(q - 1) = j_3 l_3/(q - 1)$  gilt). Setzen wir überall  $j_3 = l_3 = 0$ , so ergibt sich die entsprechende Rechnung im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ .

## Anmerkung

Wir wollen noch die genauen Isomorphietypen der zu den von uns betrachteten dualen Gruppen angeben. Diese werden wir im folgenden jedoch nicht benötigen. Die duale Gruppe zur konformen symplektischen Gruppe  $\mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  ist die spezielle Clifford-Gruppe eines 7-dimensionalen orthogonalen Raumes über  $\mathbf{K}$ . Die duale Gruppe der symplektischen Gruppe  $\mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  ist die spezielle orthogonale Gruppe  $\mathbf{SO}_7(\mathbf{K})$  (siehe Fong und Srinivasan [18, 3.]).

Ist die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  gleich zwei, so ist die Gruppe  $\mathbf{SO}_7(\mathbf{K})$  gleich der orthogonalen Gruppe  $\mathbf{O}_7(\mathbf{K})$  und für die endlichen Gruppen gilt:

$$\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q) \cong \mathbf{O}_7(q) = \mathbf{G}^{*F*}$$

(siehe hierzu Wall [41, 3.7]).

## 4 Berechnung der Konjugiertenklassen

In diesem Abschnitt sei  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  bei ungerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$  oder  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  bei beliebiger Charakteristik von  $\mathbf{K}$ . Wir wollen die Konjugiertenklassen von  $\mathbf{G}^F$  in diesen Fällen bestimmen.

Jedes Element  $g \in \mathbf{G}^F$  besitzt eine eindeutige Jordan-Zerlegung  $g = su = us$  mit  $s \in \mathbf{G}^F$  halbeinfach und  $u \in \mathbf{G}^F$  unipotent. Ist also  $s \in \mathbf{G}^F$  halbeinfach, so finden wir alle Konjugiertenklassen von  $\mathbf{G}^F$ , die einen Repräsentanten mit halbeinfachem Anteil  $s$  haben, indem wir die unipotenten Klassen im Zentralisator  $C_{\mathbf{G}^F}(s)$  berechnen.

Wir bestimmen zunächst die halbeinfachen Klassen von  $\mathbf{G}^F$ , die zugehörigen Zentralisatoren sowie die Informationen über die halbeinfachen Klassen, die wir für die Anwendung der Charakterformel in 2.1(b) benötigen. Dann berechnen wir Vertreter der unipotenten Klassen von  $\mathbf{G}^F$  und schließlich alle übrigen gemischten Klassen.

### 4.1 Halbeinfache Konjugiertenklassen

Die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen von  $\mathbf{G}^F$  wächst mit  $q$ , hängt also vom speziellen  $F$  ab. Um diese Klassen für alle  $q$  in einheitlicher Weise beschreiben zu können, müssen wir sie geeignet zusammenfassen. Hier stellt sich die folgende Definition als sehr zweckmäßig heraus.

**Definition 4.1** Wir sagen, daß zwei halbeinfache Elemente  $s_1, s_2 \in \mathbf{G}^F$  im gleichen *halbeinfachen Klassentyp* liegen, wenn sie  $\mathbf{G}^F$ -konjugierte Zentralisatoren  $C_{\mathbf{G}}(s_1)$  und  $C_{\mathbf{G}}(s_2)$  in  $\mathbf{G}$  besitzen.

Es ist klar, daß ein halbeinfacher Klassentyp von  $\mathbf{G}^F$  eine Vereinigung von Konjugiertenklassen ist. Die halbeinfachen Klassentypen lassen sich systematisch mit Hilfe des Wurzelsystems und der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$  und damit unabhängig vom speziellen  $q$  parametrisieren. Um dies zu beschreiben, machen wir noch einige Vorbemerkungen.

In den von uns betrachteten Gruppen  $\mathbf{G}$  ist die Kommutatorgruppe  $\mathbf{G}'$  einfach zusammenhängend (Bemerkung 1.3(a) und (b)) und somit sind nach einem Satz von Steinberg die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente zusammenhängend (siehe Carter [6, 3.5.6]).

Für jedes halbeinfache Element  $s \in \mathbf{G}$  hat die  $\mathbf{G}$ -Konjugiertenklasse  $s^{\mathbf{G}}$  ein Element im maximal zerfallenden Torus  $\mathbf{T}$  der Diagonalelemente von  $\mathbf{G}$ . Die Weylgruppe  $\mathbf{W}$  von  $\mathbf{G}$  operiert auf  $\mathbf{T}$  und der Durchschnitt  $s^{\mathbf{G}} \cap \mathbf{T}$  besteht genau aus einer  $\mathbf{W}$ -Bahn von Elementen aus  $\mathbf{T}$ . Die Konjugiertenklasse  $s^{\mathbf{G}}$  enthält genau dann Elemente aus  $\mathbf{G}^F$ , wenn die  $\mathbf{W}$ -Bahn  $s^{\mathbf{G}} \cap \mathbf{T}$  invariant unter  $F$  ist. In diesem Fall ist der Durchschnitt  $s^{\mathbf{G}} \cap \mathbf{G}^F$  genau eine Konjugiertenklasse von  $\mathbf{G}^F$  (siehe Carter [6, 3.7.1 bis 3.7.3] und vergleiche Digne-Michel [13, 3.25]). Also ist die  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklasse eines halbeinfachen Elementes  $s \in \mathbf{G}^F$  eindeutig durch einen Repräsentanten der  $\mathbf{G}$ -Konjugiertenklasse  $s^{\mathbf{G}}$  im Torus  $\mathbf{T}$  festgelegt (auch wenn dieser im allgemeinen nicht in  $\mathbf{G}^F$  liegt).

Sei  $\Phi$  das Wurzelsystem von  $\mathbf{G}$ . Eine Teilmenge  $\Psi \subseteq \Phi$  heißt *abgeschlossenes Teilwurzelsystem*, falls  $\mathbb{Z}\Psi \cap \Phi = \Psi$  ist. Wir definieren eine Menge  $M$  als Menge von Paaren  $(\Pi, w)$ , wobei  $\Pi$  Fundamentalsystem eines abgeschlossenen Teilsystems von  $\Phi$  und  $w \in \mathbf{W}$

mit  $w(\Pi) = \Pi$  ist. Auf dieser Menge führen wir noch eine Äquivalenzrelation  $\sim$  ein; es soll genau dann  $(\Pi_1, w_1) \sim (\Pi_2, w_2)$  sein, wenn es ein  $v \in \mathbf{W}$  mit  $v(\Pi_1) = \Pi_2$  und  $vw_1v^{-1} = w_2$  gibt. Die Menge dieser Äquivalenzklassen bezeichnen wir mit  $\bar{M}$ .

Nun beschreiben wir, wie einem halbeinfachen Element  $s \in \mathbf{G}^F$  eine Klasse aus  $\bar{M}$  zugeordnet werden soll. Das Element  $s$  liegt in einem rationalen maximalen Torus  $\tilde{\mathbf{T}}$  von  $\mathbf{G}$  (Digne-Michel [13, 3.16]). Dazu gibt es ein  $g \in \mathbf{G}$  mit  $\tilde{\mathbf{T}}^g = \mathbf{T}$ . Für dieses ist  $n := g^{-1}F(g) \in N(\mathbf{T})$ , und wir schreiben  $w := n\mathbf{T} \in \mathbf{W} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ . Das Element  $t := s^g \in \mathbf{T}$  hat den Zentralisator  $C_{\mathbf{G}}(t) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_\alpha \mid \alpha \in \Phi, \alpha(t) = 1 \rangle$ . Die Menge  $\Psi := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(t) = 1\}$  ist ein abgeschlossenes Teilsystem von  $\Phi$ , und  $C_{\mathbf{G}}(t)$  ist eine zusammenhängende reduktive Gruppe mit Wurzelsystem  $\Psi$  (siehe etwa Digne-Michel [13, 2.3]; wir benutzen hier, daß  $C_{\mathbf{G}}(t)$  zusammenhängend ist).

Der Operation von  $F$  auf  $C_{\mathbf{G}}(s)$  entspricht die Operation des getwisteten Frobeniusmorphismus  $(Fn^{-1})$  auf  $C_{\mathbf{G}}(t)$ , denn für  $x \in \mathbf{G}$  ist  $F(x)^g = F(x^g)^{F(g^{-1})g} = {}^nF(x^g)$ . Für den Zentralisator von  $s$  in  $\mathbf{G}^F$  gilt also:

$$\begin{aligned} (C_{\mathbf{G}}(s)^F)^g &= \{x \in C_{\mathbf{G}}(s^g) \mid F({}^gx) = {}^gx\} \\ &= \{x \in C_{\mathbf{G}}(t) \mid g^{-1}F(g)F(x) = x\} = C_{\mathbf{G}}(t)^{(Fn^{-1})} \end{aligned}$$

Der Zentralisator  $C_{\mathbf{G}}(t)$  ist  $F$ -invariant, denn  $\mathbf{T}$  und jedes  $\mathbf{U}_\alpha$  sind  $F$ -invariant. Somit ist  $n \in N_{\mathbf{G}}(C_{\mathbf{G}}(t))$  und  $w(\Psi) = \Psi$ . Sei  $\Pi$  ein Fundamentalsystem von  $\Psi$  und  $\mathbf{W}_\Psi$  die Weylgruppe von  $C_{\mathbf{G}}(t)$ . Dann ist  $w(\Pi)$  wieder ein Fundamentalsystem von  $\Psi$ , und dazu gibt es genau ein  $v \in \mathbf{W}_\Psi$  mit  $vw(\Pi) = \Pi$  (siehe Carter [3, 2.2.4]). Wir ordnen  $s$  die Klasse des Paares  $(\Pi, vw)$  in  $\bar{M}$  zu. Hierfür gilt:

**Lemma 4.2**

- (a) Die oben beschriebene Zuordnung ist wohldefiniert und induziert eine injektive Abbildung von der Menge der halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^F$  in die Menge  $\bar{M}$ .
- (b) Sei  $\Pi_0$  unser Fundamentalsystem des Wurzelsystems  $\Phi$  von  $\mathbf{G}$ , und sei  $\alpha_0$  die höchste positive Wurzel von  $\Phi$  bezüglich  $\Pi_0$ . Dann besitzt jede Klasse aus  $\bar{M}$ , die Bild unter der Abbildung aus (a) ist, einen Repräsentanten  $(\Pi, w)$  mit  $\Pi \subsetneq \Pi_0 \cup \{-\alpha_0\}$ .

**Beweis:** (a) Dies ist im Artikel [5] von Carter gezeigt, siehe Corollary 3 und den ersten Teil des Beweises von Proposition 6. Die Definition unseres  $\bar{M}$  entspricht der dortigen Definition von  $H^1(\sigma, \mathcal{N}_W(W_1)/W_1)$ , weil bei uns der Frobeniusmorphismus  $F$  trivial auf  $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  operiert.

(b) Diese Aussage ist eine Richtung der Proposition 2.3.4 im Buch [12] von Deriziotis. (Die andere Richtung dieser Proposition besagt, daß es zu jeder Teilmenge  $\Pi \subsetneq \Pi_0 \cup \{-\alpha_0\}$  ein Paar  $(\Pi, w)$  gibt, dessen Klasse in  $\bar{M}$  im Bild der Abbildung aus (a) liegt, falls die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  und  $q$  groß genug sind.)  $\square$

Um eine Liste von Repräsentanten  $(\Pi, w)$  von Klassen in  $\bar{M}$  zu bekommen, die als Parameter eines halbeinfachen Klassentyps von  $\mathbf{G}^F$  in Frage kommen, müssen wir also folgendes tun: Wir bilden die Menge aller echten Teilmengen von  $\Pi_0 \cup \{-\alpha_0\}$  und berechnen die  $\mathbf{W}$ -Bahnen darauf. Aus jeder Bahn nehmen wir einen Repräsentanten

(wenn möglich einen, der  $-\alpha_0$  nicht enthält) und erhalten so die Fundamentalsysteme  $\Pi$ , die wir zu betrachten haben. Dann bilden wir zu jedem dieser  $\Pi$  die Untergruppe  $N_{\mathbf{W}}(\Pi) := \{v \in \mathbf{W} \mid v(\Pi) = \Pi\} \leq \mathbf{W}$ , bestimmen ihre Konjugiertenklassen und wählen aus jeder einen Repräsentanten  $w$  aus. So erhalten wir eine Menge nicht äquivalenter Paare  $(\Pi, w)$ , die Parameter für alle halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^F$  liefert.

Wir beschreiben nun, wie wir zu einem festen Paar  $(\Pi, w) \in M$  feststellen, ob es zur Klasse von  $(\Pi, w)$  in  $\bar{M}$  wirklich einen halbeinfachen Klassentyp gibt, und gegebenenfalls alle Informationen, die wir über die Klassen in diesem Klassentyp benötigen, berechnen können. Sei also  $(\Pi, w)$  gegeben,  $\Psi \subseteq \Phi$  das zugehörige abgeschlossene Teilsystem,  $C_{\Psi} := \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_{\alpha} \mid \alpha \in \Psi \rangle$ ,  $\mathbf{W}_{\Psi} \leq \mathbf{W}$  die Weylgruppe von  $C_{\Psi}$ ,  $n \in N(\mathbf{T})$  mit  $n\mathbf{T} = w$  und  $g \in \mathbf{G}$  mit  $g^{-1}F(g) = n$  (so ein  $g$  existiert nach dem Satz von Lang-Steinberg). Ferner seien  $t \in \mathbf{T}$  mit  $C_{\mathbf{G}}(t) = C_{\Psi}$  und  $s := {}^g t \in \mathbf{G}^F$  (falls es solche Elemente gibt).

(1) Repräsentanten für die halbeinfachen Klassen:

Für  $t \in \mathbf{T}$  gilt genau dann  $C_{\mathbf{G}}(t) = C_{\Psi}$  und  $s = {}^g t \in \mathbf{G}^F$ , wenn es die folgenden Gleichungen und Ungleichungen erfüllt:

1.  ${}^w F(t) = t$
2.  $\alpha(t) = 1$  für alle  $\alpha \in \Pi$
3.  $\alpha(t) \neq 1$  für alle  $\alpha \in \Phi^+ \setminus \Psi$

(Erfüllt kein  $t \in \mathbf{T}$  diese Bedingungen, so parametrisiert die Klasse von  $(\Pi, w)$  keinen halbeinfachen Klassentyp von  $\mathbf{G}^F$ .) Es kann nun noch sein, daß mehrere der  $t \in \mathbf{T}$  die 1. bis 3. erfüllen, zur gleichen  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklasse gehören. Die Anzahl dieser Elemente bezeichnen wir mit  $n_{(\Pi, w)}$ . Sie ist durch die Ordnung  $|N_{\mathbf{G}}(C_{\mathbf{G}}(s))^F / C_{\mathbf{G}}(s)^F|$  gegeben (denn die Zentrumselemente von  $C_{\mathbf{G}}(s)$  liegen in jedem maximalen Torus von  $C_{\mathbf{G}}(s)$ ; siehe Digne-Michel [13, 0.35]) und somit nicht vom Vertreter  $(\Pi, w)$  der betrachteten Klasse aus  $\bar{M}$  abhängig. Wir benutzen zur Berechnung von  $n_{(\Pi, w)}$  die folgende Aussage.

**Behauptung:**

$$n_{(\Pi, w)} = |N_{\mathbf{W}}(\Pi) \cap C_{\mathbf{W}}(w)|$$

**Beweis:** Sei  $t \in \mathbf{T}$  ein Element, das die Bedingungen 1. bis 3. erfüllt. Wir haben oben schon bemerkt, daß die in  $\mathbf{G}$  zu  $t$  konjugierten Elemente aus  $\mathbf{T}$  von der Form  ${}^v t$  mit  $v \in \mathbf{W}$  sind. Es ist klar, daß  ${}^v t$  genau dann die Bedingungen 2. und 3. erfüllt (also  $C_{\mathbf{G}}({}^v t) = C_{\mathbf{G}}(t)$  ist), wenn  $v \in N_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_{\Psi})$  ist. Die Bedingung 1. läßt sich für  ${}^v t$  so formulieren:

$${}^w F({}^v t) = {}^v t \iff {}^{wF(v)w^{-1}}({}^w F(t)) = {}^v t \iff v^{-1}wF(v)w^{-1}t = t.$$

Weiter gilt für  $\tilde{v} \in \mathbf{W}$ :

$$\tilde{v}t = t \iff \tilde{v} \in \mathbf{W}_{\Psi}$$

(siehe Digne-Michel [13, 2.3]; hier benutzen wir, daß  $C_{\mathbf{G}}(t)$  zusammenhängend ist). Die verschiedenen Elemente der Form  ${}^v t$ , die 1. bis 3. erfüllen, werden also durch die Nebenklassen  $v\mathbf{W}_{\Psi}$  mit  $v \in N_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_{\Psi})$  und  $v^{-1}wF(v)w^{-1} \in \mathbf{W}_{\Psi}$  parametrisiert. Jetzt verwenden wir noch den Isomorphismus

$$N_{\mathbf{W}}(\Pi) \xrightarrow{\sim} N_{\mathbf{W}}(\mathbf{W}_{\Psi})/\mathbf{W}_{\Psi}, \quad v \mapsto v\mathbf{W}_{\Psi}$$

(der sich sofort aus Carter [3, 2.2.4] ergibt), insbesondere  $N_{\mathbf{W}}(\Pi) \cap \mathbf{W}_{\Psi} = \{1\}$ . Dann werden die gesuchten Elemente durch die  $v \in N_{\mathbf{W}}(\Pi)$  mit  $v^{-1}wF(v)w^{-1} \in \mathbf{W}_{\Psi}$  beschrieben. Da auch  $w \in N_{\mathbf{W}}(\Pi)$  ist und außerdem bei uns  $F$  trivial auf  $\mathbf{W}$  operiert, vereinfacht sich die letzte Bedingung zu  $v^{-1}wv \in N_{\mathbf{W}}(\Pi) \cap \mathbf{W}_{\Psi} = \{1\}$ , also  $v^{-1}wv = w$ . Damit ist die Behauptung gezeigt.  $\square$

Wir beschreiben die halbeinfachen Klassen des zu  $(\Pi, w)$  gehörenden Klassentyps, indem wir die  $t \in \mathbf{T}$  parametrisieren, die 1. bis 3. erfüllen und durch  $n_{(\Pi, w)}$  angeben, wieviele dieser  $t$  jeweils in einer Klasse liegen.

- (2) Klassen rationaler maximaler Tori in  $\mathbf{C}_{\Psi}$ :

Der Frobeniusmorphismus  $F$  operiert auf dem Zentralisator  $\mathbf{C} := C_{\mathbf{G}}(s)$  wie der getwistete Frobeniusmorphismus  $(Fn^{-1})$  auf  $\mathbf{C}_{\Psi}$ . Die  $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{C}$  entsprechen also den  $(Fn^{-1})$ -Konjugiertenklassen  $(Fn^{-1})$ -rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{C}_{\Psi}$ . Letztere werden durch die  $(Fn^{-1})$ -Konjugiertenklassen der Weylgruppe  $\mathbf{W}_{\Psi}$  parametrisiert. Dabei operiert  $(Fn^{-1})$  auf  $\mathbf{W}_{\Psi}$  vermöge Konjugation mit  $w^{-1}$ , weshalb wir diese Operation auch als  $(Fw^{-1})$  schreiben: Zwei Elemente  $v_1, v_2 \in \mathbf{W}_{\Psi}$  sind genau dann  $(Fw^{-1})$ -konjugiert, wenn es ein  $v \in \mathbf{W}_{\Psi}$  mit  $v_2 = v^{-1}v_1(vwv^{-1})$  gibt.

Wir berechnen für jede  $(Fw^{-1})$ -Konjugiertenklasse von  $\mathbf{W}_{\Psi}$  einen Vertreter  $\tilde{w}$ , so daß die zugehörige Klasse rationaler maximaler Tori durch  $\mathbf{T}^{(Fw^{-1}\tilde{w}^{-1})}$  repräsentiert wird. Diese Klasse liegt also in der  $\mathbf{G}^F$ -Klasse rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{G}$ , die durch die Konjugiertenklasse von  $\tilde{w}w$  in der Weylgruppe  $\mathbf{W}$  von  $\mathbf{G}$  parametrisiert wird; sei  $w_i$  der Vertreter dieser Klasse, den wir in Tabelle 2 festgelegt haben. Wir bestimmen noch jeweils ein  $\tilde{v} \in \mathbf{W}$  mit  $w_i = \tilde{v}^{-1}(\tilde{w}w)\tilde{v}$ ; dafür gilt  $(\mathbf{T}^{(Fw^{-1}\tilde{w}^{-1})})^{\tilde{v}} = \mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$ .

- (3) Elemente in den Repräsentanten maximaler Tori:

Um die Formel aus 2.1(b) zur Berechnung der Deligne-Lusztig-Charaktere ausnutzen zu können, müssen wir die dort beschriebenen Elemente  $s_{rt}$  finden.

Wir beginnen mit einer Vorüberlegung. Sei  $\tilde{\mathbf{T}}$  ein rationaler maximaler Torus von  $\mathbf{C} = C_{\mathbf{G}}(s)$ , dann ist  $s \in \tilde{\mathbf{T}}^F$ . Wir müssen alle  $s' \in \tilde{\mathbf{T}}^F$  von der Form  $s' = s^x$ ,  $x \in \mathbf{G}^F$ , bestimmen, für die die Tori  $\tilde{\mathbf{T}}$  und  ${}^x\tilde{\mathbf{T}}$  in der gleichen  $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklasse liegen. Sei also  $x \in \mathbf{G}^F$ . Genau dann ist  $s' = s^x \in \tilde{\mathbf{T}}^F$  und die Tori  $\tilde{\mathbf{T}}$  und  ${}^x\tilde{\mathbf{T}}$  sind  $\mathbf{C}^F$ -konjugiert, wenn  $x$  von der Form  $x = cy$  mit  $c \in \mathbf{C}^F$  und  $y \in N_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{T}})^F$  ist (wähle  $c \in \mathbf{C}^F$  mit  $\tilde{\mathbf{T}} = c^{-1}x\tilde{\mathbf{T}}$ ; für  $y = c^{-1}x$  gilt dann  $s' = s^x = s^{cy} = s^y$ ). Diese Bedingung läßt sich so ausdrücken, daß die Paare  $(\tilde{\mathbf{T}}, s)$  und  $(\tilde{\mathbf{T}}, s')$  unter  $\mathbf{G}^F$  konjugiert sind.

Die verschiedenen  $s'$  mit der gesuchten Eigenschaft ergeben sich also, indem  $s$  mit Vertretern der Rechtsnebenklassen in  $N_{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{T}})^F \backslash N_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{T}})^F$  konjugiert wird. Benutzen wir noch die Isomorphie  $(N_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{T}})/\tilde{\mathbf{T}})^F \cong N_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{T}})^F/\tilde{\mathbf{T}}^F$  (siehe Digne-Michel [13, 3.15(v)]), so ist unsere Frage auf die Bestimmung der Rechtsnebenklassen in  $(N_{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{T}})/\tilde{\mathbf{T}})^F \backslash (N_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{T}})/\tilde{\mathbf{T}})^F$  zurückgeführt.

Nach dieser Vorüberlegung betrachten wir wieder unser  $t \in \mathbf{T}$  und den Vertreter  $\tilde{w} \in \mathbf{W}_{\Psi}$  einer  $(Fw^{-1})$ -Konjugiertenklasse von  $\mathbf{W}_{\Psi}$ . Dann ist  $t \in \tilde{\mathbf{T}}^{(Fw^{-1}\tilde{w}^{-1})}$ , und es gibt nach dem Satz von Lang-Steinberg ein  $h \in \mathbf{C}_{\Psi}$  mit  $h^{-1}({}^nF(h))\mathbf{T} = \tilde{w}$ . Der Torus  ${}^h\mathbf{T}$  ist somit ein  $(Fn^{-1})$ -rationaler Torus von  $\mathbf{C}_{\Psi}$  aus der zu  $\tilde{w}$  gehörenden

Klasse. Wir konjugieren jetzt noch mit  $g$  und wenden die Vorüberlegung auf  $s = {}^{gh}t = gt \in \mathbf{G}^F$  und den  $F$ -rationalen Torus  $\tilde{\mathbf{T}} := {}^{gh}\mathbf{T}$  in  $\mathbf{C} := C_{\mathbf{G}}(s)$  an. Seien  $s_1, \dots, s_l \in \tilde{\mathbf{T}}^F$  die verschiedenen Elemente, die aus  $s$  durch Konjugation in  $N_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{T}})^F$  entstehen. Konjugieren wir nun von rechts mit  $gh$  wieder zurück, so geht  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  in  $\mathbf{T}^{(Fw^{-1}\tilde{w}^{-1})}$ ,  $\mathbf{C}$  in  $\mathbf{C}_{\Psi}$ ,  $(N_{\mathbf{G}}(\tilde{\mathbf{T}})/\tilde{\mathbf{T}})^F$  in den  $F$ -Zentralisator von  $\tilde{w}w$  in  $\mathbf{W}$  (siehe Carter [6, 3.3.6]; da  $F$  trivial auf  $\mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  operiert, ist dies bei uns gleich dem Zentralisator  $C_{\mathbf{W}}(\tilde{w}w)$ ) und  $(N_{\mathbf{C}}(\tilde{\mathbf{T}})/\tilde{\mathbf{T}})^F$  in  $\mathbf{W}_{\Psi} \cap C_{\mathbf{W}}(\tilde{w}w)$  über. Wenn wir also Vertreter  $v_1, \dots, v_l$  der Rechtsnebenklassen in

$$(\mathbf{W}_{\Psi} \cap C_{\mathbf{W}}(\tilde{w}w)) \backslash C_{\mathbf{W}}(\tilde{w}w)$$

bestimmen, so gilt für diese  $\{s_1^{gh}, \dots, s_l^{gh}\} = \{t^{v_1}, \dots, t^{v_l}\} \subseteq \mathbf{T}^{(Fw^{-1}\tilde{w}^{-1})}$ . Wir haben in (2) zu  $\tilde{w}$  schon ein  $\tilde{v}$  mit  $(\mathbf{T}^{(Fw^{-1}\tilde{w}^{-1})})^{\tilde{v}} = \mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$  berechnet, wobei  $\mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$  unser Repräsentant der  $\mathbf{G}^F$ -Klasse des Torus  $\tilde{\mathbf{T}}$  sei. Die Elemente  $\{s_1, \dots, s_l\} \subseteq \tilde{\mathbf{T}}^F$  entsprechen dann genau den Elementen  $\{t^{v_1\tilde{v}}, \dots, t^{v_l\tilde{v}}\} \subseteq \mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$ . Für die Anwendung der Charakterformel 2.1(b) müssen wir nun noch die  $t^{v_i\tilde{v}}$  mit Hilfe der Parametrisierung der Elemente aus  $\mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$  in Tabelle 3 ausdrücken.

- (4) Zentralisatoren halbeinfacher Elemente:

Den Dynkin-Typ von  $\mathbf{C}_{\Psi}$  können wir leicht bestimmen. Wir haben mit  $\Pi$  ein Fundamentalsystem des Wurzelsystems von  $\mathbf{C}_{\Psi}$  gegeben. Somit können wir das Dynkin-Diagramm von  $\mathbf{C}_{\Psi}$  als von den Wurzeln aus  $\Pi$  aufgespanntes Teildiagramm von

$$\begin{array}{ccccccc} & & \circ & \xrightarrow{\quad} & \circ & \xleftarrow{\quad} & \circ \\ & & \alpha_1 & & \alpha_2 & & \alpha_3 \\ -\alpha_0 & & & & & & \end{array}$$

ablesen. (Mit Hilfe von Bemerkung 1.3(a) lassen sich alle 9 positiven Wurzeln von  $\mathbf{G}$  als Linearkombination der einfachen Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  schreiben, wobei sich  $\alpha_0 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2\hat{e}_1 - \hat{e}_4$  als höchste Wurzel mit Kowurzel  $(\alpha_0)^{\vee} = \alpha_1^{\vee} + \alpha_2^{\vee} + \alpha_3^{\vee} = e_1$  ergibt. Aus der Berechnung von  $\langle -\alpha_0, \alpha_i^{\vee} \rangle$  und  $\langle \alpha_i, -(\alpha_0)^{\vee} \rangle$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , erhalten wir das obige *erweiterte Dynkin-Diagramm* von  $\mathbf{G}$ .)

Die Operation des Frobeniusmorphismus auf  $\Pi$  ist durch die Abbildung  $\Pi \rightarrow \Pi$ ,  $\alpha \mapsto w(\alpha)$ , gegeben.

Den genauen Isomorphietyp von  $\mathbf{C}_{\Psi}$  berechnen wir anhand der Erzeugung  $\mathbf{C}_{\Psi} = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_{\alpha} \mid \alpha \in \Psi \rangle$  und den von  $C_{\mathbf{G}}(s)^F$  durch  $C_{\mathbf{G}}(s)^F \cong \mathbf{C}_{\Psi}^{(Fn^{-1})}$ . Dabei können wir für  $n$  jedes Urbild von  $w$  in  $N(\mathbf{T})$  nehmen; ein solches finden wir mittels einer Darstellung von  $w$  als Wort in den erzeugenden Elementen  $s_1, s_2, s_3$  von  $\mathbf{W}$  und den Matrizen  $n_i$  in Bemerkung 1.3(c).

Die Ergebnisse der beschriebenen Rechnungen werden im folgenden Satz zusammengefaßt.

**Satz 4.3** *Sei  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  bei ungerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$  oder  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  bei beliebiger Charakteristik von  $\mathbf{K}$ . Die berechneten Informationen über die halbeinfachen Klassen von  $\mathbf{G}^F$  sind in den Tabellen 6 bis 11 aufgeführt. Wir verwenden hier die Bezeichnungen von oben.*

- (a) *In Tabelle 6 stehen Parameter für die halbeinfachen Klassentypen. Es gibt insgesamt 31 Klassen in  $\bar{M}$ , die wir zu betrachten haben. Die Tabelle enthält Repräsentanten*



$(\Pi, w)$  dieser Klassen, die Operation von  $(Fw^{-1})$  auf  $\Pi$ , den Dynkin-Typ des zugehörigen Zentralisators  $C_{\Psi}$  und die Vielfachheiten  $n_{(\Pi, w)}$ . Die zugehörigen halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^F$  werden im Rest der Arbeit gemäß dieser Tabelle mit  $h_1, \dots, h_{31}$  bezeichnet. Die Klassentypen  $h_{22}$  bis  $h_{31}$  bestehen in dieser Reihenfolge aus den regulären halbeinfachen Elementen von  $\mathbf{G}^F$  in den Tori der Typen  $\mathbf{T}_1$  bis  $\mathbf{T}_{10}$ .

- (b) Aus Tabelle 7 sind für beide Fälle von  $\mathbf{G}$  die Isomorphietypen der zu den Klassentypen gehörenden Zentralisatoren ( $\cong C_{\Psi}^{(Fn^{-1})}$ ) abzulesen. (Die Charakteristik spielt hier keine Rolle.) Es wurden die in der Literatur üblichen Bezeichnungen verwendet, die hier nicht näher erläutert werden sollen. Die Ordnung dieser Untergruppen ist für den Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  aufgeführt, ihre Ordnung im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  ergibt sich daraus jeweils durch Weglassen eines Faktors  $\phi_1 = q - 1$ .
- (c) In Tabelle 8 nehmen wir  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  an. Für jeden halbeinfachen Klassentyp werden die Repräsentanten in  $\mathbf{T}^{(Fw^{-1})}$  mit Zentralisator  $C_{\Psi}$  parametrisiert. In der ersten Spalte werden diese mit Hilfe der Körperelemente aus Vereinbarung 1.4 und Parametern  $i_1, \dots, i_4$  beschrieben. Aus der zweiten Spalte ist zu ersehen, welche Werte für die Parameter einzusetzen sind, um jedes der Elemente genau einmal zu bekommen; im Anschluß an diesen Satz wird genauer erklärt, wie die Einträge dieser Spalte zu lesen sind. In der dritten Spalte ist noch die Anzahl der Klassen in jedem halbeinfachen Klassentyp festgehalten (also die Anzahl der parametrisierten Elemente geteilt durch  $n_{(\Pi, w)}$ ).
- (d) Tabelle 9 enthält die Angaben wie in Tabelle 8 für die Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$ . Die halbeinfachen Konjugiertenklassen von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  bilden eine Teilmenge der halbeinfachen Klassen von  $\mathbf{CSp}_6(q)$ , und somit werden in Tabelle 9 jeweils Teilmengen der Elemente aus Tabelle 8 beschrieben. Die Parameterdarstellung der Elemente wurde nicht geändert, damit schon aus der Bezeichnung die Fusion der Klassen in die  $\mathbf{CSp}_6(q)$  abzulesen ist; allerdings wird ein Parameter, der hier nur einen Wert annimmt, nicht mehr mitgeschrieben. Die halbeinfachen Klassentypen  $h_{11}$  und  $h_{12}$  kommen in diesen Gruppen nicht vor.
- (e) In Tabelle 10 steht die gleiche Information wie in den zwei vorhergehenden Tabellen, jedoch nun für die Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$ . Hier kommen die halbeinfachen Klassentypen  $h_2, h_7, h_9, h_{11}$  und  $h_{12}$  nicht vor.
- (f) Wir bezeichnen die Greenfunktionen von Zentralisatoren  $\mathbf{C}$  halbeinfacher Klassen von  $\mathbf{G}^F$  mit

$$Q_{i,j} \quad \text{oder} \quad Q_{i,j,k}.$$

Dabei bedeutet der erste Index  $i$ , daß es sich um die Greenfunktion des Zentralisators eines Elementes des halbeinfachen Klassentyps  $h_i$  handelt. Der zweite Index  $j$  besagt, daß die zur Greenfunktion gehörende  $\mathbf{C}^F$ -Klasse von Tori in der  $\mathbf{G}^F$ -Klasse der Tori vom Typ  $\mathbf{T}_j$  liegt. Zerfallen die Tori vom Typ  $\mathbf{T}_j$ , die in  $\mathbf{C}$  liegen, in mehrere  $\mathbf{C}^F$ -Klassen, so kennzeichnen wir diese verschiedenen Klassen mit einem dritten Index  $k$ .

Sei nun  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  und  $t := h_i(i_1, \dots)$  Vertreter einer halbeinfachen Klasse des Klassentyps  $h_i$  aus Tabelle 8. In Tabelle 11 sind unter  $S_{i,j}$  beziehungsweise  $S_{i,j,k}$  die Elemente des Torus  $\mathbf{T}_j^F$  aus Tabelle 3 beschrieben, die

in der  $\mathbf{G}$ -Konjugiertenklasse von  $t$  liegen und nach der Charakterformel 2.1(b) zur Greenfunktion  $Q_{i,j}$  beziehungsweise  $Q_{i,j,k}$  gehören (wie oben unter (3) beschrieben). Hierzu werden für jedes dieser Elemente die Parameter  $j_1, \dots$  der Toruselemente  $t_j(j_1, \dots) \in \mathbf{T}_j^F$  in Abhängigkeit von den Parametern  $i_1, \dots$  von  $t$  ausgedrückt. Tabelle 12 enthält die entsprechenden Angaben für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$ .

## Zur Parametrisierung der Repräsentanten

Die Angaben zu den Parameterbereichen in den Tabellen 8 bis 10 sollen an einem Beispiel erläutert werden:

Für den halbeinfachen Klassentyp  $h_6$  haben wir in Tabelle 8 Repräsentanten der Klassen in den Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  definiert:

$$h_6(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_2}, \tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_2}, \tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}).$$

In der zweiten Spalte der Tabelle ist angegeben, wie die Parameter  $i_1$  und  $i_2$  zu wählen sind, um jedes Element der Form  $h_6(i_1, i_2)$ , das zum Klassentyp  $h_6$  gehört, genau einmal zu erhalten:

$$\begin{aligned} i_2 &= 2r, \quad r = 0, \dots, \frac{q-3}{2} \\ i_1 &= 0, \dots, q \\ i_1 &\neq r, r + \frac{q+1}{2} \\ \text{und} \\ i_2 &= 2r + 1, \quad r = 0, \dots, \frac{q-3}{2} \\ i_1 &= 0, \dots, q \end{aligned}$$

Dieses ist so zu lesen: Setze zunächst für  $i_2$  alle geraden Zahlen  $2r$  mit  $r = 0$  bis  $(q-3)/2$  ein. Für jedes solche  $i_2 = 2r$  setze dann die Werte 0 bis  $q$  für  $i_1$  ein und streiche davon wieder die Elemente, die sich bei  $i_1 = r$  und  $i_1 = r + (q+1)/2$  ergeben. Auf diese Weise erhalten wir jedes der gesuchten  $h_6(i_1, i_2)$  mit geradem  $i_2$  (das heißt  $\lambda(h_6(i_1, i_2)) = \tilde{\zeta}_1^{i_2} \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ ) genau einmal. Der Rest der Beschreibung liefert in gleicher Weise die Elemente mit ungeradem  $i_2$ .

Die Art der Beschreibung des Parameterbereiches ist an folgender Aufgabe orientiert: Gegeben sei eine (generische) Klassenfunktion  $f$  auf den Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$ , die auf den Klassen im Klassentyp  $h_6$  in der Form  $h_6(i_1, i_2) \mapsto f(i_1, i_2)$  beschrieben ist. Summiere die Funktionswerte  $f(i_1, i_2)$  über alle Klassen im Klassentyp  $h_6$  auf. Diese Aufgabe tritt auf, wenn wir später etwa Skalarprodukte von Charakteren unserer generischen Charaktertafel berechnen wollen.

Wir lösen die Aufgabe, indem wir die Werte  $f(i_1, i_2)$  zuerst über alle beschriebenen Elemente  $h_6(i_1, i_2)$  summieren und dann das Ergebnis durch zwei teilen, denn aus der Spalte mit den Vielfachheiten  $n_{(\Pi, w)}$  in Tabelle 6 sehen wir, daß je zwei dieser  $h_6(i_1, i_2)$  zur gleichen Klasse von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  gehören. Eine Summationsvorschrift bekommen wir, indem wir die Beschreibung des Parameterbereiches *rückwärts* lesen:

$$z_1 := \sum_{r=0}^{(q-3)/2} \left( \left( \sum_{i_1=0}^q f(i_1, 2r) \right) - f(r, 2r) - f(r + (q+1)/2, 2r) \right)$$

ist die Summe über die Elemente mit geradem  $i_2$  und

$$z_2 := \sum_{r=0}^{(q-3)/2} \sum_{i_1=0}^q f(i_1, 2r+1)$$

ist die Summe über die restlichen Elemente, so daß wir als Ergebnis  $(z_1 + z_2)/2$  erhalten.

Die Beschreibung der Parameterbereiche in den Tabellen 8 bis 10 wurde immer so gehalten, daß sich wie in diesem Beispiel die Summationsvorschriften leicht ablesen lassen. So entstehen etwa beim Klassentyp  $h_{26}$  in Tabelle 8 für festes  $i_3 = 2r$  und  $i_2$  beim Einsetzen der Werte für  $i_1$  je zwei Elemente zweimal, sie sind aber dann auch zweimal wieder zu streichen.

## Praktische Durchführung der Rechnungen

Für die Berechnungen dieses Abschnittes wurden die Computeralgebra-Systeme GAP [33] und MAPLE [7] benutzt.

Das System GAP ist gut geeignet für die Rechnungen mit Wurzelsystem und Weylgruppe (für eine Einführung siehe [33]). Da es mit einigen Grundkenntnissen dieses Systems nicht schwer ist, die oben beschriebenen Berechnungen gewisser Teilmengen der Weylgruppe in ein GAP-Programm umzusetzen, soll dies hier nicht näher erläutert werden. In dem verwendeten Programm wurden die Elemente der Weylgruppe als Permutationen auf der Menge der Wurzeln aufgefaßt. Daraus lassen sich leicht Darstellungen der Elemente als reduzierte Wörter in den Erzeugenden finden (mit Hilfe von Digne-Michel [13, 0.29]). Dies wurde für die Ausgabe des Programms benutzt.

Für die weitere Bearbeitung der Ergebnisse des GAP-Programms ist die Benutzung von MAPLE zweckmäßig, da dieses System sich gut für die Manipulation von Formeln eignet ([7] ist eine Einführung). In dem verwendeten MAPLE-Programm wurde die Operation der erzeugenden Elemente der Weylgruppe und des Frobeniusmorphismus auf Toruselementen  $h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \in \mathbf{T} \subseteq \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  definiert und die Matrizen  $n_1, n_2, n_3$  aus Bemerkung 1.3(c) sowie die Namen der Wurzeluntergruppen aus Bemerkung 1.1(e) eingegeben. Damit wurde eine Ausgabe-Routine erstellt, die für jeden halbeinfachen Klassentyp Informationen in eine TEX-Datei geschrieben hat. Wir betrachten dies und die folgenden Rechnungen an einem Beispiel.

**Beispielrechnung:** Wir betrachten den halbeinfachen Klassentyp  $h_4$ . Das erwähnte MAPLE-Programm gibt dazu die folgenden Informationen aus (Die Verwendung der Informationen zu den Greenfunktionen wird in Abschnitt 5 erklärt.):

**Klassentyp Nummer 4**

Basis  $\Pi$  und durch  $F$  bewirkte Permutation:  $\alpha_2 \ \alpha_3 \mapsto \alpha_2 \ \alpha_3$

Element  $w \in N_W(\Pi)$ :  $s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$

Repräsentant  $n$  von  $w$  in  $N_G(T)$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$C_\Psi$  wird erzeugt von  $T$  und den Wurzeluntergruppen:  $U_{2,3}^\pm \ U_{3,3}^\pm \ U_{3,2}^\pm \ U_{2,2}^\pm$   
Gleichungen für  $t \in T^{(Fw^{-1})}$ :

$$\left\{ \lambda_2 = \lambda_2^q, \lambda_3 = \lambda_3^q, \lambda = \lambda^q, \lambda_1^{1+q} = \lambda^q \right\}$$

Gleichungen für  $t \in Z(C_\Psi)$ :

$$\left\{ \lambda_2 = \lambda_3, \lambda_3^2 = \lambda \right\}$$

Ungleichungen, so daß  $C_G(t) \subseteq C_\Psi$ :

$$\left\{ \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq \lambda_3, \lambda_1 \lambda_3 \neq \lambda, \lambda_1 \lambda_2 \neq \lambda, \lambda_1^2 \neq \lambda \right\}$$

Die Vielfachheit  $n_{(\Pi,w)}$  ist 2.

Zu den Greenfunktionen von  $C_\Psi$  gehörende Tori und die Vorzeichen  $\varepsilon_{T \in C_\Psi}$ :

$$Q_{4,2}: \left\{ h\left(\frac{\lambda_1^q}{\lambda_1^q}, \lambda_2^q, \lambda_3^q, \lambda^q\right) = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \right\} \quad \varepsilon_{T \in C_\Psi} = 1$$

$$Q_{4,4}: \left\{ h\left(\frac{\lambda_1^q}{\lambda_1^q}, \lambda_2^q, \frac{\lambda_3^q}{\lambda_3^q}, \lambda^q\right) = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \right\} \quad \varepsilon_{T \in C_\Psi} = -1$$

$$Q_{4,5}: \left\{ h\left(\frac{\lambda_1^q}{\lambda_1^q}, \lambda_3^q, \lambda_2^q, \lambda^q\right) = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \right\} \quad \varepsilon_{T \in C_\Psi} = -1$$

$$Q_{4,8}: \left\{ h\left(\frac{\lambda_1^q}{\lambda_1^q}, \frac{\lambda_2^q}{\lambda_2^q}, \frac{\lambda_3^q}{\lambda_3^q}, \lambda^q\right) = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \right\} \quad \varepsilon_{T \in C_\Psi} = 1$$

$$Q_{4,9}: \left\{ h\left(\frac{\lambda_1^q}{\lambda_1^q}, \lambda_3^q, \frac{\lambda_2^q}{\lambda_2^q}, \lambda^q\right) = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \right\} \quad \varepsilon_{T \in C_\Psi} = 1$$

Am (erweiterten) Dynkin-Diagramm von  $\mathbf{G}$  lesen wir  $C_2$  als Dynkin-Typ von  $C_\Psi$  ab.

Das angegebene System von Gleichungen und Ungleichungen, das die Elemente  $t = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda) \in \mathbf{T}^{(Fw^{-1})} \subseteq \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  mit Zentralisator  $C_\Psi$  beschreibt, vereinfacht sich zu:

$$\lambda_2^{q-1} = 1, \lambda = \lambda_2^2, \lambda_3 = \lambda_2, \lambda_1^{q+1} = \lambda \text{ und } \lambda_1^{q-1} \neq 1.$$

Hierdurch werden genau die Elemente der Form

$$h_4(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2}, \tilde{\xi}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2}) = \begin{pmatrix} \tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2} & & & & & \\ & \tilde{\zeta}_1^{i_2} & & & & \\ & & \tilde{\zeta}_1^{i_2} & & & \\ & & & \tilde{\zeta}_1^{i_2} & & \\ & & & & \tilde{\zeta}_1^{i_2} & \\ & & & & & \tilde{\zeta}_1^{2i_2-i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2} \end{pmatrix}$$

mit  $(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2})^{q-1} = \tilde{\xi}_1^{-2i_1+2i_2} = \tilde{\zeta}_1^{2(i_2-i_1)} \neq 1$  beschrieben. Wir können jedes dieser Elemente

genau einmal hinschreiben, indem wir zuerst für den Parameter  $i_2$  die Werte im Bereich  $0, \dots, q-2$  einsetzen. In jedes der so erhaltenen Elemente werden dann erst die Werte  $0, \dots, q$  für den Parameter  $i_1$  eingesetzt und davon werden die Elemente mit  $i_1 = i_2$  und  $i_1 = i_2 + \frac{q+1}{2}$  wieder gestrichen (das letzte Element ist das gleiche, das bei der Substitution  $i_1 = i_2 - \frac{q+1}{2}$  entsteht). So bekommen wir die Beschreibung in der zweiten Spalte von Tabelle 8. Außerdem können wir aus dieser Beschreibung die Anzahl der Klassen dieses Typs mit Hilfe von  $n_{(\Pi, w)} = 2$  ausrechnen:  $\frac{1}{2}(q-1)(q+1-2) = \frac{1}{2}(q-1)^2$ .

Für die Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  muß im angegebenen System von Gleichungen und Ungleichungen noch  $\lambda = 1$  hinzugenommen werden. Bei ungeradem  $q$  darf  $i_2$  also nur Werte  $k \cdot \frac{q-1}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , (also  $\lambda_2 = \pm 1$ ) und bei geradem  $q$  nur Werte  $k(q-1)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , annehmen. Hieraus ergeben sich die Einträge in den Tabellen 9 und 10.

Die Untergruppe  $C_\Psi = \langle \mathbf{T}, \mathbf{U}_{2,3}^\pm, \mathbf{U}_{3,3}^\pm, \mathbf{U}_{3,2}^\pm, \mathbf{U}_{2,2}^\pm \rangle \leq \mathbf{G}$  besteht nach Bemerkung 1.2 und 1.1 aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \boxed{A} & & \\ & & & \\ & & & \lambda\lambda_1^{-1} \end{pmatrix}$$

mit  $A \in \mathbf{CSp}_4(\mathbf{K})$ ,  $\lambda_1 \in \mathbf{K}^\times$ ,  $\lambda = \lambda(A)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  und mit  $A \in \mathbf{Sp}_4(\mathbf{K})$ ,  $\lambda_1 \in \mathbf{K}^\times$ ,  $\lambda = 1$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ . (Dabei wird benutzt, daß eine zusammenhängende reduktive Gruppe von einem maximalen Torus und den zugehörigen Wurzeluntergruppen erzeugt wird; vergleiche Digne-Michel [13, 0.34].)

Mit dem angegebenen Repräsentanten  $n \in N(\mathbf{T})$  von  $w$  berechnen wir die Fixgruppe  $C_\Psi^{(Fn^{-1})}$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ . Diese besteht aus den Matrizen aus  $C_\Psi$ , die folgende Gleichung erfüllen:

$$\begin{pmatrix} \lambda^q \lambda_1^{-q} & & & \\ & \boxed{F(A)} & & \\ & & & \\ & & & \lambda_1^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \boxed{A} & & \\ & & & \\ & & & \lambda\lambda_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

Das sind die Matrizen mit  $A \in \mathbf{CSp}_4(q)$  (somit  $\lambda = \lambda(A) \in \mathbb{F}_q$ ) und  $\lambda_1^{q+1} = \lambda = \lambda(A)$ . Im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  ergibt sich  $A \in \mathbf{Sp}_4(q)$  und  $\lambda_1^{q+1} = 1$ . Dies liefert die Einträge in Tabelle 7.

Mit dem oben erwähnten GAP-Programm wurden noch die  $(Fw^{-1})$ -Konjugiertenklassen der Weylgruppe von  $C_\Psi$  ausgerechnet. Es gibt fünf solcher Klassen, und die zugehörigen rationalen maximalen Tori von  $C_\Psi$  sind, als Tori von  $\mathbf{G}$  betrachtet, vom Typ  $\mathbf{T}_2$ ,  $\mathbf{T}_4$ ,  $\mathbf{T}_5$ ,  $\mathbf{T}_8$  und  $\mathbf{T}_9$ . Nach 4.3(f) bezeichnen wir also die fünf Greenfunktionen von  $C_\Psi^{(Fn^{-1})}$  mit  $Q_{4,2}$ ,  $Q_{4,4}$ ,  $Q_{4,5}$ ,  $Q_{4,8}$  und  $Q_{4,9}$ . Die  $\mathbf{G}^F$ -Klasse zu  $h_4(i_1, i_2)$  besitzt zum Beispiel in Tori vom Typ  $\mathbf{T}_2$  jeweils zwei Vertreter. Unser GAP-Programm gibt zwei Elemente der Weylgruppe aus (die in (3) mit  $v_i \tilde{v}$  bezeichnet wurden)

$$v_1 \tilde{v} = s_1 s_2 s_1 \quad \text{und} \quad v_2 \tilde{v} = s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3,$$

für die  $h_4(i_1, i_2)^{v_i \tilde{v}} \in \mathbf{T}^{(Fw_2^{-1})}$ ,  $i = 1, 2$ , gilt.

In Tabelle 3 haben wir Parametrisierungen  $t_2(j_1, j_2, j_3, j_4)$  der Elemente des Torus  $\mathbf{T}^{(Fw_2^{-1})}$  angegeben. Um herauszufinden, wie die Parameter  $j_1, \dots, j_4$  für die zwei Vertreter der Klasse von  $h_4(i_1, i_2)$  zu wählen sind, müssen die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} h_4(i_1, i_2)^{v_1 \tilde{v}} &= h(\tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2}) = h(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}, \tilde{\xi}_1^{j_3} \tilde{\zeta}_2^{j_4}, \tilde{\zeta}_1^{j_4}) \\ h_4(i_1, i_2)^{v_2 \tilde{v}} &= h(\tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2} \tilde{\xi}_1^{-i_1} \tilde{\zeta}_2^{-2i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2}) = h(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}, \tilde{\xi}_1^{j_3} \tilde{\zeta}_2^{j_4}, \tilde{\zeta}_1^{j_4}) \end{aligned}$$

betrachtet werden. Die beiden gesuchten Elemente ergeben sich also bei den Spezialisierungen  $j_1 = j_2 = i_2$ ,  $j_3 = i_1$ ,  $j_4 = 2i_2$  und  $j_1 = j_2 = i_2$ ,  $j_3 = 2i_2 - i_1$ ,  $j_4 = 2i_2$  und dies liefert den Eintrag unter  $S_{4,2}$  in Tabelle 11.

Die Berechnungen für die Tabellen 11 und 12 lassen sich auch automatisieren. Hierzu werden die zu vergleichenden Komponenten der Diagonalelemente jeweils mit Hilfe einer gemeinsamen Basis geschrieben. Daraus ergibt sich für die Exponenten eine Kongruenzbedingung modulo der Ordnung des Basiselementes (im Beispiel oben gilt etwa  $\tilde{\zeta}_1^{2i_2} \tilde{\xi}_1^{-i_1} \tilde{\zeta}_2^{-2i_2} = \tilde{\xi}_1^{j_3} \tilde{\zeta}_2^{j_4} \Leftrightarrow \tilde{\zeta}_2^{2i_2(q+1)-i_1(q-1)-2i_2} = \tilde{\zeta}_2^{j_3(q-1)+j_4} \Leftrightarrow 2i_2(q+1) - i_1(q-1) - 2i_2 \equiv j_3(q-1) + j_4 \pmod{q^2-1}$ ). Werden eventuelle redundante Kongruenzbedingungen gestrichen (zum Beispiel bei Tori vom Typ  $\mathbf{T}_3$  die Bedingung aus dem Vergleich der zweiten Komponenten), so lassen sich die übrigen Bedingungen sogar als (lineare) Gleichungen erfüllen. Zum Aufstellen und Lösen dieser linearen Gleichungssysteme kann MAPLE benutzt werden.

## Anmerkungen

- Repräsentanten für die halbeinfachen Klassen und ihre Zentralisatoren lassen sich auch ohne die formalen Vorüberlegungen für unser Lemma 4.2 bestimmen. Es brauchen nur Repräsentanten der  $F$ -invarianten  $\mathbf{W}$ -Bahnen von  $\mathbf{T}$  gefunden werden; diese ergeben sich mit einer Fallunterscheidung, in welcher Weise der Frobeniusmorphismus die Einträge der Diagonalmatrizen permutiert. Für ein festes Element  $t \in \mathbf{T}$  läßt sich dann nachprüfen, welche Wurzeln  $\alpha \in \Phi$  die Gleichung  $\alpha(t) = 1$  erfüllen, woraus sich der Zentralisator von  $t$  ergibt. Unser etwas systematischeres Vorgehen ist vor allem für die Berechnungen unter den Punkten (2) und (3) zweckmäßig.
- Die Berechnung der Parameter für die halbeinfachen Klassentypen und der Anzahlen der darin liegenden Konjugiertenklassen läßt sich vollständig automatisieren. Diese Informationen sind ausreichend, wenn nur die Deligne-Lusztig-Charaktere der Form  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}1$  ausgerechnet werden sollen. Dieses Vorgehen ist am Beispiel von Gruppen mit Dynkin-Typ  $D_4$  im Artikel [20] von Geck und Pfeiffer geschildert.
- In Abschnitt 6 werden wir die hier benutzten Programme mit geringen Änderungen wieder verwenden, um die Paare  $(\mathbf{T}, \theta)$  zu berechnen, die die verschiedenen Deligne-Lusztig-Charaktere beschreiben.
- Die trotz kleiner Schrift sehr langen Tabellen 11 und 12 wurden in diese Arbeit aufgenommen, um (wenigstens im Prinzip) alle Charakterwerte der Tafeln, die wir

ausrechnen, aus den Tabellen konstruieren zu können. Dies wird in Abschnitt 6 an einem Beispiel erklärt.

## 4.2 Unipotente Konjugiertenklassen

Wir wollen jetzt die unipotenten Konjugiertenklassen von  $\mathbf{G}^F$  berechnen. In groben Zügen gehen wir so vor: Zuerst werden durch Rechnen mit den Kommutatorrelationen der Wurzeluntergruppen von  $\mathbf{G}$  Repräsentanten für die unipotenten Konjugiertenklassen in der Boreluntergruppe  $\mathbf{B}^F$  der oberen Dreiecksmatrizen bestimmt. Dann konjugieren wir diese mit Vertretern der Elemente aus der Weylgruppe (diese permutieren die Wurzeluntergruppen). Dabei erkennen wir viele Klassen in  $\mathbf{B}^F$ , die „offensichtlich“ in  $\mathbf{G}^F$  zusammenfallen. Die übriggebliebenen „potentiellen“ Repräsentanten der unipotenten Klassen in  $\mathbf{G}^F$  untersuchen wir anschließend genauer auf Konjugiertheit und bestimmen deren Zentralisatorordnung mit Hilfe der (eindeutigen) Bruhat-Zerlegung aller Elemente aus  $\mathbf{G}^F$ . In diesem Teilabschnitt ist es vielfach nützlich, die Elemente von  $\mathbf{G}^F$  als Matrizen anzusehen.

Wir fassen zuerst die Aussagen, die wir zur Durchführung unserer Berechnungen brauchen, in einem Lemma zusammen.

**Lemma 4.4** *Sei  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  oder  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  bei beliebiger Charakteristik von  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{T}$  der maximale Torus der Diagonalelemente von  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{B}$  die Boreluntergruppe der oberen Dreiecksmatrizen von  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{U}$  die Untergruppe der unipotenten Elemente von  $\mathbf{B}$ . Wir bezeichnen die in Bemerkung 1.1(e) beschriebenen Wurzeluntergruppen  $\mathbf{U}_{i,j}$ ,  $1 \leq i, j \leq 3$ , jetzt mit  $\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_9$ , und zwar in der Reihenfolge:*

Neuer Name	Name in 1.1(e)
$\mathbf{U}_1$	$\mathbf{U}_{1,2}$
$\mathbf{U}_2$	$\mathbf{U}_{2,3}$
$\mathbf{U}_3$	$\mathbf{U}_{1,3}$
$\mathbf{U}_4$	$\mathbf{U}_{3,3}$
$\mathbf{U}_5$	$\mathbf{U}_{3,2}$
$\mathbf{U}_6$	$\mathbf{U}_{3,1}$
$\mathbf{U}_7$	$\mathbf{U}_{2,2}$
$\mathbf{U}_8$	$\mathbf{U}_{2,1}$
$\mathbf{U}_9$	$\mathbf{U}_{1,1}$

Entsprechend schreiben wir die Elemente aus  $\mathbf{U}_k$  als  $u_k(t)$ ,  $t \in \mathbf{K}$ ,  $1 \leq k \leq 9$ . Dann gilt:

(a) Die Kommutatoren

$$[u_k(t_k), u_l(t_l)] := u_k(t_k)u_l(t_l)u_k(t_k)^{-1}u_l(t_l)^{-1} = u_k(t_k)u_l(t_l)u_k(-t_k)u_l(-t_l),$$

die ungleich 1 sind, sind der folgenden Tabelle zu entnehmen. Es sind nur die Fälle mit  $k < l$  angegeben, woraus sich die mit  $l < k$  durch Invertieren ergeben. Ist die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  gleich zwei, so sehen wir aus der Tabelle, daß zusätzlich gilt  $[\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_8] = [\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_5] = [\mathbf{U}_3, \mathbf{U}_6] = 1$ .

$k$	$l$	$[u_k(t_k), u_l(t_l)]$
1	2	$u_3(t_1 t_2)$
1	5	$u_6(t_1 t_5)$
1	7	$u_8(t_1 t_7) u_9(t_1^2 t_7)$
1	8	$u_9(2t_1 t_8)$
2	4	$u_5(t_2 t_4) u_7(t_2^2 t_4)$
2	5	$u_7(2t_2 t_5)$
2	6	$u_8(t_2 t_6)$
3	4	$u_6(t_3 t_4) u_9(t_3^2 t_4)$
3	5	$u_8(t_3 t_5)$
3	6	$u_9(2t_3 t_6)$

(b) Für  $1 \leq k, l \leq 9$  gilt:

$$[\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_l] \subseteq \prod_{\substack{i > k \\ i > l}} \mathbf{U}_i$$

(In der gewählten Anordnung der Wurzeluntergruppen erfüllt  $\mathbf{G}$  also die Kommutatorrelationen im Sinne von Carter [6, Vorbemerkung zu 2.6.4].)

(c) Ist  $k < l$ , so läßt sich das Produkt  $u_l(t_l)u_k(t_k)$  in der Form  $u_k(t_k) \cdot \prod_{i \geq l} u_i(t_i)$  schreiben.

(d) Jedes Element  $g \in \mathbf{B}$  läßt sich eindeutig in der Form

$$g = u_1(t_1) \cdots u_9(t_9)h, \quad t_i \in \mathbf{K}, 1 \leq i \leq 9$$

mit  $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  und  $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ ,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda \in \mathbf{K}^\times$ , schreiben. Genau dann ist  $g \in \mathbf{B}^F$ , wenn alle Parameter in  $\mathbb{F}_q$  liegen.

(e) Die Untergruppen  $\mathbf{U}_k \mathbf{U}_{k+1} \cdots \mathbf{U}_9$ ,  $1 \leq k \leq 9$ , sind Normalteiler von  $\mathbf{B}$ .

(f) Jede unipotente Konjugiertenklasse von  $\mathbf{G}^F$  hat Repräsentanten in  $\mathbf{U}^F$ .

(g) (Bruhat-Zerlegung) Zu jedem Element  $w \in \mathbf{W} = N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$  gibt es einen Repräsentanten  $n_w \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_p$ . Sei  $w_0$  das längste Element von  $\mathbf{W}$  und  $n_0 := n_{w_0}$ . (Damit ist  $\mathbf{U}^{n_0} = \mathbf{U}^-$  Untergruppe der unipotenten unteren Dreiecksmatrizen von  $\mathbf{G}$ .) Zu jedem  $w \in \mathbf{W}$  gibt es eine Teilmenge  $M_w \subseteq \{1, \dots, 9\}$ , so daß gilt

$$\mathbf{U}_w := \mathbf{U} \cap \mathbf{U}^{n_0 n_w} = \left( \prod_{k \in M_w} \mathbf{U}_k \right)^{n_0 n_w}.$$

Dabei ist das Produkt so gemeint, daß die  $k \in M_w$  in aufsteigender Reihenfolge sortiert sind.

Damit hat jedes Element  $g \in \mathbf{G}$  eine eindeutige Darstellung der Form

$$g = u_1(t_1) \cdots u_9(t_9) h n_w (u_1(s_1) \cdots u_9(s_9))^{n_0 n_w}$$

mit  $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  und  $h = h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ , sowie  $t_k, s_k \in \mathbf{K}$ ,  $1 \leq k \leq 9$ ,  $s_k = 0$  für  $k \notin M_w$ ,  $\lambda_i, \lambda \in \mathbf{K}^\times$ ,  $1 \leq i \leq 3$ . Genau dann ist  $g \in \mathbf{G}^F$ , wenn alle Parameter in  $\mathbb{F}_q$  liegen.



- (h) Die Elemente der Weylgruppe permutieren vermöge Konjugation mit den  $n_w$ ,  $w \in \mathbf{W}$ , die Wurzeluntergruppen  $\mathbf{U}_k, \mathbf{U}_k^-, 1 \leq k \leq 9$ . In der folgenden Tabelle ist für die Repräsentanten  $n_1, n_2, n_3$  der erzeugenden Elemente von  $\mathbf{W}$ , die in Bemerkung 1.3(c) angegeben sind, diese Permutation auf der Teilmenge  $\{\mathbf{U}_k \mid 1 \leq k \leq 9\}$  abzulesen. In der  $k$ -ten Zeile und  $i$ -ten Spalte ist ein Index  $l$  eingetragen, falls  $\mathbf{U}_k^{n_i} = \mathbf{U}_l$  ist. Ein Strich bedeutet  $\mathbf{U}_k^{n_i} = \mathbf{U}_k^-$ .

	1	2	3
1	—	3	1
2	3	—	5
3	2	1	6
4	4	7	—
5	6	5	2
6	5	8	3
7	9	4	7
8	8	6	8
9	7	9	9

Bis auf die beiden Ausnahmen  $u_2(t)^{n_3} = u_5(-t)$  und  $u_3(t)^{n_3} = u_6(-t)$  gilt mit  $\mathbf{U}_k^{n_i} = \mathbf{U}_l$  genauer  $u_k(t)^{n_i} = u_l(t)$ .

**Beweis:** (a) Die Kommutatoren wurden einfach mit Hilfe der in Bemerkung 1.1(e) angegebenen Matrizen ausgerechnet.

(b) Dies ergibt sich sofort aus (a).

(c) Wir zeigen mit Induktion über absteigendes  $l$ , daß sich  $u_l(t_l)u_k(t_k)$  mit  $k < l$  in der Form  $u_k(t_k)u_{i_1}(t_{i_1}) \cdots u_{i_r}(t_{i_r})$  mit  $i_1, \dots, i_r \geq l$  schreiben läßt: Für  $l = 9$  ist die Behauptung klar, da nach (a)  $u_9(t_9)$  mit allen  $u_k(t_k)$  vertauscht. Sei also  $l < 9$ . Dann gilt  $u_l(t_l)u_k(t_k) = [u_l(t_l), u_k(t_k)]u_k(t_k)u_l(t_l)$ , und nach (b) ist der Kommutator Produkt von  $u_i(t_i)$  mit  $i > l$ . Sukzessive Anwendung der Induktionsvoraussetzung liefert die Zwischenbehauptung.

Aus dieser Behauptung ergibt sich, daß sich ein beliebiges Produkt von  $u_i(t_i)$  immer so umformen läßt, daß die Terme mit minimalem Index vorne stehen. Daraus erhalten wir auch die Behauptung in (c).

(d) Die Untergruppe  $\mathbf{U}$  wird von den Wurzeluntergruppen  $\mathbf{U}_i, 1 \leq i \leq 9$ , erzeugt. Durch Sortieren gemäß (c) und Zusammenfassen läßt sich jedes Produkt von Termen  $u_i(s_i)$  auf Normalform  $u_1(t_1) \cdots u_9(t_9)$  bringen. Die Boreluntergruppe  $\mathbf{B}$  ist semidirektes Produkt von  $\mathbf{T}$  und  $\mathbf{U}$ , also hat jedes Element aus  $\mathbf{B}$  eine Darstellung der behaupteten Form. Die Eindeutigkeit der Darstellung ergibt sich etwa aus der Berechnung der Matrix  $u_1(t_1) \cdots u_9(t_9)h$ . In beiden Fällen für  $\mathbf{G}$  legt nämlich diese Matrix alle Parameter eindeutig fest. Außerdem läßt sich an der Matrix ablesen, daß genau dann alle Matrixeinträge in  $\mathbb{F}_q$  liegen, wenn dies für alle Parameter gilt.

(e) Aus (c) ergibt sich, daß die  $\mathbf{U}_k\mathbf{U}_{k+1} \cdots \mathbf{U}_9$  Normalteiler von  $\mathbf{U}$  sind. Dann sind sie aber auch Normalteiler in  $\mathbf{B}$ , da die Wurzeluntergruppen  $\mathbf{U}_i$  invariant unter Konjugation mit Toruselementen  $h \in \mathbf{T}$  sind.

(f) Das liegt daran, daß  $\mathbf{U}^F$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathbf{G}^F$  ist und die unipotenten Elemente die  $p$ -Elemente von  $\mathbf{G}^F$  sind (siehe etwa Digne-Michel [13, 3.18, 3.19]).

(g) Für unsere Rechnungen brauchen wir explizit Elemente  $n_w$  und die Mengen  $M_w$ , wie in (g) beschrieben. Bei den Rechnungen zur Bestimmung der halbeinfachen Klassen haben wir schon Darstellungen aller Elemente  $w \in \mathbf{W}$  als reduzierte Wörter in den drei

erzeugenden Elementen von  $\mathbf{W}$  gefunden, insbesondere kennen wir das längste Element  $w_0 \in \mathbf{W}$ . Mit Hilfe der Matrizen  $n_1, n_2, n_3$  aus Bemerkung 1.3(c) finden wir Repräsentanten  $n_w$ . Die Matrizen  $n_1, n_2, n_3$  haben Koeffizienten in  $\mathbb{F}_p$ , und somit gilt dies auch für die berechneten  $n_w$ . Durch Berechnung der Matrizen zu  $(u_1(t_1) \cdots u_9(t_9))^{n_0 n_w}$  können wir die Mengen  $M_w$  bestimmen und dadurch auch ihre Existenz zeigen.

Die angegebene eindeutige Darstellbarkeit der Elemente aus  $\mathbf{G}$  ergibt sich aus (c) und dem Satz über die scharfe Form der Bruhat-Zerlegung (siehe zum Beispiel Digne-Michel [13, 1.7]).

Daß ein Element in der angegebenen Darstellung genau dann in  $\mathbf{G}^F$  liegt, wenn alle Parameter in  $\mathbb{F}_q$  liegen, folgt aus der entsprechenden Aussage in (d) und der Wahl der  $n_w$  mit Koeffizienten aus  $\mathbb{F}_p$ .

(h) Dies ist auch einfach mit Matrizen nachzurechnen.  $\square$

Nun beschreiben wir genauer, wie mit Hilfe der Aussagen dieses Lemmas die unipotenten Klassen von  $\mathbf{G}^F$  und ihre Zentralisatorordnungen berechnet werden können. Da wir mit der Bestimmung von Repräsentanten der unipotenten Klassen in  $\mathbf{B}^F$  beginnen, sei betont, daß nach Aussage (f) des Lemmas darunter auch Repräsentanten für die unipotenten Klassen von  $\mathbf{G}^F$  zu finden sind.

(1) Berechnung der unipotenten Klassen in  $\mathbf{B}^F$ :

Weil nach Aussage (e) des Lemmas die Untergruppen  $(\mathbf{U}_k \mathbf{U}_{k+1} \cdots \mathbf{U}_9)^F \triangleleft \mathbf{B}^F$  Normalteiler sind, enthalten diese jeweils ganze Konjugiertenklassen unipotenter Elemente von  $\mathbf{B}^F$ . Wir bestimmen nacheinander für  $k = 9, 8, \dots, 1$  die Klassen, die in diesen Untergruppen liegen.

Dazu beginnen wir jeweils mit den Klassen, die von Elementen der Form  $u_k(r_k)$ ,  $r_k \in \mathbb{F}_q$ ,  $r_k \neq 0$ , repräsentiert werden. Dieses Element konjugieren wir dann formal mit einem allgemeinen Element  $u_1(t_1) \cdots u_9(t_9)h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda)$  beziehungsweise  $u_1(t_1) \cdots u_9(t_9)h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  aus  $\mathbf{B}^F$ . Den Teilausdruck mit den unipotenten Faktoren können wir wie im Beweis von Aussage (c) des Lemmas auf Normalform bringen. Wir brauchen nur solange die Kommutatorrelationen aus Aussage (a) einsetzen, bis sich die Faktoren nach aufsteigenden Indizes sortieren lassen. Die Konjugation mit dem Toruselement  $h$  können wir auch leicht formal ausführen, denn sie wird durch die Wurzelabbildungen beschrieben, die den Bemerkungen 1.1 und 1.2 zu entnehmen sind. Auf diese Weise erhalten wir eine Parametrisierung der Konjugiertenklasse von  $u_k(r_k)$  durch einen formalen Ausdruck der Form

$$u_k(c_k r_k) u_{k+1}(s_{k+1}) \cdots u_9(s_9),$$

wobei  $c_k, s_{k+1}, \dots, s_9$  rationale Funktionen in den  $t_i, \lambda_i, \lambda, r_k$  sind. An diesem Ausdruck läßt sich nun die Zentralisatorordnung von  $u_k(r_k)$  in  $\mathbf{B}^F$  (und damit die Anzahl der Elemente in dieser Klasse) ablesen sowie die Anzahl der Klassen mit Repräsentanten dieser Form.

Wenn wir damit noch nicht alle Klassen in  $(\mathbf{U}_k \mathbf{U}_{k+1} \cdots \mathbf{U}_9)^F$  gefunden haben, so können wir den formalen Ausdruck noch für die Suche nach weiteren Klassen verwenden. Dazu prüfen wir, für welche  $l > k$  keine Elemente der Form  $u_k(r_k)u_l(r_l)$  in der Klasse von  $u_k(r_k)$  vorkommen (oder für welche  $r_l$  in Abhängigkeit von  $r_k$  diese

Produkte nicht vorkommen). Wir bestimmen dann wie oben die Parametrisierung der durch diese  $u_k(r_k)u_l(r_l)$  repräsentierten Klassen (für die großen  $l$  zuerst). Sollten in diesen Klassen wiederum gewisse Produkte aus drei  $u_i(r_i)$  nicht vorkommen, so untersuchen wir auch diese und fahren so fort.

Wir haben alle Klassen in  $(\mathbf{U}_k\mathbf{U}_{k+1}\cdots\mathbf{U}_9)^F$  gefunden, wenn sie zusammen  $q^{10-k}$  Elemente enthalten.

Das hier beschriebene Vorgehen wird in den Beispielrechnungen für  $k = 9, 8, 7$  illustriert.

Die Überlegungen lassen sich für die Fälle  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(q)$  und  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  parallel durchführen. Nur die Anzahl der Klassen und die Zentralisatorordnungen müssen getrennt notiert werden.

Der Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  muß separat behandelt werden (dort gelten ja bereits andere Kommutatorrelationen).

- (2) Konjugieren mit  $w \in \mathbf{W}$ :

Wir betrachten nun die in (1) erhaltene Tabelle mit Repräsentanten der unipotenten Konjugiertenklassen in  $\mathbf{B}^F \leq \mathbf{Sp}_6(q)$ . Wir konjugieren diese Repräsentanten wiederholt gemäß Aussage (h) des Lemmas mit den Elementen  $n_1, n_2, n_3$ . Liegt das Ergebnis wieder in  $\mathbf{B}^F$ , so stellen wir fest, zu welcher Klasse von  $\mathbf{B}^F$  es gehört. Auf diese Weise sehen wir für viele Klassen von  $\mathbf{B}^F$ , daß sie in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  zusammenfallen. Danach erstellen wir eine neue Liste, in die wir aus jeder Familie von unipotenten Klassen von  $\mathbf{B}^F$ , die wir noch nicht als in  $\mathbf{G}^F$  konjugiert erkannt haben, einen Repräsentanten eintragen. Wir nehmen jeweils einen, der in der Liste aus (1) möglichst weit vorne steht. Schließlich berechnen wir noch zu jedem dieser Repräsentanten die Matrix.

- (3) Grober Test auf Konjugiertheit in  $\mathbf{Sp}_6(q)$ :

Seien  $A, B$  zwei Matrizen von Repräsentanten aus der in (2) erhaltenen Liste. Wir können einen groben Test auf Konjugiertheit von  $A$  und  $B$  machen, indem wir die Matrixgleichung  $AC = CB$  mit einer  $6 \times 6$ -Matrix  $C$  ansehen. Diese liefert ein lineares Gleichungssystem für die 36 Einträge der Matrix  $C$ . In den meisten Fällen ergibt sich die Nichtkonjugiertheit von  $A$  und  $B$  schon daraus, daß jedes  $C$  mit  $AC = CB$  singularär ist (weil eine Spalte oder Zeile nur aus Nullen besteht). Es ist klar, daß dieser Test nicht ausreicht, wenn etwa  $A$  und  $B$  in derselben geometrischen Konjugiertenklasse liegen (also in der algebraischen Gruppe  $\mathbf{G}$  konjugiert sind).

- (4) Genauer Test auf Konjugiertheit und Berechnung der Zentralisatorordnungen in  $\mathbf{Sp}_6(q)$ :

Wir verwenden nun die eindeutige Parametrisierung aller Elemente aus  $\mathbf{G}^F$ , die in Teil (g) des Lemmas angegeben ist. Im Beweis des Lemmas haben wir schon gesehen, wie geeignete Elemente  $n_w$  und die Mengen  $M_w$  berechnet werden können. Damit erhalten wir  $|\mathbf{W}| = 48$  Matrizen

$$C_w := u_1(t_1) \cdots u_9(t_9)h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)n_w(u_1(s_1) \cdots u_9(s_9))^{n_0 n_w},$$

mit  $s_k = 0$  für  $k \notin M_w$  und sonst unbestimmten Parametern. Diese Matrizen liefern zusammen bei Spezialisierung der Parameter  $t_k, s_k$  in  $\mathbb{F}_q$  und  $\lambda_i$  in  $\mathbb{F}_q^\times$  jedes Element von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  genau einmal.

Sei nun wieder  $A, B$  ein Paar von Matrizen aus der in (2) erhaltenen Liste. Diese

Matrizen sind genau dann in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  konjugiert, wenn eines der durch  $AC_w = C_w B$  gegebenen algebraischen Gleichungssysteme für die Parameter in  $C_w$  eine Lösung in  $\mathbb{F}_q$  mit  $\lambda_i \neq 0$  hat.

Betrachten wir diese Gleichungssysteme für  $A = B$ , so ergibt das Abzählen der Lösungen die Zentralisatorordnung von  $A$  in  $\mathbf{Sp}_6(q)$ .

- (5) Bestimmung der unipotenten Klassen in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$ :  
 Von den in (4) gefundenen Repräsentanten der unipotenten Klassen von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  sind einige Elemente schon in  $\mathbf{B}^F \leq \mathbf{CSp}_6(q)$  konjugiert, wie wir aus (1) wissen. Wir erstellen eine Liste, in die jeweils einer dieser Repräsentanten eingetragen wird. Wir prüfen wie in (3) und (4), daß diese Elemente nicht mehr in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  konjugiert sind. Die Zentralisatorordnungen ergeben sich aus den in (4) bestimmten und der Fusion der unipotenten Klassen von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  in  $\mathbf{CSp}_6(q)$ .

Diese Berechnungen liefern das folgende Ergebnis:

**Satz 4.5** *Die Anzahl der unipotenten Konjugiertenklassen in den Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  ist 12, falls  $q$  gerade ist, und 16, falls  $q$  ungerade ist. Die Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  besitzen 10 unipotente Konjugiertenklassen. Repräsentanten und Zentralisatorordnungen dieser Klassen stehen am Beginn der Tabellen 13 und 14 (mit  $h_1 = 1$ ).*

Bei der praktischen Durchführung der oben beschriebenen Rechnungen war wieder die Benutzung von MAPLE hilfreich, etwa für die Umformungen in Schritt (1), für die Berechnung der Matrizen  $C_w$  und das Aufstellen der Gleichungssysteme in den Schritten (3) bis (5). (Die Verwendung der MAPLE-Funktion *solve*, mit der Gleichungssysteme vereinfacht werden können, ist jedoch nicht möglich, da bei nichtlinearen Systemen nicht klar ist, ob alle Umformungen Äquivalenzumformungen sind, und weil die Gleichungen als Gleichungen von Polynomen mit rationalen Koeffizienten behandelt werden, so daß bei kleiner Charakteristik manche Umformungen unzulässig sein können.)

**Beispielrechnung:** Wir betrachten den Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  für ungerades  $q$ . Die Boreluntergruppe  $\mathbf{B}^F$  hat dann  $q^9(q-1)^3$  Elemente. Wir bezeichnen im folgenden mit  $\alpha$  ein festes Element aus  $\mathbb{F}_q^\times \setminus (\mathbb{F}_q^\times)^2$ . Schritt (1) beginnt mit den folgenden Überlegungen:

Klassen in  $\mathbf{U}_9$ :

$u = 1$ : Zentralisatorordnung ist  $|\mathbf{B}^F|$  und die Klasse enthält ein Element.

$u = u_9(r_9)$ : Formales Konjugieren mit dem allgemeinen Element aus  $\mathbf{B}^F$  von der Form  $u_1(t_1) \cdots u_9(t_9)h(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  und Umformen auf Normalform zeigen, daß die Klasse von  $u$  aus den Elementen

$$u_9\left(\frac{r_9}{\lambda_1^2}\right)$$

besteht. Also liegen genau die Elemente aus  $\mathbf{B}^F$  mit  $\lambda_1 = \pm 1$  im Zentralisator von  $u_9(r_9)$ . Die Zentralisatorordnung in  $\mathbf{B}^F$  ist also  $2q^9(q-1)^2$ . Außerdem gibt es genau zwei Klassen mit Repräsentanten dieser Form, denn  $u_9(r_9)$  und  $u_9(s_9)$  sind genau dann in  $\mathbf{B}^F$  konjugiert, wenn sich  $r_9$  und  $s_9$  um ein Quadrat aus  $\mathbb{F}_q^\times$  unterscheiden. Wir können als Repräsentanten  $u_9(1)$  und  $u_9(\alpha)$  nehmen. (Für  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(q)$  liegen die Elemente  $u_9\left(\frac{r_9\lambda}{\lambda_1}\right)$  in der Klasse von  $u_9(r_9)$ . In diesem Fall gibt es also nur eine Klasse dieser Art, in der dafür aber  $q-1$  Elemente liegen.) Damit haben wir natürlich schon alle Klassen aus  $\mathbf{U}_9$  gefunden,

was sich auch durch Abzählen der Elemente in den ermittelten Klassen ergibt:  $1+2\frac{q-1}{2} = q$ .

Klassen in  $\mathbf{U}_8\mathbf{U}_9$ :

$u = u_8(r_8)$ : Die Klasse von  $u$  wird parametrisiert durch

$$u_8\left(\frac{r_8}{\lambda_1\lambda_2}\right)u_9\left(-2\frac{t_1r_8}{\lambda_1^2}\right).$$

Zentralisatorelemente sind demnach durch die Gleichungen  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  und  $t_1 = 0$  beschrieben. Die Zentralisatorordnung ist also  $q^8(q-1)^2$ . Setzen wir in dem Ausdruck  $t_1 = 0$ , so erkennen wir, daß die Elemente der Form  $u_8(r_8)$  für alle  $r_8 \in \mathbb{F}_q^\times$  konjugiert in  $\mathbf{B}^F$  sind. Wir bekommen als Repräsentanten etwa  $u_8(1)$ .

Damit sind schon alle  $q^2$  Elemente von  $\mathbf{U}_8\mathbf{U}_9$  gefunden.

Klassen in  $\mathbf{U}_7\mathbf{U}_8\mathbf{U}_9$ :

$u = u_7(r_7)$ : Die Klasse ist nun beschrieben durch:

$$u_7\left(\frac{r_7}{\lambda_2^2}\right)u_8\left(-\frac{t_1r_7}{\lambda_1\lambda_2}\right)u_9\left(\frac{t_1^2r_7}{\lambda_1^2}\right).$$

Es gibt also wieder zwei Klassen dieser Art, etwa repräsentiert durch  $u_7(1)$  und  $u_7(\alpha)$ , mit der Zentralisatorordnung  $2q^8(q-1)^2$ .

Bei diesem Beispiel sehen wir, daß in den betrachteten Klassen keine Elemente der Form  $u_7(r_7)u_9(r_9)$  mit  $r_9 \neq 0$  liegen. Solche betrachten wir als nächstes.

$u = u_7(r_7)u_9(r_9)$ : Wie oben stellen wir fest, daß es vier Klassen von dieser Art gibt, repräsentiert durch  $u_7(1)u_9(1)$ ,  $u_7(\alpha)u_9(\alpha)$ ,  $u_7(1)u_9(\alpha)$  und  $u_7(\alpha)u_9(1)$ , mit Zentralisatorordnung  $4q^8(q-1)$ .

Damit haben wir alle Elemente aus  $\mathbf{U}_7\mathbf{U}_8\mathbf{U}_9$  gefunden, wie wir wieder durch Abzählen der Elemente in den gefundenen Klassen sehen.

Restliche Klassen in  $\mathbf{U}^F$ :

Die Liste der unipotenten Klassen von  $\mathbf{B}^F$  läßt sich mit genau den vorgeführten Überlegungen vervollständigen. Allerdings werden die Ausdrücke für die Parametrisierung der Klassen immer länger. (Es kommt vor, daß wir ein Produkt von vier Faktoren  $u_i(r_i)$  ansehen müssen, durch das  $2(q-1)$  Klassen beschrieben werden. Die Anzahl der unipotenten Klassen in  $\mathbf{B}^F$  wächst also mit  $q$ , während in  $\mathbf{G}^F$  die Anzahl der unipotenten Klassen für alle  $q$  gleich ist.)

Rechnungen für gerades  $q$ :

Statt eines Nichtquadrates  $\alpha$  aus  $\mathbb{F}_q^\times$  wird in Charakteristik zwei ein  $\alpha$  gebraucht, so daß das Polynom  $Z^2 + Z + \alpha$  über  $\mathbb{F}_q$  irreduzibel ist. Die Rechnungen sind ansonsten sehr ähnlich.

In Schritt (2) besteht die meiste Arbeit darin, von Elementen aus  $\mathbf{B}^F$ , die durch Konjugation gewonnen wurden, festzustellen, in welcher Konjugiertenklasse von  $\mathbf{B}^F$  sie liegen; dies erfolgt mit ähnlichen Rechnungen wie in Schritt (1). In diesem Schritt müssen oft die beiden Möglichkeiten für die Kongruenz von  $q$  modulo 4 unterschieden werden. Unser Rechenergebnis läßt sich aber durch die Verwendung von  $-\alpha$  bei der Angabe der

Repräsentanten der unipotenten Klassen (siehe Tabelle 13 unter  $c_{1,3}$ ) wieder einheitlich darstellen.

Die linearen Gleichungssysteme in Schritt (3) lassen sich mit MAPLE lösen. Die Berechnung der Zentralisatorordnungen in Schritt (4) ist aufwendig, jedoch liefern für ein festes Element in  $\mathbf{U}^F$  immer nur „wenige“  $C_w$  einen Beitrag zum Zentralisator.

## Anmerkungen

- Sei  $I$  eine Teilmenge unseres Fundamentalsystems  $\Pi$  des Wurzelsystems von  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{W}_I \leq \mathbf{W}$  die Untergruppe der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$ , die von den Reflektionen an den Wurzeln aus  $I$  erzeugt wird. Führen wir Schritt (2) nur mit den Elementen  $n_i$ ,  $i \in I$ , und Schritt (4) nur mit den  $C_w$ ,  $w \in \mathbf{W}_I$ , durch, so erhalten wir die unipotenten Klassen der parabolischen Untergruppe  $\mathbf{P}_I^F$  von  $\mathbf{G}^F$  (siehe Carter [6, 2.1.4]); insbesondere kennen wir dann auch die Fusion dieser Klassen in die unipotenten Klassen von  $\mathbf{G}^F$ . In Abschnitt 5 wird gezeigt, wie damit die Greenfunktionen von  $\mathbf{G}^F$  ausgerechnet werden können.
- Die hier vorgestellte Methode der Berechnung der unipotenten Klassen hat zwar den Vorteil, daß sie sehr elementar ist, aber dafür ist der Rechenaufwand groß. Allgemeine Ergebnisse über unipotente Klassen, wie sie etwa in Carter [6, Chapter 5 und 13] oder bei Springer und Steinberg in [1, Part E] zu finden sind, gelten nur im Fall genügend großer Charakteristik, und/oder wenn die Gruppen vom adjungierten Isogenietyp sind. Dagegen ist unser Verfahren von solchen Voraussetzungen unabhängig.
- Für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  wurden die unipotenten Klassen auch von Shinoda in [34, 2.1] berechnet. Dort wurden sie als Gruppen vom Dynkin-Typ  $B_3$  betrachtet, die in Charakteristik zwei isomorph zu den symplektischen Gruppen sind (vergleiche die Anmerkungen in Abschnitt 3). Die in der zitierten Arbeit skizzierte Berechnungsmethode ist ähnlich der hier beschriebenen; es werden ebenfalls unipotente Klassen von Gruppen mit Dynkin-Typ  $B_4$  und  $F_4$  rekursiv über Leviuntergruppen von wachsendem halbeinfachen Rang ausgerechnet.

## 4.3 Gemischte Klassen und vollständige Listen der Konjugiertenklassen

Um eine vollständige Liste von Konjugiertenklassen der symplektischen Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  zu bekommen, müssen wir noch die unipotenten Klassen in den Gruppen  $\mathbf{SL}_2(q)$ ,  $\mathbf{GL}_2(q)$ ,  $\mathbf{U}_2(q^2)$ ,  $\mathbf{GL}_3(q)$ ,  $\mathbf{U}_3(q^2)$  und  $\mathbf{Sp}_4(q)$  bestimmen. Nach Tabelle 7 ist nämlich jeder Zentralisator eines halbeinfachen Elementes aus  $\mathbf{Sp}_6(q) \setminus Z(\mathbf{Sp}_6(q))$  ein direktes Produkt von Gruppen aus dieser Liste und zyklischen  $p'$ -Gruppen (in denen nur das Einselement unipotent ist). Für die Gruppen  $\mathbf{GL}_2(q)$  und  $\mathbf{SL}_2(q)$  ergeben sich Repräsentanten und Zentralisatorordnungen der unipotenten Klassen aus einer einfachen Rechnung, wobei für  $\mathbf{SL}_2(q)$  das Resultat von der Kongruenz von  $q$  modulo 2 abhängt. Für die Gruppen  $\mathbf{GL}_3(q)$  verweisen wir auf Steinberg [40] und für  $\mathbf{U}_2(q^2)$  und  $\mathbf{U}_3(q^2)$  auf Ennola [15]. Die Charaktertafeln von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  und damit die Klassenlisten sind für gerades  $q$  bei Enomoto [16] und für ungerades  $q$  bei Srinivasan [39] zu finden.

Jetzt wollen wir noch beschreiben, wie wir die vollständige Liste der Konjugiertenklassen der Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  finden. Zuerst überlegen wir uns, wie die nichttrivialen unipotenten Klassen von  $\mathbf{SL}_2(q)$  in  $\mathbf{GL}_2(q)$ , von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  in  $\mathbf{CSp}_4(q)$  und von  $\mathbf{U}_n(q^2)$  in  $\mathbf{CU}_n(q^2)$  fusionieren. Oben bereits durchgeführte Rechnungen zeigen, daß die zwei nichttrivialen unipotenten Klassen von  $\mathbf{SL}_2(q)$  in  $\mathbf{GL}_2(q)$  zusammenfallen. Die Fusion der unipotenten Klassen von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  in  $\mathbf{CSp}_4(q)$  läßt sich anhand der Arbeit [35] von Shinoda über die Gruppen  $\mathbf{CSp}_4(q)$  durch Vergleich der Zentralisatorordnungen ablesen. (Aus den in [35] angegebenen Klassenrepräsentanten wurden auch die Repräsentanten der unipotenten Klassen von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  gewonnen, die wir statt der von Srinivasan in [39] aufgeführten verwenden.) Unipotente Klassen von  $\mathbf{U}_n(q^2)$  können in  $\mathbf{CU}_n(q^2)$  nicht zusammenfallen, da nach einem Satz von Wall (siehe [41, 2.6, Case(A)(ii)]) zwei Elemente aus  $\mathbf{U}_n(q^2)$  genau dann konjugiert sind, wenn sie in  $\mathbf{GL}_n(q^2)$  konjugiert sind.

Mit diesen Informationen können wir für die Klassen von  $\mathbf{CSp}_6(q)$ , deren halbeinfacher Anteil vom Typ  $h_3$  bis  $h_6$ ,  $h_8$  oder  $h_{13}$  bis  $h_{31}$  ist, Repräsentanten, Zentralisatorordnungen und die Fusion der entsprechenden Klassen aus  $\mathbf{Sp}_6(q)$  in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  angeben (vergleiche Tabelle 7).

Wir betrachten nun die Klassen mit halbeinfachem Anteil vom Typ  $h_2$ . Nach Tabelle 7 gelten für den Zentralisator  $C < \mathbf{CSp}_6(q)$  eines halbeinfachen Elementes vom Typ  $h_2$

$$C \cong \{(A, B) \in \mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{CSp}_4(q) \mid \det(A) = \lambda(B)\}$$

und

$$C \cap \mathbf{Sp}_6(q) \cong \mathbf{SL}_2(q) \times \mathbf{Sp}_4(q).$$

Wir kennen bereits die unipotenten Klassen von  $\mathbf{SL}_2(q) \times \mathbf{Sp}_4(q)$  und wissen, wie diese im direkten Produkt  $\mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{CSp}_4(q)$  fusionieren. Welche dieser Klassen bereits in der Untergruppe  $C < \mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{CSp}_4(q)$  zusammenfallen, ergibt sich mit Hilfe der folgenden Überlegung: Sei  $H < \mathbf{GL}_2(q)$  der Zentralisator eines nichttrivialen unipotenten Elementes von  $\mathbf{GL}_2(q)$ . Dann besteht das Bild des Homomorphismus  $\det : H \mapsto \mathbb{F}_q^\times$  aus der Untergruppe  $(\mathbb{F}_q^\times)^2$ ; dies folgt aus dem Vergleich der Zentralisatorordnungen in  $\mathbf{SL}_2(q)$  und  $\mathbf{GL}_2(q)$  und der Tatsache, daß  $H \cap \mathbf{SL}_2(q)$  der Kern dieses Homomorphismus ist. Analog folgt für den Zentralisator  $H < \mathbf{CSp}_4(q)$  eines unipotenten Elementes  $u$  aus  $\mathbf{CSp}_4(q)$ , daß der Homomorphismus  $\lambda : H \mapsto \mathbb{F}_q^\times$  genau dann surjektiv ist, wenn die Klasse von  $u$  in  $\mathbf{Sp}_4(q)$  gleich der Klasse von  $u$  in  $\mathbf{CSp}_4(q)$  ist; sonst besteht das Bild aus der Untergruppe  $(\mathbb{F}_q^\times)^2$ . Seien nun  $u$  und  $u'$  Vertreter der nichttrivialen unipotenten Klassen von  $\mathbf{SL}_2(q)$  und  $v$  unipotenten Element von  $\mathbf{Sp}_4(q)$ . Bildet die Klasse von  $v$  in  $\mathbf{Sp}_4(q)$  genau eine Klasse in  $\mathbf{CSp}_4(q)$ , so läßt sich nach den obigen Überlegungen  $(u, v) \in \mathbf{SL}_2(q) \times \mathbf{Sp}_4(q)$  bereits in  $C$  in  $(u', v)$  konjugieren. Sei im anderen Fall  $v' \in \mathbf{Sp}_4(q)$  ein Element, das nicht in der Klasse von  $v$  liegt, so daß die  $\mathbf{Sp}_4(q)$ -Klassen von  $v$  und  $v'$  in  $\mathbf{CSp}_4(q)$  fusionieren. Dann fallen die vier Klassen von  $(u, v)$ ,  $(u', v)$ ,  $(u, v')$  und  $(u', v')$  im direkten Produkt  $\mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{CSp}_4(q)$  zusammen. In  $C$  sind jedoch nur  $(u, v)$  und  $(u', v')$  sowie  $(u, v')$  und  $(u', v)$  konjugiert.

Mit ähnlichen Überlegungen können wir auch die Klassen von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  finden, deren halbeinfacher Anteil vom Typ  $h_7$ ,  $h_9$  oder  $h_{10}$  ist.

Schließlich brauchen wir für die Klassen mit halbeinfachem Anteil vom Typ  $h_{11}$  oder  $h_{12}$  (die in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  nicht vorkommen) nur noch die unipotenten Klassen in der Untergruppe

von  $\mathbf{GL}_2(q^2)$  zu finden, die aus den Elementen mit Determinante in  $\mathbb{F}_q^\times$  besteht. Diese Klassen ergeben sich wieder aus einer einfachen Nebenrechnung.

Damit ist die Berechnung der Konjugiertenklassen der uns interessierenden Gruppen abgeschlossen, und wir fassen das Ergebnis in einem Satz zusammen.

**Satz 4.6** *Sei zunächst  $q$  ungerade. Die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  besitzen  $q^3 + 5q^2 + 15q + 24$  Konjugiertenklassen, und in den Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  ist die Anzahl  $(q-1)(q^3 + 2q^2 + 6q + 6)$ . Tabelle 13 beschreibt für alle Klassen Repräsentanten, die Zentralisatorordnung ihrer Elemente sowie die Fusion der Klassen von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  in  $\mathbf{CSp}_6(q)$ . Dies wird im Anschluß an den Satz ausführlich erklärt. In den Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  gibt es  $(q+1)(q^2 + q + 4)$  Konjugiertenklassen. Für diese Gruppen sind Repräsentanten der Klassen und die Zentralisatorordnungen in Tabelle 14 zu finden.*

## Bezeichnungen der Konjugiertenklassen

Wir erläutern zuerst die Tabelle 14, in der die Klassen von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  beschrieben sind. Wir haben zu jedem halbeinfachen Klassentyp  $h_i$  von  $\mathbf{G}^F$  Repräsentanten angegeben (Tabelle 10) und in Abschnitt 4.1 die Zentralisatoren dieser Repräsentanten ausgerechnet, die dort mit  $\mathbf{C}^{(Fn^{-1})}$  bezeichnet wurden. In Tabelle 14 ist nun für jede unipotente Klasse von  $\mathbf{C}^{(Fn^{-1})}$  mit Vertreter  $u$  eine Zeile eingetragen, die zu den Klassen mit Repräsentanten  $su$  gehört, wobei  $s$  Repräsentant einer Klasse des halbeinfachen Klassentyps  $h_i$  aus Tabelle 10 sei. Der unipotente Anteil wurde mit Hilfe der Bezeichnungen aus Lemma 4.4 geschrieben. Wir wollen eine solche Familie von Klassen einen *Klassentyp* nennen. Da unsere Vertreter halbeinfacher Klassen im allgemeinen nicht in  $\mathbf{G}^F$  liegen, gilt dies auch für die  $su$ . Ein Vertreter der Klasse von  $su$ , der in  $\mathbf{G}^F$  liegt, ist  ${}^g su$ , falls  $g^{-1}F(g) = n$  ist (siehe Abschnitt 4.1). (Daß es zu jedem  $n$  ein solches  $g$  gibt, ist die Aussage des Satzes von Lang-Steinberg. Der übliche Beweis dieses Satzes ist jedoch gar nicht konstruktiv, und es ist tatsächlich schwierig, im konkreten Beispiel solche Urbilder zu berechnen.) Wir bezeichnen die Klassentypen mit

$$c_{i,j},$$

falls der halbeinfache Anteil zum halbeinfachen Klassentyp  $h_i$  gehört. Mit dem zweiten Index  $j$  werden die unipotenten Klassen von  $\mathbf{C}^{(Fn^{-1})}$  durchgezählt, die nach fallender Zentralisatorordnung sortiert werden. Dabei beginnen wir immer mit  $j = 0$ , so daß  $c_{i,0}$  für die halbeinfachen Klassen des Typs  $h_i$  steht. Wenn wir die Klassen in einem Klassentyp genauer bezeichnen wollen, schreiben wir  $c_{i,j}(i_1, \dots)$ , wobei die Parameter sich auf den halbeinfachen Anteil beziehen, wie in Tabelle 10 festgelegt.

In gleicher Weise bezeichnen wir die Konjugiertenklassen der Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$ . Hierfür sind die Repräsentanten aus Tabelle 13 zu ersehen, wenn dort in den Bezeichnungen der dritte Index jeweils weggelassen wird. Ein Element  $g \in \mathbf{CSp}_6(q)$  liegt genau dann in  $\mathbf{Sp}_6(q)$ , wenn das für den halbeinfachen Anteil gilt (der Multiplikator  $\lambda$  hängt nur vom halbeinfachen Anteil ab), und in diesem Fall liegt die gesamte  $\mathbf{CSp}_6(q)$ -Konjugiertenklasse von  $g$  in  $\mathbf{Sp}_6(q)$ . Dann besteht die  $\mathbf{CSp}_6(q)$ -Konjugiertenklasse von  $g$  entweder aus einer oder aus zwei  $\mathbf{Sp}_6(q)$ -Konjugiertenklassen. Im ersten Fall behält die



Klasse von  $g$  in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  ihre Bezeichnung bei und ihre Zentralisatorordnung ergibt sich aus der in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  durch Weglassen eines Faktors  $\phi_1 = q - 1$ . Im zweiten Fall geben wir Repräsentanten der beiden  $\mathbf{Sp}_6(q)$ -Klassen an und unterscheiden diese in der Bezeichnung durch einen dritten Index; in diesem Fall ergibt sich die Zentralisatorordnung in  $\mathbf{Sp}_6(q)$ , indem diejenige in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  durch  $\frac{1}{2}(q - 1)$  geteilt wird.

Schließlich soll noch begründet werden, warum wir für den Begriff *Klassentyp* nicht eine ähnlich formale Definition wie für die halbeinfachen Klassentypen angeben (Definiton 4.1), sondern ihn nur als Sprechweise für die Kennzeichnung der Spalten unserer generischen Charaktertafel verwenden. Wenn wir für jede halbeinfache Konjugiertenklasse einen *eindeutigen* Repräsentanten festlegten, dann wären alle Klassen eindeutig einem Klassentyp zuzuordnen. Wir haben aber im allgemeinen mehrere Repräsentanten für die halbeinfachen Klassen, wodurch die Zuordnung der Klassen zu den Klassentypen nicht mehr eindeutig ist. Dies verdeutlichen wir uns am besten an einem Beispiel: Im Fall der Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  ist aus den Tabellen 8 und 13 sowie Lemma 4.4(h) zu sehen, daß unsere Repräsentanten von

$$c_{7,1}(i_1, i_2) \quad \text{und} \quad c_{7,2}(i_1 + (q - 1)/2, i_2)$$

(vermöge  $n_1 n_2 n_1$ ) konjugiert sind.

Wir könnten also die Spalte der Charaktertafel zu einem dieser beiden Klassentypen weglassen. (Wir tun dies aus praktischen Gründen nicht, damit zum Beispiel die im Anschluß an Satz 4.3 beschriebenen Summationsvorschriften immer nur vom halbeinfachen Anteil des Klassentyps abhängen.)

### Anmerkung

Für die symplektischen Gruppen  $\mathbf{Sp}_{2l}(q)$  hat Wall in [41, 2.6 Case(B) und 3.7] eine Beschreibung der Konjugiertenklassen mit Hilfe gewisser Invarianten der Matrizen gegeben (für gerades  $q$  ohne Beweis). Insbesondere sind dort auch erzeugende Funktionen für die Anzahl der Konjugiertenklassen zu finden.

## 5 Greenfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Werte der Greenfunktionen für alle bei uns vorkommenden Zentralisatoren halbeinfacher Elemente angeben. Wir stellen zuerst einige allgemeine Aussagen über Greenfunktionen in einem Lemma zusammen und werden sehen, daß sich daraus die meisten der von uns gesuchten Greenfunktionen ohne besonderen Rechenaufwand ergeben. Es bleiben noch die Greenfunktionen für Gruppen mit Dynkin-Typ  $C_2$  und  $C_3$  zu bestimmen. Diese können einerseits aus der Literatur entnommen werden, und andererseits soll auch gezeigt werden, wie wir sie neu berechnen können. Das Ablesen von Greenfunktionen aus bekannten Charaktertafeln wirft einige technische Fragen auf, die ebenfalls angesprochen werden sollen.

**Lemma 5.1** *Sei  $\mathbf{G}$  eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe mit Frobeniusmorphismus  $F$  und  $\mathbf{T} \leq \mathbf{G}$  ein maximal zerfallender Torus. Ein weiterer rationaler maximaler Torus  $\tilde{\mathbf{T}} \leq \mathbf{G}$  entstehe aus  $\mathbf{T}$  durch Twisten mit einem Element  $w \in \mathbf{W}$  der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$ .*

(a) *Die Greenfunktionen  $Q_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}$  haben ganzrationale Werte, und es gelten*

$$Q_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}(1) = (-1)^{l(w)} \frac{|\mathbf{G}^F|_{p'}}{|\tilde{\mathbf{T}}^F|},$$

wobei  $l(w)$  die Länge von  $w$  bezüglich der Menge von Reflektionen an irgendeinem Fundamentalsystem des Wurzelsystems von  $\mathbf{G}$  sei, und

$$Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(u) = 1,$$

falls  $u$  regulär unipotent ist.

(b) *Seien  $u_0, \dots, u_r$  Repräsentanten der unipotenten Klassen von  $\mathbf{G}^F$  und  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_l$  Repräsentanten der  $\mathbf{G}^F$ -Klassen rationaler maximaler Tori von  $\mathbf{G}$ , wobei  $\mathbf{T}_i$  aus  $\mathbf{T}$  durch Twisten mit  $w_i \in \mathbf{W}$  entstehe. Dann gelten ( $\delta_{i,j}$  sei das Kronecker-Symbol und  $C_{\mathbf{W},F}(w_i)$  der  $F$ -Zentralisator von  $w_i$ )*

$$\sum_{k=0}^r \frac{Q_{\mathbf{T}_i}^{\mathbf{G}}(u_k) Q_{\mathbf{T}_j}^{\mathbf{G}}(u_k)}{|C_{\mathbf{G}}(u_k)^F|} = \delta_{i,j} \frac{|C_{\mathbf{W},F}(w_i)|}{|\mathbf{T}_i^F|} \quad (\text{Orthogonalitätsrelationen})$$

und

$$|\mathbf{T}_i^F| \sum_{k=0}^r \frac{Q_{\mathbf{T}_i}^{\mathbf{G}}(u_k)}{|C_{\mathbf{G}}(u_k)^F|} = 1.$$

(c) *Sei  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2$  direktes Produkt zweier zusammenhängender reduktiver  $F$ -invarianter Untergruppen. Dann sind  $\tilde{\mathbf{T}}_1 = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}_1$  und  $\tilde{\mathbf{T}}_2 = \tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}_2$  rationale maximale Tori von  $\mathbf{G}_1$  beziehungsweise  $\mathbf{G}_2$  und  $\tilde{\mathbf{T}}^F = \tilde{\mathbf{T}}_1^F \times \tilde{\mathbf{T}}_2^F$ . Sei  $u \in \mathbf{G}^F$  unipotent mit Zerlegung  $u = u_1 \times u_2 \in \mathbf{G}_1^F \times \mathbf{G}_2^F$ . Dann gilt*

$$Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(u) = Q_{\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\mathbf{G}_1}(u_1) \cdot Q_{\tilde{\mathbf{T}}_2}^{\mathbf{G}_2}(u_2).$$

(d) *Für die Kommutatoruntergruppe  $\mathbf{G}'$  von  $\mathbf{G}$  ist  $Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}} = Q_{\tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}'}^{\mathbf{G}'}$ .*

**Beweis:** (a) Die Greenfunktionen sind nach Carter [6, Vorbemerkung zu 7.6.1] ganzzahlig. Für die Formel der Werte auf dem Einselement siehe Digne-Michel [13, 12.9,12.10] und für die Werte auf den regulären unipotenten Klassen [13, 14.45].

(b) Die Orthogonalitätsrelationen in der angegebenen Form ergeben sich aus Carter [6, 7.6.2 und 3.3.6]. Die zweite Aussage ist eine Umformulierung von Carter [6, 7.6.1].

(c) Die Aussage über die Tori ergibt sich aus Digne-Michel [13, 0.6]. Sei  $\mathbf{B}$  eine Boreluntergruppe von  $\mathbf{G}$  mit  $\tilde{\mathbf{T}} \leq \mathbf{B}$  und  $\mathbf{U} \leq \mathbf{B}$  die Untergruppe der unipotenten Elemente von  $\mathbf{B}$ . Es ist klar, daß  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$ , wobei  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} \cap \mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{B}_2 = \mathbf{B} \cap \mathbf{G}_2$  Boreluntergruppen von  $\mathbf{G}_1$  beziehungsweise  $\mathbf{G}_2$  sind, und  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2$  mit  $\mathbf{U}_1 = \mathbf{U} \cap \mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U} \cap \mathbf{G}_2$  ist. Für die Urbilder von  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}_1$  und  $\mathbf{U}_2$  unter der Lang-Abbildung  $L : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ ,  $g \mapsto g^{-1}F(g)$ , gilt

$$L^{-1}(\mathbf{U}) = L^{-1}(\mathbf{U}_1) \times L^{-1}(\mathbf{U}_2),$$

da wir  $\mathbf{G}_1$  und  $\mathbf{G}_2$  als  $F$ -invariant vorausgesetzt haben. Benutzen wir jetzt, daß die Greenfunktionen bis auf einen Vorfaktor Lefschetz Zahlen sind, nämlich

$$Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(u) = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{T}}^F|} \mathcal{L}(u, L^{-1}(\mathbf{U}))$$

(siehe Digne-Michel [13, 10.1 und 12.1]), so folgt unsere Behauptung aus der Künneth-Formel (siehe [13, 10.9(ii)]):

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(u) &= Q_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}(u_1 \times u_2) = \frac{1}{|\tilde{\mathbf{T}}_1^F| |\tilde{\mathbf{T}}_2^F|} \mathcal{L}(u_1 \times u_2, L^{-1}(\mathbf{U}_1 \times \mathbf{U}_2)) \\ &= \frac{1}{|\tilde{\mathbf{T}}_1^F|} \mathcal{L}(u_1, L^{-1}(\mathbf{U}_1)) \cdot \frac{1}{|\tilde{\mathbf{T}}_2^F|} \mathcal{L}(u_2, L^{-1}(\mathbf{U}_2)) \\ &= Q_{\tilde{\mathbf{T}}_1}^{\mathbf{G}_1}(u_1) \cdot Q_{\tilde{\mathbf{T}}_2}^{\mathbf{G}_2}(u_2). \end{aligned}$$

(d) Zuerst bemerken wir, daß die Aussage sinnvoll ist, weil die unipotenten Elemente von  $\mathbf{G}$  (also der Definitionsbereich der Greenfunktionen) bereits in der Kommutatoruntergruppe  $\mathbf{G}'$  enthalten sind; vergleiche etwa Digne-Michel [13, 0.40]. Unsere Aussage folgt aus dem Beweis von [13, 13.20]; dort wird gezeigt, daß die Einschränkung des Deligne-Lusztig-Charakters  $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{G}}1$  auf  $\mathbf{G}'$  gleich dem Deligne-Lusztig-Charakter  $R_{\tilde{\mathbf{T}} \cap \mathbf{G}'}^{\mathbf{G}'}, 1$  ist. (Die Aussage in [13, 13.20] ist noch allgemeiner, sie besagt, daß die Werte der unipotenten Charaktere nur vom Dynkin-Typ der Gruppe abhängen.)  $\square$

Jetzt sei wieder spezieller  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ , falls die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  zwei ist, und  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  bei ungerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$ .

Im Abschnitt 4.1 über die halbeinfachen Klassen haben wir schon für alle Zentralisatoren  $\mathbf{C} \leq \mathbf{G}$  zu den halbeinfachen Klassentypen die Konjugiertenklassen rationaler

maximaler Tori bestimmt. Für die dazu gehörenden Greenfunktionen wurden in Satz 4.3(f) die Bezeichnungen

$$Q_{i,j} \quad \text{beziehungsweise} \quad Q_{i,j,k}$$

eingeführt. Der erste Index  $i$  bedeutete, daß es sich um eine Greenfunktion des Zentralisators  $\mathbf{C}$  zum halbeinfachen Klassentyp  $h_i$  handelt. Wir fassen diese Greenfunktion als eine Funktion auf den Klassentypen mit halbeinfachem Anteil  $h_i$  auf, die den unipotenten Klassen des Zentralisators  $\mathbf{C}^F$  entsprechen.

Die Vorzeichen  $(-1)^{l(w)}$  aus Lemma 5.1(a) konnten bereits in dem GAP-Programm, das im Abschnitt 4.1 verwendet wurde, berechnet werden: Mit den Parametern für die halbeinfachen Klassentypen kennen wir Fundamentalsysteme der Wurzelsysteme der zugehörigen Zentralisatoren  $\mathbf{C}$ . Die Länge eines Elementes  $w$  der Weylgruppe von  $\mathbf{C}$  bezüglich dieses Fundamentalsystems ist gleich der Anzahl der positiven Wurzeln, die durch  $w$  auf negative Wurzeln abgebildet werden; siehe Digne-Michel [13, 0.29].

Wir können also jetzt für alle gesuchten Greenfunktionen nach Lemma 5.1(a) mit Hilfe von Torus- und Zentralisatorordnungen die Werte auf dem Einselement und den regulären unipotenten Klassen des zugehörigen Zentralisators eintragen.

Damit sind die Greenfunktionen für die Zentralisatoren zu den halbeinfachen Klassentypen  $h_{11}$  bis  $h_{31}$  bereits vollständig bestimmt. In den Fällen der halbeinfachen Klassentypen  $h_5$  und  $h_6$  fehlt jeweils nur noch ein Eintrag; dieser ist durch die zweite Gleichung in Lemma 5.1(b) festgelegt.

Für die Fälle  $h_7$  bis  $h_{10}$  berechnen wir zuerst die Greenfunktionen für die Gruppen  $\mathbf{GL}_2(q)$ ,  $\mathbf{SL}_2(q)$  und  $\mathbf{U}_2(q^2)$ , was wieder ganz leicht ist, weil diese Gruppen außer dem Einselement nur reguläre unipotente Elemente besitzen. Daraus lassen sich die Greenfunktionen für diese Fälle mit Hilfe von Aussage 5.1(c) für die zugehörigen Zentralisatoren in den symplektischen Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  gewinnen, denn diese sind direkte Produkte der genannten Gruppen mit Tori. Aus Lemma 5.1(d) folgt, daß wir damit auch die Greenfunktionen für die Zentralisatoren in den konformen symplektischen Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  gefunden haben, denn nach Bemerkung 1.2(b) sind ihre Kommutatorgruppen in den symplektischen Gruppen enthalten. (Auf Klassen, die zusammenfallen, sind die Werte der Greenfunktionen gleich.) Bei der Anwendung von 5.1(c) müssen wir manchmal genau feststellen, in welcher Komponente des Zentralisators welche Greenfunktion zu nehmen ist; dafür müssen explizit Repräsentanten der zu den Greenfunktionen gehörenden Tori in den in Abschnitt 4.1 ausgerechneten Zentralisatoren angesehen werden (also in der Notation von 4.1(2) und (4) die Tori  $\mathbf{T}^{(Fw^{-1}\bar{w}^{-1})}$  als Teilmengen von  $\mathbf{C}_{\Psi}^{(Fn^{-1})}$ ). Vergleiche hierzu die Informationen zu den Greenfunktionen in der Beispielrechnung von Abschnitt 4.1 (dort wurden auch die Vorzeichen  $(-1)^{l(w)}$  bereits ausgegeben).

Jetzt kommen wir zur Bestimmung der Greenfunktionen für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_4(q)$  beziehungsweise  $\mathbf{CSp}_4(q)$ . Die Charaktertafeln dieser Gruppen sind bekannt (siehe Enomoto [16] für  $\mathbf{Sp}_4(q)$  mit geradem  $q$ , Srinivasan [39] für  $\mathbf{Sp}_4(q)$  mit ungeradem  $q$  (eine korrigierte Fassung der Tafel ist in Przygocki [32] abgedruckt) und Shinoda [35] für  $\mathbf{CSp}_4(q)$  mit ungeradem  $q$ ). Das Ablesen der Greenfunktionen aus einer bekannten generischen Charaktertafel ist jedoch mit einem prinzipiellen Problem verbunden. Die Definition der Greenfunktionen benutzt nämlich wesentlich die Einbettung der endlichen Gruppen in eine algebraische Gruppe (es handelt sich ja bis auf einen Vorfaktor um Lefschetzahlen

gewisser Varietäten). Bevor wir die Greenfunktionen aus den oben zitierten Tafeln ablesen können, müssen wir sie also erst in den endlichen Gruppen charakterisieren. Wir geben zuerst eine solche Charakterisierung an, die für genügend große  $q$  gilt: Wenn  $q$  groß genug ist, so gibt es in allen Typen von maximalen Tori reguläre Elemente, die in den endlichen Gruppen dadurch ausgezeichnet sind, daß ihre Zentralisatorordnung nicht durch  $p$  teilbar ist. Außerdem besitzen dann die maximalen Tori in den endlichen Gruppen Charaktere *in allgemeiner Lage*, deren zugehörige Deligne-Lusztig-Charaktere bis auf ein Vorzeichen irreduzibel sind (siehe Carter [6, 7.3.5]). Nach der Charakterformel für die Deligne-Lusztig-Charaktere (Satz 2.1) haben diese nur auf den regulären halbeinfachen Klassen eines Typs maximaler Tori Werte ungleich Null. Suchen wir nun in den oben zitierten Tafeln für jeden Typ maximaler Tori nach Charakteren, die nur auf den regulären halbeinfachen Klassen dieses Typs Werte ungleich Null haben, so sehen wir, daß ihre Werte auf den unipotenten Klassen sich nicht unterscheiden. Das liefert für jeden Typ maximaler Tori bis auf ein Vorzeichen die gesuchten Greenfunktionen. Das Vorzeichen ist auf den regulären unipotenten Klassen abzulesen. Wir begründen jetzt noch, warum die gefundenen Greenfunktionen auch für kleine  $q$  richtig sind, für die einige der oben betrachteten Klassen und Charaktere gar nicht vorkommen. Die unipotenten Charaktere der betrachteten Gruppen sind (unabhängig von  $q$ ) rationale Linearkombinationen gewisser Deligne-Lusztig-Charaktere. Diese kommen für alle  $q$  vor, und aus ihnen lassen sich umgekehrt auch alle Greenfunktionen rekonstruieren (eine genauere Beschreibung geben wir in Abschnitt 7). Da sich in den zitierten Tafeln die Werte aller irreduziblen Charaktere auf den unipotenten Klassen als Polynome in  $q$  schreiben lassen, muß dies auch für die Greenfunktionen gelten. Damit sind die oben gefundenen Greenfunktionen auch für kleine  $q$  richtig, weil ein Polynom schon durch seine Spezialisierungen an endlich vielen Stellen festgelegt ist.

Bei der praktischen Anwendung dieser Überlegungen auf die Tafel von Enomoto in [16] ergibt sich noch die Schwierigkeit, daß die abgedruckte Tafel sehr fehlerhaft ist (allerdings wohl nicht durch den Autor, sondern durch den Setzer verursacht). Wir beschreiben deshalb kurz, wie wir die Greenfunktionen auch neu berechnen können. Drei der fünf Typen von Tori der Gruppen  $\mathbf{Sp}_4(q)$  haben Repräsentanten in den Standard-Leviuntergruppen, die zu den einzelnen Wurzeln des Dynkin-Diagramms gehören (also Dynkin-Typ  $A_1$  haben). Diese Leviuntergruppen liegen in rationalen parabolischen Untergruppen, deren Durchschnitt mit  $\mathbf{Sp}_4(q)$  bei Enomoto mit  $P$  beziehungsweise  $Q$  bezeichnet wird. Die Greenfunktionen der Leviuntergruppen sind wieder durch Lemma 5.1(a) bestimmt. Wenden wir auf diese die Harish-Chandra-Induktion an, so bekommen wir die zu den Tori gehörigen Greenfunktionen von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  (Transitivität des Lusztig-Funktors, der in diesem Fall durch die Harish-Chandra-Induktion beschrieben wird; siehe Digne-Michel [13, 11.1 und 11.5]). Zur Berechnung der Harish-Chandra-Induktion wird die Fusion der unipotenten Klassen von  $P$  und  $Q$  in die unipotenten Klassen von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  gebraucht, die aus Enomoto [16, Table II-1, III-1] zu ersehen ist. (In Abschnitt 8, Schritt 4, beschreiben wir die Berechnung einer Harish-Chandra-induzierten Funktion ausführlicher.) Wenn wir aber drei der gesuchten fünf Greenfunktionen kennen und dazu die Werte der restlichen auf dem Einselement und den regulären unipotenten Klassen, so fehlen uns nur noch die Werte von zwei Funktionen auf jeweils drei Klassen. Diese Werte sind durch die von den Orthogonalitätsrelationen aus Lemma 5.1(b) gelieferten linearen Gleichungen festgelegt.

Wir haben nun die Greenfunktionen zu den halbeinfachen Klassentypen  $h_3$  und  $h_4$  und unter Verwendung von Lemma 5.1(c) und (d) auch zu  $h_2$  gefunden. Es bleiben noch die Greenfunktionen für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  beziehungsweise  $\mathbf{CSp}_6(q)$  zu bestimmen.

Für gerades  $q$  sind diese von Malle in [30, Table 12] berechnet worden. Dort wurde genau das oben beschriebene Verfahren mit Harish-Chandra-Induktion und Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen benutzt. Zusätzlich wurde ein Ergebnis von Lusztig verwendet, das die Werte der Greenfunktion zum Coxeter-Torus (parametrisiert durch das längste Element der Weylgruppe, bei uns Tori vom Typ  $\mathbf{T}_{10}$ ) liefert. (Es ergeben sich sieben der zehn gesuchten Greenfunktionen durch Harish-Chandra-Induktion sowie die Funktion zum Coxeter-Torus; der Rest folgt aus den Orthogonalitätsrelationen.) Die Rechnungen bestehen hauptsächlich daraus, die Fusion unipotenter Klassen von parabolischen Untergruppen zu finden. Wir haben in den Anmerkungen zu Abschnitt 4.2 gezeigt, wie sich mit unserem Verfahren zur Berechnung der unipotenten Klassen auch diese Fusionen ausrechnen lassen.

In der zitierten Arbeit wurden eigentlich die Greenfunktionen für Gruppen mit Dynkin-Typ  $B_3$  in Charakteristik zwei ausgerechnet. Allerdings wissen wir aus den Anmerkungen zu Abschnitt 3, daß für  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  die Gruppen  $\mathbf{G}^F$  und  $\mathbf{G}^{*F^*}$  isomorph sind. Wir müssen also noch begründen, warum in diesen beiden Gruppen die Greenfunktionen gleich sind. Wir verwenden dazu das oben beschriebene Konstruktionsverfahren der Greenfunktionen. Das Einselement, die regulären unipotenten Elemente (durch ihre Zentralisatorordnung) und die Orthogonalitätsrelationen lassen sich unabhängig von der Einbettung der endlichen Gruppen in die algebraische Gruppe beschreiben. Für die Gleichheit der Greenfunktionen zum Coxeter-Torus siehe Lusztig [28, Bemerkung zu 38.]. Wir müssen nur noch begründen, wie die zur Harish-Chandra-Induktion verwendeten parabolischen Untergruppen innerhalb von  $\mathbf{G}^F$  oder  $\mathbf{G}^{*F^*}$  charakterisiert werden. Sie sind nach einem Satz von Borel und Tits (siehe [2, 3.12]) gerade die maximalen Elemente in der Menge der Normalisatoren von nichttrivialen 2-Untergruppen in  $\mathbf{G}^F$  beziehungsweise  $\mathbf{G}^{*F^*}$ .

Die Greenfunktionen für Gruppen vom Dynkin-Typ  $C_3$  bei ungerader Charakteristik wurden von Lambe und Srinivasan in [26] berechnet. Die Berechnung wurde dort mit Hilfe eines Algorithmus von Lusztig durchgeführt, der auf neueren Arbeiten über Charaktergarben basiert. Allerdings ist im allgemeinen nur für genügend große  $q$  bewiesen worden, daß die Greenfunktionen, die dieser Algorithmus liefert, gleich den von uns gesuchten Funktionen sind (siehe [26, Seite 3509]). Daß diese Einschränkung für Gruppen vom Typ  $C_3$  nicht gilt, läßt sich wieder zeigen, indem die Greenfunktionen mit Hilfe von Harish-Chandra-Induktion und Orthogonalitätsrelationen ausgerechnet werden. Diese Rechnungen wurden auch von Gunter Malle ausgeführt (aber nicht veröffentlicht) und wir wollen hier von seinem Ergebnis nur verwenden, daß die Werte der Greenfunktionen für alle  $q$  die gleichen Polynome sind.

Die in der Arbeit [26] von Lambe und Srinivasan angegebene Zuordnung der Konjugiertenklassen der Weylgruppe zu den Greenfunktionen ist nicht korrekt, wie schon an den Werten auf dem Einselement zu sehen ist. Wir erklären deshalb kurz, wie sich die richtige Zuordnung ergibt: Die Werte auf dem Einselement legen die Reihenfolge bis auf vier Möglichkeiten fest, weil zweimal zwei Typen von Tori gleiche Ordnung haben. Die richtige unter diesen Möglichkeiten liefern die Orthogonalitätsrelationen aus Lemma 5.1(b), denn

die Konjugiertenklassen der Weylgruppe, die zu den Tori mit gleicher Ordnung gehören, unterscheiden sich jeweils durch ihre Zentralisatorordnung (siehe Tabelle 2).

Wir halten wieder das Ergebnis dieses Abschnittes in einem Satz fest.

**Satz 5.2** *Die Greenfunktionen der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in den Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  sind der Tabelle 15 zu entnehmen. Dabei werden die Greenfunktionen des Zentralisators zum halbeinfachen Klassentyp  $h_i$  als Funktionen auf den Klassentypen mit halbeinfachem Anteil  $h_i$  aufgefaßt. In Tabelle 16 sind entsprechend die Greenfunktionen der Zentralisatoren halbeinfacher Elemente der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  angegeben.*

### Anmerkung

Es ist leicht zu sehen, daß in Gruppen mit Dynkin-Typ  $C_l$  genau die Tori zu den Doppelpartitionen der Form  $(-, \beta)$  ( $\beta$  eine Partition von  $l$ ) nicht in einer echten Leviuntergruppe liegen. Die dazu gehörenden Greenfunktionen lassen sich also nicht durch Harish-Chandra-Induktion errechnen. Für  $l > 3$  liefern somit die Harish-Chandra-Induktion und die Orthogonalitätsrelationen nicht genug Informationen, um die Werte der Greenfunktionen zu bestimmen. Die „rechnerischen“ Argumente, die wir in diesem Abschnitt für Gruppen mit Dynkin-Typ  $C_2$  und  $C_3$  benutzt haben, lassen sich also nicht für allgemeinere Aussagen verwenden.

## 6 Lusztig-Serien und Berechnung der Deligne-Lusztig-Charaktere

In diesem Abschnitt sei wieder  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ , falls die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  ungerade ist, und  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  bei gerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$ . Wir wollen anhand der Charakterformel in 2.1(b) die Deligne-Lusztig-Charaktere für die Gruppen  $\mathbf{G}^F$  ausrechnen und müssen hierzu noch die zu betrachtenden Paare  $(\mathbf{T}, \theta)$  parametrisieren.

Die verschiedenen Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$  bekommen wir durch Repräsentanten der  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklassen von Paaren  $(\mathbf{T}, \theta)$ ,  $\theta \in \hat{\mathbf{T}}^F$ . In den Abschnitten 2 und 3 haben wir bereits erklärt, wie diese Paare  $(\mathbf{T}, \theta)$  Paaren  $(\mathbf{T}^*, s)$  rationaler maximaler Tori  $\mathbf{T}^*$  der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^*$  und Elementen  $s \in \mathbf{T}^{*F^*}$  entsprechen, und diese Zuordnung in Satz 3.2 explizit angegeben. Dabei entsprechen den  $\mathbf{G}^F$ -Klassen der  $(\mathbf{T}, \theta)$  die  $\mathbf{G}^{*F^*}$ -Klassen der  $(\mathbf{T}^*, s)$ .

Weiter wissen wir aus Abschnitt 2, wie die irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  in Lusztig-Serien zerfallen. Zu einem halbeinfachen Element  $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$  besteht die Lusztig-Serie  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$  aus den irreduziblen Konstituenten der Deligne-Lusztig-Charaktere zu den Paaren  $(\mathbf{T}^*, s')$ , für die  $s$  und  $s'$  in  $\mathbf{G}^{*F^*}$  konjugiert sind.

Wir können jetzt genauso vorgehen wie in Abschnitt 4.1, wo wir die halbeinfachen Klassen von  $\mathbf{G}^F$  bestimmt haben. Dabei nutzen wir aus, daß die in diesem Abschnitt betrachteten Gruppen  $\mathbf{G}$  nach den Bemerkungen 1.1 und 1.2 ein zusammenhängendes Zentrum haben. Daraus folgt, daß auch in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^*$  sämtliche Zentralisatoren halbeinfacher Elemente zusammenhängend sind (siehe Digne-Michel [13, 13.15(ii)]). Um auch die Lusztig-Serien und schließlich die irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  unabhängig von  $q$  zu endlich vielen Familien zusammenfassen zu können, machen wir folgende Definition.

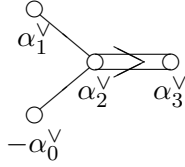
**Definition 6.1** Wir sagen, daß zwei Lusztig-Serien  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s_1))$  und  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s_2))$  *vom gleichen Typ* sind, wenn die halbeinfachen Elemente  $s_1$  und  $s_2$  im gleichen halbeinfachen Klassentyp von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  liegen.

Die Parametrisierung der Typen von Lusztig-Serien von  $\mathbf{G}^F$  ist also durch die Parametrisierung der halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  gegeben. Parameter für die halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , Repräsentanten für die darin liegenden Klassen, Repräsentanten dieser Klassen in den verschiedenen Typen maximaler Tori von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  und den Dynkin-Typ des zugehörigen Zentralisators finden wir, wie in Abschnitt 4.1 beschrieben. Nur benutzen wir jetzt statt des Wurzelsystems von  $\mathbf{G}$  das Kowurzelsystem und statt des maximalen Torus  $\mathbf{T}$  der Diagonalelemente von  $\mathbf{G}$  den in Abschnitt 3 definierten dualen Torus  $\mathbf{T}^* = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'} / \mathbb{Z}$  sowie die Repräsentanten der Typen maximaler Tori von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  aus Tabelle 4.

Von den Zentralisatoren halbeinfacher Klassen in  $\mathbf{G}^{*F^*}$  brauchen wir jetzt nur den Dynkin-Typ zu kennen, da die Zerlegung der zugehörigen Deligne-Lusztig-Charaktere in irreduzible Konstituenten nur vom Dynkin-Typ abhängt (darauf gehen wir im folgenden Abschnitt genauer ein). Der Dynkin-Typ ist wieder sofort am erweiterten Dynkin-



Diagramm abzulesen, das für die duale Gruppe so aussieht:



Mit  $\alpha_0^\vee$  bezeichnen wir dabei die höchste Kowurzel bezüglich unseres Fundamentalsystems  $\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee\}$  des Kowurzelsystems von  $\mathbf{G}$  (dies ist nicht die zur höchsten Wurzel  $\alpha_0$  gehörende Kowurzel, die wir in 4.1 als  $(\alpha_0)^\vee$  geschrieben haben).

Aus den Überlegungen zu Punkt (3) in Abschnitt 4.1 wissen wir, daß für ein festes halbeinfaches Element  $s \in \mathbf{G}^{*F^*}$  die zugehörigen  $\mathbf{G}^{*F^*}$ -Konjugiertenklassen von Paaren  $(\mathbf{T}^*, s)$  genau den  $F^*$ -Konjugiertenklassen der Weylgruppe des Zentralisators  $C_{\mathbf{G}^*}(s)$  entsprechen. Wir brauchen hier immer nur einen Repräsentanten jeder Klasse von  $(\mathbf{T}^*, s)$  zu bestimmen.

Den Parametern für die halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  sind wie in 4.1 Zentralisatoren  $\mathbf{C}_\Psi^*$  mit getwistetem Frobeniusmorphismus  $(F^{*n^{-1}})$  zugeordnet. Für die Anwendung im nächsten Abschnitt merken wir uns noch explizit die Elemente der Konjugiertenklassen und der  $(F^{*n^{-1}})$ -Konjugiertenklassen der Weylgruppe von  $\mathbf{C}_\Psi^*$ .

Das Ergebnis wird wieder in einem Satz zusammengefaßt.

**Satz 6.2** *Sei  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ , falls die Charakteristik von  $\mathbf{K}$  ungerade ist, und  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  bei gerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$ .*

- (a) *In der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^*$  gibt es 34 mögliche Parameter für halbeinfache Klassentypen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$ . Diese sind in Tabelle 17 zusammen mit dem Dynkin-Typ des zugehörigen Zentralisators und den Vielfachheiten  $n_{(\Pi, w)}$  aufgelistet (analog zu Tabelle 6). Die Typen von Lusztig-Serien von  $\mathbf{G}^F$  werden im Rest der Arbeit entsprechend dieser Tabelle mit  $g_1$  bis  $g_{34}$  bezeichnet.*
- (b) *Für die Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  sind in Tabelle 18 Repräsentanten für die halbeinfachen Klassen in den halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  angegeben. Sie sind als Elemente im Torus  $\mathbf{T}^* = X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$  mit Hilfe der in Abschnitt 3 eingeführten Schreibweise dargestellt. Die Parameterbereiche sind auf die gleiche Art wie in den Tabellen 8 bis 10 beschrieben. Für genügend große  $q$  kommen hier alle 34 Typen von Lusztig-Serien vor.*
- (c) *Die Tabelle 19 enthält die Information wie in Tabelle 18 für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$ . Hier kommen die Typen von Lusztig-Serien  $g_2$  bis  $g_5$  sowie  $g_{10}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{14}$  und  $g_{15}$  nicht vor.*
- (d) *Sei zunächst  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$ . Weiter sei  $g_i(k_1, \dots)$  ein Repräsentant einer halbeinfachen Klasse von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  aus Tabelle 18 und  $\mathbf{T}_j^{*F^*}$  Repräsentant eines maximalen Torus von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  aus Tabelle 4. Wenn es ein Paar  $(\mathbf{T}_j^{*F^*}, s)$  gibt, so daß  $s$  zu  $g_i(k_1, \dots)$  konjugiert ist, dann bezeichnen wir den zu diesem Paar gehörenden Deligne-Lusztig-Charakter mit*

$$R_{i,j}(k_1, \dots) \quad \text{oder} \quad R_{i,j,k}(k_1, \dots).$$

Dabei wird der dritte Index  $k$  nur benutzt, wenn es mehrere Deligne-Lusztig-Charaktere zu Paaren der beschriebenen Art gibt (analog zu unseren Bezeichnungen für die Greenfunktionen in Satz 4.3(f)). Wir sagen auch, daß ein solcher Deligne-Lusztig-Charakter vom Typ  $R_{i,j}$  beziehungsweise  $R_{i,j,k}$  ist. In Tabelle 20 ist für alle vorkommenden  $R_{i,j}$  und  $R_{i,j,k}$  ein passendes Element  $s \in \mathbf{T}_j^{*F^*}$  angegeben, indem die Parameter  $l_1, \dots$  für die Elemente  $s_j(l_1, \dots) \in \mathbf{T}_j^{*F^*}$  (siehe Tabelle 4) in Abhängigkeit von den Parametern  $k_1, \dots$  ausgedrückt werden (analog zur Beschreibung der Mengen  $S_{i,j}$ ,  $S_{i,j,k}$  in Tabelle 11).

Eine entsprechende Beschreibung der Deligne-Lusztig-Charaktere für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  steht in Tabelle 21.

Wir haben nun alle Informationen zusammengetragen, um explizit mit Hilfe der Charakterformel in 2.1(b) sämtliche Werte der Deligne-Lusztig-Charaktere der Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  und  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  hinzuschreiben. Da die Tafeln der Deligne-Lusztig-Charaktere (wie auch die endgültigen Charaktertafeln dieser Gruppen) zu umfangreich sind, um im Anhang abgedruckt zu werden, wollen wir uns an einem Beispiel ansehen, wie sich jeder Wert eines Deligne-Lusztig-Charakters aus den bereits vorhandenen Tabellen konstruieren läßt (die Tafeln sind also in komprimierter Form eigentlich schon abgedruckt):

**Beispielrechnung:** Wir betrachten  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  und die Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_{18,2}(k_1, k_2, k_3)$  auf den Klassen  $c_{4,1}(i_1, i_2)$ . Der Charakterwert ergibt sich aus der Charakterformel 2.1(b) und den Tabellen 5, 11, 15 und 20. Zuerst sehen wir in Tabelle 15 nach, ob es Greenfunktionen für die Zentralisatoren zum halbeinfachen Klassentyp  $h_4$  und Tori vom Typ  $\mathbf{T}_2$  gibt. Wir finden eine solche Greenfunktion  $Q_{4,2}$  und diese hat auf der unipotenten Klasse, die zu unserem Klassentyp  $c_{4,1}$  führt, den Wert

$$(q + 1)^2.$$

Nun brauchen wir alle Repräsentanten des halbeinfachen Anteils von  $c_{4,1}(i_1, i_2)$  im Torus  $\mathbf{T}_2^F$  aus Tabelle 3, die gemäß der Charakterformel zu dieser Greenfunktion gehören. Diese haben wir unter  $S_{4,2}$  in Tabelle 11 angegeben. Es handelt sich jeweils um die zwei Elemente

$$t_2(i_2, i_2, 2i_2 - i_1, 2i_2) \quad \text{und} \quad t_2(i_2, i_2, i_1, 2i_2).$$

Schließlich müssen wir noch aus Tabelle 20 das zum Deligne-Lusztig-Charakter gehörende Element im Torus  $\mathbf{T}_2^{*F^*}$  (Tabelle 4) ablesen, wir finden

$$s_2(k_1, k_1, k_2, k_3).$$

Aus Tabelle 5 ergibt sich der dazu gehörende Charakter  $\theta_2(k_1, k_1, k_2, k_3)$  von  $\mathbf{T}_2^F$  (wir verwenden die in Vereinbarung 1.4 festgelegten Bezeichnungen für generische Einheitswurzeln in  $\mathbb{C}^\times$ ):

$$t_2(j_1, j_2, j_3, j_4) \mapsto \zeta_1^{j_1 k_1 + j_2 k_1 + j_4 k_3} \zeta_1^{-j_3 k_2} \zeta_2^{q j_4 k_2}$$

Die Charakterformel liefert nun als Wert der Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_{18,2}(k_1, k_2, k_3)$  auf den Klassen  $c_{4,1}(i_1, i_2)$ :

$$(q + 1)^2 \cdot (\zeta_1^{2i_2 k_1 + 2i_2 k_3} \zeta_1^{-2i_2 k_2 + i_1 k_2} \zeta_2^{2q i_2 k_2} + \zeta_1^{2i_2 k_1 + 2i_2 k_3} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{2q i_2 k_2}).$$

Wir benutzen wieder MAPLE, um die Deligne-Lusztig-Charaktere in eine Computerdatei zu schreiben. Das Programm erhält als Eingabe genau die Informationen aus den Tabellen 5, 11, 15 und 20 im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  beziehungsweise den Tabellen 5, 12, 16 und 21 im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$ .

### Anmerkung

Im Fall der Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  wissen wir schon, daß  $\mathbf{G}^F$  und  $\mathbf{G}^{*F^*}$  isomorph sind. Außerdem operiert nach Tabelle 1 die Weylgruppe auf  $X$  und  $Y$  in gleicher Weise. Wir könnten hier also für die Parametrisierung der Deligne-Lusztig-Charaktere auch darauf verzichten, die duale Gruppe zu betrachten, und die Ergebnisse aus Abschnitt 4.1 übernehmen. Im nächsten Abschnitt werden wir aber sehen, daß unsere Unterscheidung von  $\mathbf{G}^F$  und  $\mathbf{G}^{*F^*}$  für die Anwendung von Satz 2.2 zweckmäßig ist.

## 7 Zerlegung der Deligne-Lusztig-Charaktere in irreduzible Konstituenten

Sei wieder  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  bei ungerader Charakteristik und  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  bei gerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$ . In diesem Abschnitt wollen wir für die Gruppen  $\mathbf{G}^F$  die irreduziblen Charaktere parametrisieren. Für die meisten Typen von Lusztig-Serien können wir das tun, indem wir die irreduziblen Charaktere als Linearkombinationen der von uns berechneten Deligne-Lusztig-Charaktere angeben (diese Charaktere sind also uniforme Klassenfunktionen). Für die übrigen drei Typen von Lusztig-Serien können wir Parameter für die gesuchten irreduziblen Charaktere und auch ihre Vielfachheiten in den zugehörigen Deligne-Lusztig-Charakteren angeben. In diesen Fällen spannen jedoch die Deligne-Lusztig-Charaktere nicht den gleichen Teilraum von Klassenfunktionen auf wie ihre irreduziblen Konstituenten. Zur Bestimmung der Charakterwerte benötigen wir also noch zusätzliche nicht-uniforme Klassenfunktionen. Wir definieren in diesem Abschnitt zunächst solche nicht-uniformen Funktionen formal als Linearkombinationen der gesuchten Charaktere, und zwar so, daß diese senkrecht auf dem Raum der uniformen Funktionen stehen (bezüglich des Skalarproduktes von Klassenfunktionen auf  $\mathbf{G}^F$ ). Die irreduziblen Charaktere dieser Lusztig-Serien werden dann wieder umgekehrt als Linearkombinationen der Deligne-Lusztig-Charaktere und der Senkrechtfunktionen ausgedrückt. Die Werte der Senkrechtfunktionen werden im nächsten Abschnitt ausgerechnet, so daß wir dann die vollständigen Charaktertafeln der Gruppen  $\mathbf{G}^F$  gefunden haben. Ein wichtiges Hilfsmittel ist im jetzigen Abschnitt der Satz 2.2 über Lusztigs Jordan-Zerlegung der Charaktere von  $\mathbf{G}^F$ , mit dem die hier gestellte Aufgabe auf die Parametrisierung der unipotenten Charaktere in den Zentralisatoren halbeinfacher Elemente der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^{*F^*}$  zurückgeführt wird. Wir wollen an dieser Stelle nochmal betonen, daß für eine zusammenhängende reduktive Gruppe die Beschreibung ihrer unipotenten Charaktere nur von ihrem Dynkin-Typ abhängt, siehe hierzu Digne-Michel [13, 13.20].

Bevor wir mit der Behandlung der verschiedenen Fälle beginnen, wollen wir noch eine Bezeichnungsweise für die irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  festlegen. Sei  $\mathbf{C}^*$  Zentralisator zum halbeinfachen Klassentyp  $g_i$  von  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , und seien  $\chi_1, \dots, \chi_n$  die unipotenten Charaktere von  $\mathbf{C}^{*F^*}$ . Dann sollen die zugehörigen Charaktere der Lusztig-Serie zu  $g_i(k_1, \dots)$  mit  $\chi_{i,r}(k_1, \dots)$ ,  $1 \leq r \leq n$ , bezeichnet werden. Die Menge von Charakteren  $\chi_{i,r}(k_1, \dots)$ , wobei die Parameter  $k_1, \dots$  die in Tabelle 18 beziehungsweise 19 angegebenen Bereiche durchlaufen, wollen wir den *Charaktertyp*  $\chi_{i,r}$  nennen. Die Charaktertypen entsprechen den Zeilen der generischen Charaktertafel von  $\mathbf{G}^F$ .

### Lusztig-Serien-Typen $g_{25}$ bis $g_{34}$

Die Typen von Lusztig-Serien  $g_{25}$  bis  $g_{34}$  gehören zu den regulären halbeinfachen Elementen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$ . Sei  $\tilde{\mathbf{T}}^*$  ein rationaler maximaler Torus von  $\mathbf{G}^*$  und  $s \in \tilde{\mathbf{T}}^{*F^*}$  regulär halbeinfach. Dann ist  $\tilde{\mathbf{T}}^*$  der Zentralisator von  $s$  in  $\mathbf{G}^*$ , und damit wird  $s$  bei Konjugation mit einem Element außerhalb  $\tilde{\mathbf{T}}^*$  nicht fest gelassen. Das bedeutet für das zu  $(\tilde{\mathbf{T}}^*, s)$  gehörende Paar  $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$ , daß der Charakter  $\theta$  von  $\tilde{\mathbf{T}}^F$  bei Konjugation von  $\tilde{\mathbf{T}}$  mit einem Element aus  $N(\tilde{\mathbf{T}})^F \setminus \tilde{\mathbf{T}}^F$  nicht festgelassen wird ( $\theta$  ist also in *allgemeiner Lage* nach der

Sprechweise in Carter [6, Definition vor 7.3.5]). In diesem Fall folgt aus der Orthogonalitätsrelation für die Deligne-Lusztig-Charaktere, daß  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{C}}\theta$  bis auf ein Vorzeichen bereits irreduzibel ist; vergleiche Carter [6, 7.3.5] oder Digne-Michel [13, Bemerkung nach 13.1]. Das Vorzeichen lesen wir einfach am Charaktergrad ab, der eine positive ganze Zahl sein muß.

### Lusztig-Serien-Typen $g_2$ bis $g_5$ und $g_8$ bis $g_{24}$

Aus Tabelle 17 sehen wir, daß die Dynkin-Diagramme der zu diesen halbeinfachen Klassentypen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  gehörenden Zentralisatoren in  $\mathbf{G}^*$  nur aus Komponenten vom Typ A bestehen. Für solche Gruppen haben Lusztig und Srinivasan in [29] gezeigt, daß ihre unipotenten Charaktere uniform sind und wie sie sich als Linearkombinationen von Deligne-Lusztig-Charakteren schreiben lassen. Wir fassen das Hauptergebnis von [29] in einem Lemma zusammen.

**Lemma 7.1** *Sei  $\mathbf{C}$  eine zusammenhängende reductive algebraische Gruppe mit Frobeniusmorphismus  $F$ . Das Dynkin-Diagramm von  $\mathbf{C}$  bestehe nur aus Komponenten vom Typ A. Sei  $\mathbf{T}$  ein rationaler maximaler Torus von  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{W}$  die Weylgruppe von  $\mathbf{C}$  bezüglich  $\mathbf{T}$ . Für einen weiteren rationalen maximalen Torus  $\tilde{\mathbf{T}} \leq \mathbf{C}$ , der aus  $\mathbf{T}$  durch Twisten mit  $w \in \mathbf{W}$  entsteht, bezeichnen wir den Deligne-Lusztig-Charakter  $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{C}}1$  mit  $R_w$  ( $w$  ist durch  $\tilde{\mathbf{T}}$  nur bis auf  $F$ -Konjugation festgelegt, aber  $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{C}}1$  hängt ja nur von der  $F$ -Konjugiertenklasse von  $w$  ab).  $\hat{\mathbf{W}}^F$  sei die Teilmenge der irreduziblen Charaktere von  $W$ , die auf den  $F$ -Bahnen von  $\mathbf{W}$  konstant sind, und zu  $\phi \in \hat{\mathbf{W}}^F$  sei  $V_\phi$  ein  $\mathbf{W}$ -Modul mit Charakter  $\phi$ . Zu jedem solchen  $V_\phi$  gibt es einen Vektorraumautomorphismus  $\alpha_\phi$  mit endlicher Ordnung, so daß für alle  $w \in \mathbf{W}$*

$$\alpha_\phi^{-1}w\alpha_\phi = F(w)$$

(als Automorphismus von  $V_\phi$ ) gilt. Außerdem gibt es zu jedem solchen  $\alpha_\phi$  eine Einheitswurzel  $\varepsilon_\phi \in \mathbb{C}$ , so daß die Abbildung

$$\phi \mapsto R_\phi := \varepsilon_\phi \frac{1}{|\mathbf{W}|} \sum_{w \in \mathbf{W}} \text{Spur}(w\alpha_\phi, V_\phi) R_w$$

eine Bijektion von der Menge  $\hat{\mathbf{W}}^F$  in die Menge der unipotenten Charaktere von  $\mathbf{C}^F$  ist.

**Beweis:** Siehe Lusztig und Srinivasan [29, Theorem 2.2]. □

Dieses Lemma können wir auf die Zentralisatoren  $\mathbf{C}^* \subseteq \mathbf{G}^*$  zu den halbeinfachen Klassentypen  $g_2$  bis  $g_5$  und  $g_8$  bis  $g_{24}$  von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  anwenden: Aus den Rechnungen des letzten Abschnittes kennen wir die zugehörigen Weylgruppen und ihre  $F^*$ -Konjugiertenklassen. Die Charaktertafeln dieser Weylgruppen (die isomorph zu einer der symmetrischen Gruppen  $S_2, S_3, S_4$  oder einem direkten Produkt von  $S_2$  sind) sind leicht zu ermitteln. Außerdem sind auch die Automorphismen  $\alpha_\phi$  aus dem Lemma jeweils leicht zu beschreiben

(ohne daß wir die Moduln  $V_\phi$  zu den Charakteren der Weylgruppen genau kennen). Denn entweder operiert der Frobeniusmorphismus auf der Weylgruppe wie ein innerer Automorphismus, oder die zu betrachtenden Charaktere sind linear, so daß das zugehörige  $\alpha_\phi$  nur die Multiplikation mit einer Einheitswurzel sein kann; beide Fälle werden gleich an Beispielen illustriert. Wir können also mit Hilfe des Lemmas genau angeben, wie sich die unipotenten Charaktere der  $\mathbf{C}^{*F^*}$  bis auf Multiplikation mit einer Einheitswurzel als Linearkombination der Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_w$  schreiben lassen. Ersetzen wir nun die  $R_w$  durch die ihnen zugeordneten Deligne-Lusztig-Charaktere von  $\mathbf{G}^F$ , so erhalten wir nach Satz 2.2 bis auf Einheitswurzeln als Vorfaktoren deren Zerlegung in irreduzible Charaktere von  $\mathbf{G}^F$ . Die Vorfaktoren sind dann wieder am Charakterwert auf dem Einselement abzulesen, der bei einem irreduziblen Charakter eine positive ganze Zahl sein muß.

**Beispielrechnung:** Wir betrachten im folgenden  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$ .

- (a) Lusztig-Serien vom Typ  $g_8$ : Sei  $\mathbf{C}^* \subseteq \mathbf{G}^*$  der Zentralisator unserer Repräsentanten der Klassen von  $g_8$  aus Tabelle 18. Die Weylgruppe  $\mathbf{W}_{\mathbf{C}^*}$  von  $\mathbf{C}^*$  als Untergruppe der Weylgruppe  $\mathbf{W}$  von  $\mathbf{G}^*$  besteht aus den Elementen  $\{1, s_1, s_2, s_1s_2s_1, s_1s_2, s_2s_1\}$ . Sie ist isomorph zur symmetrischen Gruppe  $S_3$ , der Frobeniusmorphismus operiert trivial darauf und die Konjugiertenklassen (sowie  $F$ -Konjugiertenklassen) sind  $C_1 = \{1\}$ ,  $C_2 = \{s_1, s_2, s_1s_2s_1\}$  und  $C_3 = \{s_1s_2, s_2s_1\}$ . In dieser Reihenfolge gehören zu den Klassen die Typen von Deligne-Lusztig-Charakteren  $R_{8,1}$ ,  $R_{8,3}$  und  $R_{8,7}$ . Dies wissen wir alles aus den Rechnungen in Abschnitt 6. Die Charaktertafel von  $\mathbf{W}_{\mathbf{C}^*}$  ist:

	$C_1$	$C_2$	$C_3$
$\phi_1$	1	1	1
$\phi_2$	2	0	-1
$\phi_3$	1	-1	1

Lemma 7.1 (zusammen mit Satz 2.2) sagt nun, daß für geeignete Einheitswurzeln  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  die Klassenfunktionen

$$\begin{aligned} \chi_{8,1}(k_1, k_2) &:= \varepsilon_1 \frac{1}{6} (R_{8,1}(k_1, k_2) + 3R_{8,3}(k_1, k_2) + 2R_{8,7}(k_1, k_2)) \\ \chi_{8,2}(k_1, k_2) &:= \varepsilon_2 \frac{1}{6} (2R_{8,1}(k_1, k_2) - 2R_{8,7}(k_1, k_2)) \\ \chi_{8,3}(k_1, k_2) &:= \varepsilon_3 \frac{1}{6} (R_{8,1}(k_1, k_2) - 3R_{8,3}(k_1, k_2) + 2R_{8,7}(k_1, k_2)) \end{aligned}$$

die irreduziblen Charaktere der Lusztig-Serie  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (g_8(k_1, k_2)))$  sind. Das Ausrechnen dieser Linearkombinationen auf dem Einselement zeigt, daß wir  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$  wählen müssen.

- (b) Lusztig-Serien vom Typ  $g_9$ : Hier können wir den gleichen Zentralisator  $\mathbf{C}^*$  wie im Fall  $g_8$  betrachten. Jetzt operiert aber der Frobeniusmorphismus nicht mehr trivial auf der Weylgruppe  $\mathbf{W}_{\mathbf{C}^*}$ . Die Operation läßt sich in diesem Fall durch einen inneren Automorphismus beschreiben, es gilt für  $w_0 := s_1s_2s_1$ :

$$F^*(w) = w_0^{-1} w w_0 \quad \text{für alle } w \in \mathbf{W}_{\mathbf{C}^*}$$

(Besitzt die Gruppe  $\mathbf{C}$  in Lemma 7.1 ein zusammenhängendes Dynkin-Diagramm  $A_m$ , so läßt sich die Operation des Frobeniusmorphismus auf der Weylgruppe im-

mer in dieser Weise beschreiben, vergleiche Lusztig-Srinivasan [29, 2.4].) Insbesondere läßt  $F^*$  die Konjugiertenklassen von  $\mathbf{W}_{\mathbf{C}^*}$  invariant, so daß alle irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{W}_{\mathbf{C}^*}$  in  $\hat{\mathbf{W}}_{\mathbf{C}^*}^{F^*}$  liegen. Die  $F^*$ -Konjugiertenklassen sind nun  $\tilde{C}_1 = \{1, s_1 s_2, s_2 s_1\}$ ,  $\tilde{C}_2 = \{s_1 s_2 s_1\}$  und  $\tilde{C}_3 = \{s_1, s_2\}$ , und dazu gehören die Typen von Deligne-Lusztig-Charakteren  $R_{9,5}$ ,  $R_{9,8}$  und  $R_{9,10}$ . Anwendung von Lemma 7.1 liefert hier mit geeigneten Einheitswurzeln  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  und  $\varepsilon_3$  die Klassenfunktionen (Koeffizient von  $R_w$  ist  $\phi(w w_0)$ )

$$\begin{aligned}\chi_{9,1}(k_1, k_2) &:= \varepsilon_1 \frac{1}{6} (3R_{9,5}(k_1, k_2) + R_{9,8}(k_1, k_2) + 2R_{9,10}(k_1, k_2)) \\ \chi_{9,2}(k_1, k_2) &:= \varepsilon_2 \frac{1}{6} (2R_{9,8}(k_1, k_2) - 2R_{9,10}(k_1, k_2)) \\ \chi_{9,3}(k_1, k_2) &:= \varepsilon_3 \frac{1}{6} (-3R_{9,5}(k_1, k_2) + R_{9,8}(k_1, k_2) + 2R_{9,10}(k_1, k_2))\end{aligned}$$

als irreduzible Charaktere der Lusztig-Serie  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (g_9(k_1, k_2)))$ . Die Werte auf dem Einselement zeigen, daß  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  und  $\varepsilon_3 = -1$  ist.

- (c) Lusztig-Serien vom Typ  $g_{10}$ : Sei nun  $\mathbf{C}^* \subseteq \mathbf{G}^*$  der Zentralisator zu unseren Repräsentanten von  $g_{10}$ . Die Weylgruppe von  $\mathbf{C}^*$  ist eine abelsche Gruppe, isomorph zu  $S_2 \times S_2$ , und der Frobeniusmorphismus operiert trivial darauf. Ihre irreduziblen Charaktere sind also linear und lassen sich sofort hinschreiben. Das Vorgehen ist hier wie im Beispiel (a).
- (d) Lusztig-Serien vom Typ  $g_{14}$ : Wir können den gleichen Zentralisator und die gleiche Weylgruppe wie im Fall  $g_{10}$  betrachten. Jetzt liegen jedoch zwei der Elemente der Weylgruppe in einer  $F^*$ -Bahn, so daß die zu betrachtenden Charaktere aus  $\hat{\mathbf{W}}_{\mathbf{C}^*}^{F^*}$  eine echte Teilmenge von  $\hat{\mathbf{W}}_{\mathbf{C}^*}$  bilden. Die zugehörigen Automorphismen  $\alpha_\phi$  aus Lemma 7.1 sind Automorphismen eines eindimensionalen Vektorraumes (weil alle Charaktere linear sind) und von endlicher Ordnung; es handelt sich also einfach um die Multiplikation mit einer Einheitswurzel. Wir können jetzt wieder so vorgehen, wie in den anderen Beispielen, nur daß wir zum Schluß statt der Vorfaktoren  $\varepsilon_\phi$  die Produkte  $\varepsilon_\phi \alpha_\phi$  anhand der Werte auf dem Einselement bestimmen.

Mit den gleichen Überlegungen wie in den vorgestellten Beispielen lassen sich auch die irreduziblen Charaktere der anderen Lusztig-Serien mit Typen  $g_2$  bis  $g_5$  oder  $g_8$  bis  $g_{24}$  finden. (Übrigens fallen auch die Lusztig-Serien der Typen  $g_{25}$  bis  $g_{34}$  in den Anwendungsbereich von Lemma 7.1, da Tori als Gruppen mit Dynkin-Typ  $A_0$  und trivialer Weylgruppe aufgefaßt werden können.)

### Lusztig-Serien-Typen $g_1$ , $g_6$ und $g_7$

Für die Behandlung der übrigen Lusztig-Serien benötigen wir noch die Parametrisierung der unipotenten Charaktere in Gruppen mit Dynkin-Typ  $B_l$  beziehungsweise  $C_l$  mit  $l = 2, 3$ . (Diese muß nach Satz 2.2 für Gruppen vom Typ  $B_l$  und  $C_l$  mit jeweils gleichem  $l$  übereinstimmen.) Sei also  $\mathbf{C}$  eine zusammenhängende reductive Gruppe vom Dynkin-Typ  $B_l$  oder  $C_l$ .

Zunächst können auch in diesen Fällen zu den Charakteren  $\phi$  der Weylgruppe von  $\mathbf{C}$  genau wie in Lemma 7.1 die Klassenfunktionen  $R_\phi$  gebildet werden, die auch *Fastcharaktere* heißen (hier operiert  $F$  trivial auf der Weylgruppe, und die  $\varepsilon_\phi$  sind eins). Wir

bekommen so jedoch im allgemeinen noch nicht die unipotenten Charaktere, sondern nur gewisse *rationale* Linearkombinationen davon. Allerdings sind die  $R_\phi$  eine erste „Näherung“ an die gesuchte Zerlegung der Deligne-Lusztig-Charaktere, die eine Unterteilung der unipotenten Charaktere in *Familien* erlaubt; dies ist in Carter [6, Abschnitt 12.3] erklärt.

Die Charaktere der Weylgruppe von  $\mathbf{C}$  parametrisieren neben den Fastcharakteren  $R_\phi$  auch eine Teilmenge der unipotenten Charaktere von  $\mathbf{C}^F$ : Sei  $\mathbf{T}$  ein maximal zerfallender Torus von  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{B}$  eine rationale Boreluntergruppe von  $\mathbf{C}$ , die  $\mathbf{T}$  enthält. In diesem Fall beschreibt der Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{C}}$  die Harish-Chandra-Induktion (siehe Digne-Michel [13, Bemerkung nach 11.1]), so daß  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{C}}1 = 1_{\mathbf{B}^F}^{\mathbf{C}^F}$  gilt. Die irreduziblen Konstituenten dieses Charakters werden *unipotente Hauptseriencharaktere* genannt und stehen nach einem Ergebnis von Howlett und Lehrer in Bijektion zu den irreduziblen Charakteren der Weylgruppe von  $\mathbf{C}$ . (Die Einteilung der irreduziblen Charaktere einer Gruppe vom Lie-Typ in *Harish-Chandra-Serien* und das Ergebnis der Theorie von Howlett und Lehrer sind in Digne-Michel [13, Chapter 6] beschrieben. Eine ausführliche Darstellung der Howlett-Lehrer-Theorie enthält Carter [6, Chapter 10].)

Der Zusammenhang zwischen diesen Arten, den Charakteren der Weylgruppe von  $\mathbf{C}$  unipotente Klassenfunktionen von  $\mathbf{C}^F$  zuzuordnen, wurde von Lusztig mit Hilfe von sogenannten *Fourier-Transformationsmatrizen* beschrieben (siehe Carter [6, 12.3]).

Wir kommen nun zur expliziten Parametrisierung der unipotenten Charaktere in den beiden von uns benötigten Fällen, sie ist in Carter [6, Abschnitt 13.8] zu finden. Die Charaktertafeln der Weylgruppen vom Typ  $B_l$ , die wir zur Berechnung der  $R_\phi$  brauchen, werden uns von GAP geliefert. Den Charakteren dieser Tafeln sind ebenso wie den Konjugiertenklassen Doppelpartitionen als Parameter zugeordnet. In Carter [6, 11.4.2] wird diese Zuordnung erklärt sowie zu jeder Doppelpartition ein *Symbol* definiert, das aus zwei Zeilen natürlicher Zahlen besteht. Solche Symbole werden als Parameter für die unipotenten Charaktere von  $\mathbf{C}^F$  benutzt.

Sei jetzt  $\mathbf{C}$  vom Dynkin-Typ  $B_2 = C_2$ . Die Charaktertafel der Weylgruppe von  $\mathbf{C}$  ist:

		(11, -)	(1, 1)	(2, -)	(-, 11)	(-, 2)
$\begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix}$	$\phi_{(2,-)}$	1	1	1	1	1
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\phi_{(1,1)}$	2	0	0	-2	0
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\phi_{(11,-)}$	1	1	-1	1	-1
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\phi_{(-,2)}$	1	-1	1	1	-1
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\phi_{(-,11)}$	1	-1	-1	1	1

Die erste Spalte enthält die den Charakteren zugeordneten Symbole. Die unipotenten Charaktere von  $\mathbf{C}^F$  werden durch diese und ein weiteres Symbol parametrisiert:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ - \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ - \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$



Die Familien unipotenter Charaktere sind dabei durch die Mengenklammern gekennzeichnet. Das Symbol  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ - \end{pmatrix}$  gehört zu einem kusalen Charakter und die übrigen zu den Hauptseriencharakteren. Bezeichnen wir die unipotenten Charaktere in der Reihenfolge der Symbole mit  $\chi_1, \dots, \chi_6$ , so besteht der folgende Zusammenhang mit den Fastcharakteren  $R_\phi$ :  $R_{\phi(2,-)} = \chi_1$  und  $R_{\phi(-,11)} = \chi_6$  sind irreduzibel, und für die vierelementige Familie ist

$$\begin{aligned} R_{\phi(1,1)} &= \frac{1}{2}(\chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5) \\ R_{\phi(11,-)} &= \frac{1}{2}(\chi_2 + \chi_3 - \chi_4 - \chi_5) \\ R_{\phi(-,2)} &= \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_3 + \chi_4 - \chi_5). \end{aligned}$$

Hieraus sehen wir, daß die Klassenfunktion

$$f := \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_3 - \chi_4 + \chi_5)$$

senkrecht auf allen  $R_\phi$  und damit auch auf allen Deligne-Lusztig-Charakteren von  $\mathbf{C}$  steht. Die Charaktere  $\chi_2, \dots, \chi_5$  lassen sich nun als Linearkombination der Klassenfunktionen  $R_{\phi(1,1)}$ ,  $R_{\phi(11,-)}$ ,  $R_{\phi(-,2)}$  und  $f$  schreiben, vermöge der (selbstinversen) Matrix

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist die zu der vierelementigen Familie gehörende Fourier-Transformationsmatrix.

Wir wenden nun Satz 2.2 für unsere Lusztig-Serien-Typen  $g_6$  und  $g_7$  an, deren Zentralisatoren  $\mathbf{C}^* \subseteq \mathbf{G}^*$  vom Dynkin-Typ  $B_2$  sind. Zu den Konjugiertenklassen der Weylgruppe von  $\mathbf{C}^*$  gehören in der Reihenfolge der Klassen in oben aufgeführter Charaktertafel die Deligne-Lusztig-Charaktertypen  $R_{6,1}$ ,  $R_{6,2}$ ,  $R_{6,3}$ ,  $R_{6,4}$  und  $R_{6,6}$  beziehungsweise  $R_{7,2}$ ,  $R_{7,4}$ ,  $R_{7,5}$ ,  $R_{7,8}$  und  $R_{7,9}$ . Einen in der Lusztig-Serie  $g_6(k_1, k_2)$  liegenden irreduziblen Charakter von  $\mathbf{G}^F$  bezeichnen wir mit  $\chi_{6,r}(k_1, k_2)$ , wenn er vermöge Satz 2.2 dem unipotenten Charakter  $\chi_r$ ,  $1 \leq r \leq 6$ , von  $\mathbf{C}^{*F^*}$  entspricht. (Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  kann hier und im folgenden entsprechend den Tabellen 18 und 19 jeweils der letzte Parameter weggelassen werden.) Die oben definierte Klassenfunktion  $f$  von  $\mathbf{C}^{*F^*}$  führt zu den Klassenfunktionen

$$f_6(k_1, k_2) := \frac{1}{2}(\chi_{6,2}(k_1, k_2) - \chi_{6,3}(k_1, k_2) - \chi_{6,4}(k_1, k_2) + \chi_{6,5}(k_1, k_2))$$

von  $\mathbf{G}^F$ , die senkrecht auf dem Raum der uniformen Funktionen von  $\mathbf{G}^F$  stehen. Die analogen Bezeichnungen benutzen wir im Fall  $g_7$ , insbesondere definieren wir die Senkrechtfunktionen

$$f_7(k_1, k_2) := \frac{1}{2}(\chi_{7,2}(k_1, k_2) - \chi_{7,3}(k_1, k_2) - \chi_{7,4}(k_1, k_2) + \chi_{7,5}(k_1, k_2)).$$

Mit Hilfe der Charaktertafel der Weylgruppe von  $\mathbf{C}^*$  und der beschriebenen Fourier-Transformationsmatrix können wir jetzt die Charaktere  $\chi_{6,r}(k_1, k_2)$  und  $\chi_{7,r}(k_1, k_2)$ ,  $1 \leq r \leq 6$ , als Linearkombinationen der Deligne-Lusztig-Charaktere und der Senkrechtfunktionen  $f_6(k_1, k_2)$  und  $f_7(k_1, k_2)$  von  $\mathbf{G}^F$  ausdrücken. Das Vorzeichen  $\varepsilon_{C_{\mathbf{G}^*(s)}^0} \cdot \varepsilon_{\mathbf{G}}$  aus Satz 2.2 können wir am Wert der Charaktere  $\chi_{6,1}(k_1, k_2)$  und  $\chi_{7,1}(k_1, k_2)$  auf dem Einselement ablesen; es ist  $+1$  im Fall  $g_6$  und  $-1$  im Fall  $g_7$ .

Zum Schluß kommen wir zum Lusztig-Serien-Typ  $g_1$ , zu dem die unipotenten Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  gehören. Hier müssen wir die unipotenten Charaktere von  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , also für Gruppen vom Dynkin-Typ  $B_3$  parametrisieren. Die Charaktertafel der Weylgruppe vom Typ  $B_3$ , einschließlich der den Charakteren zugeordneten Doppelpartitionen und Symbole, ist in Tabelle 22 angegeben. Zu den dort vorkommenden Symbolen, die wieder den unipotenten Hauptseriencharakteren entsprechen, müssen wir jetzt noch zwei weitere Symbole hinzunehmen, um alle unipotenten Charaktere zu parametrisieren. Diese beiden Symbole  $\begin{pmatrix} 013 \\ - \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} 0123 \\ 1 \end{pmatrix}$  entsprechen den Konstituenten des Harish-Chandra-induzierten kuspidalen unipotenten Charakters einer Standard-Leviuntergruppe vom Typ  $B_2$  (oben mit dem Symbol  $\begin{pmatrix} 012 \\ - \end{pmatrix}$  parametrisiert). Die unipotenten Charaktere zerfallen nun in sechs Familien, von denen vier aus einem Element und zwei aus vier Elementen bestehen:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ - \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 03 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 013 \\ - \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 02 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 013 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 012 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 01 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0123 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & \left\{ \begin{pmatrix} 0123 \\ 123 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die unipotenten Charaktere in der Reihenfolge dieser Symbole mit  $\chi_1, \dots, \chi_{12}$ , so gilt für ihre Vielfachheiten in den Fastcharakteren  $R_\phi$ :  $R_{\phi_{(3,-)}} = \chi_1$ ,  $R_{\phi_{(1,2)}} = \chi_6$ ,  $R_{\phi_{(11,1)}} = \chi_7$  und  $R_{\phi_{(-,111)}} = \chi_{12}$  sind irreduzibel und für die beiden vierelementigen Familien ist

$$\begin{aligned} R_{\phi_{(2,1)}} &= \frac{1}{2}(\chi_2 + \chi_3 + \chi_4 + \chi_5) \\ R_{\phi_{(-,3)}} &= \frac{1}{2}(\chi_2 + \chi_3 - \chi_4 - \chi_5) \\ R_{\phi_{(12,-)}} &= \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_3 + \chi_4 - \chi_5) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} R_{\phi_{(1,11)}} &= \frac{1}{2}(\chi_8 + \chi_9 + \chi_{10} + \chi_{11}) \\ R_{\phi_{(-,12)}} &= \frac{1}{2}(\chi_8 + \chi_9 - \chi_{10} - \chi_{11}) \\ R_{\phi_{(111,-)}} &= \frac{1}{2}(\chi_8 - \chi_9 + \chi_{10} - \chi_{11}). \end{aligned}$$

Wir definieren jetzt zu jeder der vierelementigen Familien eine Funktion, die senkrecht auf dem Raum der uniformen Klassenfunktionen von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  steht:

$$f_1 := \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_3 - \chi_4 + \chi_5)$$

und

$$f_2 := \frac{1}{2}(\chi_8 - \chi_9 - \chi_{10} + \chi_{11}).$$

Die oben angegebene Fourier-Transformationsmatrix beschreibt wieder, wie sich die Charaktere  $\chi_2, \dots, \chi_5$  als Linearkombination von  $R_{\phi_{(2,1)}}, R_{\phi_{(-,3)}}, R_{\phi_{(12,-)}}$  und  $f_1$  sowie die Charaktere  $\chi_8, \dots, \chi_{11}$  als Linearkombination von  $R_{\phi_{(1,11)}}, R_{\phi_{(-,12)}}, R_{\phi_{(111,-)}}$  und  $f_2$  ausdrücken lassen.

Nun wenden wir noch einmal Satz 2.2 an und erhalten die Parametrisierung der Charaktere der Lusztig-Serien vom Typ  $g_1$ . Wir bezeichnen einen Charakter der Lusztig-Serie zu  $g_1(k_1)$  mit  $\chi_{1,r}(k_1)$ , wenn er vermöge der Bijektion aus Satz 2.2 dem unipotenten Charakter  $\chi_r$ ,  $1 \leq r \leq 12$ , von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  entspricht. Damit führen die Senkrechtfunktionen  $f_1$  und  $f_2$  zu den Klassenfunktionen

$$f_{1,1}(k_1) := \frac{1}{2}(\chi_{1,2}(k_1) - \chi_{1,3}(k_1) - \chi_{1,4}(k_1) + \chi_{1,5}(k_1))$$

und

$$f_{1,2}(k_1) := \frac{1}{2}(\chi_{1,8}(k_1) - \chi_{1,9}(k_1) - \chi_{1,10}(k_1) + \chi_{1,11}(k_1)),$$

die senkrecht auf dem Raum der uniformen Klassenfunktionen von  $\mathbf{G}^F$  stehen.

## Zusammenfassung

In den oben beschriebenen Überlegungen war es nirgendwo notwendig, zu unterscheiden, ob  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  oder  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  ist, da weder die betrachteten Parametrisierungen unipotenter Charaktere noch die Werte der Deligne-Lusztig-Charaktere auf dem Einselement von der zugrunde liegenden Charakteristik abhängen. Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  brauchen nur einige Typen von Lusztig-Serien gar nicht betrachtet werden, da sie nicht vorkommen.

Wir fassen das Ergebnis dieses Abschnittes noch in einem Satz zusammen.

**Satz 7.2** *Sei zunächst  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$ . Alle irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  sind rationale Linearkombinationen von Deligne-Lusztig-Charakteren und den oben definierten Funktionen  $f_{1,1}(k_1)$ ,  $f_{1,2}(k_1)$ ,  $f_6(k_1, k_2)$  und  $f_7(k_1, k_2)$ , die senkrecht auf dem Raum der uniformen Klassenfunktionen von  $\mathbf{G}^F$  stehen. Diese Linearkombinationen sind der Tabelle 23 zu entnehmen. Werden in dieser Tabelle die Angaben, die die Lusztig-Serien-Typen  $g_2$  bis  $g_5$  sowie  $g_{10}$ ,  $g_{12}$ ,  $g_{14}$  und  $g_{15}$  betreffen, weggelassen, so ergibt sich die Beschreibung der irreduziblen Charaktere für die Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$ . In diesem Fall schreiben wir unnötige Parameter für die Charaktere nicht mit, insbesondere werden die Senkrechtfunktionen mit  $f_{1,1}$ ,  $f_{1,2}$ ,  $f_6(k_1)$  und  $f_7(k_1)$  bezeichnet.*

## Anmerkung

Für jeden Lusztig-Serien-Typ entspricht unser erster Charaktertyp dem Einscharakter des zugehörigen Zentralisators in der dualen Gruppe und der letzte Charaktertyp dem Steinberg-Charakter.

## 8 Berechnung der Senkrechtfunktionen

Sei wieder  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  bei ungerader Charakteristik von  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$ , falls  $\mathbf{K}$  die Charakteristik zwei hat. Wir nennen eine Klassenfunktion von  $\mathbf{G}^F$  *Senkrechtfunktion*, wenn sie senkrecht auf dem von den Deligne-Lusztig-Charakteren aufgespannten Teilraum der uniformen Funktionen steht. Im vorhergehenden Abschnitt haben wir Senkrechtfunktionen  $f_{1,1}(k_1)$ ,  $f_{1,2}(k_1)$  mit Konstituenten in den Lusztig-Serien zu  $g_1(k_1)$  und  $f_6(k_1, k_2)$ ,  $f_7(k_1, k_2)$  für die Lusztig-Serien zu  $g_6(k_1, k_2)$  und  $g_7(k_1, k_2)$  definiert. (Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  ist ein Parameter überflüssig, wir haben also  $f_{1,1}$ ,  $f_{1,2}$ ,  $f_6(k_1)$ ,  $f_7(k_1)$ ; dies soll im folgenden nicht immer wiederholt werden.) In diesem Abschnitt sollen die Werte dieser Senkrechtfunktionen berechnet werden. Wir betrachten zuerst zwei Leviuntergruppen von  $\mathbf{G}^F$ , in denen wir Senkrechtfunktionen angeben können. Diese lassen sich dann bis auf wenige Werte explizit mit Hilfe des Lusztig-Funktors  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  zu Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{G}^F$  induzieren. Wir benutzen hier, daß  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  für eine der betrachteten Leviuntergruppen die Harish-Chandra-Induktion ist, die sich mit Hilfe der gewöhnlichen Induktion beschreiben läßt. In diesem Fall ist auch die Zerlegung der induzierten Charaktere in irreduzible Konstituenten bekannt. Im Fall der anderen Leviuntergruppe werden wir mit der Charakterformel für den Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  die Berechnung der induzierten Funktionen auf die Bestimmung einiger rationaler Zahlen zurückführen. Die dann noch fehlenden Informationen ergeben sich aus allgemeinen Eigenschaften von Charakteren.

**Schritt 1:** In diesem Schritt werden zwei Leviuntergruppen von  $\mathbf{G}^F$  definiert und der Raum ihrer Senkrechtfunktionen explizit angegeben. Das ermöglicht die Definition von Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{G}^F$ , die in den folgenden Schritten näher untersucht werden.

Wir beginnen mit einem Lemma, das eine Anwendung der Mackey-Formel für den Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  ist.

**Lemma 8.1** *Sei  $\mathbf{L}$  eine  $F$ -invariante Leviuntergruppe von  $\mathbf{G}$  und  $f$  eine Senkrechtfunktion von  $\mathbf{L}^F$ . Dann ist  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}f$  eine Senkrechtfunktion von  $\mathbf{G}^F$ .*

**Beweis:** Die Definition des Lusztig-Funktors und die Mackey-Formel dafür sind in Digne-Michel [13, Chapter 11 und Theorem 11.13] zu finden. Wir verwenden die dort benutzten Bezeichnungen, insbesondere  $*R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  für den zu  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  adjungierten Funktor. Nach Voraussetzung gilt für alle Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{L}}\theta$  von  $\mathbf{L}^F$

$$(f, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{L}}\theta)_{\mathbf{L}^F} = 0.$$

Daraus folgt für alle Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$  von  $\mathbf{G}^F$ :

$$\begin{aligned} (R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}f, R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta)_{\mathbf{G}^F} &= (f, *R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta)_{\mathbf{L}^F} \\ &= (f, \sum_{x \in I} R_{x\mathbf{T}}^{\mathbf{L}}\theta^x)_{\mathbf{L}^F} \\ &= 0 \quad (\text{nach Voraussetzung}) \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist die Mackey-Formel, die Indexmenge  $I$  ist eine geeignete Teilmenge von  $\{x \in \mathbf{G}^F \mid x\mathbf{T} \subseteq \mathbf{L}\}$ , und  $\theta^x$  ist der vermöge Konjugation mit  $x$  durch  $\theta$  auf  $x\mathbf{T}^F$  induzierte Charakter.  $\square$

Wir wissen aus dem letzten Abschnitt, daß in Gruppen mit Dynkin-Typ  $C_2 = B_2$  der Raum der unipotenten Senkrechtfunktionen eindimensional ist. Wir haben dort eine solche Klassenfunktion  $f = \frac{1}{2}(\chi_2 - \chi_3 - \chi_4 + \chi_5)$  definiert und wollen diese Bezeichnung jetzt wieder verwenden.

In  $\mathbf{G}$  gibt es eine  $\mathbf{G}$ -Konjugiertenklasse von Leviuntergruppen vom Dynkin-Typ  $C_2$ . Die rationalen Untergruppen davon zerfallen in zwei  $\mathbf{G}^F$ -Konjugiertenklassen, nämlich in die Zentralisatoren zu unseren halbeinfachen Klassentypen  $h_3$  und  $h_4$ . Die Parameter zu diesen halbeinfachen Klassentypen in Tabelle 6 liefern uns explizit Repräsentanten dieser Leviuntergruppen: Sei  $\mathbf{L}_1$  die Standard-Leviuntergruppe von  $\mathbf{G}$ , die zur Teilmenge  $\{\alpha_2, \alpha_3\}$  unseres Fundamentalsystems des Wurzelsystems von  $\mathbf{G}$  gehört; sie besteht aus den Matrizen

$$\left( \begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & \boxed{A} & \\ & & \lambda\lambda_1^{-1} \end{array} \right)$$

mit  $A \in \mathbf{CSp}_4(\mathbf{K})$ ,  $\lambda_1 \in \mathbf{K}^\times$ ,  $\lambda = \lambda(A)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$  und mit  $A \in \mathbf{Sp}_4(\mathbf{K})$ ,  $\lambda_1 \in \mathbf{K}^\times$ ,  $\lambda = 1$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  (vergleiche das Rechenbeispiel in Abschnitt 4.1). Die Gruppe  $\mathbf{L}_1$  ist  $F$ -invariant und ist Levikomplement der  $F$ -invarianten parabolischen Untergruppe  $\mathbf{P}_1 \subseteq \mathbf{G}$ , die von  $\mathbf{L}_1$  und der Boreluntergruppe  $\mathbf{B}$  der oberen Dreiecksmatrizen von  $\mathbf{G}$  erzeugt wird. Das unipotente Radikal von  $\mathbf{P}_1$  bezeichnen wir mit  $\mathbf{U}_1$ . Betrachten wir jetzt nur die  $F$ -invarianten Elemente, so ist  $\mathbf{P}_1^F$  eine parabolische Untergruppe von  $\mathbf{G}^F$  mit Levi-Zerlegung  $\mathbf{P}_1^F = \mathbf{L}_1^F \mathbf{U}_1^F$ .

Eine  $F$ -invariante Leviuntergruppe  $\mathbf{L}_2$  von  $\mathbf{G}$  beschreiben wir mit Hilfe der gleichen algebraischen Untergruppe wie oben, nur daß wir jetzt darauf den getwisteten Frobeniusmorphismus ( $Fw^{-1}$ ) mit  $w = s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$  operieren lassen (wie im Rechenbeispiel in 4.1). Die Leviuntergruppe  $\mathbf{L}_2$  ist in keiner rationalen parabolischen Untergruppe enthalten. In Digne-Michel [13, Vorbemerkung zu Theorem 13.25] ist erklärt, in welcher Weise zu rationalen Leviuntergruppen von  $\mathbf{G}$  rationale Leviuntergruppen von  $\mathbf{G}^*$  korrespondieren. Die zu  $\mathbf{L}_1$  und  $\mathbf{L}_2$  korrespondierenden Leviuntergruppen von  $\mathbf{G}^*$  werden mit  $\mathbf{L}_1^*$  und  $\mathbf{L}_2^*$  bezeichnet. Es handelt sich hier um die Zentralisatoren unserer Repräsentanten der halbeinfachen Klassentypen  $g_6$  und  $g_7$  von  $\mathbf{G}^{*F^*}$ ; siehe Tabelle 17.

Wir geben jetzt die Werte der unipotenten Senkrechtfunktion  $f$  auf den Gruppen  $\mathbf{CSp}_4(q)$  mit ungeradem  $q$  und  $\mathbf{Sp}_4(q)$  mit geradem  $q$  an. Im Fall  $\mathbf{CSp}_4(q)$  ist  $f$  explizit in der Arbeit [35] von Shinoda aufgeführt (die Funktion  $Y$  aus Table 5.11 der zitierten Arbeit ist nach der Erklärung unter Punkt 5.3 gerade  $2f$ ). Mit den dort gewählten Bezeichnungen für die Konjugiertenklassen(-typen) sind die Werte von  $f$ :

$$\begin{array}{c|c|c|c} B_{31} & B_{32} & C_{11} & C_{12} \\ \hline q & -q & q & -q \end{array}$$

Auf allen anderen Klassen sind die Werte Null. Wir geben noch für die Klassen, auf denen

$f$  ungleich Null ist, Repräsentanten in der Schreibweise unserer Bemerkung 1.2 an:

Name in [35]	Repräsentanten
$B_{31}$	$h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^{i+(q-1)/2}, \tilde{\zeta}_1^{2i})u_{2,2}(1)u_{1,1}(1)$
$B_{32}$	$h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^{i+(q-1)/2}, \tilde{\zeta}_1^{2i})u_{2,2}(1)u_{1,1}(\alpha)$
$C_{11}$	$h(\tilde{\rho}_1^{2i+1}, \tilde{\rho}_1^{2i+q}, \tilde{\zeta}_1^{2i+1})u_{2,2}(1)u_{1,1}(1)$
$C_{12}$	$h(\tilde{\rho}_1^{2i+1}, \tilde{\rho}_1^{2i+q}, \tilde{\zeta}_1^{2i+1})u_{2,2}(\gamma)u_{1,1}(\gamma^q)$

Dabei darf jeweils  $i \in \mathbb{Z}$  beliebig sein, und wie in Tabelle 13 ist  $\alpha$  ein Nichtquadrat aus  $\mathbb{F}_q^\times$  und  $\gamma$  ein Nichtquadrat aus  $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ . Jeder dieser Klassentypen enthält  $(q-1)/2$  Klassen, und die Elemente dieser Klassen besitzen die Zentralisatorordnung  $2q^2(q-1)$ .

Im Fall  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  können wir die Senkrechtfunktion  $f$  im Prinzip aus der Arbeit [16] von Enomoto ablesen. Die Grade der unipotenten Charaktere lassen sich aus den zugeordneten Symbolen berechnen; siehe Carter [6, 13.8]. Dadurch sind die unipotenten Charaktere bereits zu identifizieren (genauer sind zwei Grade gleich, aber jede der zwei denkbaren Zuordnungen ergibt die gleiche Senkrechtfunktion). Leider gibt es, wie bereits im Abschnitt über die Greenfunktionen erwähnt, die praktische Schwierigkeit, daß die Tafel in der zitierten Arbeit voller Druckfehler steckt (sogar zwei Grade der unipotenten Charaktere sind vertauscht). Wir erklären daher kurz, wie die Senkrechtfunktion gefunden wurde, die wir gleich angeben. Der Raum der Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  ist eindimensional, denn auf alle Lusztig-Serien nicht-unipotenter Charaktere läßt sich Lemma 7.1 anwenden. Alle Deligne-Lusztig-Charaktere haben auf den beiden regulären unipotenten Klassen ( $A_{41}$  und  $A_{42}$  in der Notation von Enomoto) den gleichen Wert 1. Hieraus folgt, daß die Senkrechtfunktion  $f$  nur auf den beiden regulären unipotenten Klassen Werte ungleich Null annehmen kann und sich die Werte dort nur um ein Vorzeichen unterscheiden (dieser Schluß wird in Schritt 3 genauer erklärt). Außerdem sind die Werte von  $f$  rational, denn sonst müßte jeder Grad der Charaktere, aus denen  $f$  gebildet wird, mindestens zweimal als Charaktergrad von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  vorkommen, was nicht der Fall ist (Wir können auch nachrechnen, daß die regulären unipotenten Klassen rationale Klassen sind). Da  $f$  nach Definition die Norm 1 hat, bekommen wir als Werte der Senkrechtfunktion  $\pm q$ . Damit haben wir  $f$  bis auf ein Vorzeichen gefunden. Es lassen sich nun für beide Möglichkeiten von  $f$  mit Hilfe der von uns nachgerechneten Greenfunktionen von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  die Werte der unipotenten Charaktere auf den unipotenten Klassen ausrechnen. Die Einschränkung der so erhaltenen Klassenfunktionen auf die Boreluntergruppe der oberen Dreiecksmatrizen von  $\mathbf{Sp}_4(q)$  (siehe Table I-2 bei Enomoto) erlaubt es dann, die richtige der beiden Möglichkeiten zu finden:  $f$  hat auf der Klasse  $A_{41}$  den Wert  $q$  und auf  $A_{42}$  den Wert  $-q$ . Die beiden regulären unipotenten Klassen werden in der Notation unserer Bemerkung 1.1 durch die Elemente

$$\begin{aligned} A_{41} &: u_{1,2}(1)u_{2,2}(1) \\ A_{42} &: u_{1,2}(1)u_{2,2}(1)u_{1,1}(\alpha) \end{aligned}$$

repräsentiert; dabei ist  $\alpha$  wie in Tabelle 14 ein Element aus  $\mathbb{F}_q$ , so daß das Polynom  $Z^2 + Z + \alpha$  irreduzibel über  $\mathbb{F}_q$  ist. Die Zentralisatorordnung der Elemente dieser Klassen in  $\mathbf{Sp}_4(q)$  ist  $2q^2$ .

Zu den beschriebenen Senkrechtfunktionen  $f$  betrachten wir jetzt für unsere beiden Leviuntergruppen  $\mathbf{L}_i$ ,  $i = 1, 2$ , die Projektionen  $p_i : \mathbf{L}_i \rightarrow \mathbf{CSp}_4(\mathbf{K})$  (beziehungsweise

$\mathrm{Sp}_4(\mathbf{K})$ ), erklärt durch

$$\left( \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \square \\ \lambda\lambda_1^{-1} \end{array} \right) \mapsto A.$$

Dann sind die Klassenfunktionen  $f_{\mathbf{L}_i} := f \circ p_i|_{\mathbf{L}_i^F}$  die unipotenten Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{L}_i^F$ , denn die entsprechende Aussage gilt nach Digne-Michel [13, 13.20] für die unipotenten Charaktere und somit auch für  $f$ .

Die betrachteten Leviuntergruppen besitzen noch weitere Senkrechtfunktionen, und zwar jeweils eine zu jeder Lusztig-Serie, die im gleichen Lusztig-Serien-Typ liegt wie die unipotenten Charaktere (auf die anderen Lusztig-Serien ist Lemma 7.1 anwendbar). Es handelt sich jeweils um die Lusztig-Serien von  $\mathbf{L}_i^F$ , die durch die Zentrumsэлеmente von  $\mathbf{L}_i^{*F^*}$  parametrisiert werden. Wir beschreiben, auf welche Weise zu einem Zentrumsэлеment  $s \in \mathbf{L}_i^{*F^*}$  ein linearer Charakter  $\lambda_s$  von  $\mathbf{L}_i^F$  gehört; siehe Digne-Michel [13, 13.30(i)]. Der Wert eines linearen Charakters von  $\mathbf{L}_i^F$  hängt immer nur vom halbeinfachen Anteil eines Elementes ab, denn der Index der Kommutatorgruppe ist nicht durch  $p$  teilbar. Sei also  $h \in \mathbf{L}_i^F$  halbeinfach; dann liegt  $h$  in einem rationalen maximalen Torus  $\tilde{\mathbf{T}}$ . Das Zentrumsэлеment  $s$  liegt in jedem maximalen Torus von  $\mathbf{L}_i^*$ , also auch in einem zu  $\tilde{\mathbf{T}}$  dualen Torus  $\tilde{\mathbf{T}}^*$ . Das Paar  $(\tilde{\mathbf{T}}^*, s)$  beschreibt nun einen Charakter von  $\tilde{\mathbf{T}}^F$ , dessen Wert auf dem Element  $h$  der gesuchte Charakterwert  $\lambda_s(h)$  ist. Die Senkrechtfunktion zur durch  $s$  parametrisierten Lusztig-Serie von  $\mathbf{L}_i^F$  ist das Tensorprodukt der unipotenten Senkrechtfunktion  $f_{\mathbf{L}_i}$  mit  $\lambda_s$ ; siehe Digne-Michel [13, 13.30(ii)]. Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  sind die Zentrumsэлеmente von  $\mathbf{L}_1^{*F^*}$  aus Tabelle 18 zu ersehen, es sind die Elemente

$$s \left( \frac{k_1}{q-1}, 0, 0, \frac{k_2}{q-1} \right), \quad 0 \leq k_1, k_2 \leq q-2.$$

Sie liegen im halbeinfachen Klassentyp  $g_6$  von  $\mathbf{G}^{*F^*}$ , falls  $k_1 \neq 0$  ist, und sonst in  $g_1$ . Die zugehörigen linearen Charaktere von  $\mathbf{L}_1^F$  bezeichnen wir mit  $\lambda_1(k_1, k_2)$ . Entsprechend bezeichnen wir mit  $\lambda_2(k_1, k_2)$  die linearen Charaktere von  $\mathbf{L}_2^F$ , die zu den Zentrumsэлеmenten

$$s \left( \frac{k_1}{q+1}, 0, 0, \frac{k_1}{q^2-1} + \frac{k_2}{q-1} \right), \quad 0 \leq k_1 \leq q, \quad 0 \leq k_2 \leq q-2,$$

von  $\mathbf{L}_2^{*F^*}$  gehören. Diese liegen für  $k_1 \neq 0$  im halbeinfachen Klassentyp  $g_7$  von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  und sonst in  $g_1$ .

Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  entfällt der Parameter  $k_2$  jeweils.

Nun benutzen wir Lemma 8.1 und definieren Senkrechtfunktionen  $\psi_1(k_1, k_2)$  und  $\psi_2(k_1, k_2)$  von  $\mathbf{G}^F$  (beziehungsweise  $\psi_1(k_1)$  und  $\psi_2(k_1)$  im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$ ):

$$\begin{aligned} \psi_1(k_1, k_2) &:= R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}(f_{\mathbf{L}_1} \cdot \lambda_1(k_1, k_2)) \\ \psi_2(k_1, k_2) &:= R_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}(f_{\mathbf{L}_2} \cdot \lambda_2(k_1, k_2)) \end{aligned}$$

**Schritt 2:** In diesem Schritt wird für „viele“ der eben definierten Senkrechtfunktionen  $\psi_1(k_1, k_2)$  und  $\psi_2(k_1, k_2)$  der Zusammenhang mit den in Abschnitt 7 definierten Senkrechtfunktionen gezeigt. Wir benutzen die Aussagen des folgenden Lemmas.

**Lemma 8.2** *Sei  $\mathbf{G}$  eine zusammenhängende reduktive Gruppe mit zusammenhängendem Zentrum,  $\mathbf{L}$  eine rationale Leviuntergruppe,  $\mathbf{L}^*$  die zugehörige duale Leviuntergruppe in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^*$  und  $s \in \mathbf{L}^{*F^*}$ .*

- (a) *Der Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  respektiert Lusztig-Serien, das heißt für  $\chi \in \mathcal{E}(\mathbf{L}^F, (s))$  ist  $R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\chi$  eine  $\mathbb{Z}$ -Linearkombination von Charakteren aus  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ .*
- (b) *Ist zusätzlich  $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subseteq \mathbf{L}^*$ , so ist die Abbildung  $\varepsilon_{\mathbf{L}}\varepsilon_{\mathbf{G}}R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}$  eine Bijektion  $\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, (s)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ .*
- (c) *Sei jetzt  $\mathbf{L}$  eine Leviuntergruppe, die in einer rationalen parabolischen Untergruppe enthalten ist, und  $s \in Z(\mathbf{G}^{*F^*})$  ein Zentrumselement. Wir bezeichnen mit  $\mathbf{W}_{\mathbf{L}}$  und  $\mathbf{W}_{\mathbf{G}}$  die Weylgruppen von  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{G}$  und für irreduzible Charaktere  $\rho \in \hat{\mathbf{W}}_{\mathbf{L}}$  und  $\phi \in \hat{\mathbf{W}}_{\mathbf{G}}$  seien  $\chi_{\rho}^{\mathbf{L}}$ ,  $\chi_{\phi}^{\mathbf{G}}$  die zugehörigen Hauptseriencharaktere in  $\mathcal{E}(\mathbf{L}^F, (s))$  beziehungsweise  $\mathcal{E}(\mathbf{G}^F, (s))$ . Dann gilt:*

$$R_{\mathbf{L}}^{\mathbf{G}}\chi_{\rho}^{\mathbf{L}} = \sum_{\phi \in \hat{\mathbf{W}}_{\mathbf{G}}} (\rho_{\mathbf{W}_{\mathbf{L}}}, \phi)_{\mathbf{W}_{\mathbf{G}}} \cdot \chi_{\phi}^{\mathbf{G}}.$$

**Beweis:** (a) Dies folgt aus Digne-Michel [13, 13.18] und der Künneth-Formel [13, 10.9]; vergleiche den Beweis der Transitivität des Lusztig-Funktors in [13, 11.5].

(b) Die Aussage ist in Digne-Michel [13, 13.25(ii)] gezeigt.

(c) Für die unipotenten Charaktere ( $s = 1$ ) ist diese Formel in Curtis-Reiner [9, 70.24] bewiesen. Daraus ergibt sich unsere etwas allgemeinere Aussage mit Digne-Michel [13, 13.30].  $\square$

Wir wenden zuerst Aussage (b) des Lemmas an. Die dort gemachte Voraussetzung ist jeweils für die in Schritt 1 angegebenen Zentrumselemente von  $\mathbf{L}_1$  und  $\mathbf{L}_2$  mit  $k_1 \neq 0$  erfüllt (die im halbeinfachen Klassentyp  $g_6$  beziehungsweise  $g_7$  von  $\mathbf{G}^{*F^*}$  liegen). Die Vorzeichen  $\varepsilon_{\mathbf{L}_i}\varepsilon_{\mathbf{G}}$ ,  $i = 1, 2$ , die auch in Satz 2.2 vorkommen, haben wir schon in Abschnitt 7 bestimmt. Aus Aussage (b) und unserer Definition von Senkrechtfunktionen für die Typen von Lusztig-Serien  $g_6$  und  $g_7$  folgt:

$$\begin{aligned} \psi_1(k_1, k_2) &= f_6(k_1, k_2) \quad \text{für } 1 \leq k_1 \leq q-2, 0 \leq k_2 \leq q-2, \\ \psi_2(k_1, k_2) &= -f_7(k_1, k_2) \quad \text{für } 1 \leq k_1 \leq q, 0 \leq k_2 \leq q-2. \end{aligned}$$

Lemma 8.2(c) ist auf unsere Leviuntergruppe  $\mathbf{L}_1$  anwendbar. Wir betrachten jetzt die Senkrechtfunktionen  $\psi_1(0, k_2)$ . Durch Induktion der Charaktere der Weylgruppe von  $\mathbf{L}_1$  zu Charakteren der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$  können wir die Vielfachheiten der Hauptseriencharaktere in  $\psi_1(0, k_2)$  ausrechnen. (Die Charaktertafeln für die Weylgruppen von  $\mathbf{L}_1$  und  $\mathbf{G}$  sind in Abschnitt 7 angegeben worden.) Da für einen kusalen Charakter  $\chi$  von  $\mathbf{L}_1$  der induzierte Charakter  $R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}\chi$  keine Hauptseriencharaktere als Konstituenten enthält, läßt sich bereits der Zusammenhang von  $\psi_1(0, k_2)$  mit den Senkrechtfunktionen  $f_{1,1}(k_1)$  und  $f_{1,2}(k_1)$  ablesen, es ist

$$\psi_1(0, k_2) = f_{1,1}(k_1) + f_{1,2}(k_1) \quad \text{mit } k_2 = k_1.$$

Es bleiben noch die Senkrechtfunktionen  $\psi_2(0, k_2)$  zu untersuchen. Auf diese wenden wir Lemma 8.2(a) an, das besagt, daß die Konstituenten von  $\psi_2(0, k_2)$  in der Lusztig-Serie



zu  $g_1(k_1)$  mit  $k_2 = k_1$  liegen. Da der Raum der Senkrechtfunktionen in der Lusztig-Serie zu  $g_1(k_1)$  von  $f_{1,1}(k_1)$  und  $f_{1,2}(k_1)$  aufgespannt wird, muß  $\psi_2(0, k_2)$  mit  $k_2 = k_1$  eine Linearkombination dieser beiden Funktionen sein. Diese Linearkombination ist sogar ganzzahlig, weil  $2\psi_2(0, k_2)$ ,  $2f_{1,1}(k_1)$  und  $2f_{1,2}(k_1)$  verallgemeinerte Charaktere sind und die Konstituenten der letzten beiden Funktionen Vielfachheiten  $\pm 1$  haben. Den genauen Zusammenhang werden wir im Verlauf der folgenden Überlegungen herausfinden.

Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  ist in den Bezeichnungen der Senkrechtfunktionen wieder überall ein Parameter wegzulassen.

**Schritt 3:** Wie die in Schritt 1 beschriebenen Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{CSp}_4(q)$  und  $\mathbf{Sp}_4(q)$  haben auch die Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{G}^F$  nur auf relativ wenig Klassen Werte ungleich Null. Diese Klassen wollen wir jetzt bestimmen. Wir behandeln erst den Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$ .

Zuerst zählen wir Paare von Konjugiertenklassen von  $\mathbf{G}^F$ , auf denen sämtliche Deligne-Lusztig-Charaktere den jeweils gleichen Wert annehmen. Dies ist offensichtlich für solche Paare von Klassen der Fall, die den gleichen halbeinfachen Anteil haben und auf denen sämtliche Greenfunktionen gleiche Werte annehmen. Ein Blick in die Tabelle 15 liefert uns die folgenden solcher Paare:

$$\begin{aligned} c_{2,6}(i_1) \text{ und } c_{2,7}(i_1) \\ c_{2,10}(i_1) \text{ und } c_{2,11}(i_1) \\ c_{7,3}(i_1, i_2) \text{ und } c_{7,4}(i_1, i_2) \\ c_{9,3}(i_1, i_2) \text{ und } c_{9,4}(i_1, i_2) \\ c_{11,1}(i_1, i_2) \text{ und } c_{11,2}(i_1, i_2) \\ c_{12,1}(i_1, i_2) \text{ und } c_{12,2}(i_1, i_2) \end{aligned}$$

Die Anzahl dieser Paare berechnet sich aus Tabelle 8 zu  $(q-1)(q+1)$ . Wir betrachten nun die (komplexwertigen) Indikatorfunktionen auf diesen Paaren von Klassen zusammen mit den Indikatorfunktionen der übrigen Klassen. Der davon aufgespannte Vektorraum von Klassenfunktionen enthält alle Deligne-Lusztig-Charaktere, und seine Dimension ist um  $(q-1)(q+1)$  kleiner als die Anzahl der Klassen von  $\mathbf{CSp}_6(q)$ . Diese Dimension ist aber auch genau die Anzahl der (linear unabhängigen) Deligne-Lusztig-Charaktere, denn in Abschnitt 7 mußten wir  $(q-1)(q+1)$  Senkrechtfunktionen definieren, um den gesamten Raum der Klassenfunktionen aufzuspannen (siehe Tabelle 18). Hieraus folgt, daß die genannten Indikatorfunktionen uniform sind und demnach kann eine Senkrechtfunktion höchstens auf den angegebenen Paaren von Klassen Werte ungleich Null haben. Außerdem sehen wir noch, daß sich die Werte auf den Klassen jedes Paares genau um ein Vorzeichen unterscheiden (denn die Klassen der betrachteten Paare besitzen jeweils die gleiche Anzahl von Elementen).

Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  haben wir  $q+1$  Senkrechtfunktionen und genauso viele Paare von Klassen, auf denen sich die Deligne-Lusztig-Charaktere nicht unterscheiden:

$$\begin{aligned} c_{1,7} \text{ und } c_{1,8} \\ c_{1,10} \text{ und } c_{1,11} \\ c_{3,4}(i_1) \text{ und } c_{3,5}(i_1) \\ c_{4,4}(i_1) \text{ und } c_{4,5}(i_1) \end{aligned}$$

**Schritt 4:** Wir berechnen jetzt die Werte der Senkrechtfunktionen  $\psi_1(k_1, k_2)$  beziehungsweise  $\psi_1(k_1)$ . Die Leviuntergruppe  $\mathbf{L}_1$  ist in der rationalen parabolischen Untergruppe  $\mathbf{P}_1$  von  $\mathbf{G}$  enthalten. In diesem Fall beschreibt der Lusztig-Funktor  $R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}$  die Harish-Chandra-Induktion (vergleiche Digne-Michel [13, Chapter 4 bis 6 und 11.1] und Carter [6, 9.1]). Zu einer Klassenfunktion  $\rho$  von  $\mathbf{L}_1^F$  wird zuerst die Inflation  $\tilde{\rho}$  auf  $\mathbf{P}_1^F$  gebildet, wobei für ein Element  $x = lu \in \mathbf{P}_1^F$  mit  $l \in \mathbf{L}_1^F$ ,  $u \in \mathbf{U}_1^F$  gilt:  $\tilde{\rho}(x) := \rho(l)$ . Dann ist die Harish-Chandra-induzierte Funktion von  $\rho$  die induzierte Funktion von  $\tilde{\rho}$  nach  $\mathbf{G}^F$ :

$$R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}\rho = \tilde{\rho}_{\mathbf{P}_1^F}^{\mathbf{G}^F}.$$

Als erstes behandeln wir wieder den Fall  $\mathbf{CSp}_6(q)$ . Nach Schritt 3 brauchen wir nur die Werte von  $\psi_1(k_1, k_2)$  auf den Klassen  $c_{2,6}(i_1)$ ,  $c_{2,10}(i_1)$ ,  $c_{7,3}(i_1, i_2)$ ,  $c_{9,3}(i_1, i_2)$ ,  $c_{11,1}(i_1, i_2)$  und  $c_{12,1}(i_1, i_2)$  explizit auszurechnen.

Anhand der Repräsentanten für die halbeinfachen Klassentypen  $h_9$  und  $h_{12}$  in Tabelle 8 ist sofort zu sehen, daß diese Klassen keine Vertreter in  $\mathbf{L}_1^F$  haben, deren Projektion auf  $\mathbf{CSp}_4(q)$  halbeinfacher Anteil einer Klasse ist, auf der die Senkrechtfunktionen ungleich Null sind. Somit hat  $\psi_1(k_1, k_2)$  auf den Klassen  $c_{9,3}(i_1, i_2)$  und  $c_{12,1}(i_1, i_2)$  den Wert Null. ( $h_{12}$  kommt sogar gar nicht in  $\mathbf{L}_1^F$  vor.)

Für die übrigen Werte müssen wir bestimmen, welche Klassen von  $\mathbf{P}_1^F$  in die aufgezählten Klassen von  $\mathbf{G}^F$  fusionieren und Vertreter dieser Klassen in der Form  $lu$  mit  $l \in \mathbf{L}_1^F$  und  $u \in \mathbf{U}_1^F$  finden. Um zu testen, ob wir für eine Klasse von  $\mathbf{G}^F$  alle darin liegenden Klassen von  $\mathbf{P}_1^F$  gefunden haben, können wir vorher den Permutationscharakter  $1_{\mathbf{P}_1^F}^{\mathbf{G}^F}$  ausrechnen: Dies ist nach der Beschreibung der Harish-Chandra-Induktion gerade  $R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}1$ , und der Einscharakter von  $\mathbf{L}_1^F$  ist nach Digne-Michel [13, 12.13] eine Summe von Deligne-Lusztig-Charakteren  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{L}}1$ . In  $\mathbf{L}_1$  kommen Tori der Typen  $\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_4$  und  $\mathbf{T}_6$  vor (siehe Tabelle 15 mit den Greenfunktionen), und die Zentralisatorordnungen der zugehörigen twistenden Elemente aus der Weylgruppe von  $\mathbf{L}_1$  sind leicht berechnet; wir erhalten:

$$1_{\mathbf{L}_1^F} = \frac{1}{8}R_{\mathbf{T}_1}^{\mathbf{L}_1}1 + \frac{1}{4}R_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{L}_1}1 + \frac{1}{4}R_{\mathbf{T}_3}^{\mathbf{L}_1}1 + \frac{1}{8}R_{\mathbf{T}_4}^{\mathbf{L}_1}1 + \frac{1}{4}R_{\mathbf{T}_6}^{\mathbf{L}_1}1.$$

Die Anwendung von  $R_{\mathbf{L}_1}^{\mathbf{G}}$  und die Transitivität des Lusztig-Funktors liefern:

$$1_{\mathbf{P}_1^F}^{\mathbf{G}^F} = \frac{1}{8}R_{\mathbf{T}_1}^{\mathbf{G}}1 + \frac{1}{4}R_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{G}}1 + \frac{1}{4}R_{\mathbf{T}_3}^{\mathbf{G}}1 + \frac{1}{8}R_{\mathbf{T}_4}^{\mathbf{G}}1 + \frac{1}{4}R_{\mathbf{T}_6}^{\mathbf{G}}1.$$

Die Werte, die uns interessieren, sind mit Hilfe der Tabellen 11 und 15 auszurechnen:

Klasse:	$c_{2,6}(i_1)$	$c_{2,10}(i_1)$	$c_{7,3}(i_1, i_2)$	$c_{11,3}(i_1, i_2)$
$1_{\mathbf{P}_1^F}^{\mathbf{G}^F}$	$q^2 + q + 2$	2	4	2

Wir betrachten nun die Klassen  $c_{2,6}(i_1)$ , für die wir die Repräsentanten  $h_2(i_1)u_7(1)u_9(1)$  mit  $h_2(i_1) = h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})$  kennen. Wir konjugieren diese Repräsentanten mit Elementen der Weylgruppe von  $\mathbf{G}$ , die nicht in der Weylgruppe von  $\mathbf{L}_1$  liegen (genauer mit den zugehörigen Produkten der Matrizen  $n_1, n_2, n_3 \in N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$  aus Bemerkung 1.3(c)). Dies ergibt folgende drei Elemente aus  $\mathbf{P}_1^F$ :

$$\begin{aligned} x_1(i_1) &:= h_2(i_1)u_7(1)u_9(1) &= h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})u_7(1)u_9(1) \\ x_2(i_1) &:= h_2(i_1)u_7(1)u_9(1)^{n_1} &= h(-\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})u_7(1)u_9(1) \\ x_3(i_1) &:= h_2(i_1)u_7(1)u_9(1)^{n_1n_2n_1} &= h(-\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})u_4(1)u_7(1) \end{aligned}$$

Mit dem Verfahren aus Abschnitt 4.2(4) können wir nachrechnen, daß diese drei Elemente nicht in  $\mathbf{P}_1^F$  konjugiert sind und in der angegebenen Reihenfolge die Zentralisatorordnungen  $2q^5(q-1)^2(q+1)$ ,  $2q^5(q-1)^2(q+1)$  und  $2q^4(q-1)^2$  in  $\mathbf{P}_1^F$  haben. Der Vergleich mit der Zentralisatorordnung  $2q^5(q-1)^2(q+1)$  von  $c_{2,6}(i_1)$  in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  und dem Wert des Permutationscharakters zeigt, daß wir bereits sämtliche Klassen von  $\mathbf{P}_1^F$  gefunden haben, die in  $c_{2,6}(i_1)$  liegen. Die Projektion des  $\mathbf{L}_1^F$ -Anteils von  $x_1(i_1)$ ,  $x_2(i_1)$  und  $x_3(i_1)$  auf  $\mathbf{CSp}_4(q)$  liefert nur bei  $x_3(i_1) \in \mathbf{L}_1^F$  ein Element, auf dem die Senkrechtfunktionen nicht Null sind; es liegt im Klassentyp  $B_{31}$  (siehe Schritt 1). Der Wert der unipotenten Senkrechtfunktion von  $\mathbf{L}_1^F$  auf  $x_3(i_1)$  ist also  $+q$ . Wir benötigen noch den Wert des linearen Charakters  $\lambda_1(k_1, k_2)$  auf dem halbeinfachen Anteil von  $x_3(i_1)$ . Da  $h(-\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})$  in  $\mathbf{T}_1^F$  liegt, betrachten wir das zu  $\lambda_1(k_1, k_2)$  gehörende Zentrumselement von  $\mathbf{L}_1^{*F*}$  als Element von  $\mathbf{T}_1^{*F*}$ . Dann liefert uns Tabelle 5 den gesuchten Charakterwert (es ist  $j_1 = i_1 + (q-1)/2$ ,  $j_4 = 2i_1$ ,  $l_1 = k_1$ ,  $l_2 = l_3 = 0$  und  $l_4 = k_2$ ):  $\lambda_1(k_1, k_2)(h(-\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})) = \zeta_1^{(i_1+(q-1)/2)k_1+2i_1k_2}$ . Setzen wir diese Ergebnisse zusammen, erhalten wir als Wert von  $\psi_1(k_1, k_2)$  auf  $c_{2,6}(i_1)$ :

$$\frac{2q^5(q-1)^2(q+1)}{2q^4(q-1)^2} \cdot q \cdot \zeta_1^{(i_1+(q-1)/2)k_1+2i_1k_2} = q^2(q+1)\zeta_1^{(i_1+(q-1)/2)k_1+2i_1k_2}.$$

Die fehlenden drei Werte lassen sich analog finden; das Ergebnis lautet:

Klasse:	$\psi_1(k_1, k_2)$
$c_{2,6}(i_1)$	$q^2(q+1)\zeta_1^{(i_1+(q-1)/2)k_1+2i_1k_2}$
$c_{2,10}(i_1)$	$q\zeta_1^{(i_1+(q-1)/2)k_1+2i_1k_2}$
$c_{7,3}(i_1, i_2)$	$q\zeta_1^{i_2k_1+2i_1k_2} + q\zeta_1^{(2i_1-i_2)k_1+2i_1k_2}$
$c_{11,1}(i_1, i_2)$	$q\zeta_1^{i_2k_1+(2i_1+1)k_2} + q\zeta_1^{(2i_1+1-i_2)k_1+(2i_1+1)k_2}$

Im Fall der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  genügt es nach Schritt 3, die Werte von  $\psi_1(k_1)$  auf den Klassen  $c_{1,7}$ ,  $c_{1,10}$ ,  $c_{3,4}(i_1)$  und  $c_{4,4}(i_1)$  zu berechnen. Die gleichen Überlegungen wie oben liefern in diesem Fall:

Klasse:	$\psi_1(k_1)$
$c_{1,7}$	$q^2(q+1)$
$c_{1,10}$	$q$
$c_{3,4}(i_1)$	$q\zeta_1^{i_1k_1} + q\zeta_1^{-i_1k_1}$
$c_{4,4}(i_1)$	$0$

**Schritt 5:** In diesem Schritt bestimmen wir einige der Charakterwerte von  $\psi_2(k_1, k_2)$  beziehungsweise  $\psi_2(k_1)$ .

Für Elemente  $x \in \mathbf{L}_2^F$  und  $y \in \mathbf{G}^F$  mit halbeinfachen Anteilen  $x_s$  und  $y_s$  und eine Klassenfunktion  $\chi$  von  $\mathbf{L}_2^F$  hängt der Wert  $R_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}\chi(y)$  höchstens dann von  $\chi(x)$  ab, wenn  $x_s$  und  $y_s$  in  $\mathbf{G}^F$  konjugiert sind. Dies folgt aus der Charakterformel für den Lusztig-Funktor in Digne-Michel [13, 12.2]. Ist zusätzlich der Zentralisator von  $x_s$  in  $\mathbf{G}^F$  in  $\mathbf{L}_2$  enthalten, so hängt  $R_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}\chi(y)$  sogar nur von  $\chi(x)$  ab, wenn  $x$  und  $y$  in  $\mathbf{G}^F$  konjugiert sind. Bezeichnen wir mit  $\iota_{x, \mathbf{L}_2}$  und  $\iota_{x, \mathbf{G}}$  die Indikatorfunktionen auf der Konjugiertenklasse von  $x$  in  $\mathbf{L}_2^F$  beziehungsweise  $\mathbf{G}^F$ , so gilt genauer  $R_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}\iota_{x, \mathbf{L}_2} = \iota_{x, \mathbf{G}}$  (vergleiche Digne-Michel [13, 12.22]). Diese beiden Aussagen ermöglichen uns die Berechnung von  $\psi_2(k_1, k_2)$  beziehungsweise  $\psi_2(k_1)$  auf allen Klassentypen, deren halbeinfacher Anteil nicht zum Typ

$h_2$  oder  $h_1$  gehört. Wir können nach der Beschreibung in Schritt 1 für alle Klassen von  $\mathbf{L}_2^F$ , auf denen die Senkrechtfunktionen einen Wert ungleich Null annehmen, Repräsentanten hinschreiben und brauchen nur noch zu bestimmen, zu welcher  $\mathbf{G}^F$ -Klasse sie gehören. Die Werte der linearen Charaktere  $\lambda_2(k_1, k_2)$  sind genauso zu berechnen, wie in Schritt 4 beschrieben. Im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  geben wir das Ergebnis durch die Werte auf  $c_{7,3}$ ,  $c_{9,3}$ ,  $c_{11,1}$  und  $c_{12,1}$  an:

Klasse:	$\psi_2(k_1, k_2)$
$c_{7,3}(i_1, i_2)$	0
$c_{9,3}(i_1, i_2)$	$q\zeta_2^{2qi_1k_1}\zeta_1^{-i_2k_1}\zeta_1^{2i_1k_2} + q\zeta_2^{2i_1k_1}\zeta_1^{i_2k_1}\zeta_1^{2i_1k_2}$
$c_{11,1}(i_1, i_2)$	0
$c_{12,1}(i_1, i_2)$	$q\zeta_2^{q(2i_1+1)k_1}\zeta_1^{-i_2k_1}\zeta_1^{(2i_1+1)k_2} + q\zeta_2^{(2i_1+1)k_1}\zeta_1^{i_2k_1}\zeta_1^{(2i_1+1)k_2}$

Im Fall der Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  ist  $\psi_2(k_1)$  auf den Klassen  $c_{3,4}(i_1)$  und  $c_{4,4}(i_1)$ :

Klasse:	$\psi_2(k_1)$
$c_{3,4}(i_1)$	0
$c_{4,4}(i_1)$	$q\zeta_1^{-i_1k_1} + q\zeta_1^{i_1k_1}$

(Wir hätten die Überlegungen dieses Schrittes auch für  $\mathbf{L}_1$  machen und in Schritt 4 verwenden können.)

**Schritt 6:** In diesem Schritt führen wir die Berechnung der Senkrechtfunktionen im (etwas einfacheren) Fall der Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  zu Ende.

Uns fehlen noch die Werte von  $\psi_2(k_1)$  auf den Klassen  $c_{1,7}$  und  $c_{1,10}$  sowie der Zusammenhang zwischen  $\psi_2(0)$  und den Senkrechtfunktionen  $f_{1,1}$  und  $f_{1,2}$ .

Aus der Charakterformel für den Lusztig-Funktor (Digne-Michel [13, 12.2]) sehen wir, daß die Werte von  $\psi_2(k_1)$  auf den unipotenten Klassen rational und für alle  $k_1$  gleich sind, weil dies für alle in der Formel vorkommenden Terme gilt; insbesondere für die Werte der Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{L}_2$ . (Zum Ausrechnen der fehlenden Werte können wir die Charakterformel nicht verwenden, weil wir die dort vorkommenden 2-parametrischen Greenfunktionen nicht kennen.)

Wir setzen nun für die gesuchten zwei Werte zunächst Unbestimmte ein. Aus Schritt 2 wissen wir, daß für  $k_1 \neq 0$  die Norm von  $\psi_2(k_1)$  gleich 1 und das Skalarprodukt von  $\psi_2(k_1)$  mit  $\psi_1(k_1)$  gleich 0 sein muß (weil die Konstituenten zu verschiedenen Lusztig-Serien gehören). Das liefert eine lineare und eine quadratische Gleichung, die die beiden Unbestimmten bis auf ein Vorzeichen festlegen; für ein  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$  hat  $\psi_2(k_1)$  auf  $c_{1,7}$  den Wert  $\varepsilon q^2(q-1)$  und auf  $c_{1,10}$  den Wert  $-\varepsilon q$ .

Das richtige Vorzeichen finden wir nun mit Hilfe der Tatsachen, daß das Tensorprodukt zweier Charaktere wieder ein Charakter ist und das Skalarprodukt zweier Charaktere eine nicht-negative ganze Zahl ist. Wir berechnen mit unbestimmtem  $\varepsilon$  gemäß Tabelle 23 die irreduziblen Charaktere der Lusztig-Serien-Typen  $g_6$  und  $g_7$ . Bilden wir dann zum Beispiel das Tensorprodukt von  $\chi_{7,2}(k_1)$  mit sich selbst und berechnen davon das Skalarprodukt mit  $\chi_{6,5}(k_1)$ , so erhalten wir als Ergebnis  $(\varepsilon-1)(q+1)/4$ . Dieser Ausdruck ist für  $\varepsilon = -1$  negativ (und nicht ganzzahlig, da  $q$  gerade ist); also ist  $\varepsilon = 1$ , und wir haben alle Werte von  $\psi_2(k_1)$  gefunden.

Jetzt berechnen wir die Norm von  $\psi_2(0)$  und erhalten 2. Da wir aus Schritt 2 wissen, daß  $\psi_2(0)$  ganzzahlige Linearkombination von  $f_{1,1}$  und  $f_{1,2}$  ist, bleiben nur die Möglichkeiten  $\psi_2(0) = \pm f_{1,1} \pm f_{1,2}$  übrig. Der Wert von  $\psi_2(0)$  auf den Klassen  $c_{3,4}(i_1)$  ist Null, während  $\psi_1(0) = f_{1,1} + f_{1,2}$  dort Werte ungleich Null hat; also sind  $\psi_2(0)$  und  $\psi_1(0)$  linear unabhängig, so daß  $\psi_2(0) = \varepsilon(f_{1,1} - f_{1,2})$  mit  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$  sein muß. Berechnen wir nun mit unbestimmtem  $\varepsilon$  die unipotenten Charaktere von  $\mathbf{Sp}_6(q)$ , dann das Tensorprodukt von  $\chi_{1,2}$  mit sich selbst und davon das Skalarprodukt mit  $\chi_{1,3}$ , so finden wir wie oben heraus, daß  $\varepsilon = -1$  sein muß. Es gilt also  $f_{1,1} = (\psi_1(0) - \psi_2(0))/2$  und  $f_{1,2} = (\psi_1(0) + \psi_2(0))/2$ .

**Schritt 7:** Jetzt schließen wir die Berechnung der Charaktertafel für die Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  ab.

In diesem Fall müssen wir noch die Werte von  $\psi_2(k_1, k_2)$  auf den Klassen  $c_{2,6}(i_1)$  und  $c_{2,10}(i_1)$  und den Zusammenhang von  $\psi_2(0, k_2)$  mit  $f_{1,1}(k_1)$  und  $f_{1,2}(k_1)$  (für  $k_2 = k_1$ ) bestimmen.

In der halbeinfachen Konjugiertenklasse von  $h_2(i_1)$  in  $\mathbf{G}^F$  liegen zwei Konjugiertenklassen von  $\mathbf{L}_2^F$ , die durch die Elemente  $x_1(i_1) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})$  und  $x_2(i_1) := h(-\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, -\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{2i_1})$  repräsentiert werden. Nur die Elemente der Form  $x_2(i_1)$  sind halbeinfacher Anteil von Klassen von  $\mathbf{L}_2^F$ , auf denen die Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{L}_2^F$  Werte ungleich Null annehmen. Setzen wir für den Wert von  $\psi_2(k_1, k_2) = R_{\mathbf{L}_2}^{\mathbf{G}}(f_{\mathbf{L}_2} \cdot \lambda_2(k_1, k_2))$  auf den Klassen  $c_{2,6}(i_1)$  oder  $c_{2,10}(i_1)$  die Charakterformel für den Lusztig-Funktor ein, so können wir aus den Summen den Ausdruck  $\lambda_2(k_1, k_2)(x_2(i_1))$  ausklammern. Übrig bleibt jeweils eine rationale Zahl, die nicht mehr von  $k_1$  und  $k_2$  abhängt. Wir berechnen  $\lambda_2(k_1, k_2)(x_2(i_1))$  und setzen für die zwei rationalen Zahlen wieder Unbestimmte ein. (Wir müssen jetzt das Argument aus Schritt 6 leicht modifizieren, weil hier das Skalarprodukt mit den Senkrechtfunktionen  $\psi_1(k_1, k_2)$  mit  $k_1 \neq 0$  keine Bedingung an die Unbestimmten liefert, denn unabhängig von deren Wert heben sich die Terme auf allen Klassen in den Klassentypen  $c_{2,6}$  beziehungsweise  $c_{2,10}$  gegenseitig weg.) Wir berechnen nun die Norm von  $\psi_2(k_1, k_2)$  einmal für  $k_1 \neq 0$  und dann für  $k_1 = 0$ . Dabei stellt sich heraus, daß im zweiten Fall die Norm um eins größer ist. Nach Schritt 2 ist also die Norm von  $\psi_2(0, k_2)$  zwei und wir können wie in Schritt 6 schließen, daß  $\psi_2(0, k_2) = \varepsilon(f_{1,1}(k_1) - f_{1,2}(k_1))$  mit  $k_2 = k_1$ ,  $\varepsilon \in \{+1, -1\}$  ist und insbesondere senkrecht zu den Funktionen  $\psi_1(0, k_2)$  steht. Wir berechnen nun die Beträge der beiden Unbestimmten mit Hilfe der Norm von  $\psi_2(0, 0)$  und des Skalarproduktes von  $\psi_2(0, 0)$  mit  $\psi_1(0, 0)$ . Das richtige Vorzeichen für die Unbestimmten finden wir wieder (in Abhängigkeit von  $\varepsilon$ !) genau wie oben durch Berechnung der unipotenten Charaktere sowie Tensor- und Skalarproduktbildung.

Jetzt bleibt nur noch die Bestimmung von  $\varepsilon$  übrig. Berechnen wir für beide Möglichkeiten von  $\varepsilon$  die unipotenten Senkrechtfunktionen  $f_{1,1}(0)$  und  $f_{1,2}(0)$ , so erkennen wir, daß der Unterschied nur in der Vertauschung der Werte auf den Paaren von Klassen  $c_{9,3}(i_1, i_2)$  und  $c_{9,4}(i_1, i_2)$  sowie  $c_{12,1}(i_1, i_2)$  und  $c_{12,2}(i_1, i_2)$  besteht. Die Berechnung von Skalarprodukten, etwa der unipotenten Charaktere mit denen aus den Lusztig-Serien vom Typ  $g_7$ , führt hier aus dem gleichen Grund wie oben angedeutet nicht weiter. Wir verwenden hier noch einen weiteren Trick, für den wir uns nur einen geeigneten unipotenten Charakter genauer ansehen müssen: Ist  $x \in \mathbf{G}^F$  und  $\chi$  ein Charakter von  $\mathbf{G}^F$ , der auf  $x$  und  $x^2$  ganzzahlige Werte annimmt, so sind diese Werte kongruent modulo zwei (der Charakterwert bei  $x$  ist Summe gewisser Einheitswurzeln, der Wert bei  $x^2$  ist dann die Summe der Quadrate dieser Einheitswurzeln). Betrachten wir zum Beispiel den unipotenten Charakter

$\chi_{1,2}(0)$  auf einigen Klassentypen:

Klasse:	$\chi_{1,2}(0)$
$c_{4,3}(i_1, i_2)$	$q$
$c_{9,3}(i_1, i_2)$	$(1 + \varepsilon q)/2$
$c_{9,4}(i_1, i_2)$	$(1 - \varepsilon q)/2$

Aus den Tabellen 8 und 13 können wir Repräsentanten dieser Klassen ablesen (die Vertreter aus den Klassentypen  $c_{9,3}$  und  $c_{9,4}$  werden noch mit  $n_1$  konjugiert):

Klasse:	Repräsentant
$c_{4,3}(i_1, i_2)$	$x_{4,3}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2})u_4(1)u_7(-\alpha)$
$c_{9,3}(i_1, i_2)$	$x_{9,3}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, -\tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2})u_4(1)u_7(1)$
$c_{9,4}(i_1, i_2)$	$x_{9,4}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{2i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, -\tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2})u_4(1)u_7(\alpha)$

Hier steht  $\alpha$  wieder für ein Nichtquadrat aus  $\mathbb{F}_q^\times$ . Für  $q \equiv 1 \pmod{4}$  ist  $-1$  ein Quadrat in  $\mathbb{F}_q^\times$ , und somit sind  $u_4(1)u_7(\alpha)$  und  $u_4(1)u_7(-\alpha)$  in  $\mathbf{G}^F$  konjugiert. In diesem Fall sind  $x_{9,4}(i_1, i_2)^2$  und  $x_{4,3}(i_1, i_2)^2$  in  $\mathbf{G}^F$  konjugiert, und für die Charakterwerte von  $\chi_{1,2}(0)$  auf den Klassen  $c_{9,4}(i_1, i_2)$  und  $c_{4,3}(i_1, i_2)$  muß  $(1 - \varepsilon q)/2 \equiv q \pmod{2}$  gelten. Daraus folgt  $\varepsilon = -1$ . Für  $q \equiv 3 \pmod{4}$  bekommen wir das gleiche Ergebnis durch Vergleich der Charakterwerte auf den Klassen  $c_{9,3}(i_1, i_2)$  und  $c_{4,3}(i_1, i_2)$ .

Wir fassen auch die Ergebnisse dieses Abschnittes in einem Satz zusammen.

**Satz 8.3** *Für die Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  sind die Werte der Senkrechtfunktionen  $f_{1,1}(k_1)$ ,  $f_{1,2}(k_1)$ ,  $f_6(k_1, k_2)$  und  $f_7(k_1, k_2)$  in Tabelle 24 angegeben. Auf nicht aufgeführten Klassen sind die Werte Null. Für die Gruppen  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  stehen die Werte der Senkrechtfunktionen in Tabelle 25.*

*Schließlich geben wir für diese beiden Serien von Gruppen in den Tabellen 26 und 27 die Tafeln der unipotenten Charaktere an, deren Werte Polynome in  $q$  sind und jeweils nur vom Klassentyp abhängen.*

## Anmerkungen

- Das Abzählargument in Schritt 3 und die Kongruenzbetrachtung in Schritt 7 wurden durch die Arbeit [20] von Geck und Pfeiffer angeregt, in der eine unipotente Senkrechtfunktion für Gruppen mit Dynkin-Typ  $D_4$  berechnet wird.
- Die Berechnung der Normen, Skalarprodukte und Tensorprodukte, die wir verwendet haben, ist mit unseren MAPLE-Programmen zum Rechnen mit generischen Charaktertafeln problemlos zu bewerkstelligen. Darauf wird in Abschnitt 9 noch kurz eingegangen.
- Auch die Werte der nicht-unipotenten Charaktere lassen sich aus den Tabellen im Anhang konstruieren. In Abschnitt 6 wurde erklärt, wie sich die Werte der Deligne-Lusztig-Charaktere aus unseren Tabellen ergeben; außerdem stehen die Werte der Senkrechtfunktionen in den Tabellen 24 und 25. Schließlich sind in

Tabelle 23 alle irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{G}^F$  als Linearkombinationen der Deligne-Lusztig-Charaktere und der Senkrechtfunktionen angegeben. Besonders einfach ist das Hinschreiben der Werte der irreduziblen Deligne-Lusztig-Charaktere, weil hier keine Linearkombinationen gebildet werden müssen. Zum Beispiel ist der Wert von  $\chi_{32,1}(k_1, k_2, k_3, k_4)$  auf den Klassen  $h_{29}(i_1, i_2, i_3, i_4)$ :

$$\begin{aligned}
& -\zeta_1^{i_4 k_4} \\
& (\zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{i_2 k_1} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{i_3 k_2} \zeta_1^{i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{i_2 k_1} \zeta_1^{i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{i_3 k_2} \zeta_1^{i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{i_2 k_1} \zeta_1^{i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{i_3 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{-i_3 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{-i_3 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{-i_3 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_2 k_1} \zeta_1^{i_4 k_2} \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{-i_3 k_2} \zeta_1^{i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_2 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{i_3 k_2} \zeta_1^{-i_2 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{i_1 k_1} \zeta_1^{i_4 k_2} \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{i_3 k_2} \zeta_1^{-i_2 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_2 k_1} \zeta_1^{i_4 k_2} \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{i_3 k_2} \zeta_1^{-i_2 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{i_4 k_2} \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{i_3 k_2} \zeta_1^{-i_2 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{i_1 k_1} \zeta_1^{i_4 k_2} \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{i_3 k_2} \zeta_1^{-i_2 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} \zeta_1^{i_3 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_2 k_1} \zeta_1^{i_4 k_2} \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_3 k_2} \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 \zeta_1^{i_1 k_1} \zeta_1^{i_4 k_2} \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_3 k_2} \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_1^{-i_2 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \\
& \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}} + \zeta_2^{i_4 k_3 q \zeta_1^{-i_3 k_1} \zeta_1^{-i_1 k_2} \zeta_2^{i_4 k_2 q \zeta_2^{i_4 k_1} q \zeta_1^{-i_1 k_3}})
\end{aligned}$$

## 9 Schlußbemerkungen zu den Charaktertafeln

In diesem Abschnitt werden noch einige Anmerkungen zusammengetragen.

### Zum Rechnen mit generischen Charaktertafeln

Sehr nützliche Programme zum Rechnen mit generischen Charaktertafeln wurden von Meinolf Geck in der Programmiersprache des MAPLE-Systems für die Arbeit [19] geschrieben. Das Prinzip der Programme besteht darin, für eine generische Charaktertafel außer den eigentlichen Charakterwerten in Form einer Matrix auch Prozeduren zur Verfügung zu stellen, die beschreiben, wie Charakterwerte über alle Klassen eines Klassentyps oder Charaktere eines Charaktertyps aufzusummieren sind. Dies haben wir in Abschnitt 4.1 im Anschluß an Satz 4.3 kurz beschrieben. (Für unsere Tafeln ergeben sich diese Prozeduren aus den Tabellen 8, 9, 10, 18 und 19, die damit einen wichtigen Teil unseres Ergebnisses darstellen.) Der eigentliche Kern dieser Programme besteht dann aus Routinen für das formale Rechnen mit den als Charakterwerten vorkommenden *generischen* Einheitswurzeln. Für einen Überblick sei auf den Anhang der oben zitierten Arbeit verwiesen.

Es ist nun etwa möglich, Skalarprodukte von Charakteren, Klassenmultiplikationskoeffizienten oder die generische Zerlegung von Tensorprodukten zu berechnen. Solche Rechnungen sind per Hand schon bei kleineren generischen Tafeln eine mühsame Angelegenheit (vergleiche etwa Simpson und Frame [37, insbesondere 6.]).

Da die Programme von Meinolf Geck bei den großen hier berechneten Tafeln an ihre Grenzen kamen, wurden vom Autor der vorliegenden Arbeit verbesserte Versionen geschrieben. Auf Einzelheiten soll aber im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr eingegangen werden. Die Programme und ihre Beschreibung sind nun Teil des CHEVIE-Systems [21], auf das bereits in der Einleitung hingewiesen wurde. In CHEVIE sind auch die in dieser Arbeit berechneten Charaktertafeln in Form von Computerdateien enthalten.

### Tests der Rechenergebnisse

Bei umfangreichen Rechnungen ist es sinnvoll, die Ergebnisse anhand bekannter Aussagen zu überprüfen. Wir wollen in Stichworten einige Tests angeben, die auf die Ergebnisse dieser Arbeit angewendet wurden:

- Anzahl der maximalen Tori in  $\mathbf{G}^F$  (Carter [6, 3.4.1])
- Anzahl der halbeinfachen Klassen (Carter [6, 3.7.6]), auch für die duale Gruppe.
- Anzahl der Konjugiertenklassen in den symplektischen Gruppen (Wall [41, 2.6 und 3.7]).
- Prüfen der ersten und zweiten Orthogonalitätsrelationen. Diese sind im „rechnerischen“ Sinn nicht äquivalent, denn hier werden neben den Charakterwerten auch die im vorhergehenden Absatz angesprochenen Summationsprozeduren für die Klassen- und Charaktertypen getestet.



- Mit den unipotenten Charakteren wurden sämtliche Tensorprodukte gebildet und hiervon die Skalarprodukte mit den unipotenten Charakteren berechnet, die nicht-negative ganze Zahlen ergeben müssen (vergleiche Abschnitt 8).

### Charaktertafeln für $\mathbf{PCSp}_6(q) \cong (C_3)_{ad}(q)$

Für eine endliche Gruppe  $H$  mit Normalteiler  $N$  ergibt sich aus der Charaktertafel von  $H$  die Tafel der Faktorgruppe  $H/N$  wie folgt: Die irreduziblen Charaktere von  $H$ , die auf allen in  $N$  liegenden Klassen den gleichen Wert haben, sind auch irreduzible Charaktere von  $H/N$ . Alle irreduziblen Charaktere von  $H/N$  entstehen auf diese Weise.

Die Charaktertafeln für die Gruppen  $\mathbf{PCSp}_6(q) \cong \mathbf{CSp}_6(q)/Z(\mathbf{CSp}_6(q))$  (mit ungeradem  $q$ ) ergeben sich also aus denen für die Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  durch die folgenden zwei Schritte: Zuerst müssen die Konjugiertenklassen von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  bestimmt werden, die durch Multiplikation mit Zentrums-elementen auseinander hervorgehen; dies beschreibt die Konjugiertenklassen von  $\mathbf{PCSp}_6(q)$ . (Es fallen immer mindestens  $(q-1)/2$  Klassen zusammen, weil  $\lambda(Z(\mathbf{CSp}_6(q))) = (\mathbb{F}_q^\times)^2$  ist. Im wesentlichen ist hier für alle Klassen zu entscheiden, ob mit einer Matrix  $A$  auch  $-A$  darin liegt.) Außerdem muß für die Parameter aller Charaktertypen von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  die Teilmenge bestimmt werden, für die die Charaktere auf den Zentrums-elementen konstanten Wert annehmen (erste Spalte unserer Tafel für die  $\mathbf{CSp}_6(q)$ ). Die praktische Durchführung dieser Schritte ist allerdings aufwendig.

### Charaktertafeln für $\mathbf{Sp}_6(q) \cong (C_3)_{sc}(q)$ ( $q$ ungerade)

Diese Aufgabe ist viel schwieriger als die vorher besprochene, denn hier müssen noch zusätzliche Charakterwerte berechnet werden. Die Konjugiertenklassen der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  und ihre Fusion in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  haben wir in dieser Arbeit bereits bestimmt (Tabellen 9 und 13). Es ist damit für uns ganz leicht, die Einschränkungen der Charaktere von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  anzugeben. Nach der Clifford-Theorie (siehe etwa Huppert [24, V.§17]) gibt es für diese eingeschränkten Charaktere zwei Möglichkeiten: Entweder sind sie irreduzibel, oder sie zerfallen in zwei irreduzible Konstituenten. Denn die Trägheitsgruppe jedes irreduziblen Charakters  $\psi$  von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  umfaßt mindestens die Gruppe  $H := \mathbf{Sp}_6(q) \cdot Z(\mathbf{CSp}_6(q))$ , die ein Normalteiler von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  vom Index zwei ist. Ist die Einschränkung  $\psi$  eines Charakters  $\chi$  irreduzibel, so gibt es genau  $q-1$  verschiedene Charaktere von  $\mathbf{CSp}_6(q)$ , deren Einschränkung auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  gleich  $\psi$  ist; diese ergeben sich aus  $\chi$  durch Multiplikation mit den linearen Charakteren. Ist dagegen  $\psi$  nicht irreduzibel, so gibt es genau  $(q-1)/2$  verschiedene Charaktere  $\chi$  von  $\mathbf{CSp}_6(q)$ , deren Einschränkung gleich  $\psi$  ist. Und dies ist genau dann der Fall, wenn die Charaktere  $\chi$  und  $\chi \cdot \chi_{1,1}((q-1)/2)$  auf  $\mathbf{CSp}_6(q)$  gleich sind ( $\chi_{1,1}((q-1)/2)$  ist der nichttriviale lineare Charakter von  $\mathbf{CSp}_6(q)/H$ , also ist diese Bedingung genau dann erfüllt, wenn  $\chi$  auf allen Klassen  $C$  von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit Multiplikator  $\lambda(C) \in \mathbb{F}_q \setminus (\mathbb{F}_q^\times)^2$  den Wert Null hat); siehe Huppert [24, V.17.11 und 17.12] (wir benutzen, daß die Faktorgruppe  $\mathbf{CSp}_6(q)/\mathbf{Sp}_6(q)$  zyklisch ist). Damit haben wir zwei Möglichkeiten festzustellen, ob die Einschränkung eines Charakters  $\chi$  von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  irreduzibel ist. Entweder prüfen wir nach, ob  $\chi$  und  $\chi \cdot \chi_{1,1}((q-1)/2)$  auf  $\mathbf{CSp}_6(q)$  gleich sind, oder wir rechnen die Norm des eingeschränkten Charakters aus. Die praktische Durchführung ist aber in beiden Fällen aufwendig, denn hier brauchen sich keineswegs alle Charaktere eines

Charaktertyps gleich zu verhalten (siehe das Beispiel  $\mathbf{GL}_2(q)$  und  $\mathbf{SL}_2(q)$  in Digne-Michel [13, Ch. 15] und unsere Anwendung dieser Überlegungen im Beweis von Bemerkung 10.2).

In dem Fall, daß ein eingeschränkter Charakter  $\psi$  nicht irreduzibel ist, zerfällt er in zwei verschiedene Konstituenten  $\psi = \psi_1 + \psi_2$ , die in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  vermöge eines Elementes aus  $\mathbf{CSp}_6(q) \setminus H$  zueinander konjugiert sind (Huppert [24, 17.7]). Wenn also eine  $\mathbf{CSp}_6(q)$ -Konjugiertenklasse  $C$ , die in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  liegt, eine  $\mathbf{Sp}_6(q)$ -Klasse bildet, so ist  $\psi_1(C) = \psi_2(C) = \frac{1}{2}\psi(C)$ . Für solche Klassen  $C$  aber, die in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  in zwei Klassen  $C_1$  und  $C_2$  zerfallen, ergeben sich zunächst nur die Bedingungen  $\psi_1(C_1) + \psi_2(C_1) = \psi_1(C_2) + \psi_2(C_2) = \psi(C)$  und  $\psi_1(C_1) = \psi_2(C_2)$ , und diese genügen nicht, um die fehlenden Charakterwerte von  $\psi_1$  und  $\psi_2$  zu bestimmen. Kleinere Tafeln können hier mit Hilfe von Orthogonalitätsrelationen und einigen Ad-hoc-Überlegungen ergänzt werden (siehe zum Beispiel Simpson und Frame [37]). Aber in unserem Beispiel wäre ein solches Vorgehen zu aufwendig, denn aus Tabelle 13 ist zu ersehen, daß die Klassen aus 36 Klassentypen von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  in Paare von Klassen aufspalten, und für entsprechend viele eingeschränkte Charaktere (die viel schwieriger genau zu beschreiben sind) ist eine Aufspaltung zu erwarten.

Unter dem Aspekt der Jordan-Zerlegung von Charakteren stellt sich das hier betrachtete Problem so dar: Die Gruppe  $\mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$  hat kein zusammenhängendes Zentrum, und diese Tatsache spiegelt sich darin wieder, daß nicht alle halbeinfachen Elemente der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^* \cong \mathbf{SO}_7(\mathbf{K})$  einen zusammenhängenden Zentralisator haben. In den nicht-zusammenhängenden Zentralisatoren halbeinfacher Elemente lassen sich auch Deligne-Lusztig-Charaktere und unipotente Charaktere so definieren, daß der Satz über die Jordan-Zerlegung der Charaktere richtig bleibt (siehe hierzu Digne-Michel [13, Vorbemerkung zu 13.23]). In dieser Sprache lassen sich die oben beschriebenen Schwierigkeiten so formulieren, daß es viel mehr Lusztig-Serien gibt, zu denen wir nicht-uniforme Funktionen konstruieren müssen (und diese können auf viel mehr Klassen Werte ungleich Null annehmen als die in Abschnitt 8 betrachteten Senkrechtfunktionen).

Ansätze für die systematische Lösung des hier angesprochenen Problems sind in der neuen Arbeit [14] von Digne, Lehrer und Michel zu finden. Aber auch die Verwendung der dortigen Ergebnisse für unser konkretes Beispiel scheint noch sehr aufwendig zu sein (selbst für die Gruppen  $\mathbf{SL}_n(q)$  ist die explizite Konstruktion aller Charakterwerte schwierig).

### Charaktertafeln der Gruppen $\mathbf{SO}_7(q) \cong (B_3)_{ad}(q)$

Für gerades  $q$  ist diese Tafel in der vorliegenden Arbeit ausgerechnet, weil diese Gruppe dann isomorph zu  $\mathbf{Sp}_6(q)$  ist. Sei also  $q$  ungerade. Dann sollte sich die Tafel für die Gruppen  $\mathbf{SO}_7(q)$  im wesentlichen mit genau den gleichen Methoden berechnen lassen, wie unsere Tafel für die Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$ . Die Überlegungen zur Bestimmung der halbeinfachen Konjugiertenklassen müssen etwas verfeinert werden, weil hier die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente nicht alle zusammenhängend sind. Die unipotenten Klassen stehen in Shoji [36] und die gemischten Klassen sind sicher nicht schwer zu finden, weil es sich ja um übersichtliche Matrixgruppen handelt (Wall hat in [41] auch die Konjugiertenklassen der endlichen orthogonalen Gruppen parametrisiert). Unsere Charakterformel in Satz 2.1(b) gilt auch hier, wenn die  $s_{r,t}$  als die in Abschnitt 4.1 Punkt (3) bestimmten Elemente interpretiert werden. Die Greenfunktionen für Gruppen vom Typ  $B_3$  stehen in

Lambe und Srinivasan [26], für die Typen  $A_3$  und  ${}^2A_3$  ergeben sie sich aus bekannten Charaktertafeln, und die übrigen werden auch in dieser Arbeit verwendet. In Tabelle 9 haben wir die halbeinfachen Klassen der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  parametrisiert, und dies liefert die Parametrisierung der Lusztig-Serien von  $\mathbf{SO}_7(q)$ . Aus dieser Tabelle ist auch zu ersehen, daß sich unsere Konstruktion der Senkrechtfunktionen vermutlich fast wörtlich übernehmen läßt. Die Lusztig-Serien, in denen Senkrechtfunktionen gebraucht werden, sind die zu den halbeinfachen Klassentypen  $h_1, \dots, h_4$  (siehe Tabelle 6). Die analog zu unserem Vorgehen in Abschnitt 8 definierten Leviuntergruppen  $\mathbf{L}_1^*$  und  $\mathbf{L}_2^*$  besitzen dann Zentrumselemente aus den halbeinfachen Klassentypen  $h_3, h_2, h_1$  beziehungsweise  $h_4, h_2$  und  $h_1$ . Diese liefern die Senkrechtfunktionen zu den verschiedenen Typen von Lusztig-Serien.

### Charaktertafeln für $\mathbf{CSp}_4(q)$ , $q$ ungerade, und $\mathbf{Sp}_4(q)$ , $q$ gerade

Die Charaktertafeln für diese Gruppen (die von Shinoda [35] und Enomoto [16] berechnet wurden) lassen sich mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren schnell neu berechnen. Hier muß im wesentlichen außer den Deligne-Lusztig-Charakteren nur eine unipotente Senkrechtfunktion gefunden und für diese hauptsächlich ein Vorzeichen bestimmt werden (vergleiche Abschnitt 8, Schritt 1). Eine explizite Induktion von Klassenfunktionen wird nur noch zur Berechnung der Greenfunktionen benötigt (vergleiche Abschnitt 5).

### Spezialisierung der Charaktertafeln

Im ATLAS endlicher Gruppen (siehe [8]) sind die Charaktertafeln der in dieser Arbeit behandelten Gruppen in den Spezialfällen  $q = 2$  und  $q = 3$  enthalten. Aus den Tabellen 8 und 18 sehen wir, daß aber erst bei Spezialisierung der Tafeln von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  für  $q \geq 7$  alle Klassentypen und Charaktertypen tatsächlich vorkommen. Da schon für  $q = 7$  diese Gruppe fast 3000 Konjugiertenklassen aufweist, ist andererseits eine solche Spezialisierung unserer Tafeln nicht mehr sinnvoll. Es ist außerdem noch zu bemerken, daß das Rechnen mit den Charakteren, insbesondere mit den Einheitswurzel­ausdrücken, durch das Spezialisieren erfahrungsgemäß kaum vereinfacht wird.

## 10 Eine Anwendung in der konstruktiven Galoistheorie

In diesem Abschnitt sei  $q$  immer ungerade. Als Anwendung unserer Charaktertafel für die Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  wollen wir eine Lücke in der Arbeit [22] von Häfner schließen. Es soll die Realisierbarkeit der endlichen einfachen Gruppen  $\mathbf{PSp}_6(p)$  mit gewissen Einschränkungen an  $p$  als Galoisgruppen über dem rationalen Funktionenkörper  $\mathbb{Q}(t)$  und damit über  $\mathbb{Q}$  gezeigt werden. (Wir haben zwar nicht die Charaktertafeln für die Gruppen  $\mathbf{PSp}_6(q)$  ausgerechnet, werden aber sehen, wie wir den Teil der Tafel, den wir benötigen, konstruieren können.) Eine allgemeine Referenz für die hier benutzten Methoden ist das Buch [31] von Matzat. Zur besseren Übersicht zitieren wir zuerst das verwendete Kriterium. Die Formulierung entnehmen wir aus der Arbeit [11] von Dentzer, in der analog die Gruppen  $\mathbf{PSp}_4(p)$  betrachtet werden.

**Lemma 10.1** *Sei  $H$  eine endliche Gruppe mit trivialem Zentrum, und seien  $C_1, C_2, C_3$  drei Konjugiertenklassen von  $H$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- (1) *Für  $h \in C_1$  und  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(i, |H|) = 1$  gelte  $h^i \in C_1$ . (Eine solche Klasse heißt rational.)*
- (2) *Für  $h \in C_2 \cup C_3$  und  $i \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(i, |H|) = 1$  gelte  $h^i \in C_2 \cup C_3$ . (Sind  $C_2$  und  $C_3$  nicht rational, so heißt  $(C_2, C_3)$  ein Paar semirationaler Klassen.)*
- (3) *Jedes Elementtripel  $(h_1, h_2, h_3)$  mit  $h_i \in C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , und  $h_1 h_2 h_3 = 1$  erzeuge  $H$ .*
- (4) *Sei  $c_i$  die Zentralisatorordnung der Elemente aus  $C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , und seien  $\chi_1, \dots, \chi_h$  die irreduziblen Charaktere von  $H$ . Dann gelte:*

$$n(C_1, C_2, C_3) := \frac{|H|}{c_1 c_2 c_3} \cdot \sum_{j=1}^h \frac{\chi_j(C_1) \chi_j(C_2) \chi_j(C_3)}{\chi_j(1)} = 1$$

*(Die Zahl  $n(C_1, C_2, C_3)$  heißt normalisierte Strukturkonstante des Klassentripels; sie gibt die Anzahl der Bahnen von  $H$  auf der Menge der Elementtripel  $(h_1, h_2, h_3)$  mit  $h_i \in C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , und  $h_1 h_2 h_3 = 1$  an.)*

Dann gibt es eine reguläre galoissche Körpererweiterung  $N/\mathbb{Q}(t)$  mit Galoisgruppe  $H$  (regulär heißt, daß  $\mathbb{Q}$  in  $N$  algebraisch abgeschlossen sein soll). Insbesondere gibt es damit nach dem Hilbertschen Irreduzibilitätssatz auch eine galoissche Erweiterung von  $\mathbb{Q}$  mit Galoisgruppe  $H$ .

Sei ab jetzt  $p \equiv 5, 17 \pmod{28}$  und  $p > 5$ . Für diesen Fall hat Häfner in [22] drei Klassen  $C_1, C_2, C_3$  von  $\mathbf{PSp}_6(p) \cong \mathbf{Sp}_6(p)/\{\pm \text{Id}\}$  angegeben, die die Voraussetzungen (1), (2) und (3) von Lemma 10.1 erfüllen. Jede Klasse wurde mit Hilfe einer Matrix aus  $\mathbf{Sp}_6(p)$ , die im Urbild dieser Klasse liegt, beschrieben. Mit unserer Tabelle 13 lassen sich die Urbildklassen leicht identifizieren; wir geben ihren Klassentyp und die Zentralisatorordnung der Elemente in  $\mathbf{PSp}_6(p)$  an:

Klasse	Klassentyp in $\mathbf{Sp}_6(p)$	Zentralisatorordnung in $\mathbf{PSp}_6(p)$
$C_1$	$c_{31,0}$	$\frac{1}{2}(p^3 + 1)$
$C_2$	$c_{2,2,1}$	$p^5(p^2 - 1)^2$
$C_3$	$c_{2,2,2}$	$p^5(p^2 - 1)^2$

Als Urbild der Klasse von  $C_1$  wurde genauer ein Element der Ordnung 14 in einem Coxeter-Torus von  $\mathbf{Sp}_6(p)$  (bei uns Tori vom Typ  $\mathbf{T}_{10}$ ) gewählt. Für  $p \equiv 3, 5 \pmod{7}$  ergibt sich durch Betrachtung der Torusordnungen, daß es genau eine Klasse von Elementen der Ordnung 14 in  $\mathbf{Sp}_6(p)$  gibt und diese damit rational ist (Voraussetzung (1)). Weiter ist zu sehen, daß die Elemente dieser Klasse reguläre Elemente sind und modulo  $\{\pm \text{Id}\}$  mit einer anderen Klasse zusammenfallen. Daraus ergibt sich die Zuordnung zum Klassentyp und die Zentralisatorordnung. Mit unseren Repräsentanten der Klassen  $c_{2,2,1}(i_1)$  und  $c_{2,2,2}(i_1)$  von  $\mathbf{Sp}_6(p)$  ist sofort zu erkennen, daß diese (für gleiches  $i_1$ ) ein Paar von semirationalen Klassen bilden (Voraussetzung (2)). Da die jeweils zwei Klassen dieser Klassentypen modulo  $\{\pm \text{Id}\}$  zusammenfallen, kennen wir auch die Zentralisatorordnung der Bilder in  $C_2$  und  $C_3$ . Daß jedes Elementtripl  $(h_1, h_2, h_3)$  mit  $h_i \in C_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , die Gruppe  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}_6(p)$  erzeugt, wurde von Häfner in [22] durch Ordnungsabschätzungen mit Hilfe einer Liste der maximalen Untergruppen von  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}_6(p)$  (aus Kleidman [25]) gezeigt (Voraussetzung (3)). Aus diesem Schritt kommen die weitere Kongruenzbedingung  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und unsere Beschränkung auf Gruppen über Primkörpern  $\mathbb{F}_p$ .

Die Voraussetzung (4) folgt aus der folgenden Bemerkung.

**Bemerkung 10.2** *Sei  $p \equiv 1 \pmod{4}$  und seien  $C_1, C_2$  und  $C_3$  Konjugiertenklassen von  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}_6(p)$  mit den oben angegebenen Zentralisatorordnungen, welche Urbilder in den Klassentypen  $c_{31,0}$ ,  $c_{2,2,1}$  und  $c_{2,2,2}$  von  $\mathbf{Sp}_6(p)$  haben. Dann gilt*

$$n(C_1, C_2, C_3) = 1.$$

**Beweis:** In Abschnitt 9 haben wir uns schon überlegt, wie sich die irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  bei Einschränkung auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  verhalten: Sie sind entweder irreduzibel oder besitzen zwei irreduzible Konstituenten. Ein Charakter  $\chi$  von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  bleibt genau dann irreduzibel, wenn er ungleich dem Produkt  $\chi \cdot \chi_{1,1}((q-1)/2)$  ist. Dabei hat der lineare Charakter der Ordnung zwei  $\chi_{1,1}((q-1)/2)$  auf den Klassen  $C$  von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  mit Multiplikator  $\lambda(C) \in \mathbb{F}_q^\times \setminus (\mathbb{F}_q^\times)^2$  den Wert  $-1$  und sonst den Wert  $1$ .

Weiter sind die irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}_6(q)$  durch die irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  gegeben, die auf  $+\text{Id}$  und  $-\text{Id}$  gleiche Werte haben (vergleiche die Diskussion der Gruppen  $\mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  in Abschnitt 9).

Zuerst betrachten wir die Klasse  $C_1$ . Klassen aus  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  vom Typ  $c_{31,0}$ , die in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  liegen, spalten in  $\mathbf{Sp}_6(q)$  nicht auf. Hat also ein Charakter von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  auf den Klassen dieses Typs den Wert Null, so gilt das auch für die Konstituenten des auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  eingeschränkten Charakters. Diese Charaktere von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  liefern damit keinen Beitrag zur gesuchten Strukturkonstanten. Nun wissen wir aus der Charakterformel für die Deligne-Lusztig-Charaktere  $R_{\mathbf{T}}^{\mathbf{G}}\theta$ , daß diese nur auf solchen regulären halbeinfachen Klassen Werte ungleich Null annehmen können, die Vertreter in  $\mathbf{T}^F$  haben. Außerdem haben die Senkrechtfunktionen von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  auf allen halbeinfachen Klassen den Wert Null. Für unsere Betrachtungen brauchen wir hier also nur die Charaktertypen aus Tabelle 23 herauszusuchen, die mit Hilfe von Deligne-Lusztig-Charakteren von Tori vom Typ  $\mathbf{T}_{10}$  gebildet werden (in unserer Notation  $R_{i,10}$  oder  $R_{i,10,k}$ ). Es gibt nur 13 solche Charaktertypen, und wir halten in Tabelle 28 die Werte ihrer Einschränkungen auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  auf den Klassen  $\{+\text{Id}\} = c_{1,0}(0)$ ,  $\{-\text{Id}\} = c_{1,0}((q-1)/2)$ ,  $c_{2,2,1}(0)$  und  $c_{31,0}(i_1)$  fest (die Werte auf  $c_{2,2,2}(0)$  sind gleich denen auf  $c_{2,2,1}(0)$ ).

Für die Charaktertypen  $\chi_{3,1}$ ,  $\chi_{3,3}$  und  $\chi_{3,5}$  sind bei  $q \equiv 1 \pmod{4}$  die Werte auf  $\pm \text{Id}$  verschieden, so daß sie keine Charaktere von  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}_6(q)$  liefern (zum Glück für uns, denn diese eingeschränkten Charaktere sind nicht irreduzibel).

Die Charaktere  $\chi_{34,1}(k_1, k_2)$  von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  liefern für gerades  $k_1$  Charaktere von  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}_6(q)$ . Wenn wir aber nachweisen, daß ihre Einschränkung auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  irreduzibel ist, dann bekommen wir auch hier keinen Beitrag zur Strukturkonstanten, weil die Werte auf  $c_{2,2,1}$  Null sind. Dazu betrachten wir die Werte von  $\chi_{34,1}(k_1, k_2)$  auf den Klassen  $c_{6,2}(i_1, i_2)$ :

$$-\zeta_1^{i_1 k_1} \zeta_2^{i_2 k_1} \zeta_1^{i_2 k_2} - \zeta_1^{-i_1 k_1} \zeta_2^{i_2 k_1} \zeta_1^{i_2 k_2}$$

Nach dem Kriterium am Beginn dieses Beweises ist die Irreduzibilität der Einschränkung von  $\chi_{34,1}(k_1, k_2)$  auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  gezeigt, wenn wir nachweisen, daß dieser Wert für ein ungerades  $i_2$  nicht Null ist (für ungerades  $i_2$  hat der lineare Charakter der Ordnung zwei von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  den Wert  $-1$  auf  $c_{6,2}(i_1, i_2)$ ). Das ist genau dann der Fall, wenn der Quotient der beiden Summanden,

$$\zeta_1^{k_1(2i_1 - i_2)},$$

ungleich  $-1$  ist. Wäre dieser Ausdruck gleich  $-1$ , dann gäbe es ein ungerades  $l \in \mathbb{Z}$  mit

$$l \cdot \frac{q+1}{2} = k_1(2i_1 - i_2).$$

Das kann aber nicht sein, denn wegen  $q \equiv 1 \pmod{4}$  steht auf der linken Seite dieser Gleichung eine ungerade Zahl, während das  $k_1$  auf der rechten Seite als gerade vorausgesetzt war. (Wir sehen an diesem noch einfachen Beispiel, daß es im allgemeinen nicht leicht ist, von einer Einschränkung auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  festzustellen, ob sie irreduzibel ist; oft ist dies mit aufwendigen Fallunterscheidungen verbunden. Dies gilt in gleicher Weise, wenn wir unsere MAPLE-Programme zur Berechnung der Norm der eingeschränkten Charaktere benutzen.)

Jetzt betrachten wir die Charaktertypen  $\chi_{9,1}$ ,  $\chi_{9,2}$  und  $\chi_{9,3}$ . Diese liefern auch für gerades  $k_1$  Charaktere von  $\mathbf{P}\mathbf{Sp}_6(q)$ . Der Nachweis der Irreduzibilität der Einschränkungen auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  erfolgt wie im oben vorgeführten Beispiel (hier ist es günstig, die Werte auf  $c_{31,0}(i_1, i_2)$  mit ungeradem  $i_2$  anzusehen). Rechnen wir nun für feste Parameter  $k_1, k_2$  den Beitrag der Charaktere  $\chi_{9,1}(k_1, k_2)$ ,  $\chi_{9,2}(k_1, k_2)$  und  $\chi_{9,3}(k_1, k_2)$  zur gesuchten Strukturkonstanten aus (mit den Werten in Tabelle 28), so sehen wir gleich, daß diese sich jeweils zu Null wegheben.

Beachten wir jetzt, daß die Charaktere  $\chi_{1,r}(k_1)$  von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$  für alle  $k_1$  die gleiche Einschränkung auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  haben (sie unterscheiden sich um die linearen Charaktere von  $\mathbf{C}\mathbf{Sp}_6(q)$ ), so bleiben jetzt nur noch die Einschränkungen der unipotenten Charaktere  $\chi_{1,1}(0)$ ,  $\chi_{1,2}(0)$ ,  $\chi_{1,5}(0)$ ,  $\chi_{1,8}(0)$ ,  $\chi_{1,11}(0)$  und  $\chi_{1,12}(0)$  zu betrachten. Diese sind irreduzibel (siehe die Werte auf  $c_{25,0}$  in Tabelle 26 oder Digne-Michel [13, 13.20]), und somit können wir nun aus Tabelle 28 und den oben angegebenen Zentralisatorordnungen der betrachteten Klassen die gesuchte normalisierte Strukturkonstante ausrechnen (jetzt mit  $q = p$ ). Das Ergebnis entspricht der Behauptung.  $\square$

Das Kriterium in Lemma 10.1 liefert jetzt folgenden Satz.

**Satz 10.3** *Für eine Primzahl  $p > 5$  mit  $p \equiv 5, 17 \pmod{28}$  gibt es eine reguläre galoissche Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}(t)$  mit der Galoisgruppe  $\mathbf{PSp}_6(p)$ . Insbesondere gibt es eine galoissche Körpererweiterung von  $\mathbb{Q}$  mit dieser Galoisgruppe.*

## Tabellen

In diesem Anhang werden alle Tabellen und Tafeln der Arbeit gesammelt. Am Schluß der Überschriften ist jeweils in Klammern die Textstelle vermerkt, zu der die Tabelle gehört.

**Tabelle 1** Beschreibung der erzeugenden Elemente  $s_i$ ,  $1 \leq i \leq l$ , der Weylgruppe  $\mathbf{W}$  vom Typ  $C_l$ . Als Automorphismen von  $X$  und  $Y$  schreiben wir sie mit Hilfe der gewählten  $\mathbb{Z}$ -Basen und als Elemente von  $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$  beschreiben wir ihre Wirkung bei Konjugation von Toruselementen:  ${}^{s_i}h(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$  und  ${}^{s_i}h(\lambda_1, \dots, \lambda_l, \lambda)$  im Fall  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$  (Bemerkung 1.3(c)).

$\mathbf{W}$	$s_i$ für $1 \leq i \leq l-1$	$s_l$
in $\text{Aut}(X)$ , $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$	$\hat{e}_i \mapsto \hat{e}_{i+1}$ $\hat{e}_{i+1} \mapsto \hat{e}_i$ $\hat{e}_j \mapsto \hat{e}_j$ sonst	$\hat{e}_l \mapsto -\hat{e}_l$ $\hat{e}_j \mapsto \hat{e}_j$ sonst
in $\text{Aut}(X)$ , $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$	$\hat{e}_i \mapsto \hat{e}_{i+1}$ $\hat{e}_{i+1} \mapsto \hat{e}_i$ $\hat{e}_j \mapsto \hat{e}_j$ sonst	$\hat{e}_l \mapsto -\hat{e}_l + \hat{e}_{l+1}$ $\hat{e}_j \mapsto \hat{e}_j$ sonst
in $\text{Aut}(Y)$ , $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$	$e_i \mapsto e_{i+1}$ $e_{i+1} \mapsto e_i$ $e_j \mapsto e_j$ sonst	$e_l \mapsto -e_l$ $e_j \mapsto e_j$ sonst
in $\text{Aut}(Y)$ , $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$	$e_i \mapsto e_{i+1}$ $e_{i+1} \mapsto e_i$ $e_j \mapsto e_j$ sonst	$e_l \mapsto -e_l$ $e_{l+1} \mapsto e_l + e_{l+1}$ $e_j \mapsto e_j$ sonst
als $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ , $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_{2l}(\mathbf{K})$	Parameter $\lambda_i$ und $\lambda_{i+1}$ werden vertauscht	$h(\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda_l^{-1})$
als $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ , $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_{2l}(\mathbf{K})$	Parameter $\lambda_i$ und $\lambda_{i+1}$ werden vertauscht	$h(\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda \lambda_l^{-1}, \lambda)$



**Tabelle 2** Konjugiertenklassen in der Weylgruppe  $\mathbf{W}$  vom Typ  $C_3$ . Angegeben sind die zugehörigen Doppelpartitionen, Repräsentanten  $w_i$ , die Zentralisatorordnung von  $w_i$  in  $\mathbf{W}$  und die Ordnung von  $\mathbf{T}^{Fw_i^{-1}}$  im Fall  $G = \mathbf{Sp}_6(q)$ . (Satz 3.1)

Typ $\mathbf{T}_i$	Doppelpartition	$w_i$	$ C(w_i) $	$ \mathbf{T}_i^F $ in $\mathbf{Sp}_6(q)$
$T_1$	$(111, -)$	1	48	$\phi_1^3$
$T_2$	$(11, 1)$	$s_3$	16	$\phi_1^2\phi_2$
$T_3$	$(12, -)$	$s_1$	8	$\phi_1^2\phi_2$
$T_4$	$(1, 11)$	$s_2s_3s_2s_3$	16	$\phi_1\phi_2^2$
$T_5$	$(2, 1)$	$s_1s_3$	8	$\phi_1\phi_2^2$
$T_6$	$(1, 2)$	$s_2s_3$	8	$\phi_1\phi_4$
$T_7$	$(3, -)$	$s_1s_2$	6	$\phi_1\phi_3$
$T_8$	$(-, 111)$	$s_1s_2s_1s_3s_2s_1s_3s_2s_3$	48	$\phi_2^3$
$T_9$	$(-, 12)$	$s_1s_2s_3s_2s_3$	8	$\phi_2\phi_4$
$T_{10}$	$(-, 3)$	$s_1s_2s_3$	6	$\phi_2\phi_6$

**Tabelle 3** Parametrisierung der Elemente der Tori  $\mathbf{T}_i^F := \mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$  in den Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  und  $\mathbf{Sp}_6(q)$ . (Satz 3.1).

Typ	$\mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$ in $\mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ $\mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$ in $\mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$
$\mathbf{T}_1^F$	$\left\{ t_1(j_1, j_2, j_3, j_4) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}, \tilde{\zeta}_1^{j_3}, \tilde{\zeta}_1^{j_4}\right) \mid 0 \leq j_1, j_2, j_3, j_4 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ t_1(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}, \tilde{\zeta}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1, j_2, j_3 \leq q-2 \right\}$
$\mathbf{T}_2^F$	$\left\{ t_2(j_1, j_2, j_3, j_4) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}, \tilde{\xi}_1^{j_3} \tilde{\zeta}_2^{j_4}, \tilde{\zeta}_1^{j_4}\right) \mid 0 \leq j_1, j_2, j_4 \leq q-2, 0 \leq j_3 \leq q \right\}$ $\left\{ t_2(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}, \tilde{\xi}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1, j_2 \leq q-2, 0 \leq j_3 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_3^F$	$\left\{ t_3(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\zeta}_2^{j_1}, \tilde{\zeta}_2^{qj_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}, \tilde{\zeta}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^2-2, 0 \leq j_2, j_3 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ t_3(j_1, j_2) := h\left(\tilde{\zeta}_2^{j_1}, \tilde{\zeta}_2^{qj_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^2-2, 0 \leq j_2 \leq q-2 \right\}$
$\mathbf{T}_4^F$	$\left\{ t_4(j_1, j_2, j_3, j_4) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2} \tilde{\zeta}_2^{j_4}, \tilde{\xi}_1^{j_3} \tilde{\zeta}_2^{j_4}, \tilde{\zeta}_1^{j_4}\right) \mid 0 \leq j_1, j_4 \leq q-2, 0 \leq j_2, j_3 \leq q \right\}$ $\left\{ t_4(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2}, \tilde{\xi}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q-2, 0 \leq j_2, j_3 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_5^F$	$\left\{ t_5(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\zeta}_2^{j_1}, \tilde{\zeta}_2^{qj_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2} \tilde{\zeta}_2^{j_3}, \tilde{\zeta}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^2-2, 0 \leq j_2 \leq q, 0 \leq j_3 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ t_5(j_1, j_2) := h\left(\tilde{\zeta}_2^{j_1}, \tilde{\zeta}_2^{qj_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^2-2, 0 \leq j_2 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_6^F$	$\left\{ t_6(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\xi}_2^{j_2} \tilde{\eta}_2^{j_3}, \tilde{\xi}_2^{qj_2} \tilde{\eta}_2^{qj_3}, \tilde{\zeta}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1, j_3 \leq q-2, 0 \leq j_2 \leq q^2 \right\}$ $\left\{ t_6(j_1, j_2) := h\left(\tilde{\zeta}_1^{j_1}, \tilde{\xi}_2^{j_2}, \tilde{\xi}_2^{qj_2}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q-2, 0 \leq j_2 \leq q^2 \right\}$
$\mathbf{T}_7^F$	$\left\{ t_7(j_1, j_2) := h\left(\tilde{\zeta}_3^{j_1}, \tilde{\zeta}_3^{qj_1}, \tilde{\zeta}_3^{q^2j_1}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^3-2, 0 \leq j_2 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ t_7(j_1) := h\left(\tilde{\zeta}_3^{j_1}, \tilde{\zeta}_3^{qj_1}, \tilde{\zeta}_3^{q^2j_1}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^3-2 \right\}$
$\mathbf{T}_8^F$	$\left\{ t_8(j_1, j_2, j_3, j_4) := h\left(\tilde{\xi}_1^{j_1} \tilde{\zeta}_2^{qj_4}, \tilde{\xi}_1^{j_2} \tilde{\zeta}_2^{qj_4}, \tilde{\xi}_1^{j_3} \tilde{\zeta}_2^{qj_4}, \tilde{\zeta}_1^{j_4}\right) \mid 0 \leq j_1, j_2, j_3 \leq q, 0 \leq j_4 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ t_8(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\xi}_1^{j_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2}, \tilde{\xi}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1, j_2, j_3 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_9^F$	$\left\{ t_9(j_1, j_2, j_3) := h\left(\tilde{\xi}_2^{j_1} \tilde{\eta}_2^{j_3}, \tilde{\xi}_2^{qj_1} \tilde{\eta}_2^{qj_3}, \tilde{\xi}_1^{j_2} \tilde{\zeta}_2^{j_3}, \tilde{\zeta}_1^{j_3}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^2, 0 \leq j_2 \leq q, 0 \leq j_3 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ t_9(j_1, j_2) := h\left(\tilde{\xi}_2^{j_1}, \tilde{\xi}_2^{qj_1}, \tilde{\xi}_1^{j_2}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^2, 0 \leq j_2 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_{10}^F$	$\left\{ t_{10}(j_1, j_2) := h\left(\tilde{\xi}_3^{j_1} \tilde{\eta}_3^{j_2}, \tilde{\xi}_3^{qj_1} \tilde{\eta}_3^{qj_2}, \tilde{\xi}_3^{q^2j_1} \tilde{\eta}_3^{q^2j_2}, \tilde{\zeta}_1^{j_2}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^3, 0 \leq j_2 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ t_{10}(j_1) := h\left(\tilde{\xi}_3^{j_1}, \tilde{\xi}_3^{qj_1}, \tilde{\xi}_3^{q^2j_1}\right) \mid 0 \leq j_1 \leq q^3 \right\}$

**Tabelle 4** Repräsentanten maximaler Tori in der dualen Gruppe  $\mathbf{G}^{*F^*}$ . Hier werden die Elemente aus  $\mathbf{T}_i^{*F^*} := (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})^{(Fw_i)}$  parametrisiert (Satz 3.2).

Typ	$(X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})^{(Fw_i)}$ in $\mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ $(X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z})^{(Fw_i)}$ in $\mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$
$\mathbf{T}_1^{*F^*}$	$\left\{ s_1(l_1, l_2, l_3, l_4) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{l_2}{q-1}, \frac{l_3}{q-1}, \frac{l_4}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_2, l_3, l_4 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ s_1(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{l_2}{q-1}, \frac{l_3}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_2, l_3 \leq q-2 \right\}$
$\mathbf{T}_2^{*F^*}$	$\left\{ s_2(l_1, l_2, l_3, l_4) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{l_2}{q-1}, \frac{l_3}{q+1}, \frac{l_3}{q^2-1} + \frac{l_4}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_2, l_4 \leq q-2, 0 \leq l_3 \leq q \right\}$ $\left\{ s_2(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{l_2}{q-1}, \frac{l_3}{q+1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_2 \leq q-2, 0 \leq l_3 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_3^{*F^*}$	$\left\{ s_3(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{l_1}{q^2-1}, \frac{ql_1}{q^2-1}, \frac{l_2}{q-1}, \frac{l_3}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^2-2, 0 \leq l_2, l_3 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ s_3(l_1, l_2) := s\left(\frac{l_1}{q^2-1}, \frac{ql_1}{q^2-1}, \frac{l_2}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^2-2, 0 \leq l_2 \leq q-2 \right\}$
$\mathbf{T}_4^{*F^*}$	$\left\{ s_4(l_1, l_2, l_3, l_4) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{l_2}{q+1}, \frac{l_3}{q+1}, \frac{l_2+l_3}{q^2-1} + \frac{l_4}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_4 \leq q-2, 0 \leq l_2, l_3 \leq q \right\}$ $\left\{ s_4(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{l_2}{q+1}, \frac{l_3}{q+1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q-2, 0 \leq l_2, l_3 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_5^{*F^*}$	$\left\{ s_5(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{l_1}{q^2-1}, \frac{ql_1}{q^2-1}, \frac{l_2}{q+1}, \frac{l_2}{q^2-1} + \frac{l_3}{q-1}\right) \mid \right.$ $\left. 0 \leq l_1 \leq q^2-2, 0 \leq l_2 \leq q, 0 \leq l_3 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ s_5(l_1, l_2) := s\left(\frac{l_1}{q^2-1}, \frac{ql_1}{q^2-1}, \frac{l_2}{q+1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^2-2, 0 \leq l_2 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_6^{*F^*}$	$\left\{ s_6(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{ql_2}{q^2+1}, \frac{l_2}{q^2+1}, \frac{l_2}{(q^2+1)(q-1)} + \frac{l_3}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_3 \leq q-2, 0 \leq l_2 \leq q^2 \right\}$ $\left\{ s_6(l_1, l_2) := s\left(\frac{l_1}{q-1}, \frac{ql_2}{q^2+1}, \frac{l_2}{q^2+1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q-2, 0 \leq l_2 \leq q^2 \right\}$
$\mathbf{T}_7^{*F^*}$	$\left\{ s_7(l_1, l_2) := s\left(\frac{l_1}{q^3-1}, \frac{q^2l_1}{q^3-1}, \frac{ql_1}{q^3-1}, \frac{l_2}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^3-2, 0 \leq l_2 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ s_7(l_1) := s\left(\frac{l_1}{q^3-1}, \frac{q^2l_1}{q^3-1}, \frac{ql_1}{q^3-1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^3-2 \right\}$
$\mathbf{T}_8^{*F^*}$	$\left\{ s_8(l_1, l_2, l_3, l_4) := s\left(\frac{l_1}{q+1}, \frac{l_2}{q+1}, \frac{l_3}{q+1}, \frac{l_1+l_2+l_3}{q^2-1} + \frac{l_4}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_2, l_3 \leq q, 0 \leq l_4 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ s_8(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{l_1}{q+1}, \frac{l_2}{q+1}, \frac{l_3}{q+1}\right) \mid 0 \leq l_1, l_2, l_3 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_9^{*F^*}$	$\left\{ s_9(l_1, l_2, l_3) := s\left(\frac{ql_1}{q^2+1}, \frac{l_1}{q^2+1}, \frac{l_2}{q+1}, \frac{l_1}{(q^2+1)(q-1)} + \frac{l_2}{q^2-1} + \frac{l_3}{q-1}\right) \mid \right.$ $\left. 0 \leq l_1 \leq q^2, 0 \leq l_2 \leq q, 0 \leq l_3 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ s_9(l_1, l_2) := s\left(\frac{ql_1}{q^2+1}, \frac{l_1}{q^2+1}, \frac{l_2}{q+1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^2, 0 \leq l_2 \leq q \right\}$
$\mathbf{T}_{10}^{*F^*}$	$\left\{ s_{10}(l_1, l_2) := s\left(\frac{q^2l_1}{q^3+1}, \frac{ql_1}{q^3+1}, \frac{l_1}{q^3+1}, \frac{l_1}{(q^3+1)(q-1)} + \frac{l_2}{q-1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^3, 0 \leq l_2 \leq q-2 \right\}$ $\left\{ s_{10}(l_1) := s\left(\frac{q^2l_1}{q^3+1}, \frac{ql_1}{q^3+1}, \frac{l_1}{q^3+1}\right) \mid 0 \leq l_1 \leq q^3 \right\}$

**Tabelle 5** Interpretation der  $s_i(l_1, \dots)$  aus der vorigen Tabelle als Charaktere  $\theta_i(l_1, \dots) : \mathbf{T}_i^F \rightarrow \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ . Verknüpft mit der Einbettung  $\varphi_2 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$ ,  $\frac{r}{s} \mapsto e^{\frac{2\pi ir}{s}}$  liefern diese die irreduziblen komplexen Charaktere der  $\mathbf{T}_i^F$ . (Satz 3.2)

Typ	$\theta_i(l_1, \dots) : \mathbf{T}_i^F \rightarrow \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ in $\mathbf{CSp}_6(\mathbf{K})$ $\theta_i(l_1, \dots) : \mathbf{T}_i^F \rightarrow \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ in $\mathbf{Sp}_6(\mathbf{K})$
$\hat{\mathbf{T}}_1^F$	$\theta_1(l_1, l_2, l_3, l_4) : t_1(j_1, j_2, j_3, j_4) \mapsto \frac{j_1 l_1 + j_2 l_2 + j_3 l_3 + j_4 l_4}{q-1}$ $\theta_1(l_1, l_2, l_3) : t_1(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{j_1 l_1 + j_2 l_2 + j_3 l_3}{q-1}$
$\hat{\mathbf{T}}_2^F$	$\theta_2(l_1, l_2, l_3, l_4) : t_2(j_1, j_2, j_3, j_4) \mapsto \frac{j_1 l_1 + j_2 l_2 + j_4 l_4}{q-1} + \frac{-j_3 l_3}{q+1} + \frac{q j_4 l_3}{q^2-1}$ $\theta_2(l_1, l_2, l_3) : t_2(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{j_1 l_1 + j_2 l_2}{q-1} + \frac{-j_3 l_3}{q+1}$
$\hat{\mathbf{T}}_3^F$	$\theta_3(l_1, l_2, l_3) : t_3(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{j_1 l_1}{q^2-1} + \frac{j_2 l_2 + j_3 l_3}{q-1}$ $\theta_3(l_1, l_2) : t_3(j_1, j_2) \mapsto \frac{j_1 l_1}{q^2-1} + \frac{j_2 l_2}{q-1}$
$\hat{\mathbf{T}}_4^F$	$\theta_4(l_1, l_2, l_3, l_4) : t_4(j_1, j_2, j_3, j_4) \mapsto \frac{j_1 l_1 + j_4 l_4}{q-1} + \frac{-j_2 l_2 - j_3 l_3}{q+1} + \frac{q j_4 l_2 + q j_4 l_3}{q^2-1}$ $\theta_4(l_1, l_2, l_3) : t_4(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{j_1 l_1}{q-1} + \frac{-j_2 l_2 - j_3 l_3}{q+1}$
$\hat{\mathbf{T}}_5^F$	$\theta_5(l_1, l_2, l_3) : t_5(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{j_1 l_1 + q j_3 l_2}{q^2-1} + \frac{-j_2 l_2}{q+1} + \frac{j_3 l_3}{q-1}$ $\theta_5(l_1, l_2) : t_5(j_1, j_2) \mapsto \frac{j_1 l_1}{q^2-1} + \frac{-j_2 l_2}{q+1}$
$\hat{\mathbf{T}}_6^F$	$\theta_6(l_1, l_2, l_3) : t_6(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{j_1 l_1 + j_3 l_3}{q-1} + \frac{-q j_2 l_2}{q^2+1} + \frac{q^3 j_3 l_2}{(q^2+1)(q-1)}$ $\theta_6(l_1, l_2) : t_6(j_1, j_2) \mapsto \frac{j_1 l_1}{q-1} + \frac{-q j_2 l_2}{q^2+1}$
$\hat{\mathbf{T}}_7^F$	$\theta_7(l_1, l_2) : t_7(j_1, j_2) \mapsto \frac{j_1 l_1}{q^3-1} + \frac{j_2 l_2}{q-1}$ $\theta_7(l_1) : t_7(j_1) \mapsto \frac{j_1 l_1}{q^3-1}$
$\hat{\mathbf{T}}_8^F$	$\theta_8(l_1, l_2, l_3, l_4) : t_8(j_1, j_2, j_3, j_4) \mapsto \frac{-j_1 l_1 - j_2 l_2 - j_3 l_3}{q+1} + \frac{j_4 l_1 + j_4 l_2 + j_4 l_3}{q^2-1} + \frac{j_4 l_4}{q-1}$ $\theta_8(l_1, l_2, l_3) : t_8(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{-j_1 l_1 - j_2 l_2 - j_3 l_3}{q+1}$
$\hat{\mathbf{T}}_9^F$	$\theta_9(l_1, l_2, l_3) : t_9(j_1, j_2, j_3) \mapsto \frac{-q j_1 l_1}{q^2+1} + \frac{-j_2 l_2}{q+1} + \frac{q^3 j_3 l_1}{(q^2+1)(q-1)} + \frac{q j_3 l_2}{q^2-1} + \frac{j_3 l_3}{q-1}$ $\theta_9(l_1, l_2) : t_9(j_1, j_2) \mapsto \frac{-q j_1 l_1}{q^2+1} + \frac{-j_2 l_2}{q+1}$
$\hat{\mathbf{T}}_{10}^F$	$\theta_{10}(l_1, l_2) : t_{10}(j_1, j_2) \mapsto \frac{-q^2 j_1 l_1}{q^3+1} + \frac{q^5 j_2 l_1}{(q^3+1)(q-1)} + \frac{j_2 l_2}{q-1}$ $\theta_{10}(l_1) := t_{10}(j_1) \mapsto \frac{-q^2 j_1 l_1}{q^3+1}$

**Tabelle 6** Parametrisierung der halbeinfachen Klassentypen in Gruppen vom Dynkin-Typ  $C_3$  (Satz 4.3(a)).

Typ	$\Pi$	$w$	$(Fw^{-1})$ auf $\Pi$	Dynkin-Typ	$n_{(\Pi,w)}$
$h_1$	$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$	1	–	$C_3$	1
$h_2$	$\{\alpha_2, \alpha_3, -\alpha_0\}$	1	–	$\tilde{A}_1 + C_2$	1
$h_3$	$\{\alpha_2, \alpha_3\}$	1	–	$C_2$	2
$h_4$	$\{\alpha_2, \alpha_3\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$	–	$C_2$	2
$h_5$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$	1	–	$A_2$	2
$h_6$	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$	$s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3$	$\alpha_1 \mapsto \alpha_2$ $\alpha_2 \mapsto \alpha_1$	${}^2A_2$	2
$h_7$	$\{\alpha_3, -\alpha_0\}$	1	–	$2\tilde{A}_1$	4
$h_8$	$\{\alpha_1, \alpha_3\}$	1	–	$A_1 + \tilde{A}_1$	2
$h_9$	$\{\alpha_3, -\alpha_0\}$	$s_2 s_3 s_2$	–	$2\tilde{A}_1$	4
$h_{10}$	$\{\alpha_1, \alpha_3\}$	$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2$	–	$A_1 + \tilde{A}_1$	2
$h_{11}$	$\{\alpha_3, -\alpha_0\}$	$s_1 s_3 s_2 s_1 s_3$	$\alpha_3 \mapsto -\alpha_0$ $-\alpha_0 \mapsto \alpha_3$	${}^2(2\tilde{A}_1)$	4
$h_{12}$	$\{\alpha_3, -\alpha_0\}$	$s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3$	$\alpha_3 \mapsto -\alpha_0$ $-\alpha_0 \mapsto \alpha_3$	${}^2(2\tilde{A}_1)$	4
$h_{13}$	$\{\alpha_3\}$	1	–	$\tilde{A}_1$	8
$h_{14}$	$\{\alpha_1\}$	1	–	$A_1$	4
$h_{15}$	$\{\alpha_3\}$	$s_2 s_3 s_2$	–	$\tilde{A}_1$	4
$h_{16}$	$\{\alpha_3\}$	$s_1$	–	$\tilde{A}_1$	4
$h_{17}$	$\{\alpha_1\}$	$s_3$	–	$A_1$	4
$h_{18}$	$\{\alpha_1\}$	$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2$	–	$A_1$	4
$h_{19}$	$\{\alpha_3\}$	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2$	–	$\tilde{A}_1$	8
$h_{20}$	$\{\alpha_3\}$	$s_2 s_3 s_2 s_1$	–	$\tilde{A}_1$	4
$h_{21}$	$\{\alpha_1\}$	$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3$	–	$A_1$	4
$h_{22}$	$\{\}$	1	–	–	48
$h_{23}$	$\{\}$	$s_3$	–	–	16
$h_{24}$	$\{\}$	$s_1$	–	–	8
$h_{25}$	$\{\}$	$s_2 s_3 s_2 s_3$	–	–	16
$h_{26}$	$\{\}$	$s_1 s_3$	–	–	8
$h_{27}$	$\{\}$	$s_2 s_3$	–	–	8
$h_{28}$	$\{\}$	$s_1 s_2$	–	–	6
$h_{29}$	$\{\}$	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3$	–	–	48
$h_{30}$	$\{\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_3$	–	–	8
$h_{31}$	$\{\}$	$s_1 s_2 s_3$	–	–	6

**Tabelle 7** Isomorphietypen der Zentralisatoren halbeinfacher Klassen in  $\mathbf{CSp}_6(q)$  und  $\mathbf{Sp}_6(q)$  (Satz 4.3(b)). (Mit  $\mathbf{CU}_n(q^2)$  bezeichnen wir die Gruppen  $\{A \in \mathbf{GL}_n(q^2) \mid A = \lambda \tilde{I} F(A)^{-t} \tilde{I} \text{ f\"ur ein } \lambda \in \mathbb{F}_q\}$ .)

Typ	Zentralisator in $\mathbf{CSp}_6(q)$ Zentralisator in $\mathbf{Sp}_6(q)$	$ C_{\mathbf{CSp}_6(q)}(s) $
$h_1$	$\mathbf{CSp}_6(q)$ $\mathbf{Sp}_6(q)$	$q^9 \phi_1^4 \phi_2^3 \phi_3 \phi_4 \phi_6$
$h_2$	$\{(A, B) \in \mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{CSp}_4(q) \mid \det(A) = \lambda(B)\}$ $\mathbf{SL}_2(q) \times \mathbf{Sp}_4(q)$	$q^5 \phi_1^4 \phi_2^3 \phi_4$
$h_3$	$\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{CSp}_4(q)$ $\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{Sp}_4(q)$	$q^4 \phi_1^4 \phi_2^2 \phi_4$
$h_4$	$\{(\mu, A) \in \mathbf{K}^\times \times \mathbf{CSp}_4(q) \mid \mu^{q+1} = \lambda(A)\}$ $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbf{Sp}_4(q)$	$q^4 \phi_1^3 \phi_2^3 \phi_4$
$h_5$	$\mathbf{GL}_3(q) \times \mathbb{Z}_{q-1}$ $\mathbf{GL}_3(q)$	$q^3 \phi_1^4 \phi_2 \phi_3$
$h_6$	$\mathbf{CU}_3(q^2)$ $\mathbf{U}_3(q^2)$	$q^3 \phi_1^2 \phi_2^3 \phi_6$
$h_7$	$\{(\mu, A, B) \in \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{GL}_2(q) \mid \det(A) = \det(B)\}$ $\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{SL}_2(q) \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q^2 \phi_1^4 \phi_2^2$
$h_8$	$\mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{GL}_2(q)$ $\mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q^2 \phi_1^4 \phi_2^2$
$h_9$	$\{(\mu, A, B) \in \mathbf{K}^\times \times \mathbf{GL}_2(q) \times \mathbf{GL}_2(q) \mid \mu^{q+1} = \det(A) = \det(B)\}$ $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbf{SL}_2(q) \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2^3$
$h_{10}$	$\{(A, B) \in \mathbf{CU}_2(q^2) \times \mathbf{GL}_2(q) \mid \lambda(A) = \det(B)\}$ $\mathbf{U}_2(q^2) \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2^4$
$h_{11}$	$\{(\mu, A) \in \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{GL}_2(q^2) \mid \det(A) \in \mathbb{F}_q\}$ kommt nicht vor	$q^2 \phi_1^3 \phi_2 \phi_4$
$h_{12}$	$\{(\mu, A) \in \mathbf{K}^\times \times \mathbf{GL}_2(q^2) \mid \mu^{q+1} = \det(A) \in \mathbb{F}_q\}$ kommt nicht vor	$q^2 \phi_1^2 \phi_2^2 \phi_4$
$h_{13}$	$\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{GL}_2(q)$ $\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q \phi_1^4 \phi_2$
$h_{14}$	$\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{GL}_2(q)$ $\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{GL}_2(q)$	$q \phi_1^4 \phi_2$
$h_{15}$	$\{(\mu_1, \mu_2, A) \in \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{K}^\times \times \mathbf{GL}_2(q) \mid \mu_2^{q+1} = \det(A)\}$ $\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q \phi_1^3 \phi_2^2$
$h_{16}$	$\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbf{GL}_2(q)$ $\mathbb{Z}_{q^2-1} \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q \phi_1^3 \phi_2^2$

Fortsetzung

Typ	Zentralisator in $\mathbf{CSp}_6(q)$ Zentralisator in $\mathbf{Sp}_6(q)$	$ C_{\mathbf{CSp}_6(q)}(s) $
$h_{17}$	$\{(\mu_1, \mu_2, A) \in \mathbb{F}_q^\times \times \mathbf{K}^\times \times \mathbf{GL}_2(q) \mid \mu_2^{q+1} = \mu_1\}$ $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbf{GL}_2(q)$	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$h_{18}$	$\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{CU}_2(q^2)$ $\mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbf{U}_2(q^2)$	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$h_{19}$	$\{(\mu_1, \mu_2, A) \in \mathbf{K}^\times \times \mathbf{K}^\times \times \mathbf{GL}_2(q) \mid \mu_1^{q+1} = \mu_2^{q+1} = \det(A)\}$ $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$h_{20}$	$\{(\mu, A) \in \mathbf{K}^\times \times \mathbf{GL}_2(q) \mid \mu^{q^2+1} = \det(A)\}$ $\mathbb{Z}_{q^2+1} \times \mathbf{SL}_2(q)$	$q\phi_1^2\phi_2\phi_4$
$h_{21}$	$\{(\mu, A) \in \mathbf{K}^\times \times \mathbf{CU}_2(q^2) \mid \mu^{q+1} = \lambda(A)\}$ $\mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbf{U}_2(q^2)$	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$h_{22}$	$\mathbf{T}_1^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$ $\mathbf{T}_1^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$	$\phi_1^4$
$h_{23}$	$\mathbf{T}_2^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ $\mathbf{T}_2^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$	$\phi_1^3\phi_2$
$h_{24}$	$\mathbf{T}_3^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$ $\mathbf{T}_3^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$	$\phi_1^3\phi_2$
$h_{25}$	$\mathbf{T}_4^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ $\mathbf{T}_4^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$	$\phi_1^2\phi_2^2$
$h_{26}$	$\mathbf{T}_5^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$ $\mathbf{T}_5^F \cong \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-1}$	$\phi_1^2\phi_2^2$
$h_{27}$	$\mathbf{T}_6^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}$ $\mathbf{T}_6^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}$	$\phi_1^2\phi_4$
$h_{28}$	$\mathbf{T}_7^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q^3-1}$ $\mathbf{T}_7^F \cong \mathbb{Z}_{q^3-1}$	$\phi_1^2\phi_3$
$h_{29}$	$\mathbf{T}_8^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$ $\mathbf{T}_8^F \cong \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$	$\phi_1\phi_2^3$
$h_{30}$	$\mathbf{T}_9^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}$ $\mathbf{T}_9^F \cong \mathbb{Z}_{q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+1}$	$\phi_1\phi_2\phi_4$
$h_{31}$	$\mathbf{T}_{10}^F \cong \mathbb{Z}_{q-1} \times \mathbb{Z}_{q^3+1}$ $\mathbf{T}_{10}^F \cong \mathbb{Z}_{q^3+1}$	$\phi_1\phi_2\phi_6$

**Tabelle 8** Repräsentanten halbeinfacher Klassen der Gruppen  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  (Satz 4.3(c)).

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1(i_1) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q-2$	$q-1$
$h_2(i_1) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1+(q-1)/2}, \zeta_1^{i_1+(q-1)/2}, \zeta_1^{2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q-2$	$q-1$
$h_3(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{2i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-3)$
$h_4(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_2^{2i_2}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{2i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)^2$
$h_5(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2})$	$i_2 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ und $i_2 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$
$h_6(i_1, i_2) := h(\xi_1^{i_1} \zeta_2^{i_2}, \xi_1^{i_1} \zeta_2^{i_2}, \xi_1^{i_1} \zeta_2^{i_2}, \zeta_1^{i_2})$	$i_2 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ und $i_2 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$	$\frac{1}{2}q(q-1)$
$h_7(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{i_1+(q-1)/2}, \zeta_1^{2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq i_1, i_1 + \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)$
$h_8(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{2i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-3)$
$h_9(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2} \zeta_2^{2i_1}, \zeta_1^{i_1+(q-1)/2}, \zeta_1^{2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_1, i_1 + \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2$
$h_{10}(i_1, i_2) := h(\xi_1^{i_1} \zeta_2^{2i_2}, \xi_1^{i_1} \zeta_2^{2i_2}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{2i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)^2$
$h_{11}(i_1, i_2) := h(\rho_1^{2i_1+1}, \zeta_1^{i_2}, \rho_1^{2i_1+q}, \zeta_1^{2i_1+1})$	$i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}(q-1)^2$
$h_{12}(i_1, i_2) := h(\rho_1^{2i_1+1}, \xi_1^{i_2} \zeta_2^{2i_1+1}, \rho_1^{2i_1+q}, \zeta_1^{2i_1+1})$	$i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q$	$\frac{1}{4}(q-1)(q+1)$
$h_{13}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{i_3}, \zeta_1^{2i_3})$	$i_3 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq i_3, i_3 + \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_3, i_3 + \frac{q-1}{2}$ $i_1 \neq i_2, 2i_3 - i_2$	$\frac{1}{8}(q-1)(q-3)(q-5)$
$h_{14}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_1 \neq i_2, 2r - i_2$ und $i_3 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, 2r+1 - i_2$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)^2$
$h_{15}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_1^{i_1}, \xi_1^{i_2} \zeta_2^{2i_3}, \zeta_1^{i_3}, \zeta_1^{2i_3})$	$i_3 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, i_3 + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_3, i_3 + \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2(q-3)$
$h_{16}(i_1, i_2) := h(\zeta_2^{i_1}, \zeta_2^{qi_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{2i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q^2-2$ $i_1 = i_2(q+1), i_2(q+1) + \frac{q^2-1}{2}$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq 2i_2 + (q-1)l, l = 0, \dots, q$	$\frac{1}{4}(q-1)^3$



Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_{17}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \xi_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ und $i_3 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}(q-1)^3$
$h_{18}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ und $i_3 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q$	$\frac{1}{4}(q-1)^3$
$h_{19}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\xi}_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{2i_3})$	$i_3 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, i_3 + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq i_3, i_3 + \frac{q+1}{2}$ $i_1 \neq i_2, 2i_3 - i_2$	$\frac{1}{8}(q-1)^2(q-3)$
$h_{20}(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_2^{i_1} \tilde{\eta}_2^{i_2}, \tilde{\xi}_2^{q i_1} \tilde{\eta}_2^{2q i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{2i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q^2$ $i_1 \neq i_2(q+1), i_2(q+1) + \frac{q^2+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2(q+1)$
$h_{21}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{q i_3}, \tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{q i_3}, \tilde{\xi}_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{q i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq -r, -r + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq -r, -r + \frac{q+1}{2}$ $i_1 \neq i_2, -(2r+i_2)$ und $i_3 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq i_2, -(2r+1+i_2)$	$\frac{1}{4}(q-1)^3$
$h_{22}(i_1, i_2, i_3, i_4) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_4})$	$i_4 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q-2$ $i_3 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_2 \neq i_3, 2r - i_3$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_1 \neq i_3, 2r - i_3, i_2, 2r - i_2$ und $i_4 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q-2$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq i_3, 2r+1 - i_3$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_3, 2r+1 - i_3, i_2, 2r+1 - i_2$	$\frac{1}{48}(q-1)(q-3)(q-4)(q-5)$
$h_{23}(i_1, i_2, i_3, i_4) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_3} \tilde{\zeta}_2^{i_4}, \tilde{\zeta}_1^{i_4})$	$i_4 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q$ $i_3 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_1 \neq i_2, 2r - i_2$ und $i_4 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, 2r+1 - i_2$	$\frac{1}{16}(q-1)^2(q-2)(q-3)$

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_{24}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_2^{i_1}, \zeta_2^{q i_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q^2 - 2$ $i_1 = r(q+1), r(q+1) + \frac{q^2-1}{2}$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq 2r + (q-1)l, l = 0, \dots, q$ und $i_3 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q^2 - 2$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq 2r+1 + (q-1)l, l = 0, \dots, q$ $i_1 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2}$ $i_1 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2} + \frac{q^2-1}{2}$	$\frac{1}{8}q(q-1)^2(q-3)$
$h_{25}(i_1, i_2, i_3, i_4) := h(\zeta_1^{i_1}, \xi_1^{i_2} \zeta_2^{i_4}, \xi_1^{i_3} \zeta_2^{i_4}, \zeta_1^{i_4})$	$i_4 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q$ $i_3 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ $i_2 \neq i_3, 2r - i_3$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ und $i_4 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, 2r+1 - i_3$ $i_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{16}(q-1)^2(q^2 - 3q + 4)$
$h_{26}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_2^{i_1}, \zeta_2^{q i_1}, \xi_1^{i_2} \zeta_2^{i_3}, \zeta_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q^2 - 2$ $i_1 = r(q+1), r(q+1) + \frac{q^2-1}{2}$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq 2r + (q-1)l, l = 0, \dots, q$ und $i_3 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_1 = 0, \dots, q^2 - 2$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq 2r+1 + (q-1)l, l = 0, \dots, q$ $i_1 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2}$ $i_1 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2} + \frac{q^2-1}{2}$	$\frac{1}{8}(q-1)(q^3 - 2q^2 - q - 2)$
$h_{27}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_1^{i_1}, \xi_2^{i_2} \eta_2^{i_3}, \xi_2^{q i_2} \eta_2^{q i_3}, \zeta_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q^2$ $i_2 \neq r(q+1), r(q+1) + \frac{q^2+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq r, r + \frac{q-1}{2}$ und $i_3 = 2r+1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q^2$ $i_2 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2}$ $i_2 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2} + \frac{q^2+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}(q+1)(q-1)^2(q-2)$
$h_{28}(i_1, i_2) := h(\zeta_3^{i_1}, \zeta_3^{q i_1}, \zeta_3^{q^2 i_1}, \zeta_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q^3 - 2$ $i_1 \neq (q^2 + q + 1)l, l = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{6}q(q+1)(q-1)^2$

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_{29}(i_1, i_2, i_3, i_4) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{q i_4}, \tilde{\xi}_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{q i_4}, \tilde{\xi}_1^{i_3} \tilde{\zeta}_2^{q i_4}, \tilde{\zeta}_1^{i_4})$	$i_4 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q$ $i_3 \neq -r, -r + \frac{q+1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq -r, -r + \frac{q+1}{2}$ $i_2 \neq i_3, -(2r + i_3)$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq -r, -r + \frac{q+1}{2}$ $i_1 \neq i_3, -(2r + i_3), i_2, -(2r + i_2)$ und $i_4 = 2r + 1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_3 = 0, \dots, q$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, -(2r + 1 + i_3)$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq -r, -r + \frac{q+1}{2}$ $i_1 \neq i_3, -(2r + 1 + i_3)$ $i_1 \neq i_2, -(2r + 1 + i_2)$	$\frac{1}{48}(q-1)^2(q-2)(q-3)$
$h_{30}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\xi}_2^{i_1} \tilde{\eta}_2^{i_3}, \tilde{\xi}_2^{q i_1} \tilde{\eta}_2^{q i_3}, \tilde{\xi}_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 2r, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq r, r + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q^2$ $i_1 \neq r(q+1), r(q+1) + \frac{q^2+1}{2}$ und $i_3 = 2r + 1, r = 0, \dots, \frac{q-3}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_1 = 0, \dots, q^2$ $i_1 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2}$ $i_1 \neq \frac{(2r+1)(q+1)}{2} + \frac{q^2+1}{2}$	$\frac{1}{8}q(q+1)(q-1)^2$
$h_{31}(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_3^{i_1} \tilde{\eta}_3^{i_2}, \tilde{\xi}_3^{q i_1} \tilde{\eta}_3^{q i_2}, \tilde{\xi}_3^{q^2 i_1} \tilde{\eta}_3^{q^2 i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_1 = 0, \dots, q^3$ $i_1 \neq q i_2 + (q^2 - q + 1)l, l = 0, \dots, q$	$\frac{1}{6}q(q+1)(q-1)^2$

**Tabelle 9** Repräsentanten halbeinfacher Klassen der Gruppen  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  (Satz 4.3(d)).

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1(i_1) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1})$	$i_1 = 0, \frac{q-1}{2}$	2
$h_2(i_1) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1+(q-1)/2}, \tilde{\zeta}_1^{i_1+(q-1)/2})$	$i_1 = 0, \frac{q-1}{2}$	2
$h_3(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q-1}{2}$	$q-3$
$h_4(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q+1}{2}$	$q-1$
$h_5(i_1) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1})$	$i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-3)$
$h_6(i_1) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1}, \tilde{\xi}_1^{i_1}, \tilde{\xi}_1^{i_1})$	$i_1 = 1, \dots, q$ $i_1 \neq \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$h_7(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_1+(q-1)/2})$	$i_1 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_2 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-3)$
$h_8(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q-1}{2}$	$q-3$
$h_9(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\xi}_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1+(q-1)/2})$	$i_1 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_1, i_1 + \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$h_{10}(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_2}, \tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq i_2, i_2 + \frac{q+1}{2}$	$q-1$
$h_{13}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q-2$ $i_2 \neq i_3, i_3 + \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_3, i_3 + \frac{q-1}{2}, i_2, -i_2$	$\frac{1}{4}(q-3)(q-5)$
$h_{14}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_2 \neq \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq \frac{q-1}{2}, i_2, -i_2$	$\frac{1}{4}(q-3)(q-5)$
$h_{15}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\xi}_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, i_3 + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_3, i_3 + \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-3)$
$h_{16}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_2^{i_1}, \tilde{\zeta}_2^{q i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q^2-2$ $i_1 = i_2(q+1), i_2(q+1) + \frac{q^2-1}{2}$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q-2$ $i_1 \neq 2i_2 + (q-1)l, l = 0, \dots, q$	$\frac{1}{2}(q-1)^2$
$h_{17}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)$
$h_{18}(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1}, \tilde{\xi}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_2 \neq \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q$ $i_1 \neq \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)$
$h_{19}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\xi}_1^{i_2} \tilde{\zeta}_2^{i_3}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_2 = 0, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, i_3 + \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q$ $i_1 \neq i_3, i_3 + \frac{q+1}{2}, i_2, 2i_3 - i_2$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)$

Fortsetzung

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_{20}(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_2^{i_1}, \tilde{\eta}_2^{2i_2}, \tilde{\xi}_2^{qi_1}, \tilde{\eta}_2^{2qi_2}, \zeta_1^{i_2})$	$i_2 = 0, \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 0, \dots, q^2$ $i_1 \neq i_2(q+1), i_2(q+1) + \frac{q^2+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)(q+1)$
$h_{21}(i_1, i_2) := h(\tilde{\xi}_1^{i_1}, \xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q$ $i_1 \neq \frac{q+1}{2}, i_2, -i_2$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)$
$h_{22}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q-2$ $i_3 \neq \frac{q-1}{2}$ $i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_2 \neq \frac{q-1}{2}, i_3, -i_3$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq \frac{q-1}{2}, i_3, -i_3, i_2, -i_2$	$\frac{1}{48}(q-3)(q-5)(q-7)$
$h_{23}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \xi_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q$ $i_3 \neq \frac{q+1}{2}$ $i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_2 \neq \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq \frac{q-1}{2}, i_2, -i_2$	$\frac{1}{16}(q-1)(q-3)(q-5)$
$h_{24}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_2^{i_1}, \tilde{\zeta}_2^{qi_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_2 \neq \frac{q-1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q^2-2$ $i_1 = \frac{q^2-1}{2}$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq (q-1)l, l = 1, \dots, q$	$\frac{1}{8}(q-1)^2(q-3)$
$h_{25}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \xi_1^{i_2}, \xi_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q$ $i_3 \neq \frac{q+1}{2}$ $i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq \frac{q+1}{2}, i_3, -i_3$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{16}(q-1)(q-3)^2$
$h_{26}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_2^{i_1}, \tilde{\zeta}_2^{qi_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q^2-2$ $i_1 = \frac{q^2-1}{2}$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq (q-1)l, l = 1, \dots, q$	$\frac{1}{8}(q-1)^3$
$h_{27}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_2^{i_2}, \tilde{\zeta}_2^{qi_2})$	$i_2 = 1, \dots, q^2$ $i_2 \neq \frac{q^2+1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{8}(q+1)(q-1)(q-3)$
$h_{28}(i_1) := h(\tilde{\zeta}_3^{i_1}, \tilde{\zeta}_3^{qi_1}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q^3-2$ $i_1 \neq (q^2+q+1)l, l = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{6}q(q+1)(q-1)$
$h_{29}(i_1, i_2, i_3) := h(\tilde{\zeta}_1^{i_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2}, \tilde{\zeta}_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q$ $i_3 \neq \frac{q+1}{2}$ $i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq \frac{q+1}{2}, i_3, -i_3$ $i_1 = 1, \dots, q$ $i_1 \neq \frac{q+1}{2}, i_3, -i_3, i_2, -i_2$	$\frac{1}{48}(q-1)(q-3)(q-5)$
$h_{30}(i_1, i_2) := h(\tilde{\zeta}_2^{i_1}, \tilde{\zeta}_2^{qi_1}, \tilde{\zeta}_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq \frac{q+1}{2}$ $i_1 = 1, \dots, q^2$ $i_1 \neq \frac{q^2+1}{2}$	$\frac{1}{8}(q-1)^2(q+1)$
$h_{31}(i_1) := h(\tilde{\xi}_3^{i_1}, \tilde{\zeta}_3^{qi_1}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q^3$ $i_1 \neq (q^2-q+1)l, l = 0, \dots, q$	$\frac{1}{6}q(q+1)(q-1)$

**Tabelle 10** Repräsentanten halbeinfacher Klassen der Gruppen  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  (Satz 4.3(e)).

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1 := h(1, 1, 1)$	—	1
$h_3(i_1) := h(\zeta_1^{i_1}, 1, 1)$	$i_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-2)$
$h_4(i_1) := h(\xi_1^{i_1}, 1, 1)$	$i_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{2}q$
$h_5(i_1) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1})$	$i_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-2)$
$h_6(i_1) := h(\xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_1})$	$i_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{2}q$
$h_8(i_1) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, 1)$	$i_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-2)$
$h_{10}(i_1) := h(\xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_1}, 1)$	$i_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{2}q$
$h_{13}(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, 1)$	$i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, -i_2$	$\frac{1}{8}(q-2)(q-4)$
$h_{14}(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, -i_2$	$\frac{1}{4}(q-2)(q-4)$
$h_{15}(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \xi_1^{i_2}, 1)$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$h_{16}(i_1) := h(\zeta_2^{i_1}, \zeta_2^{qi_1}, 1)$	$i_1 = 1, \dots, q^2-2$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq (q-1)l, l = 1, \dots, q$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$h_{17}(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_1}, \xi_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$h_{18}(i_1, i_2) := h(\xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$h_{19}(i_1, i_2) := h(\xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_2}, 1)$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_1 = 1, \dots, q$ $i_1 \neq i_2, -i_2$	$\frac{1}{8}q(q-2)$
$h_{20}(i_1) := h(\xi_2^{i_1}, \xi_2^{qi_1}, 1)$	$i_1 = 1, \dots, q^2$	$\frac{1}{4}q^2$
$h_{21}(i_1, i_2) := h(\xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_1 = 1, \dots, q$ $i_1 \neq i_2, -i_2$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$h_{22}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, \zeta_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q-2$ $i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_2 \neq i_3, -i_3$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_3, -i_3, i_2, -i_2$	$\frac{1}{48}(q-2)(q-4)(q-6)$
$h_{23}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_1^{i_1}, \zeta_1^{i_2}, \xi_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q$ $i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_1 = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq i_2, -i_2$	$\frac{1}{16}q(q-2)(q-4)$
$h_{24}(i_1, i_2) := h(\zeta_2^{i_1}, \zeta_2^{qi_1}, \zeta_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q-2$ $i_1 = 1, \dots, q^2-2$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq (q-1)l, l = 1, \dots, q$	$\frac{1}{8}q(q-2)^2$
$h_{25}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_1^{i_1}, \xi_1^{i_2}, \xi_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q$ $i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, -i_3$ $i_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{16}q(q-2)^2$
$h_{26}(i_1, i_2, i_3) := h(\zeta_2^{i_1}, \zeta_2^{qi_1}, \xi_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_1 = 1, \dots, q^2-2$ $i_1 \neq (q+1)l, l = 1, \dots, q-2$ $i_1 \neq (q-1)l, l = 1, \dots, q$	$\frac{1}{8}q^2(q-2)$
$h_{27}(i_1, i_2) := h(\zeta_1^{i_1}, \xi_2^{i_2}, \xi_2^{qi_2})$	$i_2 = 1, \dots, q^2$ $i_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}q^2(q-2)$
$h_{28}(i_1) := h(\zeta_3^{i_1}, \zeta_3^{qi_1}, \zeta_3^{q^2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q^3-2$ $i_1 \neq (q^2+q+1)l, l = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{6}q(q+1)(q-1)$
$h_{29}(i_1, i_2, i_3) := h(\xi_1^{i_1}, \xi_1^{i_2}, \xi_1^{i_3})$	$i_3 = 1, \dots, q$ $i_2 = 1, \dots, q$ $i_2 \neq i_3, -i_3$ $i_1 = 1, \dots, q$ $i_1 \neq i_3, -i_3, i_2, -i_2$	$\frac{1}{48}q(q-2)(q-4)$
$h_{30}(i_1, i_2) := h(\xi_2^{i_1}, \xi_2^{qi_1}, \xi_1^{i_2})$	$i_2 = 1, \dots, q$ $i_1 = 1, \dots, q^2$	$\frac{1}{8}q^3$
$h_{31}(i_1) := h(\xi_3^{i_1}, \xi_3^{qi_1}, \xi_3^{q^2i_1})$	$i_1 = 0, \dots, q^3$ $i_1 \neq (q^2-q+1)l, l = 0, \dots, q$	$\frac{1}{6}q(q+1)(q-1)$

**Tabelle 11** Repräsentanten der halbeinfachen Klassen in den maximalen Tori  $\mathbf{T}_i^F$  aus Tabelle 3 im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  (Satz 4.3(f)).

$\overline{S_{1,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = i_1 - q/2 + 1/2$ $j_2 = i_1 - q/2 + 1/2$ $j_3 = i_1$ $j_4 = 2i_1$		$j_1 = -q/2 - i_1 - 1/2$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -q/2 - i_1 - 1/2$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = i_2$ $j_2 = 2i_2 - i_1$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$j_1 = i_2$ $j_2 = i_2$ $j_3 = 2i_2 - i_1$ $j_4 = 2i_2$
$\overline{S_{1,2}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$ $j_4 = 2i_1$	$\overline{S_{2,2,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1 + q/2 - 1/2$ $j_3 = i_1 + q/2 + 1/2$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = -q/2 - i_1 - 1/2$ $j_2 = -q/2 - i_1 - 1/2$ $j_3 = -i_1$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = -q/2 - i_1 - 1/2$ $j_2 = -q/2 - i_1 - 1/2$ $j_3 = -i_1$ $j_4 = 2i_1$	$\overline{S_{3,3}}$ $j_1 = qi_2 + i_2$ $j_2 = 2i_2 - i_1$ $j_3 = 2i_2$	$\overline{S_{4,5}}$ $j_1 = qi_2 + i_2$ $j_2 = 2i_2 - i_1$ $j_3 = 2i_2$ $j_4 = 2i_2$
$\overline{S_{1,3}}$ $j_1 = qi_1 + i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_1$	$j_1 = i_1 - q/2 + 1/2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = -q/2 + i_1 - 1/2$ $j_4 = 2i_1$	$\overline{S_{2,9}}$ $j_1 = q^2/2 + qi_1 + i_1 + 1/2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_1$	$j_1 = qi_2 + i_2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_2$		$j_1 = qi_2 + i_2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_2$
$\overline{S_{1,4}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$ $j_4 = 2i_1$	$\overline{S_{2,2,2}}$ $j_1 = i_1 - q/2 + 1/2$ $j_2 = i_1 - q/2 + 1/2$ $j_3 = i_1$ $j_4 = 2i_1$	$\overline{S_{3,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_2$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$\overline{S_{3,4}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_2$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$		$\overline{S_{4,8}}$ $j_1 = -2i_2 + i_1$ $j_2 = -i_2$ $j_3 = -i_2$ $j_4 = 2i_2$
$\overline{S_{1,5}}$ $j_1 = qi_1 + i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_1$	$\overline{S_{2,3}}$ $j_1 = qi_1 + i_1 - q^2/2 + 1/2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_1$	$j_1 = i_2$ $j_2 = 2i_2 - i_1$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$j_1 = 2i_2 - i_1$ $j_2 = i_2$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$		$j_1 = -i_2$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_2$ $j_4 = 2i_2$
$\overline{S_{1,6}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = (q+1)i_1$ $j_3 = 2i_1$	$\overline{S_{2,4,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1 + q/2 + 1/2$ $j_3 = i_1 + q/2 + 1/2$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = i_2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$\overline{S_{3,6}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_2(q+1)$ $j_3 = 2i_2$		$j_1 = -i_2$ $j_2 = -2i_2 + i_1$ $j_3 = -i_2$ $j_4 = 2i_2$
$\overline{S_{1,7}}$ $j_1 = q^2i_1 + qi_1 + i_1$ $j_2 = 2i_1$	$\overline{S_{2,4,2}}$ $j_1 = i_1 - q/2 + 1/2$ $j_2 = -q/2 + i_1 - 1/2$ $j_3 = i_1$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = 2i_2 - i_1$ $j_2 = i_2$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$j_1 = 2i_2 - i_1$ $j_2 = i_2(q+1)$ $j_3 = 2i_2$		$j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_2$ $j_3 = -i_2$ $j_4 = 2i_2$
$\overline{S_{1,8}}$ $j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_1$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = i_1 + q/2 - 1/2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1 + q/2 + 1/2$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = i_2$ $j_2 = i_2$ $j_3 = 2i_2 - i_1$ $j_4 = 2i_2$	$\overline{S_{4,2}}$ $j_1 = i_2$ $j_2 = i_2$ $j_3 = 2i_2 - i_1$ $j_4 = 2i_2$		$j_1 = -i_2$ $j_2 = -i_2$ $j_3 = -2i_2 + i_1$ $j_4 = 2i_2$
$\overline{S_{1,9}}$ $j_1 = (q+1)i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_1$	$\overline{S_{2,5}}$ $j_1 = qi_1 + i_1 + q^2/2 - 1/2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_1$	$\overline{S_{3,2}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_2$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$\overline{S_{4,4}}$ $j_1 = i_2$ $j_2 = 2i_2 - i_1$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$		$\overline{S_{4,9}}$ $j_1 = i_2(q+1)$ $j_2 = 2i_2 - i_1$ $j_3 = 2i_2$
$\overline{S_{1,10}}$ $j_1 = (q^2 + q + 1)i_1$ $j_2 = 2i_1$	$\overline{S_{2,6}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = q^2/2 + qi_1 + i_1 + 1/2$ $j_3 = 2i_1$	$j_1 = 2i_2 - i_1$ $j_2 = i_2$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$j_1 = i_2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$		$j_1 = i_2(q+1)$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 2i_2$
$\overline{S_{2,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1 + q/2 - 1/2$ $j_3 = i_1 + q/2 - 1/2$ $j_4 = 2i_1$	$\overline{S_{2,8}}$ $j_1 = -i_1$ $j_2 = q/2 - i_1 + 1/2$ $j_3 = q/2 - i_1 + 1/2$ $j_4 = 2i_1$	$j_1 = i_2$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_2$ $j_4 = 2i_2$	$j_1 = i_2$ $j_2 = i_2$ $j_3 = i_1$ $j_4 = 2i_2$		$\overline{S_{5,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$ $j_4 = i_2$















**Tabelle 12** Repräsentanten der halbeinfachen Klassen in den maximalen Tori  $\mathbf{T}_i^F$  aus Tabelle 3 im Fall  $\mathbf{G}^F = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  (Satz 4.3(f)).

$\overline{S_{1,1}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = i_1$	$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_1$
$\overline{S_{1,2}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{3,2}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = -i_1$	$j_1 = i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = i_1$
$\overline{S_{1,3}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{4,5}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = -i_1$	$j_1 = i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = i_1$
$\overline{S_{1,4}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = -i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = -i_1$
$\overline{S_{1,5}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{4,8}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$
$\overline{S_{1,6}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$	$\overline{S_{3,3}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{5,3}}$ $j_1 = -qi_1 - i_1$ $j_2 = -i_1$	$j_1 = i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_1$
$\overline{S_{1,7}}$ $j_1 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = i_1$	$j_1 = 0$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 0$	$j_1 = qi_1 + i_1$ $j_2 = -i_1$	$\overline{S_{6,10}}$ $j_1 = -q^2i_1 + qi_1 - i_1$ $j_1 = q^2i_1 - qi_1 + i_1$
$\overline{S_{1,8}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{3,4}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = qi_1 + i_1$ $j_2 = i_1$	$\overline{S_{8,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 0$
$\overline{S_{1,9}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = -i_1$	$j_1 = -q^2i_1 - qi_1 - i_1$ $j_1 = q^2i_1 + qi_1 + i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = 0$
$\overline{S_{1,10}}$ $j_1 = 0$	$\overline{S_{3,6}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = 0$ $j_1 = -i_1$ $j_2 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = i_1$	$\overline{S_{5,7}}$ $j_1 = -q^2i_1 - qi_1 - i_1$ $j_1 = q^2i_1 + qi_1 + i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = 0$
$\overline{S_{3,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{4,2}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = -i_1$	$\overline{S_{4,9}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = i_1$	$\overline{S_{6,5}}$ $j_1 = -qi_1 + i_1$ $j_2 = i_1$	$j_1 = i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = i_1$
$j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = i_1$	$j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = i_1$	$j_1 = qi_1 - i_1$ $j_2 = -i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = -i_1$
$j_1 = 0$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{4,4}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = 0$	$\overline{S_{5,1}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$	$j_1 = -qi_1 + i_1$ $j_2 = -i_1$	$j_1 = 0$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$
$j_1 = -i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = 0$	$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = i_1$	$j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = -i_1$	$j_1 = qi_1 - i_1$ $j_2 = i_1$	$j_1 = 0$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_1$
$j_1 = 0$ $j_2 = 0$ $j_3 = -i_1$	$\overline{S_{4,4}}$ $j_1 = 0$ $j_2 = i_1$ $j_3 = 0$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_1$	$\overline{S_{6,8}}$ $j_1 = i_1$ $j_2 = i_1$ $j_3 = i_1$	$j_1 = i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = -i_1$
			$j_1 = i_1$ $j_2 = -i_1$ $j_3 = -i_1$	$j_1 = -i_1$ $j_2 = 0$ $j_3 = i_1$











**Tabelle 13** Liste der Konjugiertenklassen mit Repräsentanten und Zentralisatorordnungen der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  und  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  (Satz 4.6)

Name	Repräsentant	$ C_{\mathbf{CSp}_6(q)} $
$c_{1,0}$	$h_1$	$q^9 \phi_1^4 \phi_2^3 \phi_3 \phi_4 \phi_6$
$c_{1,1,1}$	$h_1 u_9(1)$	$q^9 \phi_1^3 \phi_2^2 \phi_4$
$c_{1,1,2}$	$h_1 u_9(\alpha)$	
$c_{1,2}$	$h_1 u_8(1)$	$2q^8 \phi_1^3 \phi_2$
$c_{1,3}$	$h_1 u_7(1) u_9(-\alpha)$	$2q^8 \phi_1^2 \phi_2^2$
$c_{1,4,1}$	$h_1 u_6(1) u_7(1)$	$q^7 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{1,4,2}$	$h_1 u_6(1) u_7(\alpha)$	
$c_{1,5}$	$h_1 u_3(1) u_5(1)$	$q^5 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{1,6,1}$	$h_1 u_3(1) u_4(1)$	$q^5 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{1,6,2}$	$h_1 u_3(1) u_4(\alpha)$	
$c_{1,7,1}$	$h_1 u_3(1) u_4(1) u_7(1)$	$2q^5 \phi_1$
$c_{1,7,2}$	$h_1 u_3(1) u_4(\alpha) u_7(\alpha)$	
$c_{1,8,1}$	$h_1 u_3(1) u_4(\alpha) u_7(1)$	$2q^5 \phi_1$
$c_{1,8,2}$	$h_1 u_3(1) u_4(1) u_7(\alpha)$	
$c_{1,9,1}$	$h_1 u_1(1) u_2(1) u_4(1)$	$q^3 \phi_1$
$c_{1,9,2}$	$h_1 u_1(1) u_2(1) u_4(\alpha)$	
$c_{2,0}$	$h_2$	$q^5 \phi_1^4 \phi_2^3 \phi_4$
$c_{2,1,1}$	$h_2 u_9(1)$	$q^5 \phi_1^3 \phi_2^2 \phi_4$
$c_{2,1,2}$	$h_2 u_9(\alpha)$	
$c_{2,2,1}$	$h_2 u_7(1)$	$q^5 \phi_1^3 \phi_2^2$
$c_{2,2,2}$	$h_2 u_7(\alpha)$	
$c_{2,3}$	$h_2 u_5(1)$	$2q^4 \phi_1^3 \phi_2$
$c_{2,4}$	$h_2 u_4(1) u_7(-\alpha)$	$2q^4 \phi_1^2 \phi_2^2$
$c_{2,5,1}$	$h_2 u_2(1) u_4(1)$	$q^3 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{2,5,2}$	$h_2 u_2(1) u_4(\alpha)$	
$c_{2,6,1}$	$h_2 u_7(1) u_9(1)$	$2q^5 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{2,6,2}$	$h_2 u_7(\alpha) u_9(\alpha)$	
$c_{2,7,1}$	$h_2 u_7(1) u_9(\alpha)$	$2q^5 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{2,7,2}$	$h_2 u_7(\alpha) u_9(1)$	
$c_{2,8,1}$	$h_2 u_5(1) u_9(1)$	$2q^4 \phi_1^2$
$c_{2,8,2}$	$h_2 u_5(1) u_9(\alpha)$	
$c_{2,9,1}$	$h_2 u_4(1) u_7(-\alpha) u_9(1)$	$2q^4 \phi_1 \phi_2$
$c_{2,9,2}$	$h_2 u_4(1) u_7(-\alpha) u_9(\alpha)$	
$c_{2,10,1}$	$h_2 u_2(1) u_4(1) u_9(1)$	$2q^3 \phi_1$
$c_{2,10,2}$	$h_2 u_2(1) u_4(\alpha) u_9(\alpha)$	
$c_{2,11,1}$	$h_2 u_2(1) u_4(1) u_9(\alpha)$	$2q^3 \phi_1$
$c_{2,11,2}$	$h_2 u_2(1) u_4(\alpha) u_9(1)$	
$c_{3,0}$	$h_3$	$q^4 \phi_1^4 \phi_2^2 \phi_4$
$c_{3,1,1}$	$h_3 u_7(1)$	$q^4 \phi_1^3 \phi_2$
$c_{3,1,2}$	$h_3 u_7(\alpha)$	
$c_{3,2}$	$h_3 u_5(1)$	$2q^3 \phi_1^3$
$c_{3,3}$	$h_3 u_4(1) u_7(-\alpha)$	$2q^3 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{3,4,1}$	$h_3 u_2(1) u_4(1)$	$q^2 \phi_1^2$
$c_{3,4,2}$	$h_3 u_2(1) u_4(\alpha)$	
$c_{4,0}$	$h_4$	$q^4 \phi_1^3 \phi_2^3 \phi_4$
$c_{4,1,1}$	$h_4 u_7(1)$	$q^4 \phi_1^2 \phi_2^2$
$c_{4,1,2}$	$h_4 u_7(\alpha)$	

Fortsetzung

Name	Repräsentant	$ C_{\mathbf{CSp}_6(q)} $
$c_{4,2}$	$h_4 u_5(1)$	$2q^3 \phi_1^2 \phi_2$
$c_{4,3}$	$h_4 u_4(1) u_7(-\alpha)$	$2q^3 \phi_1 \phi_2^2$
$c_{4,4,1}$	$h_4 u_2(1) u_4(1)$	$q^2 \phi_1 \phi_2$
$c_{4,4,2}$	$h_4 u_2(1) u_4(\alpha)$	
$c_{5,0}$	$h_5$	$q^3 \phi_1^4 \phi_2 \phi_3$
$c_{5,1}$	$h_5 u_2(1)$	$q^3 \phi_1^3$
$c_{5,2}$	$h_5 u_2(1) u_1(1)$	$q^2 \phi_1^2$
$c_{6,0}$	$h_6$	$q^3 \phi_1^2 \phi_2^3 \phi_6$
$c_{6,1}$	$h_6 u_2(1)$	$q^3 \phi_1 \phi_2^2$
$c_{6,2}$	$h_6 u_2(1) u_1(1)$	$q^2 \phi_1 \phi_2$
$c_{7,0}$	$h_7$	$q^2 \phi_1^4 \phi_2^2$
$c_{7,1,1}$	$h_7 u_4(1)$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2$
$c_{7,1,2}$	$h_7 u_4(\alpha)$	
$c_{7,2,1}$	$h_7 u_9(1)$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2$
$c_{7,2,2}$	$h_7 u_9(\alpha)$	
$c_{7,3,1}$	$h_7 u_4(1) u_9(1)$	$2q^2 \phi_1^2$
$c_{7,3,2}$	$h_7 u_4(\alpha) u_9(\alpha)$	
$c_{7,4,1}$	$h_7 u_4(1) u_7(\alpha)$	$2q^2 \phi_1^2$
$c_{7,4,2}$	$h_7 u_4(\alpha) u_7(1)$	
$c_{8,0}$	$h_8$	$q^2 \phi_1^4 \phi_2^2$
$c_{8,1}$	$h_8 u_1(1)$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2$
$c_{8,2,1}$	$h_8 u_4(1)$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2$
$c_{8,2,2}$	$h_8 u_4(\alpha)$	
$c_{8,3,1}$	$h_8 u_1(1) u_4(1)$	$q^2 \phi_1^2$
$c_{8,3,2}$	$h_8 u_1(1) u_4(\alpha)$	
$c_{9,0}$	$h_9$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2^3$
$c_{9,1,1}$	$h_9 u_4(1)$	$q^2 \phi_1^2 \phi_2^2$
$c_{9,1,2}$	$h_9 u_4(\alpha)$	
$c_{9,2,1}$	$h_9 u_9(1)$	$q^2 \phi_1^2 \phi_2^2$
$c_{9,2,2}$	$h_9 u_9(\alpha)$	
$c_{9,3,1}$	$h_9 u_4(1) u_9(1)$	$2q^2 \phi_1 \phi_2$
$c_{9,3,2}$	$h_9 u_4(\alpha) u_9(\alpha)$	
$c_{9,4,1}$	$h_9 u_4(1) u_9(\alpha)$	$2q^2 \phi_1 \phi_2$
$c_{9,4,2}$	$h_9 u_4(\alpha) u_9(1)$	
$c_{10,0}$	$h_{10}$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2^3$
$c_{10,1}$	$h_{10} u_1(1)$	$q^2 \phi_1^2 \phi_2^2$
$c_{10,2,1}$	$h_{10} u_4(1)$	$q^2 \phi_1^2 \phi_2^2$
$c_{10,2,2}$	$h_{10} u_4(\alpha)$	
$c_{10,3,1}$	$h_{10} u_1(1) u_4(1)$	$q^2 \phi_1 \phi_2$
$c_{10,3,2}$	$h_{10} u_1(1) u_4(\alpha)$	
$c_{11,0}$	$h_{11}$	$q^2 \phi_1^3 \phi_2 \phi_4$
$c_{11,1}$	$h_{11} u_4(1) u_9(1)$	$2q^2 \phi_1^2$
$c_{11,2}$	$h_{11} u_4(\gamma) u_9(\gamma^q)$	$2q^2 \phi_1^2$
$c_{12,0}$	$h_{12}$	$q^2 \phi_1^2 \phi_2^2 \phi_4$
$c_{12,1}$	$h_{12} u_4(1) u_9(1)$	$2q^2 \phi_1 \phi_2$
$c_{12,2}$	$h_{12} u_4(\gamma) u_9(\gamma^q)$	$2q^2 \phi_1 \phi_2$
$c_{13,0}$	$h_{13}$	$q \phi_1^4 \phi_2$

Fortsetzung

Name	Repräsentant	$ C_{\mathbf{CSp}_6(q)} $
$c_{13,1,1}$	$h_{13}u_4(1)$	$q\phi_1^3$
$c_{13,1,2}$	$h_{13}u_4(\alpha)$	
$c_{14,0}$	$h_{14}$	$q\phi_1^4\phi_2$
$c_{14,1}$	$h_{14}u_1(1)$	$q\phi_1^3$
$c_{15,0}$	$h_{15}$	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{15,1,1}$	$h_{15}u_4(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{15,1,2}$	$h_{15}u_4(\alpha)$	
$c_{16,0}$	$h_{16}$	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{16,1,1}$	$h_{16}u_4(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{16,1,2}$	$h_{16}u_4(\alpha)$	
$c_{17,0}$	$h_{17}$	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{17,1}$	$h_{17}u_1(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{18,0}$	$h_{18}$	$q\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{18,1}$	$h_{18}u_1(1)$	$q\phi_1^2\phi_2$
$c_{19,0}$	$h_{19}$	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{19,1,1}$	$h_{19}u_4(1)$	$q\phi_1\phi_2^2$
$c_{19,1,2}$	$h_{19}u_4(\alpha)$	
$c_{20,0}$	$h_{20}$	$q\phi_1^2\phi_2\phi_4$
$c_{20,1,1}$	$h_{20}u_4(1)$	$q\phi_1\phi_4$
$c_{20,1,2}$	$h_{20}u_4(\alpha)$	
$c_{21,0}$	$h_{21}$	$q\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{21,1}$	$h_{21}u_1(1)$	$q\phi_1\phi_2^2$
$c_{22,0}$	$h_{22}$	$\phi_1^4$
$c_{23,0}$	$h_{23}$	$\phi_1^3\phi_2$
$c_{24,0}$	$h_{24}$	$\phi_1^3\phi_2$
$c_{25,0}$	$h_{25}$	$\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{26,0}$	$h_{26}$	$\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{27,0}$	$h_{27}$	$\phi_1^2\phi_4$
$c_{28,0}$	$h_{28}$	$\phi_1^2\phi_3$
$c_{29,0}$	$h_{29}$	$\phi_1\phi_2^3$
$c_{30,0}$	$h_{30}$	$\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{31,0}$	$h_{31}$	$\phi_1\phi_2\phi_6$

**Tabelle 14** Liste der Konjugiertenklassen mit Repräsentanten und Zentralisatorordnungen der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  (Satz 4.6)

Name	Repräsentant	$ C_{\mathbf{Sp}_6(q)} $
$c_{1,0}$	$h_1$	$q^9\phi_1^3\phi_2^3\phi_3\phi_4\phi_6$
$c_{1,1}$	$h_1u_9(1)$	$q^9\phi_1^2\phi_2^2\phi_4$
$c_{1,2}$	$h_1u_8(1)$	$q^9\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{1,3}$	$h_1u_8(1)u_9(1)$	$q^9\phi_1\phi_2$
$c_{1,4}$	$h_1u_6(1)u_7(1)$	$q^7\phi_1\phi_2$
$c_{1,5}$	$h_1u_3(1)u_5(1)$	$2q^6\phi_1$
$c_{1,6}$	$h_1u_3(1)u_5(1)u_7(1)u_9(\alpha)$	$2q^6\phi_2$
$c_{1,7}$	$h_1u_3(1)u_4(1)$	$2q^5\phi_1\phi_2$
$c_{1,8}$	$h_1u_3(1)u_4(1)u_9(\alpha)$	$2q^5\phi_1\phi_2$
$c_{1,9}$	$h_1u_3(1)u_4(1)u_7(1)$	$q^5$
$c_{1,10}$	$h_1u_1(1)u_2(1)u_4(1)$	$2q^3$
$c_{1,11}$	$h_1u_1(1)u_2(1)u_4(1)u_7(\alpha)$	$2q^3$
$c_{3,0}$	$h_3$	$q^4\phi_1^3\phi_2^2\phi_4$
$c_{3,1}$	$h_3u_7(1)$	$q^4\phi_1^2\phi_2$
$c_{3,2}$	$h_3u_5(1)$	$q^4\phi_1^2\phi_2$
$c_{3,3}$	$h_3u_5(1)u_7(1)$	$q^4\phi_1$
$c_{3,4}$	$h_3u_2(1)u_4(1)$	$2q^2\phi_1$
$c_{3,5}$	$h_3u_2(1)u_4(1)u_7(\alpha)$	$2q^2\phi_1$
$c_{4,0}$	$h_4$	$q^4\phi_1^2\phi_2^3\phi_4$
$c_{4,1}$	$h_4u_7(1)$	$q^4\phi_1\phi_2^2$
$c_{4,2}$	$h_4u_5(1)$	$q^4\phi_1\phi_2^2$
$c_{4,3}$	$h_4u_5(1)u_7(1)$	$q^4\phi_2$
$c_{4,4}$	$h_4u_2(1)u_4(1)$	$2q^2\phi_2$
$c_{4,5}$	$h_4u_2(1)u_4(1)u_7(\alpha)$	$2q^2\phi_2$
$c_{5,0}$	$h_5$	$q^3\phi_1^3\phi_2\phi_3$
$c_{5,1}$	$h_5u_2(1)$	$q^3\phi_1^2$
$c_{5,2}$	$h_5u_2(1)u_1(1)$	$q^2\phi_1$
$c_{6,0}$	$h_6$	$q^3\phi_1\phi_2^3\phi_6$
$c_{6,1}$	$h_6u_2(1)$	$q^3\phi_2^2$
$c_{6,2}$	$h_6u_2(1)u_1(1)$	$q^2\phi_2$
$c_{8,0}$	$h_8$	$q^2\phi_1^3\phi_2^2$
$c_{8,1}$	$h_8u_1(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2$
$c_{8,2}$	$h_8u_4(1)$	$q^2\phi_1^2\phi_2$
$c_{8,3}$	$h_8u_1(1)u_4(1)$	$q^2\phi_1$
$c_{10,0}$	$h_{10}$	$q^2\phi_1^2\phi_2^3$
$c_{10,1}$	$h_{10}u_1(1)$	$q^2\phi_1\phi_2^2$
$c_{10,2}$	$h_{10}u_4(1)$	$q^2\phi_1\phi_2^2$
$c_{10,3}$	$h_{10}u_1(1)u_4(1)$	$q^2\phi_2$
$c_{13,0}$	$h_{13}$	$q\phi_1^3\phi_2$
$c_{13,1}$	$h_{13}u_4(1)$	$q\phi_1^2$
$c_{14,0}$	$h_{14}$	$q\phi_1^3\phi_2$
$c_{14,1}$	$h_{14}u_1(1)$	$q\phi_1^2$
$c_{15,0}$	$h_{15}$	$q\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{15,1}$	$h_{15}u_4(1)$	$q\phi_1\phi_2$
$c_{16,0}$	$h_{16}$	$q\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{16,1}$	$h_{16}u_4(1)$	$q\phi_1\phi_2$

Fortsetzung

Name	Repräsentant	$ C_{\mathbf{Sp}_6(q)} $
$c_{17,0}$	$h_{17}$	$q\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{17,1}$	$h_{17}u_1(1)$	$q\phi_1\phi_2$
$c_{18,0}$	$h_{18}$	$q\phi_1^2\phi_2^2$
$c_{18,1}$	$h_{18}u_1(1)$	$q\phi_1\phi_2$
$c_{19,0}$	$h_{19}$	$q\phi_1\phi_2^3$
$c_{19,1}$	$h_{19}u_4(1)$	$q\phi_2^2$
$c_{20,0}$	$h_{20}$	$q\phi_1\phi_2\phi_4$
$c_{20,1}$	$h_{20}u_4(1)$	$q\phi_4$
$c_{21,0}$	$h_{21}$	$q\phi_1\phi_2^3$
$c_{21,1}$	$h_{21}u_1(1)$	$q\phi_2^2$
$c_{22,0}$	$h_{22}$	$\phi_1^3$
$c_{23,0}$	$h_{23}$	$\phi_1^2\phi_2$
$c_{24,0}$	$h_{24}$	$\phi_1^2\phi_2$
$c_{25,0}$	$h_{25}$	$\phi_1\phi_2^2$
$c_{26,0}$	$h_{26}$	$\phi_1\phi_2^2$
$c_{27,0}$	$h_{27}$	$\phi_1\phi_4$
$c_{28,0}$	$h_{28}$	$\phi_1\phi_3$
$c_{29,0}$	$h_{29}$	$\phi_2^3$
$c_{30,0}$	$h_{30}$	$\phi_2\phi_4$
$c_{31,0}$	$h_{31}$	$\phi_2\phi_6$

**Tabelle 15** Greenfunktionen für die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in den Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$ . (Satz 5.2)

$C_3$	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$
$Q_{1,1}$	$\phi_2^3 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_2^2 \phi_3 \phi_4$	$(5q^3 + 4q^2 + 2q + 1) \phi_2$
$Q_{1,2}$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_2^2 \phi_4 \phi_6$	$-(3q^3 + 2q^2 + 2q + 1) \phi_1$
$Q_{1,3}$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4$	$-(q^3 - 2q^2 - 1) \phi_2$
$Q_{1,4}$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_1^2 \phi_3 \phi_4$	$(q^3 - 2q^2 - 1) \phi_1$
$Q_{1,5}$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_6$
$Q_{1,6}$	$\phi_1^2 \phi_2^3 \phi_3 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2^3 \phi_6$	$(q^2 - q - 1) \phi_1 \phi_2$
$Q_{1,7}$	$\phi_1^2 \phi_2^3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_1^2 \phi_2^2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$
$Q_{1,8}$	$-\phi_1^3 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_1^2 \phi_4 \phi_6$	$\phi_1^2 \phi_6$
$Q_{1,9}$	$-\phi_1^3 \phi_2^2 \phi_3 \phi_6$	$-\phi_1^3 \phi_2 \phi_3$	$\phi_1^2 \phi_3$
$Q_{1,10}$	$-\phi_1^3 \phi_2^2 \phi_3 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_2^2 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_2^2$

Fortsetzung

	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$
$Q_{1,1}$	$\phi_2^2 \phi_3$	$(3q^2 + 2q + 1) \phi_2$	$(3q + 1) \phi_2$
$Q_{1,2}$	$(q^3 + 2q^2 + 1) \phi_2$	$\phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$
$Q_{1,3}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_3$	$q^2 - q^3 + q + 1$	$\phi_2^2$
$Q_{1,4}$	$-(3q^3 - 2q^2 + 2q - 1) \phi_2$	$-\phi_1 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$
$Q_{1,5}$	$-(q^3 + 2q^2 + 1) \phi_1$	$q^3 + q^2 - q + 1$	$\phi_1^2$
$Q_{1,6}$	$\phi_2^2 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$
$Q_{1,7}$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$
$Q_{1,8}$	$(5q^3 - 4q^2 + 2q - 1) \phi_1$	$-(3q^2 - 2q + 1) \phi_1$	$(3q - 1) \phi_1$
$Q_{1,9}$	$(q^2 + q - 1) \phi_1 \phi_2$	$\phi_1^2 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$
$Q_{1,10}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$

Fortsetzung

	$c_{1,6}$	$c_{1,7}$	$c_{1,8}$	$c_{1,9}$
$Q_{1,1}$	$(2q + 1) \phi_2$	$4q + 1$	$2q + 1$	1
$Q_{1,2}$	$2q^2 + q + 1$	1	$2q + 1$	1
$Q_{1,3}$	$\phi_2$	$2q + 1$	1	1
$Q_{1,4}$	$2q^2 - q + 1$	1	$1 - 2q$	1
$Q_{1,5}$	$-\phi_1$	$1 - 2q$	1	1
$Q_{1,6}$	$\phi_2$	1	$2q + 1$	1
$Q_{1,7}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1
$Q_{1,8}$	$(2q - 1) \phi_1$	$1 - 4q$	$1 - 2q$	1
$Q_{1,9}$	$-\phi_1$	1	$1 - 2q$	1
$Q_{1,10}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1



$A_1 + C_2$	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$	$c_{2,5}$
$Q_{2,1}$	$\phi_2^3 \phi_4$	$\phi_2^2 \phi_4$	$\phi_2^3$	$(3q+1)\phi_2$	$\phi_2^2$	$\phi_2$
$Q_{2,2,1}$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$\phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2^2$	$\phi_2$
$Q_{2,2,2}$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_4$	$\phi_2^2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$-(3q+1)\phi_1$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$
$Q_{2,3}$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$\phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$
$Q_{2,4,1}$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-(3q-1)\phi_2$	$\phi_2$
$Q_{2,4,2}$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_4$	$\phi_1^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$
$Q_{2,5}$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$
$Q_{2,6}$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2^2$	$\phi_2$
$Q_{2,8}$	$-\phi_1^3 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_4$	$-\phi_1^3$	$\phi_1^2$	$(3q-1)\phi_1$	$-\phi_1$
$Q_{2,9}$	$-\phi_1^3 \phi_2^2$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$\phi_1^2 \phi_2$	$\phi_1^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$

Fortsetzung

	$c_{2,6}$	$c_{2,7}$	$c_{2,8}$	$c_{2,9}$	$c_{2,10}$	$c_{2,11}$
$Q_{2,1}$	$\phi_2^2$	$\phi_2^2$	$3q+1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{2,2,1}$	$\phi_4$	$\phi_4$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{2,2,2}$	$\phi_2^2$	$\phi_2^2$	$3q+1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{2,3}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1	1
$Q_{2,4,1}$	$\phi_1^2$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-3q+1$	1	1
$Q_{2,4,2}$	$\phi_4$	$\phi_4$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{2,5}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1	1
$Q_{2,6}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{2,8}$	$\phi_1^2$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-3q+1$	1	1
$Q_{2,9}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1	1

$C_2$	$c_{3,0}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$
$Q_{3,1}$	$\phi_2^2 \phi_4$	$\phi_2^2$	$3q+1$	$\phi_2$	1
$Q_{3,2}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$\phi_4$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1
$Q_{3,3}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1
$Q_{3,4}$	$\phi_1^2 \phi_4$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-3q+1$	1
$Q_{3,6}$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1

$C_2$	$c_{4,0}$	$c_{4,1}$	$c_{4,2}$	$c_{4,3}$	$c_{4,4}$
$Q_{4,2}$	$\phi_2^2 \phi_4$	$\phi_2^2$	$3q+1$	$\phi_2$	1
$Q_{4,4}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$\phi_4$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1
$Q_{4,5}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1
$Q_{4,8}$	$\phi_1^2 \phi_4$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-3q+1$	1
$Q_{4,9}$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1

$A_2$	$c_{5,0}$	$c_{5,1}$	$c_{5,2}$
$Q_{5,1}$	$\phi_2 \phi_3$	$2q+1$	1
$Q_{5,3}$	$-\phi_1 \phi_3$	1	1
$Q_{5,7}$	$\phi_1^2 \phi_2$	$-\phi_1$	1

${}^2A_2$	$c_{6,0}$	$c_{6,1}$	$c_{6,2}$
$Q_{6,5}$	$\phi_2 \phi_6$	1	1
$Q_{6,8}$	$-\phi_1 \phi_6$	$-2q + 1$	1
$Q_{6,10}$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$\phi_2$	1

$2\tilde{A}_1$	$c_{7,0}$	$c_{7,1}$	$c_{7,2}$	$c_{7,3}$	$c_{7,4}$
$Q_{7,1}$	$\phi_2^2$	$\phi_2$	$\phi_2$	1	1
$Q_{7,2,1}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{7,2,2}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1	1
$Q_{7,4}$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	1

$A_1 + \tilde{A}_1$	$c_{8,0}$	$c_{8,1}$	$c_{8,2}$	$c_{8,3}$
$Q_{8,1}$	$\phi_2^2$	$\phi_2$	$\phi_2$	1
$Q_{8,2}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1
$Q_{8,3}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1
$Q_{8,5}$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1

$2\tilde{A}_1$	$c_{9,0}$	$c_{9,1}$	$c_{9,2}$	$c_{9,3}$	$c_{9,4}$
$Q_{9,2}$	$\phi_2^2$	$\phi_2$	$\phi_2$	1	1
$Q_{9,4,1}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{9,4,2}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1	1
$Q_{9,8}$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	1

$A_1 + \tilde{A}_1$	$c_{10,0}$	$c_{10,1}$	$c_{10,2}$	$c_{10,3}$
$Q_{10,3}$	$\phi_2^2$	$\phi_2$	$\phi_2$	1
$Q_{10,4}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1
$Q_{10,5}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1
$Q_{10,8}$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1

${}^2(2\tilde{A}_1)$	$c_{11,0}$	$c_{11,1}$	$c_{11,2}$
$Q_{11,3}$	$\phi_4$	1	1
$Q_{11,6}$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1

${}^2(2\tilde{A}_1)$	$c_{12,0}$	$c_{12,1}$	$c_{12,2}$
$Q_{12,5}$	$\phi_4$	1	1
$Q_{12,9}$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1

$\tilde{A}_1$	$c_{13,0}$	$c_{13,1}$
$Q_{13,1}$	$\phi_2$	1
$Q_{13,2}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{14,0}$	$c_{14,1}$
$Q_{14,1}$	$\phi_2$	1
$Q_{14,3}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{15,0}$	$c_{15,1}$
$Q_{15,2}$	$\phi_2$	1
$Q_{15,4}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{16,0}$	$c_{16,1}$
$Q_{16,3}$	$\phi_2$	1
$Q_{16,5}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{17,0}$	$c_{17,1}$
$Q_{17,2}$	$\phi_2$	1
$Q_{17,5}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{18,0}$	$c_{18,1}$
$Q_{18,3}$	$\phi_2$	1
$Q_{18,4}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{19,0}$	$c_{19,1}$
$Q_{19,4}$	$\phi_2$	1
$Q_{19,8}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{20,0}$	$c_{20,1}$
$Q_{20,6}$	$\phi_2$	1
$Q_{20,9}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{21,0}$	$c_{21,1}$
$Q_{21,5}$	$\phi_2$	1
$Q_{21,8}$	$-\phi_1$	1

**Tabelle 16** Greenfunktionen für die Zentralisatoren halbeinfacher Elemente in den Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$ . (Satz 5.2)

$C_3$	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$
$Q_{1,1}$	$\phi_2^3 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_2^2 \phi_3 \phi_4$	$(2q^2 + 1) \phi_2^3$	$(3q^3 + 3q^2 + 2q + 1) \phi_2$
$Q_{1,2}$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_2^2 \phi_4 \phi_6$	$-(2q^2 + 1) \phi_1 \phi_2^2$	$-q^4 + 2q^3 + q^2 + q + 1$
$Q_{1,3}$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4$	$\phi_2 \phi_4$	$-(q^3 - q^2 - 1) \phi_2$
$Q_{1,4}$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_1^2 \phi_3 \phi_4$	$(2q^2 + 1) \phi_1^2 \phi_2$	$-q^4 - 2q^3 + q^2 - q + 1$
$Q_{1,5}$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_4$	$-(q^3 + q^2 + 1) \phi_1$
$Q_{1,6}$	$\phi_1^2 \phi_2^3 \phi_3 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2^3 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$(q^3 - q^2 + 1) \phi_2$
$Q_{1,7}$	$\phi_1^2 \phi_2^3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_1^2 \phi_2^2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2^2 \phi_6$	$-\phi_1 \phi_2$
$Q_{1,8}$	$-\phi_1^3 \phi_3 \phi_4 \phi_6$	$\phi_1^2 \phi_4 \phi_6$	$-(2q^2 + 1) \phi_1^3$	$(3q^3 - 3q^2 + 2q - 1) \phi_1$
$Q_{1,9}$	$-\phi_1^3 \phi_2^2 \phi_3 \phi_6$	$-\phi_1^3 \phi_2 \phi_3$	$\phi_1^2 \phi_2$	$(q^3 + q^2 - 1) \phi_1$
$Q_{1,10}$	$-\phi_1^3 \phi_2^2 \phi_3 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_2^2 \phi_4$	$\phi_1^2 \phi_2 \phi_3$	$-\phi_1 \phi_2$

Fortsetzung

	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$	$c_{1,7}$
$Q_{1,1}$	$(3q^2 + 2q + 1) \phi_2$	$4q^2 + 3q + 1$	$(2q + 1) \phi_2$	$(2q + 1) \phi_2$
$Q_{1,2}$	$\phi_2 \phi_4$	$-(2q + 1) \phi_1$	$\phi_2$	$2q^2 + q + 1$
$Q_{1,3}$	$-q^3 + q^2 + q + 1$	$2q^2 + q + 1$	$\phi_2$	$\phi_2$
$Q_{1,4}$	$-\phi_1 \phi_4$	$-\phi_1$	$-(2q - 1) \phi_2$	$2q^2 - q + 1$
$Q_{1,5}$	$q^3 + q^2 - q + 1$	$-\phi_1$	$2q^2 - q + 1$	$-\phi_1$
$Q_{1,6}$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$-(2q + 1) \phi_1$	$\phi_2$	$\phi_2$
$Q_{1,7}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$
$Q_{1,8}$	$-(3q^2 - 2q + 1) \phi_1$	$(2q - 1) \phi_1$	$4q^2 - 3q + 1$	$(2q - 1) \phi_1$
$Q_{1,9}$	$\phi_1^2 \phi_2$	$-\phi_1$	$-(2q - 1) \phi_2$	$-\phi_1$
$Q_{1,10}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$

Fortsetzung

	$c_{1,8}$	$c_{1,9}$	$c_{1,10}$	$c_{1,11}$
$Q_{1,1}$	$(2q + 1) \phi_2$	$3q + 1$	1	1
$Q_{1,2}$	$2q^2 + q + 1$	$\phi_2$	1	1
$Q_{1,3}$	$\phi_2$	$\phi_2$	1	1
$Q_{1,4}$	$2q^2 - q + 1$	$-\phi_1$	1	1
$Q_{1,5}$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	1
$Q_{1,6}$	$\phi_2$	$\phi_2$	1	1
$Q_{1,7}$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1	1
$Q_{1,8}$	$(2q - 1) \phi_1$	$-3q + 1$	1	1
$Q_{1,9}$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1	1
$Q_{1,10}$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1	1

$C_2$	$c_{3,0}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$	$c_{3,5}$
$Q_{3,1}$	$\phi_2^2 \phi_4$	$\phi_2^2$	$\phi_2^2$	$2q+1$	1	1
$Q_{3,2}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_4$	1	1	1
$Q_{3,3}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$\phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1	1
$Q_{3,4}$	$\phi_1^2 \phi_4$	$\phi_1^2$	$\phi_1^2$	$-2q+1$	1	1
$Q_{3,6}$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1	1

$C_2$	$c_{4,0}$	$c_{4,1}$	$c_{4,2}$	$c_{4,3}$	$c_{4,4}$	$c_{4,5}$
$Q_{4,2}$	$\phi_2^2 \phi_4$	$\phi_2^2$	$\phi_2^2$	$2q+1$	1	1
$Q_{4,4}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_4$	1	1	1
$Q_{4,5}$	$-\phi_1 \phi_2 \phi_4$	$\phi_4$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1	1
$Q_{4,8}$	$\phi_1^2 \phi_4$	$\phi_1^2$	$\phi_1^2$	$-2q+1$	1	1
$Q_{4,9}$	$\phi_1^2 \phi_2^2$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1 \phi_2$	1	1	1

$A_2$	$c_{5,0}$	$c_{5,1}$	$c_{5,2}$
$Q_{5,1}$	$\phi_2 \phi_3$	$2q+1$	1
$Q_{5,3}$	$-\phi_1 \phi_3$	1	1
$Q_{5,7}$	$\phi_1^2 \phi_2$	$-\phi_1$	1

${}^2A_2$	$c_{6,0}$	$c_{6,1}$	$c_{6,2}$
$Q_{6,5}$	$\phi_2 \phi_6$	1	1
$Q_{6,8}$	$-\phi_1 \phi_6$	$-2q+1$	1
$Q_{6,10}$	$-\phi_1 \phi_2^2$	$\phi_2$	1

$A_1 + \tilde{A}_1$	$c_{8,0}$	$c_{8,1}$	$c_{8,2}$	$c_{8,3}$
$Q_{8,1}$	$\phi_2^2$	$\phi_2$	$\phi_2$	1
$Q_{8,2}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1
$Q_{8,3}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1
$Q_{8,5}$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1

$A_1 + \tilde{A}_1$	$c_{10,0}$	$c_{10,1}$	$c_{10,2}$	$c_{10,3}$
$Q_{10,3}$	$\phi_2^2$	$\phi_2$	$\phi_2$	1
$Q_{10,4}$	$-\phi_1 \phi_2$	$\phi_2$	$-\phi_1$	1
$Q_{10,5}$	$-\phi_1 \phi_2$	$-\phi_1$	$\phi_2$	1
$Q_{10,8}$	$\phi_1^2$	$-\phi_1$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{13,0}$	$c_{13,1}$
$Q_{13,1}$	$\phi_2$	1
$Q_{13,2}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{14,0}$	$c_{14,1}$
$Q_{14,1}$	$\phi_2$	1
$Q_{14,3}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{15,0}$	$c_{15,1}$
$Q_{15,2}$	$\phi_2$	1
$Q_{15,4}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{16,0}$	$c_{16,1}$
$Q_{16,3}$	$\phi_2$	1
$Q_{16,5}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{17,0}$	$c_{17,1}$
$Q_{17,2}$	$\phi_2$	1
$Q_{17,5}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{18,0}$	$c_{18,1}$
$Q_{18,3}$	$\phi_2$	1
$Q_{18,4}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{19,0}$	$c_{19,1}$
$Q_{19,4}$	$\phi_2$	1
$Q_{19,8}$	$-\phi_1$	1

$\tilde{A}_1$	$c_{20,0}$	$c_{20,1}$
$Q_{20,6}$	$\phi_2$	1
$Q_{20,9}$	$-\phi_1$	1

$A_1$	$c_{21,0}$	$c_{21,1}$
$Q_{21,5}$	$\phi_2$	1
$Q_{21,8}$	$-\phi_1$	1

**Tabelle 17** Parametrisierung der Typen von Lusztig-Serien in Gruppen vom Dynkin-Typ  $C_3$  (Satz 6.2(a)).

Typ	$\Pi$	$w$	$(Fw^{-1})$ auf $\Pi$	Dynkin-Typ	$n_{(\Pi,w)}$
$g_1$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee\}$	1	–	$B_3$	1
$g_2$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	1	–	$\tilde{A}_3$	2
$g_3$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$	$\alpha_1^\vee \mapsto -\alpha_0^\vee$ $-\alpha_0^\vee \mapsto \alpha_1^\vee$	${}^2(\tilde{A}_3)$	2
$g_4$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_3^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	1	–	$2\tilde{A}_1 + A_1$	2
$g_5$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_3^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$	$\alpha_1^\vee \mapsto -\alpha_0^\vee$ $-\alpha_0^\vee \mapsto \alpha_1^\vee$	${}^2(2\tilde{A}_1) + A_1$	2
$g_6$	$\{\alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee\}$	1	–	$B_2$	2
$g_7$	$\{\alpha_2^\vee, \alpha_3^\vee\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$	–	$B_2$	2
$g_8$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\}$	1	–	$\tilde{A}_2$	2
$g_9$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\}$	$s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3$	$\alpha_1^\vee \mapsto \alpha_2^\vee$ $\alpha_2^\vee \mapsto \alpha_1^\vee$	${}^2\tilde{A}_2$	2
$g_{10}$	$\{\alpha_1^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	1	–	$2\tilde{A}_1$	4
$g_{11}$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_3^\vee\}$	1	–	$\tilde{A}_1 + A_1$	2
$g_{12}$	$\{\alpha_1^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	$s_3$	–	$2\tilde{A}_1$	4
$g_{13}$	$\{\alpha_1^\vee, \alpha_3^\vee\}$	$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2$	–	$\tilde{A}_1 + A_1$	2
$g_{14}$	$\{\alpha_1^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1$	$\alpha_1^\vee \mapsto -\alpha_0^\vee$ $-\alpha_0^\vee \mapsto \alpha_1^\vee$	${}^2(2\tilde{A}_1)$	4
$g_{15}$	$\{\alpha_1^\vee, -\alpha_0^\vee\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2 s_1 s_3$	$\alpha_1^\vee \mapsto -\alpha_0^\vee$ $-\alpha_0^\vee \mapsto \alpha_1^\vee$	${}^2(2\tilde{A}_1)$	4
$g_{16}$	$\{\alpha_1^\vee\}$	1	–	$\tilde{A}_1$	4
$g_{17}$	$\{\alpha_3^\vee\}$	1	–	$A_1$	8
$g_{18}$	$\{\alpha_1^\vee\}$	$s_3$	–	$\tilde{A}_1$	4
$g_{19}$	$\{\alpha_3^\vee\}$	$s_1$	–	$A_1$	4
$g_{20}$	$\{\alpha_3^\vee\}$	$s_2 s_3 s_2$	–	$A_1$	4
$g_{21}$	$\{\alpha_1^\vee\}$	$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2$	–	$\tilde{A}_1$	4
$g_{22}$	$\{\alpha_1^\vee\}$	$s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3$	–	$\tilde{A}_1$	4
$g_{23}$	$\{\alpha_3^\vee\}$	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2$	–	$A_1$	8
$g_{24}$	$\{\alpha_3^\vee\}$	$s_1 s_2 s_3 s_2$	–	$A_1$	4
$g_{25}$	$\{\}$	1	–	–	48
$g_{26}$	$\{\}$	$s_3$	–	–	16
$g_{27}$	$\{\}$	$s_1$	–	–	8
$g_{28}$	$\{\}$	$s_2 s_3 s_2 s_3$	–	–	16
$g_{29}$	$\{\}$	$s_1 s_3$	–	–	8
$g_{30}$	$\{\}$	$s_3 s_2$	–	–	8
$g_{31}$	$\{\}$	$s_2 s_1$	–	–	6
$g_{32}$	$\{\}$	$s_1 s_2 s_1 s_3 s_2 s_1 s_3 s_2 s_3$	–	–	48
$g_{33}$	$\{\}$	$s_2 s_3 s_2 s_1 s_3$	–	–	8
$g_{34}$	$\{\}$	$s_3 s_2 s_1$	–	–	6

**Tabelle 18** Repräsentanten halbeinfacher Klassen in den Gruppen  $\mathbf{G}^{*F^*}$  zu  $\mathbf{G} = \mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  (Satz 6.2(b)).

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$g_1(k_1) := s \left( 0, 0, 0, \frac{k_1}{q-1} \right)$	$k_1 = 0, \dots, q-2$	$q-1$
$g_2(k_1) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{k_1}{q-1} \right)$	$k_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$g_3(k_1) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2(q-1)} + \frac{k_1}{q-1} \right)$	$k_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$g_4(k_1) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{k_1}{q-1} \right)$	$k_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$g_5(k_1) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2(q-1)} + \frac{k_1}{q-1} \right)$	$k_1 = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$g_6(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, 0, 0, \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-2)$
$g_7(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q+1}, 0, 0, \frac{k_1}{q^2-1} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{2}q(q-1)$
$g_8(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-3)$
$g_9(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{3k_1}{q^2-1} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)^2$
$g_{10}(k_1, k_2) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)$
$g_{11}(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, 0, \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)(q-3)$
$g_{12}(k_1, k_2) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q^2-1} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2$
$g_{13}(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, 0, \frac{2k_1}{q^2-1} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)^2$
$g_{14}(k_1, k_2) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{1}{2(q-1)} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)(q-3)$
$g_{15}(k_1, k_2) := s \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{1}{2(q-1)} + \frac{k_1}{q^2-1} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2$
$g_{16}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}, \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}, k_2, -k_2$ $k_1 = \frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{4}q(q-1)(q-3)$
$g_{17}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}, 0, \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq k_2, -k_2$ $k_1 = \frac{q-1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{8}(q-1)(q-3)^2$
$g_{18}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{k_2}{q^2-1} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{4}q(q-1)(q-3)$
$g_{19}(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q^2-1}, \frac{qk_1}{q^2-1}, 0, \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q^2-2$ $k_1 = \frac{q^2-1}{2}$ $k_1 \neq l(q-1), l = 1, \dots, q$ $k_1 \neq l(q+1), l = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}(q-1)^3$
$g_{20}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q+1}, 0, \frac{k_2}{q^2-1} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)(q^2-2q-1)$



Fortsetzung

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$g_{21}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q-1}, \frac{2k_1}{q^2-1} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2(q-2)$
$g_{22}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{2k_1+k_2}{q^2-1} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq \frac{q+1}{2}, k_2, -k_2$ $k_1 = \frac{q+1}{2}, \frac{q+1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2(q-2)$
$g_{23}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q+1}, 0, \frac{k_1+k_2}{q^2-1} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq k_2, -k_2$ $k_1 = \frac{q+1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{8}(q-1)^3$
$g_{24}(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q^2+1}, \frac{qk_1}{q^2+1}, 0, \frac{k_1}{(q^2+1)(q-1)} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q^2$ $k_1 \neq \frac{q^2+1}{2}$	$\frac{1}{4}(q-1)^2(q+1)$
$g_{25}(k_1, k_2, k_3, k_4) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}, \frac{k_3}{q-1}, \frac{k_4}{q-1} \right)$	$k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = 1, \dots, q-2$ $k_3 \neq \frac{q-1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_2 \neq k_3, -k_3$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq k_2, -k_2, k_3, -k_3$ $k_1 = \frac{q-1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q-1}{2}$ und $k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = \frac{q-1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_2 \neq \frac{q-1}{2}$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}, k_2, -k_2$	$\frac{1}{48}(q-1)(q-3)(q-4)(q-5)$
$g_{26}(k_1, k_2, k_3, k_4) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}, \frac{k_3}{q+1}, \frac{k_3}{q^2-1} + \frac{k_4}{q-1} \right)$	$k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = 1, \dots, q$ $k_3 \neq \frac{q+1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq k_2, -k_2$ $k_1 = \frac{q-1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q-1}{2}$ und $k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = \frac{q+1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_2 \neq \frac{q-1}{2}$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}, k_2, -k_2$	$\frac{1}{16}(q-1)(q-3)(q^2-3q-2)$
$g_{27}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q^2-1}, \frac{qk_1}{q^2-1}, \frac{k_2}{q-1}, \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q^2-2$ $k_1 = \frac{q^2-1}{2}$ $k_1 \neq l(q-1), l = 1, \dots, q$ $k_1 \neq l(q+1), l = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}(q-1)^3(q-2)$
$g_{28}(k_1, k_2, k_3, k_4) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{k_3}{q+1}, \frac{k_2+k_3}{q^2-1} + \frac{k_4}{q-1} \right)$	$k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = 1, \dots, q$ $k_3 \neq \frac{q+1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_2 \neq k_3, -k_3$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q+1}{2}$ und $k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = \frac{q+1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_2 \neq \frac{q+1}{2}$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{16}q(q-1)^2(q-3)$

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$g_{29}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q^2-1}, \frac{qk_1}{q^2-1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{k_2}{q^2-1} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q^2-2$ $k_1 = \frac{q^2-1}{2}$ $k_1 \neq l(q-1), l = 1, \dots, q$ $k_1 \neq l(q+1), l = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}q(q-1)^3$
$g_{30}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{k_1}{q-1}, \frac{qk_2}{q^2+1}, \frac{k_2}{q^2+1}, \frac{k_2}{(q^2+1)(q-1)} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q^2$ $k_2 \neq \frac{q^2+1}{2}$ $k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}(q-1)^2(q+1)(q-2)$
$g_{31}(k_1, k_2) := s \left( \frac{k_1}{q^3-1}, \frac{q^2k_1}{q^3-1}, \frac{qk_1}{q^3-1}, \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 0, \dots, q^3-2$ $k_1 \neq l(q^2+q+1), l = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q+1)$
$g_{32}(k_1, k_2, k_3, k_4) := s \left( \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{k_3}{q+1}, \frac{k_1+k_2+k_3}{q^2-1} + \frac{k_4}{q-1} \right)$	$k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = 1, \dots, q$ $k_3 \neq \frac{q+1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_2 \neq k_3, -k_3$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq k_2, -k_2, k_3, -k_3$ $k_1 = \frac{q+1}{2}, \text{ falls } k_2 = \frac{q+1}{2}$ und $k_4 = 0, \dots, q-2$ $k_3 = \frac{q+1}{2}$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_2 \neq \frac{q+1}{2}$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq \frac{q+1}{2}, k_2, -k_2$	$\frac{1}{48}(q-1)^2(q-2)(q-3)$
$g_{33}(k_1, k_2, k_3) := s \left( \frac{qk_1}{q^2+1}, \frac{k_1}{q^2+1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{k_1}{(q^2+1)(q-1)} + \frac{k_2}{q^2-1} + \frac{k_3}{q-1} \right)$	$k_3 = 0, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q^2$ $k_1 \neq \frac{q^2+1}{2}$	$\frac{1}{8}q(q-1)^2(q+1)$
$g_{34}(k_1, k_2) := s \left( \frac{q^2k_1}{q^3+1}, \frac{qk_1}{q^3+1}, \frac{k_1}{q^3+1}, \frac{k_1}{(q^3+1)(q-1)} + \frac{k_2}{q-1} \right)$	$k_2 = 0, \dots, q-2$ $k_1 = 0, \dots, q^3$ $k_1 \neq l(q^2-q+1), l = 0, \dots, q$	$\frac{1}{6}q(q-1)^2(q+1)$

**Tabelle 19** Repräsentanten halbeinfacher Klassen in den Gruppen  $\mathbf{G}^{*F^*}$  zu  $\mathbf{G} = \mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  (Satz 6.2(c)).

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$g_1 := s(0, 0, 0)$	—	1
$g_6(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, 0, 0\right)$	$k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-2)$
$g_7(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q+1}, 0, 0\right)$	$k_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{2}q$
$g_8(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}\right)$	$k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-2)$
$g_9(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}\right)$	$k_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{2}q$
$g_{11}(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, 0\right)$	$k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}(q-2)$
$g_{13}(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, 0\right)$	$k_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{2}q$
$g_{16}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}\right)$	$k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq k_2, -k_2$	$\frac{1}{4}(q-2)(q-4)$
$g_{17}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}, 0\right)$	$k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq k_2, -k_2$	$\frac{1}{8}(q-2)(q-4)$
$g_{18}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q+1}\right)$	$k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$g_{19}(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q^2-1}, \frac{qk_1}{q^2-1}, 0\right)$	$k_1 = 1, \dots, q^2-2$ $k_1 \neq l(q-1), l = 1, \dots, q$ $k_1 \neq l(q+1), l = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$g_{20}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q+1}, 0\right)$	$k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$g_{21}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q-1}\right)$	$k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$g_{22}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q+1}, \frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q+1}\right)$	$k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq k_2, -k_2$	$\frac{1}{4}q(q-2)$
$g_{23}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q+1}, 0\right)$	$k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq k_2, -k_2$	$\frac{1}{8}q(q-2)$
$g_{24}(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q^2+1}, \frac{qk_1}{q^2+1}, 0\right)$	$k_1 = 1, \dots, q^2$	$\frac{1}{4}q^2$
$g_{25}(k_1, k_2, k_3) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}, \frac{k_3}{q-1}\right)$	$k_3 = 1, \dots, q-2$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_2 \neq k_3, -k_3$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq k_2, -k_2, k_3, -k_3$	$\frac{1}{48}(q-2)(q-4)(q-6)$
$g_{26}(k_1, k_2, k_3) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q-1}, \frac{k_3}{q+1}\right)$	$k_3 = 1, \dots, q$ $k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$ $k_1 \neq k_2, -k_2$	$\frac{1}{16}q(q-2)(q-4)$
$g_{27}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q^2-1}, \frac{qk_1}{q^2-1}, \frac{k_2}{q-1}\right)$	$k_2 = 1, \dots, q-2$ $k_1 = 1, \dots, q^2-2$ $k_1 \neq l(q-1), l = 1, \dots, q$ $k_1 \neq l(q+1), l = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}q(q-2)^2$
$g_{28}(k_1, k_2, k_3) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{k_3}{q+1}\right)$	$k_3 = 1, \dots, q$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_2 \neq k_3, -k_3$ $k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{16}q(q-2)^2$
$g_{29}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q^2-1}, \frac{qk_1}{q^2-1}, \frac{k_2}{q+1}\right)$	$k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q^2-2$ $k_1 \neq l(q-1), l = 1, \dots, q$ $k_1 \neq l(q+1), l = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}q^2(q-2)$
$g_{30}(k_1, k_2) := s\left(\frac{k_1}{q-1}, \frac{qk_2}{q^2+1}, \frac{k_2}{q^2+1}\right)$	$k_2 = 1, \dots, q^2$ $k_1 = 1, \dots, q-2$	$\frac{1}{8}q^2(q-2)$
$g_{31}(k_1) := s\left(\frac{k_1}{q^3-1}, \frac{q^2k_1}{q^3-1}, \frac{qk_1}{q^3-1}\right)$	$k_1 = 0, \dots, q^3-2$ $k_1 \neq l(q^2+q+1), l = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{6}q(q-1)(q+1)$
$g_{32}(k_1, k_2, k_3) := s\left(\frac{k_1}{q+1}, \frac{k_2}{q+1}, \frac{k_3}{q+1}\right)$	$k_3 = 1, \dots, q$ $k_2 = 1, \dots, q$ $k_2 \neq k_3, -k_3$ $k_1 = 1, \dots, q$ $k_1 \neq k_2, -k_2, k_3, -k_3$	$\frac{1}{48}q(q-2)(q-4)$

Fortsetzung

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$g_{33}(k_1, k_2) := s \left( \frac{qk_1}{q^2+1}, \frac{k_1}{q^2+1}, \frac{k_2}{q+1} \right)$	$k_2 = 1, \dots, q$ $k_1 = 1, \dots, q^2$	$\frac{1}{8}q^3$
$g_{34}(k_1) := s \left( \frac{q^2k_1}{q^3+1}, \frac{qk_1}{q^3+1}, \frac{k_1}{q^3+1} \right)$	$k_1 = 0, \dots, q^3$ $k_1 \neq l(q^2 - q + 1), l = 0, \dots, q$	$\frac{1}{6}q(q-1)(q+1)$

**Tabelle 20** Explizite Beschreibung der Parameter für die Deligne-Lusztig-Charaktere im Fall  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$ .

$\overline{R_{1,1}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1$	$\overline{R_{2,4}:}$ $l_1 = q/2 - 1/2$ $l_2 = q/2 + 1/2$ $l_3 = q/2 + 1/2$ $l_4 = k_1 - 1$	$\overline{R_{4,4}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = -q/2 - 1/2$ $l_3 = -q/2 - 1/2$ $l_4 = q + k_1$	$\overline{R_{6,4}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_2$	$\overline{R_{9,10}:}$ $l_1 = k_1 q^2 - qk_1 + k_1$ $l_2 = k_1 + k_2$
$\overline{R_{1,2}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1$	$\overline{R_{2,7}:}$ $l_1 = q^3/2 - 1/2$ $l_2 = k_1$	$\overline{R_{4,5,1}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = 0$ $l_3 = q/2 + k_1 - 1/2$	$\overline{R_{6,6}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_2$	$\overline{R_{10,1}:}$ $l_1 = q/2 - 1/2$ $l_2 = q/2 - 1/2$ $l_3 = k_1$ $l_4 = k_2$
$\overline{R_{1,3}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1$	$\overline{R_{2,9}:}$ $l_1 = q^2/2 + 1/2$ $l_2 = q/2 + 1/2$ $l_3 = k_1 - 1$	$\overline{R_{4,5,2}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1$	$\overline{R_{7,2}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = -k_1$ $l_4 = k_1 + k_2$	$\overline{R_{10,3,1}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = k_1 + q/2 - 1/2 + k_2$
$\overline{R_{1,4}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1$	$\overline{R_{3,2}:}$ $l_1 = 1/2 - q/2$ $l_2 = 1/2 - q/2$ $l_3 = -q/2 - 1/2$ $l_4 = 3q/2 - 1/2 + k_1$	$\overline{R_{4,8}:}$ $l_1 = q/2 + 1/2$ $l_2 = q/2 + 1/2$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1 - 1$	$\overline{R_{7,4}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1 + k_2$	$\overline{R_{10,3,2}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_2$
$\overline{R_{1,5}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1$	$\overline{R_{3,5}:}$ $l_1 = 1/2 - q^2/2$ $l_2 = q/2 + 1/2$ $l_3 = q/2 + k_1 - 1/2$	$\overline{R_{5,2}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 1/2 - q/2$ $l_3 = -q/2 - 1/2$ $l_4 = q + k_1$	$\overline{R_{7,5}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = k_1 + k_2$	$\overline{R_{10,4}:}$ $l_1 = -k_1$ $l_2 = -q/2 - 1/2$ $l_3 = -q/2 - 1/2$ $l_4 = q + k_1 + k_2$
$\overline{R_{1,6}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1$	$\overline{R_{3,6}:}$ $l_1 = 1/2 - q/2$ $l_2 = -q^2/2 - 1/2$ $l_3 = 3q/2 - 1/2 + k_1$	$\overline{R_{5,4}:}$ $l_1 = 1/2 - q/2$ $l_2 = -q/2 - 1/2$ $l_3 = 0$ $l_4 = q + k_1$	$\overline{R_{7,8}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_2$	$\overline{R_{11,1}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_2$
$\overline{R_{1,7}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = k_1$	$\overline{R_{3,8}:}$ $l_1 = q/2 + 1/2$ $l_2 = q/2 + 1/2$ $l_3 = q/2 + 1/2$ $l_4 = k_1 - 1$	$\overline{R_{5,6}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = -q^2/2 - 1/2$ $l_3 = q + k_1$	$\overline{R_{7,9}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = k_1 + k_2$	$\overline{R_{11,2}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_2$
$\overline{R_{1,8}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1$	$\overline{R_{3,10}:}$ $l_1 = q^3/2 + 1/2$ $l_2 = k_1$	$\overline{R_{5,9}:}$ $l_1 = -q^2/2 - 1/2$ $l_2 = 0$ $l_3 = q + k_1$	$\overline{R_{8,1}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_1$ $l_4 = k_2$	$\overline{R_{11,3}:}$ $l_1 = qk_1 + k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_2$
$\overline{R_{1,9}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1$	$\overline{R_{4,1}:}$ $l_1 = q/2 - 1/2$ $l_2 = q/2 - 1/2$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1$	$\overline{R_{6,1}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_2$	$\overline{R_{8,3}:}$ $l_1 = -qk_1 - k_1$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = 3k_1 + k_2$	$\overline{R_{11,5}:}$ $l_1 = qk_1 + k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_2$
$\overline{R_{1,10}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = k_1$	$\overline{R_{4,2}:}$ $l_1 = q/2 - 1/2$ $l_2 = q/2 - 1/2$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_1$	$\overline{R_{6,2}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_2$	$\overline{R_{8,7}:}$ $l_1 = k_1 q^2 + qk_1 + k_1$ $l_2 = k_2$	$\overline{R_{12,2}:}$ $l_1 = q/2 - 1/2$ $l_2 = q/2 - 1/2$ $l_3 = k_1$ $l_4 = k_2$
$\overline{R_{2,1}:}$ $l_1 = q/2 - 1/2$ $l_2 = q/2 - 1/2$ $l_3 = q/2 - 1/2$ $l_4 = k_1$	$\overline{R_{4,3,1}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = 0$ $l_3 = q/2 + k_1 - 1/2$	$\overline{R_{6,3}:}$ $l_1 = 0$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = k_1 + k_2$	$\overline{R_{9,5}:}$ $l_1 = k_1 - qk_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_1 + k_2$	$\overline{R_{12,5,1}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = k_1 + q/2 - 1/2 + k_2$
$\overline{R_{2,3}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = 1/2 - q/2$ $l_3 = q - 1 + k_1$	$\overline{R_{4,3,2}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1$		$\overline{R_{9,8}:}$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_1$ $l_4 = k_2$	$\overline{R_{12,5,2}:}$ $l_1 = q^2/2 - 1/2$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_2$

$R_{12,8}:$ $l_1 = q/2 + 1/2$ $l_2 = q/2 + 1/2$ $l_3 = k_1$ $l_4 = k_2 - 1$	$R_{18,2}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_2$ $l_4 = k_3$	
$R_{13,3}:$ $l_1 = qk_1 - k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1 + k_2$	$R_{18,5}:$ $l_1 = qk_1 + k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$	$R_{24,9}:$ $l_1 = -k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1 + k_2$
$R_{13,4}:$ $l_1 = 0$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = -k_1$ $l_4 = 2k_1 + k_2$	$R_{19,3}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_2$	$R_{25,1}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$ $l_4 = k_4$
$R_{13,5}:$ $l_1 = qk_1 - k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_1 + k_2$	$R_{19,5}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = 0$ $l_3 = k_2$	$R_{26,2}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$ $l_4 = k_4$
$R_{13,8}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_2$	$R_{20,2}:$ $l_1 = 0$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_2$ $l_4 = k_3$	$R_{27,3}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$
$R_{14,2}:$ $l_1 = -k_1$ $l_2 = 1/2 - q/2$ $l_3 = -q/2 - 1/2$ $l_4 = q + k_1 + k_2$	$R_{20,4}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_3$	$R_{28,4}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$ $l_4 = k_4$
$R_{14,6}:$ $l_1 = -k_1$ $l_2 = -q^2/2 - 1/2$ $l_3 = q + k_1 + k_2$	$R_{21,3}:$ $l_1 = qk_1 - k_1$ $l_2 = -k_2$ $l_3 = k_1 + k_2 + k_3$	$R_{29,5}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$
$R_{15,4}:$ $l_1 = 1/2 - q/2$ $l_2 = -q/2 - 1/2$ $l_3 = -k_1$ $l_4 = q + k_1 + k_2$	$R_{21,4}:$ $l_1 = -k_2$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = -k_1$ $l_4 = k_3 + k_2 + 2k_1$	$R_{30,6}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$
$R_{15,9}:$ $l_1 = -q^2/2 - 1/2$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = q + k_1 + k_2$	$R_{22,5}:$ $l_1 = qk_1 - k_1$ $l_2 = -k_2$ $l_3 = k_1 + k_2 + k_3$	$R_{31,7}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$
$R_{16,1}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_2$ $l_4 = k_3$	$R_{22,8}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_1$ $l_3 = k_2$ $l_4 = k_3$	$R_{32,8}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$ $l_4 = k_4$
$R_{16,3}:$ $l_1 = qk_1 + k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$	$R_{23,4}:$ $l_1 = 0$ $l_2 = -k_2$ $l_3 = -k_1$ $l_4 = k_1 + k_2 + k_3$	$R_{33,9}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = k_3$
$R_{17,1}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_3$	$R_{23,8}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_3$	$R_{34,10}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$
$R_{17,2}:$ $l_1 = k_1$ $l_2 = k_2$ $l_3 = 0$ $l_4 = k_3$	$R_{24,6}:$ $l_1 = 0$ $l_2 = -k_1$ $l_3 = k_1 + k_2$	

**Tabelle 21** Explizite Beschreibung der Parameter für die Deligne-Lusztig-Charaktere im Fall  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$ .

$\frac{R_{1,1}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{6,6}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{11,3}:}{l_1 = k_1 q + k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{20,2}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = k_2}$	
$\frac{R_{1,2}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{7,2}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = -k_1}$	$\frac{R_{11,5}:}{l_1 = k_1 q + k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{20,4}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$	
$\frac{R_{1,3}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{7,4}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{13,3}:}{l_1 = k_1 q - k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{21,3}:}{l_1 = k_1 q - k_1}$ $\frac{l_2 = -k_2}{l_3 = 0}$	
$\frac{R_{1,4}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{7,5}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = -k_1}$	$\frac{R_{13,4}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = -k_1}$	$\frac{R_{21,4}:}{l_1 = -k_2}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = -k_1}$	$\frac{R_{28,4}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = k_3}$
$\frac{R_{1,5}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{7,8}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{13,5}:}{l_1 = k_1 q - k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{22,5}:}{l_1 = k_1 q - k_1}$ $\frac{l_2 = -k_2}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{29,5}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$
$\frac{R_{1,6}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{7,9}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{13,8}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{22,8}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = k_2}$	$\frac{R_{30,6}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = k_2}$
$\frac{R_{1,7}:}{l_1 = 0}$	$\frac{R_{8,1}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = k_1}$	$\frac{R_{16,1}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = k_2}$	$\frac{R_{23,4}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = -k_2}{l_3 = -k_1}$	$\frac{R_{31,7}:}{l_1 = k_1}$
$\frac{R_{1,8}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{8,3}:}{l_1 = -k_1 q - k_1}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{16,3}:}{l_1 = k_1 q + k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{23,8}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{32,8}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = k_3}$
$\frac{R_{1,9}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{8,7}:}{l_1 = k_1 q^2 + k_1 q + k_1}$	$\frac{R_{17,1}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{24,6}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{33,9}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$
$\frac{R_{1,10}:}{l_1 = 0}$	$\frac{R_{9,5}:}{l_1 = k_1 - k_1 q}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{17,2}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{24,9}:}{l_1 = -k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{34,10}:}{l_1 = k_1}$
$\frac{R_{6,1}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{9,8}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = k_1}$	$\frac{R_{18,2}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = k_2}$	$\frac{R_{25,1}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = k_3}$	
$\frac{R_{6,2}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{9,10}:}{l_1 = k_1 q^2 - k_1 q + k_1}$	$\frac{R_{18,5}:}{l_1 = k_1 q + k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{26,2}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = k_3}$	
$\frac{R_{6,3}:}{l_1 = 0}$ $\frac{l_2 = -k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{11,1,1}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{19,3}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{27,3}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_2}{l_3 = 0}$	
$\frac{R_{6,4}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{11,2}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = k_1}{l_3 = 0}$	$\frac{R_{19,5}:}{l_1 = k_1}$ $\frac{l_2 = 0}{l_3 = 0}$		

**Tabelle 22** Charaktertafel der Weylgruppe vom Typ  $B_3$  beziehungsweise  $C_3$ . Die Klassen sind so angeordnet wie in Tabelle 2. Nach der Tafel sind in der Reihenfolge der eingetragenen Charaktere die zugehörigen Symbole aufgelistet, wie in Carter [6, 11.4.2] beschrieben. (Abschnitt 7)

	(111, -)	(11, 1)	(12, -)	(1, 11)	(2, 1)	(1, 2)	(3, -)	(-, 111)	(-, 12)	(-, 3)
$\phi_{(3,-)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\phi_{(2,1)}$	3	1	1	-1	-1	1	0	-3	-1	0
$\phi_{(-,3)}$	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
$\phi_{(12,-)}$	2	2	0	2	0	0	-1	2	0	-1
$\phi_{(1,2)}$	3	-1	1	-1	1	-1	0	3	-1	0
$\phi_{(11,1)}$	3	1	-1	-1	1	-1	0	-3	1	0
$\phi_{(1,11)}$	3	-1	-1	-1	-1	1	0	3	1	0
$\phi_{(-,12)}$	2	-2	0	2	0	0	-1	-2	0	1
$\phi_{(111,-)}$	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1
$\phi_{(-,111)}$	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 3 \\ - \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 03 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 01 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 02 \\ 2 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 013 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 012 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 123 \\ 01 \end{pmatrix}, \\
 & \begin{pmatrix} 0123 \\ 123 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$



**Tabelle 23** Beschreibung der irreduziblen Charaktere von  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  und von  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  als Linearkombinationen der Deligne-Lusztig-Charaktere und der in Abschnitt 7 definierten Senkrechtfunktionen. Die jeweiligen Parameterbereiche für die Charaktere sind den Tabellen 18 beziehungsweise 19 zu entnehmen. (Insbesondere kommen  $\chi_{2,r}$ ,  $\chi_{3,r}$ ,  $\chi_{4,r}$ ,  $\chi_{5,r}$ ,  $\chi_{10,r}$ ,  $\chi_{12,r}$ ,  $\chi_{14,r}$  und  $\chi_{15,r}$  bei den Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  nicht vor.) (Satz 7.2)

$$\begin{pmatrix} \chi_{1,1} \\ \chi_{1,2} \\ \chi_{1,3} \\ \chi_{1,4} \\ \chi_{1,5} \\ \chi_{1,6} \\ \chi_{1,7} \\ \chi_{1,8} \\ \chi_{1,9} \\ \chi_{1,10} \\ \chi_{1,11} \\ \chi_{1,12} \end{pmatrix} = \frac{1}{48} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 & 6 & 6 & 8 & 1 & 6 & 8 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & -8 & 24 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & -3 & -6 & 0 & 8 & -3 & 0 & 0 & -24 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 6 & -8 & 0 & -6 & 0 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & -2 & -6 & 8 & 24 & 0 \\ 3 & -3 & 6 & -3 & 6 & -6 & 0 & 3 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -6 & -3 & 6 & -6 & 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 0 & 24 \\ 2 & -6 & 0 & 0 & 0 & 6 & -8 & 0 & 6 & 0 & 0 & -24 \\ 1 & 3 & -6 & -3 & -6 & 0 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 & 0 & 2 & 6 & -8 & 0 & 24 \\ 1 & -3 & -6 & 3 & 6 & 6 & 8 & -1 & -6 & -8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{1,1} \\ R_{1,2} \\ R_{1,3} \\ R_{1,4} \\ R_{1,5} \\ R_{1,6} \\ R_{1,7} \\ R_{1,8} \\ R_{1,9} \\ R_{1,10} \\ f_{1,1} \\ f_{1,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{2,1} \\ \chi_{2,2} \\ \chi_{2,3} \\ \chi_{2,4} \\ \chi_{2,5} \end{pmatrix} = \frac{1}{24} \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 8 & 6 \\ 3 & 6 & -3 & 0 & -6 \\ 2 & 0 & 6 & -8 & 0 \\ 3 & -6 & -3 & 0 & 6 \\ 1 & -6 & 3 & 8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{2,1} \\ R_{2,3} \\ R_{2,4} \\ R_{2,7} \\ R_{2,9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{3,1} \\ \chi_{3,2} \\ \chi_{3,3} \\ \chi_{3,4} \\ \chi_{3,5} \end{pmatrix} = -\frac{1}{24} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & -6 & 6 & -3 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & -8 \\ 3 & 6 & -6 & -3 & 0 \\ 3 & -6 & -6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{3,2} \\ R_{3,5} \\ R_{3,6} \\ R_{3,8} \\ R_{3,10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{4,1} \\ \chi_{4,2} \\ \chi_{4,3} \\ \chi_{4,4} \\ \chi_{4,5} \\ \chi_{4,6} \\ \chi_{4,7} \\ \chi_{4,8} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{4,1} \\ R_{4,2} \\ R_{4,3,1} \\ R_{4,3,2} \\ R_{4,4} \\ R_{4,5,1} \\ R_{4,5,2} \\ R_{4,8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{5,1} \\ \chi_{5,2} \\ \chi_{5,3} \\ \chi_{5,4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{5,2} \\ R_{5,4} \\ R_{5,6} \\ R_{5,9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{6,1} \\ \chi_{6,2} \\ \chi_{6,3} \\ \chi_{6,4} \\ \chi_{6,5} \\ \chi_{6,6} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & -4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{6,1} \\ R_{6,2} \\ R_{6,3} \\ R_{6,4} \\ R_{6,6} \\ f_6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{7,1} \\ \chi_{7,2} \\ \chi_{7,3} \\ \chi_{7,4} \\ \chi_{7,5} \\ \chi_{7,6} \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{7,2} \\ R_{7,4} \\ R_{7,5} \\ R_{7,8} \\ R_{7,9} \\ f_7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{8,1} \\ \chi_{8,2} \\ \chi_{8,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{8,1} \\ R_{8,3} \\ R_{8,7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{9,1} \\ \chi_{9,2} \\ \chi_{9,3} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{9,5} \\ R_{9,8} \\ R_{9,10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{10,1} \\ \chi_{10,2} \\ \chi_{10,3} \\ \chi_{10,4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{10,1} \\ R_{10,3,1} \\ R_{10,3,2} \\ R_{10,4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{11,1} \\ \chi_{11,2} \\ \chi_{11,3} \\ \chi_{11,4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{11,1} \\ R_{11,2} \\ R_{11,3} \\ R_{11,5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{12,1} \\ \chi_{12,2} \\ \chi_{12,3} \\ \chi_{12,4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{12,2} \\ R_{12,5,1} \\ R_{12,5,2} \\ R_{12,8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{13,1} \\ \chi_{13,2} \\ \chi_{13,3} \\ \chi_{13,4} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{13,3} \\ R_{13,4} \\ R_{13,5} \\ R_{13,8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{14,1} \\ \chi_{14,2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{14,2} \\ R_{14,6} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{15,1} \\ \chi_{15,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{15,4} \\ R_{15,9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{16,1} \\ \chi_{16,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{16,1} \\ R_{16,3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{17,1} \\ \chi_{17,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{17,1} \\ R_{17,2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{18,1} \\ \chi_{18,2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{18,2} \\ R_{18,5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{19,1} \\ \chi_{19,2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{19,3} \\ R_{19,5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{20,1} \\ \chi_{20,2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{20,2} \\ R_{20,4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{21,1} \\ \chi_{21,2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{21,3} \\ R_{21,4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{22,1} \\ \chi_{22,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{22,5} \\ R_{22,8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{23,1} \\ \chi_{23,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{23,4} \\ R_{23,8} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{24,1} \\ \chi_{24,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{24,6} \\ R_{24,9} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{25,1} = R_{25,1}$$

$$\chi_{26,1} = -R_{26,2}$$

$$\chi_{27,1} = -R_{27,3}$$

$$\chi_{28,1} = R_{28,4}$$

$$\chi_{29,1} = R_{29,5}$$

$$\chi_{30,1} = R_{30,6}$$

$$\chi_{31,1} = R_{31,7}$$

$$\chi_{32,1} = -R_{32,8}$$

$$\chi_{33,1} = -R_{33,9}$$

$$\chi_{34,1} = -R_{34,10}$$

**Tabelle 24** Senkrechtfunktionen für die Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  (Satz 8.3)

	$c_{2,6}$	$c_{2,7}$
$f_{1,1}(k_1)$	$q^2 \zeta_1^{2i_1 k_1}$	$-q^2 \zeta_1^{2i_1 k_1}$
$f_{1,2}(k_1)$	$q^3 \zeta_1^{2i_1 k_1}$	$-q^3 \zeta_1^{2i_1 k_1}$
$f_6(k_1, k_2)$	$q^2(q+1) \zeta_1^{\frac{1}{2}(4i_1 k_2 + 2i_1 k_1 + qk_1 - k_1)}$	$-q^2(q+1) \zeta_1^{\frac{1}{2}(4i_1 k_2 + 2i_1 k_1 + qk_1 - k_1)}$
$f_7(k_1, k_2)$	$-q^2(q-1) \zeta_1^{2i_1 k_2} \xi_1^{-\frac{1}{2}(2i_1 + q + 1)k_1} \zeta_2^{2qi_1 k_1}$	$q^2(q-1) \zeta_1^{2i_1 k_2} \xi_1^{-\frac{1}{2}(2i_1 + q + 1)k_1} \zeta_2^{2qi_1 k_1}$

	$c_{2,10}$	$c_{2,11}$
$f_{1,1}(k_1)$	$q \zeta_1^{2i_1 k_1}$	$-q \zeta_1^{2i_1 k_1}$
$f_{1,2}(k_1)$	0	0
$f_6(k_1, k_2)$	$q \zeta_1^{\frac{1}{2}(4i_1 k_2 + 2i_1 k_1 + qk_1 - k_1)}$	$-q \zeta_1^{\frac{1}{2}(4i_1 k_2 + 2i_1 k_1 + qk_1 - k_1)}$
$f_7(k_1, k_2)$	$q \zeta_1^{2i_1 k_2} \xi_1^{-\frac{1}{2}(2i_1 + q + 1)k_1} \zeta_2^{2qi_1 k_1}$	$-q \zeta_1^{2i_1 k_2} \xi_1^{-\frac{1}{2}(2i_1 + q + 1)k_1} \zeta_2^{2qi_1 k_1}$

	$c_{7,3}$	$c_{7,4}$
$f_{1,1}(k_1)$	$q \zeta_1^{2i_1 k_1}$	$-q \zeta_1^{2i_1 k_1}$
$f_{1,2}(k_1)$	$q \zeta_1^{2i_1 k_1}$	$-q \zeta_1^{2i_1 k_1}$
$f_6(k_1, k_2)$	$q(\zeta_1^{2i_1 k_2 + i_2 k_1} + \zeta_1^{2i_1 k_2 + 2i_1 k_1 - i_2 k_1})$	$-q(\zeta_1^{2i_1 k_2 + i_2 k_1} + \zeta_1^{2i_1 k_2 + 2i_1 k_1 - i_2 k_1})$
$f_7(k_1, k_2)$	0	0

	$c_{9,3}$	$c_{9,4}$
$f_{1,1}(k_1)$	$-q \zeta_1^{2i_1 k_1}$	$q \zeta_1^{2i_1 k_1}$
$f_{1,2}(k_1)$	$q \zeta_1^{2i_1 k_1}$	$-q \zeta_1^{2i_1 k_1}$
$f_6(k_1, k_2)$	0	0
$f_7(k_1, k_2)$	$-q \zeta_1^{2i_1 k_2} (\xi_1^{-i_2 k_1} \zeta_2^{2qi_1 k_1} + \zeta_2^{2i_1 k_1} \xi_1^{i_2 k_1})$	$q \zeta_1^{2i_1 k_2} (\xi_1^{-i_2 k_1} \zeta_2^{2qi_1 k_1} + \zeta_2^{2i_1 k_1} \xi_1^{i_2 k_1})$

	$c_{11,1}$	$c_{11,2}$
$f_{1,1}(k_1)$	$q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$	$-q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$
$f_{1,2}(k_1)$	$q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$	$-q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$
$f_6(k_1, k_2)$	$q(\zeta_1^{2i_1 k_2 + k_2 + i_2 k_1} + \zeta_1^{2i_1 k_2 + k_2 + 2i_1 k_1 + k_1 - i_2 k_1})$	$-q(\zeta_1^{2i_1 k_2 + k_2 + i_2 k_1} + \zeta_1^{2i_1 k_2 + k_2 + 2i_1 k_1 + k_1 - i_2 k_1})$
$f_7(k_1, k_2)$	0	0

	$c_{12,1}$	$c_{12,2}$
$f_{1,1}(k_1)$	$-q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$	$q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$
$f_{1,2}(k_1)$	$q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$	$-q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_1}$
$f_6(k_1, k_2)$	0	0
$f_7(k_1, k_2)$	$-q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_2} (\xi_1^{-i_2 k_1} \zeta_2^{q(2i_1 + 1)k_1} + \zeta_2^{(2i_1 + 1)k_1} \xi_1^{i_2 k_1})$	$q \zeta_1^{(2i_1 + 1)k_2} (\xi_1^{-i_2 k_1} \zeta_2^{q(2i_1 + 1)k_1} + \zeta_2^{(2i_1 + 1)k_1} \xi_1^{i_2 k_1})$

**Tabelle 25** Senkrechtfunktionen für die Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  (Satz 8.3)

	$c_{1,7}$	$c_{1,8}$
$f_{1,1}$	$q^2$	$-q^2$
$f_{1,2}$	$q^3$	$-q^3$
$f_6(k_1)$	$q^2(q+1)$	$-q^2(q+1)$
$f_7(k_1)$	$-q^2(q-1)$	$q^2(q-1)$

	$c_{1,10}$	$c_{1,11}$
$f_{1,1}$	$q$	$-q$
$f_{1,2}$	$0$	$0$
$f_6(k_1)$	$q$	$-q$
$f_7(k_1)$	$q$	$-q$

	$c_{3,4}$	$c_{3,5}$
$f_{1,1}$	$q$	$-q$
$f_{1,2}$	$q$	$-q$
$f_6(k_1)$	$q(\zeta_1^{i_1 k_1} + \zeta_1^{-i_1 k_1})$	$-q(\zeta_1^{i_1 k_1} + \zeta_1^{-i_1 k_1})$
$f_7(k_1)$	$0$	$0$

	$c_{4,4}$	$c_{4,5}$
$f_{1,1}$	$-q$	$q$
$f_{1,2}$	$q$	$-q$
$f_6(k_1)$	$0$	$0$
$f_7(k_1)$	$-q(\xi_1^{-i_1 k_1} + \xi_1^{i_1 k_1})$	$q(\xi_1^{-i_1 k_1} + \xi_1^{i_1 k_1})$

**Tabelle 26** Werte der unipotenten Charaktere der Gruppen  $\mathbf{CSp}_6(q)$  mit ungeradem  $q$  (Satz 8.3)

	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$\frac{1}{2}q(q^2 + q + 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)^2$	$\frac{1}{2}q(q^2 + 1)$
$\chi_{1,3}(0)$	$\frac{1}{2}q(q^2 + 1)(q^2 - q + 1)$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q(q - 1)^2$
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)^2(q^2 - q + 1)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)^2$
$\chi_{1,5}(0)$	$\frac{1}{2}q(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q(q - 1)^2$	$\frac{1}{2}q(q^2 + 1)$
$\chi_{1,6}(0)$	$q^2(q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)$	$q^2$	$q^2(q + 1)$	$-q^2(q - 1)$
$\chi_{1,7}(0)$	$q^3(q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)$	$q^3(q^2 + 1)$	$q^3$	$q^3$
$\chi_{1,8}(0)$	$\frac{1}{2}q^4(q^2 + q + 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q^4(q^2 + 1)$	$q^4$	0
$\chi_{1,9}(0)$	$\frac{1}{2}q^4(q + 1)^2(q^2 - q + 1)$	$-\frac{1}{2}q^4(q - 1)(q + 1)$	$q^4$	0
$\chi_{1,10}(0)$	$\frac{1}{2}q^4(q^2 + 1)(q^2 - q + 1)$	$\frac{1}{2}q^4(q^2 + 1)$	0	$q^4$
$\chi_{1,11}(0)$	$\frac{1}{2}q^4(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$	$-\frac{1}{2}q^4(q - 1)(q + 1)$	0	$q^4$
$\chi_{1,12}(0)$	$q^9$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$	$c_{1,7}$	$c_{1,8}$	$c_{1,9}$	$c_{2,0}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	$q$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	$q$	0	0	$\frac{1}{2}(q^2 + 1)(2q + 1)$
$\chi_{1,3}(0)$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	$q$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	$q$	0	0	$\frac{1}{2}(q^2 + 1)(2q - 1)$
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	0	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	0	$q$	0	$\frac{1}{2}(q + 1)^2$
$\chi_{1,5}(0)$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	0	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	0	$q$	0	$-\frac{1}{2}(q - 1)^2$
$\chi_{1,6}(0)$	$q^2$	$q^2$	0	0	0	0	$q^2(2 + q^2)$
$\chi_{1,7}(0)$	$q^3$	0	0	0	0	0	$q(2q^2 + 1)$
$\chi_{1,8}(0)$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}q^2(q^2 + 1)(q + 2)$
$\chi_{1,9}(0)$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)^2$
$\chi_{1,10}(0)$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}q^2(q^2 + 1)(q - 2)$
$\chi_{1,11}(0)$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)^2$
$\chi_{1,12}(0)$	0	0	0	0	0	0	$q^5$

Fortsetzung

	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$\frac{1}{2}(q + 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)^2$	$\frac{1}{2}(q + 1)^2$	$-\frac{1}{2}(q^2 - 2q - 1)$
$\chi_{1,3}(0)$	$\frac{1}{2}(q - 1)(q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)^2$	$\frac{1}{2}(q^2 + 2q - 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)^2$
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}(q + 1)(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)^2$	$-\frac{1}{2}(q^2 - 2q - 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)^2$
$\chi_{1,5}(0)$	$\frac{1}{2}(q - 1)(q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)^2$	$-\frac{1}{2}(q - 1)^2$	$\frac{1}{2}(q^2 + 2q - 1)$
$\chi_{1,6}(0)$	$q^2$	$q^2$	$q(q + 1)$	$q(q - 1)$
$\chi_{1,7}(0)$	$q(q^2 + 1)$	$q(q^2 + 1)$	$q$	$q$
$\chi_{1,8}(0)$	$\frac{1}{2}q^2(q^2 + 1)$	$q^2$	$q^2$	0
$\chi_{1,9}(0)$	$\frac{1}{2}q^2(q - 1)(q + 1)$	0	$q^2$	0
$\chi_{1,10}(0)$	$\frac{1}{2}q^2(q^2 + 1)$	$q^2$	0	$q^2$
$\chi_{1,11}(0)$	$\frac{1}{2}q^2(q - 1)(q + 1)$	0	0	$q^2$
$\chi_{1,12}(0)$	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{2,5}$	$c_{2,6}$	$c_{2,7}$	$c_{2,8}$	$c_{2,9}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$
$\chi_{1,3}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(2q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$
$\chi_{1,5}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,6}(0)$	0	0	0	$q$	$-q$
$\chi_{1,7}(0)$	0	$q$	$q$	$q$	$q$
$\chi_{1,8}(0)$	0	$\frac{1}{2}q^2(q+1)$	$-\frac{1}{2}q^2(q-1)$	0	0
$\chi_{1,9}(0)$	0	$-\frac{1}{2}q^2(q+1)$	$\frac{1}{2}q^2(q-1)$	0	0
$\chi_{1,10}(0)$	0	$-\frac{1}{2}q^2(q-1)$	$\frac{1}{2}q^2(q+1)$	0	0
$\chi_{1,11}(0)$	0	$\frac{1}{2}q^2(q-1)$	$-\frac{1}{2}q^2(q+1)$	0	0
$\chi_{1,12}(0)$	0	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{2,10}$	$c_{2,11}$	$c_{3,0}$	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+1)(q+2)$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	$q+1$	1	1
$\chi_{1,3}(0)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$q$	0	0
$\chi_{1,4}(0)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)(q^2-q+2)$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$	1	$q+1$	1
$\chi_{1,5}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	0	$q$	0
$\chi_{1,6}(0)$	0	0	$q(q^2+q+1)$	$q$	$2q$	0	0
$\chi_{1,7}(0)$	0	0	$q(q^2+q+1)$	$q(q+1)$	$q$	$q$	0
$\chi_{1,8}(0)$	0	0	$\frac{1}{2}q(q^2+1)(2q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$q$	0	0
$\chi_{1,9}(0)$	0	0	$\frac{1}{2}q(q+1)(2q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$q$	0	0
$\chi_{1,10}(0)$	0	0	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	0	$q$	0
$\chi_{1,11}(0)$	0	0	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	0	$q$	0
$\chi_{1,12}(0)$	0	0	$q^4$	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{4,0}$	$c_{4,1}$	$c_{4,2}$	$c_{4,3}$	$c_{4,4}$	$c_{5,0}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	0	$q$	0	$q^2+q+1$
$\chi_{1,3}(0)$	$\frac{1}{2}(q^2+1)(q-2)$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	-1	$q-1$	-1	1
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}q(q+1)^2$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$q$	0	0	$q(q+1)$
$\chi_{1,5}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)(q^2+q+2)$	$-\frac{1}{2}(q^2-q+2)$	$q-1$	-1	-1	0
$\chi_{1,6}(0)$	$-q(q^2-q+1)$	$-q$	0	$-2q$	0	$q^2+q+1$
$\chi_{1,7}(0)$	$q(q^2-q+1)$	$-q(q-1)$	$q$	$q$	0	$q(q^2+q+1)$
$\chi_{1,8}(0)$	$-\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	$-q$	0	0	$q(q^2+q+1)$
$\chi_{1,9}(0)$	$-\frac{1}{2}q(q+1)^2$	$-\frac{1}{2}q(q+1)$	$-q$	0	0	$q(q+1)$
$\chi_{1,10}(0)$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)(2q-1)$	$\frac{1}{2}q(q-1)$	0	$-q$	0	$q^3$
$\chi_{1,11}(0)$	$\frac{1}{2}q(q-1)(2q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q+1)$	0	$-q$	0	0
$\chi_{1,12}(0)$	$-q^4$	0	0	0	0	$q^3$



Fortsetzung

	$c_{5,1}$	$c_{5,2}$	$c_{6,0}$	$c_{6,1}$	$c_{6,2}$	$c_{7,0}$	$c_{7,1}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$q+1$	1	-1	-1	-1	$\frac{1}{2}(2q+3+q^2)$	$\frac{1}{2}(3+q)$
$\chi_{1,3}(0)$	1	1	$-(q^2-q+1)$	$q-1$	-1	$\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,4}(0)$	$q$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}(q+1)(q-3)$	$\frac{1}{2}(3+q)$
$\chi_{1,5}(0)$	0	0	$-q(q-1)$	$q$	0	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,6}(0)$	$q+1$	1	$q^2-q+1$	$-(q-1)$	1	$q(q+2)$	$q$
$\chi_{1,7}(0)$	$q$	0	$q(q^2-q+1)$	$q$	0	$2q+1$	$q+1$
$\chi_{1,8}(0)$	$q$	0	$-q^3$	0	0	$\frac{1}{2}(3q^2+2q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$
$\chi_{1,9}(0)$	$q$	0	0	0	0	$\frac{1}{2}(q+1)(3q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,10}(0)$	0	0	$-q(q^2-q+1)$	$-q$	0	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$
$\chi_{1,11}(0)$	0	0	$q(q-1)$	$-q$	0	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,12}(0)$	0	0	$q^3$	0	0	$q^2$	0

Fortsetzung

	$c_{7,2}$	$c_{7,3}$	$c_{7,4}$	$c_{8,0}$	$c_{8,1}$	$c_{8,2}$	$c_{8,3}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$\frac{1}{2}(3+q)$	$\frac{1}{2}(3+q)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$2q+1$	$q+1$	$q+1$	1
$\chi_{1,3}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q$	$q$	0	0
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}(3+q)$	$-\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(3+q)$	$q+1$	1	$q+1$	1
$\chi_{1,5}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	0	0	0	0
$\chi_{1,6}(0)$	$q$	0	0	$q^2+q+1$	$q+1$	1	1
$\chi_{1,7}(0)$	$q+1$	1	1	$q^2+q+1$	1	$q+1$	1
$\chi_{1,8}(0)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+2)$	$q$	$q$	0
$\chi_{1,9}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$q(q+1)$	$q$	0	0
$\chi_{1,10}(0)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$q$	0	$q$	0
$\chi_{1,11}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	0	0	0	0
$\chi_{1,12}(0)$	0	0	0	$q^2$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{9,0}$	$c_{9,1}$	$c_{9,2}$	$c_{9,3}$	$c_{9,4}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$-\frac{1}{2}(q^2-2q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$
$\chi_{1,3}(0)$	$-\frac{1}{2}(3+q^2-2q)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(3+q)$
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,5}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)(3+q)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$\frac{1}{2}(q-3)$	$-\frac{1}{2}(3+q)$	$\frac{1}{2}(q-3)$
$\chi_{1,6}(0)$	$q(q-2)$	$-q$	$-q$	0	0
$\chi_{1,7}(0)$	$2q-1$	$q-1$	$q-1$	-1	-1
$\chi_{1,8}(0)$	$-\frac{1}{2}(q^2+2q-1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,9}(0)$	$-\frac{1}{2}(q+1)^2$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{1,10}(0)$	$\frac{1}{2}(3q^2-2q+1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q+1)$
$\chi_{1,11}(0)$	$\frac{1}{2}(q-1)(3q+1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$
$\chi_{1,12}(0)$	$-q^2$	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{10,0}$	$c_{10,1}$	$c_{10,2}$	$c_{10,3}$	$c_{11,0}$	$c_{11,1}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$q$	$q$	0	0	$\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$
$\chi_{1,3}(0)$	$2q - 1$	$q - 1$	$q - 1$	-1	$\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$
$\chi_{1,4}(0)$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$
$\chi_{1,5}(0)$	$q - 1$	-1	$q - 1$	-1	$-\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$
$\chi_{1,6}(0)$	$q^2 - q + 1$	$-(q - 1)$	1	1	$q^2$	0
$\chi_{1,7}(0)$	$-(q^2 - q + 1)$	-1	$q - 1$	-1	-1	-1
$\chi_{1,8}(0)$	$-q$	0	$-q$	0	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$
$\chi_{1,9}(0)$	0	0	0	0	$-\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$
$\chi_{1,10}(0)$	$q(q - 2)$	$-q$	$-q$	0	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$
$\chi_{1,11}(0)$	$q(q - 1)$	$-q$	0	0	$-\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$
$\chi_{1,12}(0)$	$-q^2$	0	0	0	$-q^2$	0

Fortsetzung

	$c_{11,2}$	$c_{12,0}$	$c_{12,1}$	$c_{12,2}$	$c_{13,0}$	$c_{13,1}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$	$q + 2$	2
$\chi_{1,3}(0)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$	$q$	0
$\chi_{1,4}(0)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$	2	2
$\chi_{1,5}(0)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$	0	0
$\chi_{1,6}(0)$	0	$q^2$	0	0	$2q + 1$	1
$\chi_{1,7}(0)$	-1	1	1	1	$q + 2$	2
$\chi_{1,8}(0)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$	$2q + 1$	1
$\chi_{1,9}(0)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$	$2q$	0
$\chi_{1,10}(0)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$	1	1
$\chi_{1,11}(0)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)(q + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q - 1)$	0	0
$\chi_{1,12}(0)$	0	$q^2$	0	0	$q$	0

Fortsetzung

	$c_{14,0}$	$c_{14,1}$	$c_{15,0}$	$c_{15,1}$	$c_{16,0}$	$c_{16,1}$	$c_{17,0}$	$c_{17,1}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	$q + 2$	2	1	1	$q$	0	$q$	0
$\chi_{1,3}(0)$	1	1	-1	-1	$q$	0	-1	-1
$\chi_{1,4}(0)$	$q + 1$	1	$q + 1$	1	0	0	$q + 1$	1
$\chi_{1,5}(0)$	0	0	$q - 1$	-1	0	0	0	0
$\chi_{1,6}(0)$	$q + 2$	2	-1	-1	1	1	$-q$	0
$\chi_{1,7}(0)$	$2q + 1$	1	$q$	0	$-q$	0	1	1
$\chi_{1,8}(0)$	$2q + 1$	1	$-q$	0	-1	-1	-1	-1
$\chi_{1,9}(0)$	$q + 1$	1	$-(q + 1)$	-1	0	0	$-(q + 1)$	-1
$\chi_{1,10}(0)$	$q$	0	$q$	0	-1	-1	$q$	0
$\chi_{1,11}(0)$	0	0	$q - 1$	-1	0	0	0	0
$\chi_{1,12}(0)$	$q$	0	$-q$	0	$-q$	0	$-q$	0

Fortsetzung

	$c_{18,0}$	$c_{18,1}$	$c_{19,0}$	$c_{19,1}$	$c_{20,0}$	$c_{20,1}$	$c_{21,0}$	$c_{21,1}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	1	1	$q$	0	0	0	-1	-1
$\chi_{1,3}(0)$	$q$	0	$q-2$	-2	0	0	$q-2$	-2
$\chi_{1,4}(0)$	0	0	0	0	$q$	0	0	0
$\chi_{1,5}(0)$	$q-1$	-1	-2	-2	$q$	0	$q-1$	-1
$\chi_{1,6}(0)$	$q$	0	$-(2q-1)$	1	-1	-1	$-(q-2)$	2
$\chi_{1,7}(0)$	-1	-1	$q-2$	-2	$-q$	0	$2q-1$	-1
$\chi_{1,8}(0)$	$-q$	0	1	1	0	0	$-q$	0
$\chi_{1,9}(0)$	0	0	0	0	1	1	0	0
$\chi_{1,10}(0)$	-1	-1	$-(2q-1)$	1	0	0	$-(2q-1)$	1
$\chi_{1,11}(0)$	$q-1$	-1	$-2q$	0	1	1	$-(q-1)$	1
$\chi_{1,12}(0)$	$-q$	0	$q$	0	$q$	0	$q$	0

Fortsetzung

	$c_{22,0}$	$c_{23,0}$	$c_{24,0}$	$c_{25,0}$	$c_{26,0}$	$c_{27,0}$	$c_{28,0}$	$c_{29,0}$	$c_{30,0}$	$c_{31,0}$
$\chi_{1,1}(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}(0)$	3	1	1	1	-1	0	0	-1	0	-1
$\chi_{1,3}(0)$	1	-1	1	-1	-1	0	1	-3	0	0
$\chi_{1,4}(0)$	2	2	0	0	0	1	-1	0	-1	0
$\chi_{1,5}(0)$	0	0	0	-2	0	1	0	-2	-1	1
$\chi_{1,6}(0)$	3	-1	1	-1	1	-1	0	3	-1	0
$\chi_{1,7}(0)$	3	1	-1	-1	1	-1	0	-3	1	0
$\chi_{1,8}(0)$	3	-1	-1	1	-1	0	0	1	0	1
$\chi_{1,9}(0)$	2	-2	0	0	0	1	-1	0	1	0
$\chi_{1,10}(0)$	1	1	-1	-1	-1	0	1	3	0	0
$\chi_{1,11}(0)$	0	0	0	-2	0	1	0	2	1	-1
$\chi_{1,12}(0)$	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1

**Tabelle 27** Werte der unipotenten Charaktere der Gruppen  $\mathbf{Sp}_6(q)$  mit geradem  $q$  (Satz 8.3)

	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$\frac{1}{2}q(q^2+q+1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(2q^2+q+1)$
$\chi_{1,3}$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)(q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(2q^2-q+1)$
$\chi_{1,4}$	$\frac{1}{2}q(q+1)^2(q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$
$\chi_{1,5}$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2(q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)(q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
$\chi_{1,6}$	$q^2(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$q^2$	$q^2(q^2+1)$
$\chi_{1,7}$	$q^3(q^2+q+1)(q^2-q+1)$	$q^3(q^2+1)$	$q^3$
$\chi_{1,8}$	$\frac{1}{2}q^4(q^2+q+1)(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q^4(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q^4(q+1)$
$\chi_{1,9}$	$\frac{1}{2}q^4(q+1)^2(q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}q^4(q-1)(q+1)$	$\frac{1}{2}q^4(q+1)$
$\chi_{1,10}$	$\frac{1}{2}q^4(q^2+1)(q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q^4(q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q^4(q-1)$
$\chi_{1,11}$	$\frac{1}{2}q^4(q-1)^2(q^2+q+1)$	$-\frac{1}{2}q^4(q-1)(q+1)$	$-\frac{1}{2}q^4(q-1)$
$\chi_{1,12}$	$q^9$	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$	$c_{1,7}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$\frac{1}{2}q(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(2q+1)$
$\chi_{1,3}$	$\frac{1}{2}q(q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$-\frac{1}{2}q(-1+2q)$
$\chi_{1,4}$	$\frac{1}{2}q(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,5}$	$\frac{1}{2}q(q^2-q+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$	$\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,6}$	$q^2$	$q^2$	$q^2$	$q^2$	0
$\chi_{1,7}$	$q^3$	$q^3$	0	0	0
$\chi_{1,8}$	$\frac{1}{2}q^4$	0	0	0	$\frac{1}{2}q^3$
$\chi_{1,9}$	$\frac{1}{2}q^4$	0	0	0	$-\frac{1}{2}q^3$
$\chi_{1,10}$	$\frac{1}{2}q^4$	0	0	0	$-\frac{1}{2}q^3$
$\chi_{1,11}$	$\frac{1}{2}q^4$	0	0	0	$\frac{1}{2}q^3$
$\chi_{1,12}$	0	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,8}$	$c_{1,9}$	$c_{1,10}$	$c_{1,11}$	$c_{3,0}$	$c_{3,1}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}(q^2+1)(q+2)$	$\frac{1}{2}(q^2+q+2)$
$\chi_{1,3}$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$
$\chi_{1,4}$	$\frac{1}{2}q(2q+1)$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}(q+1)(q^2-q+2)$	$-\frac{1}{2}(q+1)(q-2)$
$\chi_{1,5}$	$-\frac{1}{2}q(-1+2q)$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
$\chi_{1,6}$	0	0	0	0	$q(q^2+q+1)$	$q(q+1)$
$\chi_{1,7}$	0	0	0	0	$q(q^2+q+1)$	$q$
$\chi_{1,8}$	$-\frac{1}{2}q^3$	0	0	0	$\frac{1}{2}q(q^2+1)(2q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$
$\chi_{1,9}$	$\frac{1}{2}q^3$	0	0	0	$\frac{1}{2}q(q+1)(2q^2-q+1)$	$\frac{1}{2}q(q+1)$
$\chi_{1,10}$	$\frac{1}{2}q^3$	0	0	0	$\frac{1}{2}q(q^2+1)$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
$\chi_{1,11}$	$-\frac{1}{2}q^3$	0	0	0	$\frac{1}{2}q(q-1)^2$	$-\frac{1}{2}q(q-1)$
$\chi_{1,12}$	0	0	0	0	$q^4$	0

Fortsetzung

	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$	$c_{3,5}$	$c_{4,0}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$\frac{1}{2}(q^2 + q + 2)$	$\frac{1}{2}(q + 2)$	$\frac{1}{2}(q + 2)$	$-\frac{1}{2}(q - 2)$	$\frac{1}{2}q(q^2 + 1)$
$\chi_{1,3}$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}(q^2 + 1)(q - 2)$
$\chi_{1,4}$	$\frac{1}{2}(q^2 + q + 2)$	$\frac{1}{2}(q + 2)$	$-\frac{1}{2}(q - 2)$	$\frac{1}{2}(q + 2)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)^2$
$\chi_{1,5}$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}(q - 1)(q^2 + q + 2)$
$\chi_{1,6}$	$q$	$q$	0	0	$-q(q^2 - q + 1)$
$\chi_{1,7}$	$q(q + 1)$	$q$	0	0	$q(q^2 - q + 1)$
$\chi_{1,8}$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q(q^2 + 1)$
$\chi_{1,9}$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q(q + 1)^2$
$\chi_{1,10}$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q(q^2 + 1)(-1 + 2q)$
$\chi_{1,11}$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q(q - 1)(2q^2 + q + 1)$
$\chi_{1,12}$	0	0	0	0	$-q^4$

Fortsetzung

	$c_{4,1}$	$c_{4,2}$	$c_{4,3}$	$c_{4,4}$	$c_{4,5}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$-\frac{1}{2}q(q - 1)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,3}$	$-\frac{1}{2}(q^2 - q + 2)$	$-\frac{1}{2}(q^2 - q + 2)$	$\frac{1}{2}(q - 2)$	$\frac{1}{2}(q - 2)$	$-\frac{1}{2}(q + 2)$
$\chi_{1,4}$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	$\frac{1}{2}q(q + 1)$	$\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,5}$	$\frac{1}{2}(q - 1)(q + 2)$	$-\frac{1}{2}(q^2 - q + 2)$	$\frac{1}{2}(q - 2)$	$-\frac{1}{2}(q + 2)$	$\frac{1}{2}(q - 2)$
$\chi_{1,6}$	$q(q - 1)$	$-q$	$-q$	0	0
$\chi_{1,7}$	$q$	$-q(q - 1)$	$q$	0	0
$\chi_{1,8}$	$-\frac{1}{2}q(q + 1)$	$\frac{1}{2}q(q - 1)$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,9}$	$-\frac{1}{2}q(q + 1)$	$-\frac{1}{2}q(q + 1)$	$-\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,10}$	$\frac{1}{2}q(q - 1)$	$\frac{1}{2}q(q - 1)$	$-\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,11}$	$\frac{1}{2}q(q - 1)$	$-\frac{1}{2}q(q + 1)$	$-\frac{1}{2}q$	$\frac{1}{2}q$	$-\frac{1}{2}q$
$\chi_{1,12}$	0	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{5,0}$	$c_{5,1}$	$c_{5,2}$	$c_{6,0}$	$c_{6,1}$	$c_{6,2}$	$c_{8,0}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$q^2 + q + 1$	$q + 1$	1	-1	-1	-1	$2q + 1$
$\chi_{1,3}$	1	1	1	$-(q^2 - q + 1)$	$q - 1$	-1	$q$
$\chi_{1,4}$	$q(q + 1)$	$q$	0	0	0	0	$q + 1$
$\chi_{1,5}$	0	0	0	$-q(q - 1)$	$q$	0	0
$\chi_{1,6}$	$q^2 + q + 1$	$q + 1$	1	$q^2 - q + 1$	$-(q - 1)$	1	$q^2 + q + 1$
$\chi_{1,7}$	$q(q^2 + q + 1)$	$q$	0	$q(q^2 - q + 1)$	$q$	0	$q^2 + q + 1$
$\chi_{1,8}$	$q(q^2 + q + 1)$	$q$	0	$-q^3$	0	0	$q(q + 2)$
$\chi_{1,9}$	$q(q + 1)$	$q$	0	0	0	0	$q(q + 1)$
$\chi_{1,10}$	$q^3$	0	0	$-q(q^2 - q + 1)$	$-q$	0	$q$
$\chi_{1,11}$	0	0	0	$q(q - 1)$	$-q$	0	0
$\chi_{1,12}$	$q^3$	0	0	$q^3$	0	0	$q^2$

Fortsetzung

	$c_{8,1}$	$c_{8,2}$	$c_{8,3}$	$c_{10,0}$	$c_{10,1}$	$c_{10,2}$	$c_{10,3}$	$c_{13,0}$	$c_{13,1}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$q+1$	$q+1$	1	$q$	$q$	0	0	$q+2$	2
$\chi_{1,3}$	$q$	0	0	$-1+2q$	$q-1$	$q-1$	-1	$q$	0
$\chi_{1,4}$	1	$q+1$	1	0	0	0	0	2	2
$\chi_{1,5}$	0	0	0	$q-1$	-1	$q-1$	-1	0	0
$\chi_{1,6}$	$q+1$	1	1	$q^2-q+1$	$-(q-1)$	1	1	$2q+1$	1
$\chi_{1,7}$	1	$q+1$	1	$-(q^2-q+1)$	-1	$q-1$	-1	$q+2$	2
$\chi_{1,8}$	$q$	$q$	0	$-q$	0	$-q$	0	$2q+1$	1
$\chi_{1,9}$	$q$	0	0	0	0	0	0	$2q$	0
$\chi_{1,10}$	0	$q$	0	$q(q-2)$	$-q$	$-q$	0	1	1
$\chi_{1,11}$	0	0	0	$q(q-1)$	$-q$	0	0	0	0
$\chi_{1,12}$	0	0	0	$-q^2$	0	0	0	$q$	0

Fortsetzung

	$c_{14,0}$	$c_{14,1}$	$c_{15,0}$	$c_{15,1}$	$c_{16,0}$	$c_{16,1}$	$c_{17,0}$	$c_{17,1}$	$c_{18,0}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	$q+2$	2	1	1	$q$	0	$q$	0	1
$\chi_{1,3}$	1	1	-1	-1	$q$	0	-1	-1	$q$
$\chi_{1,4}$	$q+1$	1	$q+1$	1	0	0	$q+1$	1	0
$\chi_{1,5}$	0	0	$q-1$	-1	0	0	0	0	$q-1$
$\chi_{1,6}$	$q+2$	2	-1	-1	1	1	$-q$	0	$q$
$\chi_{1,7}$	$2q+1$	1	$q$	0	$-q$	0	1	1	-1
$\chi_{1,8}$	$2q+1$	1	$-q$	0	-1	-1	-1	-1	$-q$
$\chi_{1,9}$	$q+1$	1	$-(q+1)$	-1	0	0	$-(q+1)$	-1	0
$\chi_{1,10}$	$q$	0	$q$	0	-1	-1	$q$	0	-1
$\chi_{1,11}$	0	0	$q-1$	-1	0	0	0	0	$q-1$
$\chi_{1,12}$	$q$	0	$-q$	0	$-q$	0	$-q$	0	$-q$

Fortsetzung

	$c_{18,1}$	$c_{19,0}$	$c_{19,1}$	$c_{20,0}$	$c_{20,1}$	$c_{21,0}$	$c_{21,1}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	1	$q$	0	0	0	-1	-1
$\chi_{1,3}$	0	$q-2$	-2	0	0	$q-2$	-2
$\chi_{1,4}$	0	0	0	$q$	0	0	0
$\chi_{1,5}$	-1	-2	-2	$q$	0	$q-1$	-1
$\chi_{1,6}$	0	$-(-1+2q)$	1	-1	-1	$-(q-2)$	2
$\chi_{1,7}$	-1	$q-2$	-2	$-q$	0	$-1+2q$	-1
$\chi_{1,8}$	0	1	1	0	0	$-q$	0
$\chi_{1,9}$	0	0	0	1	1	0	0
$\chi_{1,10}$	-1	$-(-1+2q)$	1	0	0	$-(-1+2q)$	1
$\chi_{1,11}$	-1	$-2q$	0	1	1	$-(q-1)$	1
$\chi_{1,12}$	0	$q$	0	$q$	0	$q$	0

Fortsetzung

	$c_{22,0}$	$c_{23,0}$	$c_{24,0}$	$c_{25,0}$	$c_{26,0}$	$c_{27,0}$	$c_{28,0}$	$c_{29,0}$	$c_{30,0}$	$c_{31,0}$
$\chi_{1,1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\chi_{1,2}$	3	1	1	1	-1	0	0	-1	0	-1
$\chi_{1,3}$	1	-1	1	-1	-1	0	1	-3	0	0
$\chi_{1,4}$	2	2	0	0	0	1	-1	0	-1	0
$\chi_{1,5}$	0	0	0	-2	0	1	0	-2	-1	1
$\chi_{1,6}$	3	-1	1	-1	1	-1	0	3	-1	0
$\chi_{1,7}$	3	1	-1	-1	1	-1	0	-3	1	0
$\chi_{1,8}$	3	-1	-1	1	-1	0	0	1	0	1
$\chi_{1,9}$	2	-2	0	0	0	1	-1	0	1	0
$\chi_{1,10}$	1	1	-1	-1	-1	0	1	3	0	0
$\chi_{1,11}$	0	0	0	-2	0	1	0	2	1	-1
$\chi_{1,12}$	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1

**Tabelle 28** Einige Werte von auf  $\mathbf{Sp}_6(q)$  eingeschränkten Charakteren von  $\mathbf{CSp}_6(q)$ ,  $q$  ungerade (Beweis zu Bemerkung 10.2)

	$c_{1,0}(0)$	$c_{1,0}((q-1)/2)$
$\chi_{1,1}$	1	1
$\chi_{1,2}$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q(q^2+1)(q^2+q+1)$
$\chi_{1,5}$	$\frac{1}{2}(q-1)^2q(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)^2q(q^2+q+1)$
$\chi_{1,8}$	$\frac{1}{2}q^4(q^2+1)(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}q^4(q^2+1)(q^2+q+1)$
$\chi_{1,11}$	$\frac{1}{2}(q-1)^2q^4(q^2+q+1)$	$\frac{1}{2}(q-1)^2q^4(q^2+q+1)$
$\chi_{1,12}$	$q^9$	$q^9$
$\chi_{3,1}$	$(q-1)(q^2+q+1)$	$-(q-1)(q^2+q+1)(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}$
$\chi_{3,3}$	$q^2(q-1)(q^2+q+1)(q^2+1)$	$-(q-1)q^2(q^2+q+1)(q^2+1)(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}$
$\chi_{3,5}$	$(q-1)q^6(q^2+q+1)$	$-(q-1)q^6(q^2+q+1)(-1)^{\frac{1}{2}(q-1)}$
$\chi_{9,1}$	$(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)(-1)^{k_1}$
$\chi_{9,2}$	$q(q^2+1)(q^2+q+1)(q-1)^3$	$(q-1)^3q(q^2+1)(q^2+q+1)(-1)^{k_1}$
$\chi_{9,3}$	$q^3(q-1)^2(q^2+1)(q^2+q+1)$	$(q-1)^2q^3(q^2+1)(q^2+q+1)(-1)^{k_1}$
$\chi_{34,1}$	$(q^2+1)(q^2+q+1)(q+1)^2(q-1)^3$	$(q-1)^3(q^2+1)(q^2+q+1)(q+1)^2(-1)^{k_1}$

	$c_{2,2,1}(0)$	$c_{31,0}(i_1)$
$\chi_{1,1}$	1	1
$\chi_{1,2}$	$\frac{1}{2}(q+1)^2$	-1
$\chi_{1,5}$	$-\frac{1}{2}(q-1)^2$	1
$\chi_{1,8}$	$q^2$	1
$\chi_{1,11}$	0	-1
$\chi_{1,12}$	0	-1
$\chi_{3,1}$	$q$	$-2(-1)^{i_1}$
$\chi_{3,3}$	$q(q^2+1)$	$2(-1)^{i_1}$
$\chi_{3,5}$	$q^3$	$-2(-1)^{i_1}$
$\chi_{9,1}$	$(q-1)^2$	$\xi_1^{-i_1 k_1} + \xi_1^{i_1 k_1}$
$\chi_{9,2}$	$-(q-1)^3$	$-\xi_1^{-i_1 k_1} - \xi_1^{i_1 k_1}$
$\chi_{9,3}$	$(q-1)^2q$	$-\xi_1^{-i_1 k_1} - \xi_1^{i_1 k_1}$
$\chi_{34,1}$	0	$-\xi_3^{-i_1 k_1} - \xi_3^{i_1 k_1} q^2 - \xi_3^{-i_1 k_1} q^2 - \xi_3^{q i_1 k_1} - \xi_3^{-q i_1 k_1} - \xi_3^{-i_1 k_1}$



## Literatur

- [1] Borel, A., et al., Seminar on Algebraic Groups and Related Finite Groups, Lecture Notes in Mathematics **131**, Springer, Berlin (1970)
- [2] Borel, A., Tits, J., Éléments unipotents et sous-groupes paraboliques de groupes réductifs, Invent. Math. **12** (1971), 95–104
- [3] Carter, R.W., Simple Groups of Lie Type, ‘A Wiley-Interscience publication’, London (1972)
- [4] Carter, R.W., Conjugacy Classes in the Weyl Group, Compositio Math. **25** (1972), 1–59
- [5] Carter, R.W., Centralizers of Semisimple Elements in Finite Groups of Lie Type, Proc. London Math. Soc. (3.Serie), **37** (1978), 491–507
- [6] Carter, R.W., Finite Groups of Lie Type - Conjugacy Classes and Complex Characters, ‘A Wiley-Interscience publication’, Chichester (1985)
- [7] Char, B.W., Geddes, K.O., Gonnet, G.H., Monagan, M.B., Watt, S.M., MAPLE-Reference-Manual, 5th Edition, University of Waterloo (1988)
- [8] Conway, J.H., Curtis, R.T., Norton, S.P., Parker, R.A., Wilson, R.A., Atlas of Finite Groups, Clarendon Press, Oxford (1985)
- [9] Curtis, C.W., Reiner, I., Methods of Representation Theory—Volume II, ‘A Wiley-Interscience publication’, New York (1987)
- [10] Deligne, P., Lusztig, G., Representations of Reductive Groups over Finite Fields, Annals of Math. **103** (1976), 103–161
- [11] Dentzer, R., Projektive symplektische Gruppen  $PSp_4(p)$  als Galoisgruppen über  $\mathbb{Q}(t)$ , Arch. Math. **53** (1989), 337–346
- [12] Deriziotis, D.I., Conjugacy Classes and Centralizers of Semisimple Elements in Finite Groups of Lie Type, Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, Heft 11 (1984)
- [13] Digne, F., Michel, J., Representations of Finite Groups of Lie Type, London Mathematical Society Student Texts **21**, Cambridge University Press (1991)
- [14] Digne, F., Lehrer, G.I., Michel, J., The Characters of the Group of Rational Points of a Reductive Group with Non-Connected Center, J. reine angew. Math. **425** (1992), 155–192
- [15] Ennola, V., Conjugacy Classes of the Finite Unitary Groups, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A **I.313** (1962), 1–12
- [16] Enomoto, H., The Characters of the Finite Symplectic Group  $Sp(4, q)$ ,  $q = 2^f$ , Osaka J. Math. **9** (1972), 75–94

- [17] Fachgruppe Computeralgebra der GI, DMV, GAMM, Computeralgebra in Deutschland, Passau und Heidelberg (1993)
- [18] Fong,P., Srinivasan,B., The Blocks of Finite Classical Groups, *J. reine angew. Math.* **396** (1989), 122—191
- [19] Geck,M., Eine Anwendung von MAPLE in der Darstellungstheorie der unitären Gruppen, Diplomarbeit, Aachen (1987)
- [20] Geck,M., Pfeiffer,G., Unipotent Characters of the Chevalley Groups  $D_4(q)$ ,  $q$  Odd, *Manuscripta Math.* **76** (1992), 281—304
- [21] Geck,M., Hiss,G., Lübeck,F., Malle,G. and Pfeiffer,G., CHEVIE—Generic Character Tables of Finite Groups of Lie Type, Hecke Algebras and Weyl Groups, IWR-preprint, Heidelberg, 1993
- [22] Häfner,F., Einige orthogonale und symplektische Gruppen als Galoisgruppen über  $\mathbb{Q}$ , Dissertation, Heidelberg (1990)
- [23] Humphreys,J.E., *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics **21**, Springer, Berlin (1975)
- [24] Huppert,B., *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin (1967)
- [25] Kleidman,P.B., *Maximal Subgroups of Low Dimensional Classical Groups*, Longman Research Notes (1990)
- [26] Lambe,L., Srinivasan,B., A Computation of Green Functions for some Classical Groups, *Comm. Alg.* **18(10)** (1990), 3507–3545
- [27] Looker,J., The Complex Irreducible Characters of  $\mathrm{Sp}(6,q)$ ,  $q$  even, Ph. D. Thesis, Department of Pure Mathematics, University of Sidney (1977)
- [28] Lusztig,G., On the Green Polynomials of Classical Groups, *Proc. London Math. Soc.* (3) **33** (1976), 443–475
- [29] Lusztig,G., Srinivasan,B., The Characters of the Finite Unitary Groups, *Journal of Algebra* **49** (1977), 167–171
- [30] Malle,G., Green Functions for Groups of Types  $E_6$  and  $F_4$  in Characteristic 2, *Comm. Alg.* **21(3)** (1993), 747–798
- [31] Matzat,B.H., *Konstruktive Galoistheorie*, LNM **1284**, Berlin–Heidelberg–New York (1987)
- [32] Przygocki,A., Schur Indices of Symplectic Groups, *Comm. Alg.* **10(3)** (1982), 279–310
- [33] Schönert,M. (u.a.), *Manual for GAP 3.1*, Lehrstuhl D für Mathematik Aachen (1992)
- [34] Shinoda,K., The Conjugacy Classes of Chevalley Groups of Type  $(F_4)$  over Finite Fields of Characteristic 2, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **21** (1974), 133–159

- [35] Shinoda,K., The Characters of the Finite Conformal Symplectic Group,  $CSp(4, q)$ , Comm. Alg. **10(13)** (1982), 1369–1419
- [36] Shoji,T., The Conjugacy Classes of Chevalley Groups of Type  $(F_4)$  over Finite Fields of Characteristic  $p \neq 2$ , J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **21** (1974), 1–17
- [37] Simpson,W., Frame,J., The Character Tables for  $SL(3, q)$ ,  $SU(3, q^2)$ ,  $PSL(3, q)$ ,  $PSU(3, q^2)$ , Can. J. Math., VOL. XXV, **No. 3** (1973), 486–494
- [38] Springer,T.A., Linear Algebraic Groups, Birkhäuser, Boston (1981)
- [39] Srinivasan,B., The Characters of the Finite Symplectic Group  $Sp(4, q)$ , Trans. Amer. Math. Soc. **131** (1968), 488–525
- [40] Steinberg,R., The Representations of  $GL(3, q)$ ,  $GL(4, q)$ ,  $PGL(3, q)$  and  $PGL(4, q)$ , Can. J. Math. **3** (1951), 225–235
- [41] Wall,G.E., On the Conjugacy Classes in the Unitary, Symplectic and Orthogonal Groups, J. Austral. Math. Soc. **3** (1963), 1–62