

Blatt 9

Besprechung am Freitag 26.06.

Aufgabe 1.

- (a) $\left(\frac{a,b}{\mathbb{R}}\right)$ ist eine Divisionsalgebra, genau dann wenn $a < 0$ und $b < 0$.
- (b) Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist $\Lambda := \langle 1, i, j, ij \rangle_{\mathbb{Z}}$ eine $\mathbb{Z}$ -Ordnung in $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$. Bestimmen Sie $\Lambda^{\#}$ und $|\Lambda^{\#}/\Lambda|$.
- (c) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{Z}$ die Hasse Invariante von $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right) \otimes \mathbb{Q}_p$ trivial ist, falls p kein Teiler von $2ab$ ist.
- (d) Bestimmen Sie die Hasse Invarianten von $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right) \otimes \mathbb{Q}_p$ für alle p und folgende Paare (a, b) : $(-1, -1)$, $(-1, -3)$, $(2, 5)$, $(-2, -5)$, $(-2, 5)$, $(2, -5)$.
- (e) Sei $D = \left(\frac{-2, -5}{\mathbb{Q}}\right)$. Zeigen Sie, dass $E = \mathbb{Q}[\zeta_5]$ ein Zerfällungskörper für D ist, jedoch kein echter Teilkörper von E die Divisionsalgebra D zerfällt.

Aufgabe 2.

Sei $A = \langle 1, \rho, i, \rho i \rangle_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}[\rho] \oplus \mathbb{Q}[\rho]i$, wo $\rho^2 + \rho + 3 = 0$, $i^2 = -1$, $(i\rho)^2 = -3$.

- (a) Sei $\Lambda := \langle 1, \rho, i, \rho i \rangle_{\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie, dass Λ eine Maximalordnung in A ist.
- (b) Bestimmen Sie alle Hasse Invarianten von A .
- (c) Sei $\Gamma = \langle 1, \rho + i, 2i, \frac{1+\rho i}{2} \rangle_{\mathbb{Z}}$. Zeigen Sie, dass Γ eine Maximalordnung ist.
- (d) Bestimmen Sie die Einheitengruppen von Γ und von Λ und folgern Sie, dass Λ und Γ nicht isomorph sind.

Aufgabe 3.

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{Q}$ -Algebra, $\mathcal{A} := \langle \alpha, \tau \rangle_{\mathbb{Q}\text{-Alg}}$ mit $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, $\tau^4 = 2$, $\tau\alpha\tau^{-1} = \alpha^2$.

- (i) Bestimmen Sie Matrizen in $\mathbb{Q}[\zeta_5]^{4 \times 4}$ (ζ_5 bezeichne eine primitive 5-te Einheitswurzel), welche die Relationen von α und τ erfüllen und eine zu $\mathcal{A}$ isomorphe $\mathbb{Q}$ -Teilalgebra von $\mathbb{Q}[\zeta_5]^{4 \times 4}$ erzeugen. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ zentral einfache $\mathbb{Q}$ -Algebra ist.
- (ii) Zeigen Sie: $\mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$ hat Schurindex 4 und bestimmen Sie die Hasseinvariante von $\mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$.
(Hinweis: $\mathbb{Q}_2[\alpha]$ ist unverzweigt über $\mathbb{Q}_2$.)
- (iii) Sei $\Lambda := \mathbb{Z}[\alpha, \tau] \leq \mathcal{A}$. Bestimmen Sie die Diskriminante von Λ bzgl. der reduzierten Spur.
- (iv) Folgern Sie aus (iii) dass $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A} \cong \mathbb{Q}_p^{4 \times 4}$ für alle Primzahlen $p \neq 2, 5$. und dass $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$ die Maximalordnung in $\mathbb{Q}_2 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$ ist.
- (v) Geben Sie einen Epimorphismus $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda \rightarrow \mathbb{F}_{5^4}$ an und schließen Sie mit (iii), dass $\mathbb{Q}_5 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$ eine Divisionsalgebra ist.
(Hinweis: $\tau \mapsto 2^{\frac{1}{4}}, \alpha \mapsto 1$.)
- (vi) Bestimmen Sie die Hasseinvariante von $\mathbb{Q}_5 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$.
(Hinweis: $\pi_{\mathcal{A}} := \alpha - 1$ erzeugt das maximale Ideal $J(\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda)$ von $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda$, und $\mathbb{Q}_5[\tau]$ ist ein über $\mathbb{Q}_5$ unverzweigter maximaler Teilkörper von $\mathbb{Q}_5 \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A}$. Berechnen Sie die Potenz des Frobeniusautomorphismus, welche $\pi_{\mathcal{A}}$ auf $\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda / J(\mathbb{Z}_5 \otimes_{\mathbb{Z}} \Lambda) \cong \mathbb{F}_5 \otimes_{\mathbb{Z}_5} \mathbb{Z}_5[\tau] \cong \mathbb{F}_{5^4}$ induziert.)
- (vii) Zeigen Sie $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathcal{A} \cong \mathbb{R}^{4 \times 4}$.