Übungsblatt 10

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1. Bestimme die Wurzeln von $p := x^2 + 1 \in K[x]$ für $K \in \{\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{C}\}$. Hier bezeichnet $\mathbb{F}_2$ bzw. $\mathbb{F}_3$ den Körper mit 2 bzw. 3 Elementen.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Formuliere den erweiterten Euklidischen Algorithmus in $K[x]$. Berechne $\mathrm{ggT}(x^4 + x^2 + 1, x^4 + x^3 + x + 1)$ und eine Bézout-Identität für $K = \mathbb{F}_2$ und $ggT(x^3 - 6x^2 + 12x - 8, x^2 - 6x + 8)$ für $K = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 3. Sein K ein Körper und $p, q \in K[x]\backslash\{0\}$. Zeige:

(i) $pq \neq 0$ (d.h. p und q sind keine Nullteiler) und $\mathrm{Grad}(pq) = \mathrm{Grad}(p) + \mathrm{Grad}(q)$.

(ii) $K[x]^* = K^*$.

Aufgabe 4.

(i) Sei K ein Körper. Zeige, dass ein Polynom in $K[x]$ vom Grad 2 oder 3 genau dann irreduzibel ist, wenn es keine Wurzel in K besitzt.

(ii) Konstruiere ein reduzibles Polynom in $\mathbb{F}_2[x]$, das keine Wurzel in $\mathbb{F}_2$ hat.

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 13.1.2014, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$, die verträglich mit Addition und Multiplikation ist, d.h. für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \neq 0$ gilt $a \sim b \Rightarrow a + c \sim b + c$ und $ac \sim bc$. Zeige, dass $\sim$ eine Kongruenzrelation ist, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $\sim = \equiv_m$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sei K ein Körper, $p \in K[x]$ und $r \in K$. Zeige, dass folgende Aussagen aquivalent sind:

(i) r ist eine Nullstelle von $\tilde{p}$, d.h. $\tilde{p}(r) = 0$.

(ii) r ist eine Wurzel von p, d.h. $p(r) = \epsilon_r(p) = 0$.

(iii) $x - r$ teilt $p(x)$ in $K[x]$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ ein Körper mit p Elementen. Zeige, dass es einen Ringisomorphismus zwischen $\mathbb{F}_p[x]/(x^p - x)\mathbb{F}_p[x]$ und $\mathbb{F}_p^{\mathbb{F}_p}$ gibt.

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Beweise Folgerung (9.26) 2. und 3. Sei K ein Körper.

(i) Ein Polynom $p \in K[x]$ heißt *prim*, falls für alle $a, b \in K[x]$ gilt: $p|ab \Rightarrow p|a$ oder $p|b$. Zeige, dass für alle $p \in K[x]$ gilt: p ist prim genau dann, wenn p irreduzibel ist.

(ii) Sei $a \in K[x]\backslash\{0\}$. Zeige, dass ein $s \in \mathbb{N}_0$ und bis auf Reihenfolge eindeutige normierte, irreduzible Polynome $p_1, p_2, \ldots, p_s \in K[x]$ und ein eindeutiges $\alpha \in K^*$ existieren, so dass gilt $p = \alpha \prod_{i=1}^{s} p_i$. ($p$ hat eine eindeutige Primfaktorzerlegung.)

(iii) Sei $p \in K[x]$ mit $\mathrm{Grad}(p) \geq 1$. Zeige, dass $K[x]/pK[x]$ durch vertreterweise Addition und Multiplikation zu einem kommutativen Ring mit Eins wird und jede Restklasse $[a] \in K[x]/pK[x]$ hat einen eindeutigen Vertreter $a' \in [a]$ mit $\mathrm{Grad}(a') < \mathrm{Grad}(p)$.