Übungsblatt 11

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1. Bestimme $\mathrm{ggT}(x^4 + x + 1, x^3 + x^2)$ und eine Bézout-Identität in $\mathbb{F}_2[x]$.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \omega, \overline{\omega}\}$. und $p := x^2 + x + \omega \in \mathbb{F}_4[x]$.

(i) Zeige, dass p irreduzibel ist.

(ii) Bestimme $|\mathbb{F}_4[x]/p\mathbb{F}_4[x]|$.

(iii) Bestimme die Inversen von $[x + 1]$ und $[\omega x]$.

Aufgabe 3. Zeige, dass $P := \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid a, b \in \mathbb{N}\}$ ein Positivitätsbereich auf $\mathbb{Q}$ ist, sodass $(\mathbb{Q}, P)$ ein angeordneter Körper ist. Ist $\mathbb{Q}$ ordnungsvollständig?

Aufgabe 4. Bestimme die Normalform für

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2 + 1} \in \mathbb{F}_3(x).$$

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 20.1.2014, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $p := x^3 + x^2 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$.

(i) Zeige, dass p irreduzibel ist.

(ii) Bestimme $|\mathbb{F}_3[x]/p\mathbb{F}_3[x]|$ und $|\,(\mathbb{F}_3[x]/p\mathbb{F}_3[x])^*\,|$.

(iii) Bestimme die Inversen von $[x^2 + x]$ und $[x^2 + 2x]$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.**

(i) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$. Zeige: $\{c \in \mathbb{Q} \mid a < c < b\}$ ist eine unendliche Menge.

(ii) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a < b$. Für $n \in \mathbb{N}$ bestimme

$$d_n := |\{c \in \frac{1}{n}\mathbb{Z} \mid a < c < b\}|.$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Bestimme die Normalform von

$$\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6} \in K(x)$$

für jeden der Körper $K \in \{\mathbb{F}_2 . \mathbb{F}_3, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Sei K ein Körper. Wir betrachten den Körper der rationalen Funktionen $K(x)$. Sei Grad: $K(x)\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}$, $\frac{a}{b} \mapsto \mathrm{Grad}(a) - \mathrm{Grad}(b)$ die Fortsetzung der Gradabbildung von $K[x]$.

(i) (Bemerkung (10.8)). Zeige, dass Grad ein Gruppenhomomorphismus zwischen $(K(x)\backslash\{0\}, \cdot)$ und $(\mathbb{Z}, +)$ ist und für alle $f, g \in K(x)\backslash\{0\}$ die Ungleichnung $\mathrm{Grad}(f + g) \leq \max\{\mathrm{Grad}(f), \mathrm{Grad}(g)\}$ gilt.

(ii) Sei $\epsilon \in \mathbb{Q}$ mit $0 < \epsilon < 1$. Zeige, dass $|\ |_{\mathrm{Grad}} : K(x) \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$ definiert über $|0|_{\mathrm{Grad}} := 0$ und $|f|_{\mathrm{Grad}} := \epsilon^{-\mathrm{Grad}(f)}$ für $f \in K(x)\backslash\{0\}$ ein nicht-archimedischer Betrag ist, d.h. für alle $f, g \in K(x)$ gelten die Eigenschaften

(a) (positive Definitheit) $|f|_{\mathrm{Grad}} = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(b) (Multiplikativität) $|fg|_{\mathrm{Grad}} = |f|_{\mathrm{Grad}}|g|_{\mathrm{Grad}}$

(c) (verschärfte Dreiecksungleichung) $|f + g|_{\mathrm{Grad}} \leq \max\{|f|_{\mathrm{Grad}}, |g|_{\mathrm{Grad}}\}$

(iii) Definiere $d : K(x) \times K(x) \to \mathbb{Q}_{\geq 0},\ (p, q) \mapsto |p - q|_{\mathrm{Grad}}$. Zeige, dass d eine Ultra-Metrik ist, d.h. für alle $p, q, r \in K(x)$ gelten die Eigenschaften

(a) $d(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$,

(b) $d(p, q) = d(q, p)$,

(c) $d(p, q) \leq \max\{d(p, r), d(q, r)\}$.

(iv) Sei $p \in K(x)$ und $s \in \mathbb{Q}_{>0}$. Definiere $B_s(p) := \{q \in K(x) \mid d(p, q) < s\}$, den Ball oder die offene Kreisfläche um p mit Radius s. Zeige, dass für alle $r \in B_s(p)$ gilt $B_s(r) = B_s(p)$, d.h. jeder innere Punkt eines Kreises ist Mittelpunkt des Kreises.