Übungsblatt 12

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1. Bestimme $\widetilde{g}^{-1}(\{(0,0)\})$ für $g = (g_1, g_2) \in \mathbb{R}[x,y]^2$ mit

$$\begin{aligned} g_1 &= x^2 + y^2 - 2y \\ g_2 &= x^2 - y \end{aligned}$$

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungssysteme über $\mathbb{R}$:

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 2x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & = & 1 \\ 5x_1 & + & 6x_2 & = & 1 \end{array} \qquad\qquad (b)\quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 3. Beweise Bemerkung (12.4): Sei K ein Körper und $e := x_n - p(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ mit $p(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]$.

(i) Zeige, dass

$$\sigma_e : K[x_1, \ldots, x_n] \to K[x_1, \ldots, x_{n-1}],\ q(x_1, \ldots, x_n) \mapsto q(x_1, \ldots, x_{n-1}, p(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

ein surjektiver Ringhomomorphismus ist.

(ii) Sei $g = (g_1, \ldots, g_m) \in K[x_1, \ldots, x_n]^m$ mit $g_1 = e$. Setze $h := (\sigma_e(g_2), \ldots, \sigma_e(g_m)) \in K[x_1, \ldots, x_{n-1}]^{m-1}$ und zeige, dass für die Lösungsmengen gilt

$$\tilde{g}^{-1}(\{(0, \ldots, 0)\}) = \{(b_1, \ldots, b_{n-1}, p(b)) | b = (b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \tilde{h}^{-1}(\{(0, \ldots, 0)\}).$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper. Eine Gerade G in K^2 ist gegeben durch die Lösungsmenge $\widetilde{g}^{-1}(\{0\})$ für ein $g \in K[x,y]$ vom Grad 1.

(i) Zeichne die Geraden $\widetilde{g}^{-1}(\{0\})$ für $g \in \{x - y, 4x - y - 1, 12x - 3y\}$ und $K = \mathbb{R}$.

(ii) Zeige, dass jede solche Gleichung $\widetilde{g}(x,y) = 0$ nach mindestens einer der Variablen x, y aufgelöst werden kann, und dass somit die Gerade durch K parametrisiert ist.

(iii) Zeige, dass jede Gerade das beschreibende Polynom bis auf $K-$Vielfache eindeutig bestimmt.

(iv) Zeige, dass sich zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt schneiden oder parallel sind.

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 27.1.2014, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Bestimme eine Parametrisierung ohne Beschränkungen an den Körper für die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 6x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 + 5x_4 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Zeige durch Lösen eines Gleichungssystems, dass der Schnitt von einem Kreis und einer Geraden in $\mathbb{R}^2$ immer entweder keinen, einen oder zwei Punkte hat.
HINWEIS: Ein Kreis mit Mittelpunkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ und Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist die Lösungsmenge der Gleichung $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Prüfe die Abbildung

$$f : M^2 \to M^2,\ (x, y) \to (2x + 3y, 4x + 5y)$$

auf Bijektivität für $M \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Sei K ein Körper. Für Polynome in n Veränderlichen kann man Restklassenringe gleich wie für Polynome in nur einer Veränderlichen definieren. Sei $p := xy - 1 \in K[x, y]$ und definiere $\mathcal{L} := K[x, y]/pK[x, y]$, den *Laurent-Ring* über K.

(i) Für $n \in N$ definiere $x^{-n} := y^n$. Zeige, dass jede Äquivalenzklasse einen eindeutigen Vertreter der Form $p = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i$ mit $a_i \in K$ und $a_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{Z}$. Zeige weiter, dass wir mit diesen Standard-Vertretern folgendermaßen rechnen können:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i + \sum_{i \in \mathbb{Z}} b_i x^i &= \sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i + b_i) x^i \\ \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i x^i \cdot \sum_{j \in \mathbb{Z}} b_j x^j &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (a_i + b_{k-i}) \right) x^k \end{aligned}$$

für $a_i, b_i \in K$, $i \in \mathbb{Z}$, und $a_i, b_i \neq 0$ nur für endlich viele $i \in \mathbb{Z}$.

(ii) Zeige $\mathcal{L}^* = \{a x^i \mid a \in K^*,\ i \in \mathbb{Z}\}$.