Übungsblatt 13

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1. Sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ eine Cauchy-Folge, die keine Nullfolge ist. Dann existiert nach Lemma (11.6) ein $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass entweder $a_n \geq s$ für alle $n \geq N$ oder $a_n \leq -s$ für alle $n \geq N$.
Zeige, dass die Folge $a' = (a'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, definiert über

$$a'_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n < N, \\ a_n^{-1} & \text{falls } n \geq N, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$, eine Cauchy-Folge ist und dass $[a]_\sim \cdot [a']_\sim = [1]_\sim$ gilt.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. (i) Berechne die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ und $\frac{53}{20}$.

(ii) Schreibe $0,12\overline{356}$ als rationale Zahl in der Form $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Berechne die Dezimalbruchentwicklung von

$$\sup(\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 5\})$$

auf drei Stellen genau. Bestimme $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 5\}$.

Aufgabe 4. Zeige, dass $0,\overline{9} = 1$ in $\mathbb{R}$ gilt.

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 3.2.2014, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$ mit Dezimalbruchentwicklung $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_1, z_2, z_3, \dots)$. Zeige, dass a genau dann eine rationale Zahlt ist, wenn $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ periodisch mit einer möglichen Vorperiode ist, das heißt es existieren $\ell, N \in \mathbb{N}$ mit $z_{\ell+i} = z_i$ für alle $i \geq N$. Wie kann man ℓ bestimmen?
HINWEISE: Für die Hinrichtung überlege man sich, welche Werte $10(\frac{x}{y} - \lfloor \frac{x}{y} \rfloor$ für $x \in \mathbb{N}_0$, $y \in \mathbb{N}$ annehmen kann. Für die Rückrichtung behandle man zuerst den Fall ohne Vorperiode und benutze die geometrische Reihe ($\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$).

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** (Heron-Verfahren)
Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_1 := 2,\ a_{n+1} := \frac{a_n^2 + 3}{2a_n} \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
HINWEISE:

(i) Zeige, dass $1 < a_n < 2$ für alle $n > 1$ gilt,

(ii) dass $0 < a_n^2 - 3 \leq \frac{1}{2^{2n}}$ für alle $n > 1$ gilt

(iii) und zeige, dass $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und verwende die 3. Binomische Formel.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Zeige, dass für $k \in \{2, 3\}$ und $a \geq 0$ die Gleichung $x^k - a$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}_{\geq 0}$ besitzt. Gib ein allgemeines Verfahren an, um die Lösung zu bestimmen, und bestimme $\sqrt[3]{3}$ auf drei Stellen genau.

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Sei $K = \mathbb{Q}(x)$ und d eine Ultrametrik wie in Übungsblatt 11, Aufgabe 8, definiert.

(i) Definiere Cauchy- und Null-Folgen analog zur Vorlesung und zeige, dass die Menge $\mathcal{C}(K)$ aller Cauchy-Folgen mit komponentenweiser Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring bildet.
HINWEIS: Es können ohne Beweis die Analoga der Lemmata (11.3) und (11.4) verwendet werden.

(ii) Definiere auf $\mathcal{C}(K)$ eine Äquivalenzrelation, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist und bei der die Nullfolgen eine Äquivalenzklasse bilden.

(iii) Zeige, dass die Menge der Äquivalenzklassen mit vertreterweiser Addition und Multiplikation einen Körper bilden.
HINWEIS: Es kann ohne Beweis das Analogon des Lemmas (11.6) verwendet werden.

(iv) Bezeichne diesen mit $\mathbb{Q}((x))$ (*Körper der formalen Laurent-Reihen*). Begründe, warum man eine Äquivalenzklasse mit einer formalen Laurent-Reihe der Form $\sum_{i=-N}^{\infty} a_i x^i$ für $N \in \mathbb{N}_0$ und $a_i \in \mathbb{Q}$ für alle $i \in \mathbb{Q}$ identifizieren kann.