Übungsblatt 2

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es seien M, N Mengen. Zeige, dass die folgeden Aussagen äquivalent sind:

(i) $M \subset N$

(ii) $M = M \cap N$

(iii) $N = N \cup M$

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. Definiere

$$f : \underline{5} \to \underline{3},\ x \mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \leq 3, \\ x - 3 & \text{falls } x > 3. \end{cases}$$

Bestimme alle Fasern von f. Zeige, dass f eine surjektive Abbildung ist und bestimme alle Rechtsinversen von f. Bestimme alle Linksinversen zu einem Rechtsinversen von f.

Aufgabe 3. Es seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Sind die Mengen $\{x \in \mathbb{Z} \mid m \leq x \leq n\}$ und $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq n\}$ endlich? Falls ja, bestimme die Anzahl der Elemente. Sind die Mengen abzählbar?

Aufgabe 4. (i) Entscheide, ob die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Gib gegebenfalls ein Linksinverses, Rechtsinverses oder Inverses an.

(a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ x \mapsto |x|$

(b) $f_2 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 + 1$

(c) $f_3 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\},\ x \mapsto \frac{1}{x}$

(ii) Es seien A, B und C Mengen, $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeige, wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist auch f injektiv, aber g im Allgemeinen nicht.

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 4.11.2013, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2.Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es seien M, N Mengen und $\emptyset \neq T \subseteq M$ eine Teilmenge von M. Zeige:

(i) Die Einschränkung $\epsilon_T : N^M \to N^T,\ f \mapsto f_{|T}$ ist eine Abbildung.

(ii) Für alle $g \in N^T$ ist $\epsilon_{M\setminus T} : \epsilon_T^{-1}(\{g\}) \to N^{M\setminus T},\ f \mapsto f_{|M\setminus T}$ ist eine bijektive Abbildung.

(iii) Es gilt

$$N^M = \biguplus_{g \in N^T} \epsilon_T^{-1}(\{g\}).$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Es seien A, B und C Mengen, $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Es sei $T \subset A$ eine nicht leere Teilmenge. Zeige:

(i) Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv, aber f im Allgemeinen nicht.

(ii) Sind f und g injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv.

(iii) Sind $g \circ f$ und f bijektiv, dann ist auch g bijektiv.

(iv) Ist f injektiv, dann ist auch $f_{|T}$ injektiv.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Sei M die Menge aller reellen, nicht-konstanten Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich 2, d.h.

$$M := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0 \text{ oder } b \neq 0\}.$$

(i) Zeige, dass jedes $f \in M$ nur Fasern aus $0, 1$ oder 2 Elementen haben kann.

(ii) Bestimme die Teilmenge $B := \{f \in M \mid f \text{ ist bijektiv}\}$

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Definiere

$$B_f : \mathrm{Pot}(M) \to \mathrm{Pot}(N),\ X \mapsto f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

(i) Betrachte die 3 Beispiele:

(a) $f_1 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\},\ i \mapsto 4 - i$

(b) $f_2 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\},\ i \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } i \text{ ungerade,} \\ 2 & \text{falls } i \text{ gerade,} \end{cases}$

(c) $f_3 : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\},\ i \mapsto i.$

Sind B_{f_i} mit $i \in \{1, 2, 3\}$ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

(ii) Zeige, dass B_f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist genau dann, wenn f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv ist.