

# Übungsblatt 4

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

## Präsenzaufgabe

**Aufgabe 1** (4 Punkte). Auf 12 definieren wir die Relation  $\sim$  über

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } a - b = 5 \cdot k.$$

(Hierbei sei  $a - b$  als Rechnung in  $\mathbb{Z}$  aufgefasst.)

Zeige, dass  $\sim$  eine Äquivalenzrelation ist, bestimme die Äquivalenzklassen und gib eine Vertretermenge an.

## Tutoriumsaufgaben

**Aufgabe 2.** Zeige durch vollständige Induktion: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

(i)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

(ii)  $a + n = n + a$  für alle  $a \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $m \in \mathbb{Z}$ . Zeige, dass  $\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq m\}$  die Peano-Axiome erfüllt. Formuliere das Prinzip der vollständigen Induktion für diese Menge.

**Aufgabe 4.** Eine Ordnung  $R$  auf einer Menge  $M$  heißt anti-symmetrisch, falls  $mRn$  und  $nRm$  implizieren  $m = n$ .

Zeige,  $\leq$  ist eine partielle Ordnung auf  $\mathbb{N}$  und  $\mathbb{Z}$ , d. h.  $\leq$  ist reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch. Ist  $\leq$  eine Wohlordnung?

Sei  $M \neq \emptyset$  eine Menge. Zeige, dass die Mengeninklusion ebenfalls eine partielle Ordnung auf  $\text{Pot}(M)$  ist und diese genau dann eine Wohlordnung ist, wenn  $|M| = 1$  gilt.

## Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 18.11.2013, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

**Aufgabe 5** (4 Punkte).

- (i) Zeige durch vollständige Induktion: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

$$\left( \sum_{k=1}^n k \right)^2 = \sum_{k=1}^n k^3.$$

- (ii) Zeige durch vollständige Induktion: Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$  gilt

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

**Aufgabe 6** (4 Punkte).

- (i) Beweise Bemerkung (5.13) aus der Vorlesung: Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A(n)$  eine Aussage. Gilt  $A(1)$  und  $(A(i) \text{ für alle } i \leq n \Rightarrow A(n+1))$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- (ii) Zeige, durch die Vorschrift

$$f(n) := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 1, \\ 4f(k) & \text{falls ein } k \in \mathbb{N} \text{ existiert mit } n = 2k, \\ f(n-1) + 2(n-1) + 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

wird eine Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto f(n)$  definiert und es gilt  $f(n) = n^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 7** (4 Punkte). Sei  $M \neq \emptyset$  eine Menge und  $\leq$  eine partielle Ordnung auf  $M$ . Definiere auf  $M^2$  die Relation  $\leq_l$  über  $(m_1, m_2) \leq_l (n_1, n_2)$  genau dann wenn  $(m_1 \leq n_1$  und  $m_1 \neq n_1)$  oder  $(m_1 = n_1$  und  $m_2 \leq n_2)$ . Zeige:

- (i)  $\leq_l$  ist eine partielle Ordnung auf  $M^2$ .
- (ii) Ist  $M$  durch  $\leq$  totalgeordnet (d.h. für alle  $m, n \in M$  gilt  $m \leq n$  oder  $n \leq m$ ), so ist auch  $M^2$  durch  $\leq_l$  totalgeordnet.
- (iii) Ist  $M$  durch  $\leq$  wohlgeordnet (d.h. jede nicht leere Teilmenge  $N \subseteq M$  hat ein eindeutiges Minimum), so ist auch  $M^2$  durch  $\leq_l$  wohlgeordnet.

**Aufgabe 8** (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte).

- (i) Sei  $M$  eine Menge. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (a)  $M$  ist eine unendliche Menge.
- (b) Es existiert eine injektive Abbildung  $\mathbb{N} \rightarrow M$
- (c) Es existiert eine echte Teilmenge  $N \subsetneq M$  und eine Bijektion  $M \rightarrow N$ .

- (ii)  $\text{Pot}_{\text{endl}}(\mathbb{N}_0)$  bezeichnet die Menge der endlichen Teilmengen von  $\mathbb{N}_0$ . Zeige, dass

$$\alpha : \text{Pot}_{\text{endl}}(\mathbb{N}_0) \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad T \mapsto \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \chi_T(i) 2^i$$

eine bijektive Abbildung ist.