Übungsblatt 5

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeige mittels Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!} = 1 - \frac{1}{n!}$$

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. (i) Sei $M \neq \emptyset$ eine Menge mit kommutativer und assoziativer Verknüpfung $+M \times M \to M$. Seien $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}},\ b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to M$ Folgen. Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i).$$

(ii) Zeige die Aussagen 1) und 2) von Satz (5.22): Für alle $a, b, b' \in \mathbb{N}$ gilt

1) $a^1 = a$ und $1^a = 1$,
2) $a^{(b+b')} = (a^b) \cdot (a^{b'})$.

Aufgabe 3. Seien M, N endliche Mengen. mit m bzw. n Elementen, $m, n \in \mathbb{N}$. Konstruiere eine Bijektion $N^M \to \underline{n}^m$, die Injektivität, Surjektivität und Bijektivität respektiert.

Folgere, dass $|N^M| = n^m$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Konstruiere eine Bijektion

$$\bigcup_{k\in\underline{n} \text{ gerade}} \mathrm{Pot}_k(\underline{n}) \to \bigcup_{k\in\underline{n} \text{ ungerade}} \mathrm{Pot}_k(\underline{n}),$$

wobei $\mathrm{Pot}_k(X)$ die Menge der $k-$elementigen Teilmengen der Menge X sei, mit $k \in \mathbb{N}_0$. Folgere eine Identität für die Binomialkoeffizienten.

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 25.11.2013, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.**

(i) (Satz (5.22)3)) Zeige, dass für alle $a, b, n \in \mathbb{N}$ gilt $(a \cdot b)^n = (a^n) \cdot (b^n)$.

(ii) (Satz (5.22)4)) Zeige, dass für alle $a, m, n \in \mathbb{N}$ gilt $(a^m)^n = a^{(m \cdot n)}$.

(iii) Zeige, dass für alle $a, b, n \in \mathbb{N}$ gilt: $a < b \Rightarrow a^n < b^n$.

(iv) Für welche $a, m, n \in \mathbb{N}$ gilt $(m < n \Rightarrow a^m < a^n)$?

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Sein $n, m \in \mathbb{N}$ und $f \in \underline{n}^m$.

(i) Angenommen, f ist injektiv. Bestimme die Anzahl der Linksinversen von f.

(ii) Angenommen, f ist surjektiv. Bestimme die Anzahl der Rechtsinversen von f.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$, und seien M und N disjunkte endliche Mengen, wobei $|M| = m$ und $|N| = n$. Konstruiere eine Bijektion

$$\alpha : \biguplus_{\ell=0}^{k} (\mathrm{Pot}_\ell(M) \times \mathrm{Pot}_{k-\ell}(N)) \to Pot_k(M \uplus N),$$

wobei $\mathrm{Pot}_\ell(X)$ die Menge der $\ell-$elementigen Teilmengen der Menge X sei, mit $\ell \in \mathbb{N}_0$. Folgere die Formel

$$\sum_{\ell=0}^{k} \binom{m}{\ell} \binom{n}{k-\ell} = \binom{m+n}{k}.$$

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir eine Bijektion $\pi \in S_n$ (eine Permutation) *fixpunktfrei*, falls für alle $k \in \underline{n}$ gilt $\pi(k) \neq k$. Schreibe p_n für die Proportion aller fixpunktfreien Permutationen in S_n, d.h

$$p_n := \frac{|\{\pi \in S_n \mid \forall k \in \underline{k} \text{ gilt } \pi(k) \neq k\}|}{|S_n|}.$$

(i) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

HINWEIS: Finde eine Rekursion der p_n und beweise dann mit Induktion die Behauptung.

(ii) Zeige, dass der Grenzwert der Proportionen gleich e^{-1} ist, d.h.

$$\lim_{n \to \infty} p_n = e^{-1}.$$

HINWEIS: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

für $x \in \mathbb{R}$ ist.