# Übungsblatt 7

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

## Präsenzaufgabe

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $a \in K^*$. Zeige, dass die Abbildungen

$$t_a : K \to K,\ b \mapsto b + a$$

$$\lambda_a : K \to K,\ b \mapsto a \cdot b$$

Bijektionen sind.

## Tutoriumsaufgaben

**Aufgabe 2.** Definiere die Begriffe Ring- und Körperhomomorphismus und Ring- und Körperisomorphismus. Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppen- bzw. Ring- bzw. Körperhomomorphismen?

(i) $t_a$ und $\lambda_a$ aus Aufgabe 1.

(ii) $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes) \to (\mathbb{R}, +, \cdot),\ f \mapsto f(0)$

(iii) $(\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\mathbb{R}_{>0}, \cdot),\ a \mapsto |a|$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, +, \cdot),\ a \mapsto |a|$ .

(iv) $\mathrm{sign} : (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (\{\pm 1\}, \cdot),\ a \mapsto \frac{a}{|a|}$.

**Aufgabe 3.** Sei $\mathbb{C}$ wie in (8.2) definiert. Zeige, dass $\mathbb{C}$ ein Körper ist.

**Aufgabe 4.** Es sei $z := \frac{5+i}{3-2i} \in \mathbb{C}$. Berechne Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z$ und $z^{-1}$.

## Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 9.12.2013, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

**Aufgabe 5** (4 Punkte)**.** Definiere

$$\mathbb{Q}(\sqrt{5}) := \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Dann ist $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$. Zeige:

(i) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ist Teilkörper von $\mathbb{R}$.

(ii) $\sigma : \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{5}),\ a + b\sqrt{5} \mapsto a - b\sqrt{5}$ ist ein Körperisomorphismus.

(iii) $\mathbb{Q}$ ist der Fixkörper von $\sigma$, d.h. $\mathbb{Q} = \mathrm{Fix}(\sigma) := \{a + b\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{5}) \mid \sigma(a + b\sqrt{5}) = a + b\sqrt{5}\}$.

**Aufgabe 6** (4 Punkte)**.** Sei die Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$ wie in der Vorlesung definiert, d.h. $a < b \Leftrightarrow b - a \in P$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Definiere die Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$ über $a \leq b$ genau dann, wenn $a < b$ oder $a = b$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Zeige:

(i) $\leq$ ist partielle und totale Ordnung

(ii) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $a < c$ und $c < b$.

(iii) Jede nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat eine größte untere Schranke (ein Infimum).

**Aufgabe 7** (4 Punkte)**.**

(i) Seien $(G, \cdot)$ und $(H, \cdot)$ Gruppen und $\phi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $\varphi(1_G) = 1_H$ und $\varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt.

(ii) Für welche $s, t \in \mathbb{R}$ ist $\alpha_{s,t} : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +),\ x \mapsto sx + t$ ein Gruppenhomomorphismus?

**Aufgabe 8** (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Betrachte die symmetrische Gruppe $S_3$ auf drei Punkten.

(i) Bestimme alle Untergruppen von $S_3$.

(ii) Sei $N := \{\pi \in S_3 \mid \pi^3 = id\}$ und bezeichne mit $S_3/N$ die Menge aller (Links-)Nebenklassen nach $N$. Zeige, dass $S_3/N$ via

$$S_3/N \times S_3/N \to S_3/N,\ (g_1N, g_2N) \mapsto g_1g_2N$$

zu einer Gruppe wird.

(iii) Was passiert, wenn man $N := \{id, \{(1,2), (2,1), (3,3)\}\}$ betrachtet?