Übungsblatt 8

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es sei $z := \frac{3+2i}{5-i}$. Berechne Realteil, Imaginärteil und Betrag von z und z^{-1}.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. (i) Zeichne die Elemente $i, 2i, 1+i, 1-i, i(1+i), (1-i)(1+i) \in \mathbb{C}$ in die Gaußsche Zahlenebene und berechne jeweils die Polardarstellung.

(ii) Zeichne alle Lösungen $z \in \mathbb{C}$ der Gleichnungen $z^3 = 1$ und $z^3 = 2$ in die Gaußsche Zahlenebene und berechne jeweils die Polardarstellung.

Aufgabe 3. Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ mit Polardarstellungen $z_j = r_i(\cos t_j + i \sin t_j)$ mit $r_j \in \mathbb{R}$ und $t_j \in [0, 2\pi)$ für $j = 1, 2$. Berechne die Polardarstellung von $z_1 \cdot z_2$.

Aufgabe 4. (i) Zeige, dass eine lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eindeutig durch die Bilder von $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bestimmt ist.

(ii) Zeige, es gibt eine Bijektion zwischen der Menge $M(\mathbb{R}^2)$ der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

(iii) Zeige, dass eine lineare Abbildung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ genau dann orthogonal ist, wenn $|\alpha(1, 0)| = |\alpha(0, 1)| = 1$ und $\Phi(\alpha(1, 0), \alpha(0, 1)) = 0$.

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 16.12.2013, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Zeige, die Abbildungen

Re:$(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +),\ z \mapsto \frac{z+\overline{z}}{2}$ und

Im:$(\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{R}, +),\ z \mapsto \frac{z-\overline{z}}{2i}$ und

sind Gruppenhomomorphismen und für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z = Re(z) + Im(z)i$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Die Elemente $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$ werden $n-$*te Einheitswurzeln* genannt. Sei z eine solche $n-$te Einheitswurzel. Zeige:

(i) $z \in S^1$.

(ii) $\bar{z} = z^{-1}$.

(iii) Die Menge der $n-$ten Einheitswurzeln zusammen mit der komplexen Multiplikation bilden eine Untergruppe von S^1.

(iv) Stelle alle $n-$ten Einheitswurzeln in Polarkoordinaten dar. (Es darf benutzt werden, dass es höchstens n Elemente $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$ gibt.)

(v) Skizziere die $5-$ten Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Sei $M(\mathbb{R}^n)$ die Menge der linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$. Definiere die Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \oplus: \quad & M(\mathbb{R}^n) \times M(\mathbb{R}^n) \to M(\mathbb{R}^n),\ (\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \oplus \beta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ a \mapsto \alpha(a) + \beta(a)) \text{ und} \\ \circ: \quad & M(\mathbb{R}^n) \times M(\mathbb{R}^n) \to M(\mathbb{R}^n),\ (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta. \end{aligned}$$

Zeige:

(i) $M(\mathbb{R}^n)$ bildet mit der werteweisen Addition $\oplus$ und der Komposition als Multiplikation $\circ$ einen Ring.

(ii) Die Teilmenge $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ der bijektiven linearen Abbildungen bildet mit $\circ$ eine Gruppe.

(iii) Die Menge $O(\mathbb{R}^n)$ der orthogonalen linearen Abbildungen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe, 4 Bonuspunkte)**.** Wir definieren die *Hamilton-Quaternionen* als $\mathbb{H} := (\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ mit komponentenweisen Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ definiert über

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) :=$$

$$(a_1b_1-a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4, a_1b_2+a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3, a_1b_3-a_2b_4+a_3b_1+a_4b_2, a_1b_4+a_2b_3-a_3b_2+a_4b_1)$$

für $a = (a_1, a_2, a_3, a_4), b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{H}$. Dann ist $\mathbb{H}$ ein Ring mit Eins (das muss nicht gezeigt werden).

(i) Ist $\mathbb{H}$ ein kommutativer Ring?

(ii) Zeige, dass

$$\bar{\ } : \mathbb{H} \to \mathbb{H},\ a = (a_1, a_2, a_3, a_4) \mapsto \overline{a} := (a_1, -a_2, -a_3, -a_4)$$

ein Ring-Anti-Homomorphismus ist (d.h. es gilt $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ und $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$ für alle $a, b \in \mathbb{H}$ und $\overline{1} = 1$).

(iii) Zeige, dass jedes Element ungleich 0 ein multiplikativ Inverses besitzt, also zeige, dass für alle $a \in \mathbb{H}$ ein $b \in \mathbb{H}$ existiert mit $ab = ba = 1$. Ist $\mathbb{H}$ ein Körper?

(iv) Bestimme 3 unterschiedliche injektive Ringhomomorphismen $\mathbb{C} \to \mathbb{H}$.