Übungsblatt 9

Mathematische Grundlagen, Prof. Dr. Nebe, WS 2013/14

Präsenzaufgabe

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**

(i) Berechne den größten gemeinsamen Teiler von 2761 und 2651.

(ii) Berechne $[2113]_{\equiv_7} \cdot [712]_{\equiv_7}$ in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$.

Tutoriumsaufgaben

Aufgabe 2. Nach Satz (8.24) ist die Determinante auf $\mathbb{R}^2$ als die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a, b) \mapsto a_1 b_2 - a_2 b_1$ gegeben.

(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Zeige, der Flächeninhalt des Parallelogramms $P(a, b)$ ist gleich $|f(a, b)|$.

(ii) Zeige, $f(1, z) = \sin(\alpha)$ für $z \in S^1$, wobei α der orientierte Winkel zwischen $1 = (1, 0)$ und z ist. Wann ist insbesondere der orientierte Flächeninhalt positiv und wann negativ?

Aufgabe 3. Berechne den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ in $\mathbb{Z}$, sowie alle Bézout-Identitäten, wobei $(a, b) = (312, 231)$ bzw. $(a, b) = (523, 234)$.

Aufgabe 4. (i) Sei $m \in \mathbb{Z}\backslash\{\pm 1\}$. Zeige, dass ein Element $[x] \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau dann eine Einheit ist, wenn $\mathrm{ggT}(x, m) = 1$ gilt.

(ii) Bestimme alle Einheiten in $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$.

Hausaufgaben

Bitte wirf deine bearbeiteten Hausaufgaben bis Montag, 6.1.2014, 10:00 Uhr in den Zettelkasten am Lehrstuhl D für Mathematik (Sammelbau 2. Stock) ein.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Definiere wie in (8.25) die orientierte Flächenverzerung einer linearen Abbildung $\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ als

$$f_\theta = \frac{f\left(\theta((1,0)), \theta((0,1)\right)}{f((1,0)), ((0,1))},$$

wobei f die Determinante wie in Aufgabe 2 ist.

(i) Seien $\alpha, \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen. Zeige, dass $f_\alpha f_\beta = f_{\alpha\circ\beta}$ gilt.

(ii) Zeige, dass die orientierte Flächenverzerrung einer orthogonalen Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gleich ± 1 ist, und zwar 1 bei Drehungen und -1 bei Spieglungen. Insbesondere ist die orientierte Flächenverzerrung ein surjektiver Homomorphismus $O(\mathbb{R}^2) \to (\{\pm 1\}, \cdot)$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Beweise Bemerkung 9.8. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $e, f \in \mathbb{Z}^*$. Zeige:

(i) $a|b \;\Leftrightarrow ea|fb$,

(ii) $a|b \;\wedge\; b|c \;\Rightarrow\; a|c$,

(iii) $a|b \;\wedge\; b|a \;\Leftrightarrow a \in \{\epsilon b | \epsilon \in \mathbb{Z}^*\}$,

(iv) $Teiler(a) \cap Teiler(b) = \bigcap_{x,y\in\mathbb{Z}} Teiler(xa + yb)$, wobei $Teiler(n) := \{m \in \mathbb{Z} \mid m|n\}$ für $n \in \mathbb{Z}$.

(v) Der größte gemeinsamen Teiler von a und b ist bis auf Multiplikation mit Einheiten eindeutig bestimmt.

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Überprüfe, ob [2437], [2446] und [2980] in $\mathbb{Z}/9387\mathbb{Z}$ jeweils ein multiplikativ Inverses besitzen, und berechne dieses, falls es existiert.

Aufgabe 8 (Weihnachtsaufgabe, 8 Bonuspunkte)**.**

(i) Wir betrachten die Fibonacci-Folge $F := (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots)$ mit $F_0 := 0$, $F_1 := 1$ und $F_{n+1} := F_n + F_{n-1}$ für $n \geq 1$. Zeige, dass für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

   (a) $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_m F_{n+1}$.

   (b) Falls n teilt m , dann auch F_n teilt F_m.

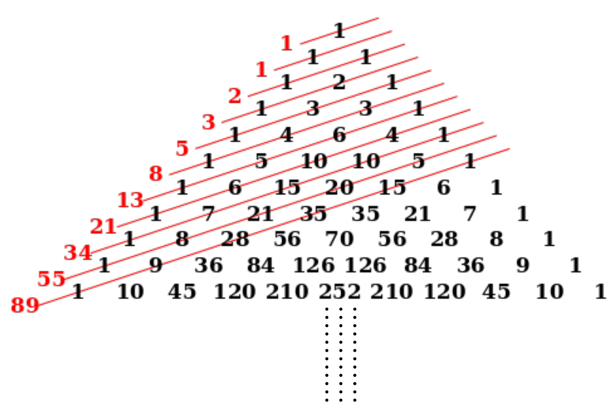
   (c) $\mathrm{ggT}(F_n, F_m) = F_{\mathrm{ggT}(n,m)}$.

   (d) Falls $n > 2$ und F_n teilt F_m, dann auch n teilt m.

   (e) 5 teilt F_n genau dann, wenn 5 teilt n.

   (f) $F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-k-1}{k}$ (siehe Bild).

(ii) Zeichne ein Bild oder schreibe ein Gedicht zur Fibonacci-Folge.



FROHE WEIHNACHTEN