§1 Rückblick Theta-Reihen

(1.1) Definition (Theta-Funktion)
Zu einem Gitter $\Gamma \in R^n$ heißt

$$\vartheta_\Gamma(\tau) := \sum_{x\in\Gamma} q^{\frac{1}{2}x\cdot x}, \qquad q := e^{2\pi i\tau},\ \tau \in \mathbb{H}$$

Theta Funktion des Gitters. $\diamond$

(1.2) Definition (Poisson Summenformel)
Sei $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ volles Gitter und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion mit den Eigenschaften:

$(V1)$ $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx < \infty$
$(V2)$ Die Reihe $\sum_{x\in\Gamma} |f(x+u)|$ konvergiert kompakt gleichmäßig in $u \in \mathbb{R}^n$
$(V3)$ Die Reihe $\sum_{y\in\Gamma^*} \hat{f}(y)$ ist absolut konvergent.

Wobei $\hat{f}$ die Fourier Transformation von f bezeichnet.

Dann gilt:

$$\sum_{x\in\Gamma} f(x) = \frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y\in\Gamma^*} \hat{f}(y)$$

$\diamond$

§2 sphärische Polynome

(2.1) Definition (sphärisches Polynom)
Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ heißt *sphärisch* genau dann,
wenn $\Delta P = 0$, wobei

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i^2}$$

den Laplace Operator bezeichnet.
Ein Polynom heißt *sphärisch vom Grad r*, wenn das Polynom sphärisch ist und homogen vom Grad r $\diamond$

(2.2) Korollar
Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$ ist genau dann sphärisch vom Grad r, wenn P eine Linearkombination von Funktionen der Form $(\xi \cdot x)^r$ ist, wobei $\xi \in \mathbb{C}^n$ mit $\xi^2 = 0$ falls $r \geq 2$ $\diamond$

§3 Theta-Reihen mit sphärischen Koeffizienten

$f(x) = e^{\pi i \left(\frac{-1}{\tau}\right) x^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^n e^{\pi i \tau y^2}$	$(\tau \in \mathbb{H})$
$f(x) = e^{\pi i \left(\frac{-1}{\tau}\right)(x+z)^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^n e^{2\pi i y\cdot z} e^{\pi i \tau y^2}$	$(\tau \in \mathbb{H}, z \in \mathbb{R}^n)$
$f(x) = P(x) e^{-\pi x^2}$ $\hat{f}(y) = P\left(\frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y1}, ..., \frac{-1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial yn}\right) e^{-\pi y^2}$	$(P \in \mathbb{C}[x_1, ..., x_n]$
$f(x) = (\xi \cdot x)^r e^{-\pi x^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\frac{\xi \cdot x}{i}\right)^r e^{-\pi y^2}$	$(\xi \in \mathbb{C}^n, \xi^2 = 0 \text{für } r \geq 2)$
$f(x) = (\xi \cdot (x+z))^r e^{\pi i \left(\frac{-1}{\tau}\right)(x+z)^2}$ $\hat{f}(y) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} \left(\frac{\xi \cdot x}{i}\right)^r e^{2\pi i y\cdot z} e^{\pi i \tau y^2}$	τ, ξ, z wie oben

(3.1) Definition (Theta-Reihe mit sphärischen Koeffizienten)
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter, $z \in \mathbb{R}^n$, P ein sphärisches Polynom vom Grad r und $\tau \in \mathbb{H}$. Dann definieren wir:

$$\vartheta_{z+\Gamma,P}(\tau) := \sum_{x \in z+\Gamma} P(x) q^{\frac{1}{2}x^2} = \sum_{x \in \Gamma} P(x+z) q^{\frac{1}{2}(x+z)^2} \qquad q := e^{2\pi i \tau}$$

◇

(3.2) Korollar
Es gilt die Identität:

$$\vartheta_{z+\Gamma,P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \left(\sqrt{\frac{\tau}{i}}\right)^{n+2r} i^{-r} \frac{1}{vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)} \sum_{y \in \Gamma^*} P(y) e^{2\pi i y\cdot z} q^{\frac{1}{2}y^2}$$

◇

Nun machen wir einige Annahmen die bis zum Ende des Seminarthemas gelten werden:
$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ein gerades, ganzes Gitter, n ist gerade. P ist ein sphärisches Polynom vom Grad r, $k := \frac{n}{2} + r$ und $v(\Gamma) := vol(\mathbb{R}^n/\Gamma)$.
Beachte: $\Gamma \subset \Gamma^*$ und aus $y_1, y_2 \in \Gamma^*$ mit $y_1 \equiv y_2 (\text{mod } \Gamma)$ folgt $y_1 \cdot x \equiv y_2 \cdot x (\text{mod } \mathbb{Z})$ für alle $x \in \Gamma$ und $y_1^2 \equiv y_2^2 (\text{mod } 2\mathbb{Z})$.
Nun haben wir folgende Formeln für $p \in \Gamma^*$:

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}(\tau+1) = e^{\pi i p^2} \vartheta_{p+\Gamma,P}(\tau) \qquad (T1)$$

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}\left(\frac{-1}{\tau}\right) = \frac{1}{v(\Gamma)}\left(\frac{\tau}{i}\right)^k i^{-r} \sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma} e^{2\pi i\sigma p}\vartheta_{p+\Gamma,P}(\tau) \qquad (T2)$$

Die Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$ operiert auf $\mathbb{H}$ und den Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ durch die Funktion $f|_k A$ definiert als:

$$(f|_k A)(\tau) := f(A\tau)(c\tau + d)^{-k}$$

mit $\tau \in \mathbb{H}$ und $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$.

(3.3) Lemma
Sei $p \in \Gamma^*$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, dann gilt:

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A = \frac{1}{v(\Gamma)c^{n/2}i^{k+r}} \sum_{\sigma\in\Gamma^*/\Gamma} \left(e^{-\pi i b(d\sigma^2+2\sigma p)} \sum_{\substack{\lambda\in\Gamma^*/c\Gamma \\ \lambda\equiv p+d\sigma(\Gamma)}} e^{\pi i \frac{a}{c}\lambda^2} \right) \vartheta_{\sigma+\Gamma,P}$$

für $c \neq 0$ und

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A = \frac{1}{d^{n/2}} e^{\pi i a b p^2} \vartheta_{ap+\Gamma,P}$$

für $c = 0$. ◇

— Das Level eines Gitters —

(3.4) Definition
Das Minimum aller $N \in \mathbb{N}$ mit $N\mu^2 \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\mu \in \Gamma^*$ heißt das *Level von* Γ ◇

(3.5) Lemma
Sei N das Level von Γ, dann gilt $N\Gamma^* \subset \Gamma$. ◇

(3.6) Korollar
Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ (n gerade) ein gerades, ganzes Gitter mit Level N, $p \in \Gamma^*$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$ und $N|c$.
Dann gilt:

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A = \epsilon(A) e^{\pi i a b p^2} \vartheta_{ap+\Gamma,P}$$

mit:

$$\epsilon(A) = \frac{1}{v(\Gamma)(ic)^{n/2}} \sum_{\lambda\in\Gamma/c\Gamma} e^{\pi i \frac{a}{c}\lambda^2} \qquad \text{für } c \neq 0$$

$$\epsilon(A) = d^{-n/2} \qquad \text{für } c = 0$$

◇

Betrachten wir nun folgende Untergruppen der $SL_2(\mathbb{Z})$:

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid N|c \right\}$$
$$\Gamma_1(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1(N), c \equiv 0(N) \right\}$$
$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (N) \right\}$$

(3.7) Korollar
Sei $A \in \Gamma_0(N)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $d, c \neq 0$.
Dann gilt:

$$\epsilon(A) = d^{-n/2} \sum_{\lambda \in \Gamma / d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d} \lambda^2}.$$

◇

(3.8) Lemma
Sei $A \in \Gamma_0(N)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$\epsilon \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} a & b + la \\ c & d + lc \end{pmatrix}$$

für alle $l \in \mathbb{Z}$ ◇

(3.9) Lemma
Sei $A \in \Gamma_0(N)$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $d, c \neq 0$. Dann gilt:

$$G(b,d) := \sum_{\lambda \in \Gamma / d\Gamma} e^{\pi i \frac{b}{d} \lambda^2} \qquad \text{für } d \neq 0$$

ist eine rationale Zahl.
Insbesondere ist $G(b,d) = G(1,d)$ und somit nur abhängig von d. ◇

(3.10) Satz

$$\vartheta_{p+\Gamma,P}|_k A = \vartheta_{p+\Gamma,P} \qquad \text{für } A \in \Gamma(N)$$
$$\vartheta_{\Gamma,P}|_k A = \left(\frac{\Delta}{d}\right) \vartheta_{\Gamma,P} \qquad \text{für } A \in \Gamma_0(N)$$

◇