Prof. Dr. G. Nebe

Blatt 1

Aufgabe 1*
Sei $d \in \mathbb{Z} - \{0, 1\}$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(a) Bestimmen Sie eine Ganzheitsbasis von K.

(b) Bestimmen Sie die Einheitengruppe $\mathbb{Z}_K^*$ im Fall $d < 0$.

Aufgabe 2*
Sei $p > 2$ eine Primzahl. Weiter sei $d \in \mathbb{F}_p[X]$ quadratfrei mit $\deg d > 0$. Bestimmen Sie den ganzen Abschluß von $\mathbb{F}_p[X]$ in $\mathbb{F}_p(X, \sqrt{d}) = \mathbb{F}_p(X)[T]/(T^2 - d)$.

Aufgabe 3*

(a) Zeigen Sie, daß jeder (kommutative) faktorielle Ring ganzabgeschlossen ist.

(b) Begründen Sie warum $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ kein Hauptidealbereich ist.

Aufgabe 4
Sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeigen Sie:

(a) Jedes $\alpha \in L$ induziert einen Endomorphismus $\mathrm{mult}_\alpha \colon L \to L,\ x \mapsto \alpha x$ des K-Vektorraums L.

(b) Die Abbildung $\mathrm{mult} \colon L \to \mathrm{End}_K(L), \alpha \mapsto \mathrm{mult}_\alpha$ ist ein injektiver K-Algebrenmorphismus.

(c) Die Abbildung $S_{L/K} \colon L \to K,\ \alpha \mapsto \mathrm{Spur}(\mathrm{mult}_\alpha)$ ist K-linear.

(d) Die Abbildung $N_{L/K} \colon L \to K,\ \alpha \mapsto \det(\mathrm{mult}_\alpha)$ ist multiplikativ.

(e) Für jedes $\alpha \in L$ ist $\mu_{\alpha,K}(X) \in K[X]$ irreduzibel von Grad $d := [K(\alpha) : K]$. Ferner ist d ein Teiler von $n := [L : K]$ und erfüllt $\mu_{\alpha,K}^{n/d} = \chi_{\alpha,K} = \chi_{\mathrm{mult}_\alpha}$.

Die mit * versehenen Aufgaben können am 13.4.2011 in den Übungen abgegeben werden. Die Aufgaben ohne * werden bei Bedarf in den Übungen besprochen aber nicht abgegeben. Es darf zu zweit abgegeben werden.