

## Blatt 3

### Aufgabe 1\*

Bestimmen Sie die Einheitengruppen  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}^*$  für  $d = 2, 3, 5$ .

### Aufgabe 2

Sei  $K = \mathbb{Q}(\zeta_5)$  und  $\bar{\phantom{x}}$  bezeichne den Automorphismus auf  $K$  welcher durch  $\zeta_5 \mapsto \zeta_5^{-1}$  definiert wird. Zeigen Sie:

- (a)  $\varphi: \mathbb{Z}_K^* \rightarrow \mu(\mathbb{Z}_K^*)$ ,  $u \mapsto u/\bar{u}$  ist ein wohldefinierter Gruppenmorphismus.
- (b)  $-1$  liegt nicht im Bild von  $\varphi$ . Insbesondere existiert zu jedem  $u \in \mathbb{Z}_K^*$  ein  $k \in \mathbb{Z}$  so, daß  $\zeta_5^k u \in \text{Fix}_K(\langle \bar{\phantom{x}} \rangle)$ .
- (c) Es ist  $\mathbb{Z}_K^* = \left\langle -\zeta_5, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\rangle$ .

Hinweis: In der Vorlesung Algebra wurde  $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\zeta_5]$  gezeigt.

Ad (b): Ist  $u \in \mathbb{Z}_K^*$  mit  $u = -\bar{u}$  so liegt  $u$  im  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $\langle \zeta_5 - \zeta_5^{-1}, \zeta_5^2 - \zeta_5^{-2} \rangle_{\mathbb{Z}}$  und wird daher von  $\zeta_5 - \zeta_5^{-1}$  in  $\mathbb{Z}_K$  geteilt.

Ad (c): Es ist  $\text{Fix}_K(\langle \bar{\phantom{x}} \rangle) = \mathbb{Q}(\zeta_5 + \zeta_5^{-1}) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ .

### Aufgabe 3\*

Es sei  $K$  ein Zahlkörper mit genau  $r$  reellen und  $2s$  echt komplexen Einbettungen. Die Menge der Einbettungen heiße  $G$ . Zeigen Sie:

- (a) Für  $t \in \mathbb{R}_{>0}$  ist  $X_t := \{(z_\tau)_{\tau \in G} \in K_{\mathbb{R}} : \sum_{\tau \in G} |z_\tau| < t\} \subset K_{\mathbb{R}}$  eine zentralsymmetrische konvexe Menge mit Volumen  $2^r \pi^s t^n / n!$ .
- (b) In jeder Idealklasse von  $K$  gibt es ein ganzes Ideal  $\mathfrak{a}$  mit  $N_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{a}) \leq \frac{n!}{n^n} \left(\frac{4}{\pi}\right)^s \sqrt{|d_K|}$ .
- (c) Ist  $K \neq \mathbb{Q}$  so ist  $|d_K| > 1$ .

### Aufgabe 4\*

Bestimmen Sie den Isomorphietyp von  $\text{Cl}(\mathbb{Q}(\sqrt{-17}))$  sowie Vertreter aller Idealklassen.

Die mit \* versehenen Aufgaben können am 11.5.2011 in den Übungen abgegeben werden. Die Aufgaben ohne \* werden bei Bedarf in den Übungen besprochen aber nicht abgegeben. Es darf zu zweit abgegeben werden.