

## Blatt 5

### Aufgabe 1\*

Sei  $n \in \mathbb{Z}_{>1}$  und  $\zeta_n$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

(a) Sei  $n = p^r$  für eine Primzahl  $p$ . Für je zwei zu  $p$  teilerfremde Zahlen  $i, j \in \mathbb{Z}$  ist dann  $(1 - \zeta_n^i)/(1 - \zeta_n^j) \in \mathbb{Z}[\zeta_n]^*$ .

(b) Sei  $n$  keine Primzahlpotenz. Dann ist  $(1 - \zeta_n) \in \mathbb{Z}[\zeta_n]^*$ . Genauer gilt  $\prod_{i \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} (1 - \zeta_n^i) = 1$ .

Hinweis zu (b). Seien  $T = \{d \in \mathbb{Z}_{>1} : d \mid n\}$  und  $P = \{t \in T \mid t \text{ ist Primzahlpotenz}\}$ . Dann ist  $n = \sum_{i=0}^{n-1} 1^i = \prod_{i \in P} \Phi_i(1) \cdot \prod_{i \in T-P} \Phi_i(1)$ . Folgere  $\Phi_i(1) \in \mathbb{Z}^*$  für alle  $i \in T - P$ .

### Aufgabe 2\*

Es seien  $K \subseteq L \subseteq M$  algebraische Zahlkörper und  $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathbb{Z}_M$  ein Primideal. Weiter sei  $\mathfrak{P} = \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z}_L$ . Zeigen Sie:

(a)  $e_{M/K}(\mathfrak{p}) = e_{M/L}(\mathfrak{p}) \cdot e_{L/K}(\mathfrak{P})$

(b)  $f_{M/K}(\mathfrak{p}) = f_{M/L}(\mathfrak{p}) \cdot f_{L/K}(\mathfrak{P})$

### Aufgabe 3\*

Sei  $K = \mathbb{Q}(\zeta_5, \sqrt{2})$ . Weiter sei  $p \in \{2, 3, 5, 11\}$  und  $\mathfrak{p} \trianglelefteq \mathbb{Z}_K$  ein Primideal das  $p$  enthält. Bestimmen Sie die Zerlegungs- und Trägheitsgrade sowie die Zerlegungs- und Trägheitsgruppen von  $\mathfrak{p}$ .

### Aufgabe 4

Es seien  $\mathfrak{a}$  und  $\mathfrak{b}$  gebrochene Ideale in einem algebraischen Zahlkörper  $K$ . Zeigen Sie:

(a) Es existieren  $x, y \in K^*$  so, daß  $x\mathfrak{a}$  und  $y\mathfrak{b}$  ganze teilerfremde Ideale von  $\mathbb{Z}_K$  sind.

(b) Es ist  $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \cong \mathfrak{a}\mathfrak{b} \oplus \mathbb{Z}_K$  als  $\mathbb{Z}_K$ -Moduln.

(c)  $\mathfrak{a}$  ist ein projektiver  $\mathbb{Z}_K$ -Modul.

Hinweis: Aufgabe 2 von Blatt 4 sowie Übungen zur Algebra WS10/11, Aufgabe 1 auf Blatt 11.

Die mit \* versehenen Aufgaben können am 1.6.2011 in den Übungen abgegeben werden. Die Aufgaben ohne \* werden bei Bedarf in den Übungen besprochen aber nicht abgegeben. Es darf zu zweit abgegeben werden.