

Blatt 6

Für einen kommutativen Ring R bezeichne $\text{Spec}(R)$ die Menge der von (0) verschiedenen Primideale von R . Ist \mathfrak{p} ein Primideal in einem Dedekindring R und M ein R -Modul so sei $M_{\mathfrak{p}} := M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}$ die Kompletzierung von M an \mathfrak{p} .

Aufgabe 1*

Es sei R ein Dedekindring. Weiter seien V ein endlich dimensionaler $\text{Quot}(R)$ -Vektorraum und L, L' zwei volle R -Gitter in V . Zeigen Sie:

- (a) Ist M ein endlich erzeugter R -Modul mit $M_{\mathfrak{p}} = 0$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$, so ist $M = 0$.
- (b) $\{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R) \mid L_{\mathfrak{p}} \neq L'_{\mathfrak{p}}\}$ ist endlich.
- (c) Es ist $L = L'$ genau dann wenn $L_{\mathfrak{p}} = L'_{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ gilt.

Aufgabe 2

Sei R ein Noetherscher ganzabgeschlossener Integritätsbereich. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (a) Jedes von (0) verschiedene Primideal von R ist maximal, d.h. R ist ein Dedekindring.
- (b) Für alle $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(R)$ ist $R_{(\mathfrak{p})}$ ein diskreter Bewertungsring.

Aufgabe 3*

Sei p eine Primzahl. Bestimmen Sie die Menge der Quadrate in \mathbb{Z}_p^* , \mathbb{Z}_p sowie \mathbb{Q}_p^* . Bestimmen Sie ferner Erzeuger sowie den Isomorphietyp von $\mathbb{Z}_p^*/(\mathbb{Z}_p^*)^2$ bzw. $\mathbb{Q}_p^*/(\mathbb{Q}_p^*)^2$.

Hinweis: Im Fall $p > 2$ fixiere man ein Nichtquadrat $\varepsilon \in \mathbb{F}_p^*$. Der Fall $p = 2$ ist gesondert zu betrachten.

Aufgabe 4*

Faktorisieren Sie $X^{15} - 1 \in \mathbb{Z}_p[X]$ für $p \in P := \{2, 3, 11\}$. Die auftretenden p -adischen Zahlen sind modulo p^4 zu approximieren. Bestimmen Sie ferner die Primidealzerlegung sowie die Trägheits- und Zerlegungsgrade von $p\mathbb{Z}[\zeta_{15}]$ in $\mathbb{Z}[\zeta_{15}]$ für alle $p \in P$.

Die mit * versehenen Aufgaben können am 20.6.2011 in den Übungen abgegeben werden. Die Aufgaben ohne * werden bei Bedarf in den Übungen besprochen aber nicht abgegeben. Es darf zu zweit abgegeben werden.