Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 1

Aufgabe 1.

Sei (E, b) ein freier bilinearer A-Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$ und $G_E \in A^{n \times n}$ eine Gram-Matrix von (E, b). Dann gilt:

(1) $\det(G_E)$ ist kein Nullteiler $\Leftrightarrow$ die Abbildung $b_E : E \to E^*, x \mapsto (y \mapsto b_E(x, y))$ ist injektiv.

(2) $\det(G_E) \in A^* \Leftrightarrow$ die Abbildung b_E ist bijektiv.

(3) Sei A ein Körper und (E, b) nicht ausgeartet. Dann ist (E, b) regulär.

Aufgabe 2.

Sei A ein Noetherscher Integritätsbereich, $K = \mathrm{Quot}(A)$ und (V, b) ein regulärer bilinearer K-Vektorraum der Dimension n. Ein (volles) A-*Gitter* in V ist ein A-Teilmodul $L \leq V$ für den es zwei K-Basen $(e_1, \dots, e_n)$ und $(f_1, \dots, f_n)$ gibt, so dass

$$Ae_1 \oplus \dots \oplus Ae_n \subseteq L \subseteq Af_1 \oplus \dots \oplus Af_n.$$

Sei L ein volles A-Gitter in V.

(1) L ist endlich erzeugt.

(2) $L^{\#} := \{x \in V \mid b(x, L) \subseteq A\}$ ist ein (volles) Gitter (das sogenannte *duale Gitter* zu L).

(3) Gib einen Isomorphismus $\varphi : L^{\#} \to L^* = \mathrm{Hom}_A(L, A)$ an.

(4) $(L, b_{L \times L})$ ist regulärer bilinearer Modul $\Leftrightarrow L = L^{\#}$.

Ab jetzt sei $A = \mathbb{Z}$ und $b(L, L) \subseteq \mathbb{Z}$. L heißt dann ein *ganzes* $\mathbb{Z}$-Gitter und es ist $L \subseteq L^{\#}$.

(5) $L^{\#}/L \cong \mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/d_n\mathbb{Z}$, wo $d_1, \dots, d_n$ die Invariantenteiler einer Gram-Matrix von L sind.

(6) Bestimme zunächst den Isomorphietyp von $L^{\#}/L$, und dann Erzeuger von $L^{\#}$ für folgende $\mathbb{Z}$-Gitter:

  (a) $L = \mathbb{I}_n := \mathbb{Z}^n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$

  (b) $L = \mathbb{A}_{n-1} := \langle e_1 - e_2, e_2 - e_3, \dots, e_{n-1} - e_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^n$ für $2 \leq n \in \mathbb{N}$

  (c) $L = \mathbb{D}_n := \langle \mathbb{A}_{n-1}, e_{n-1} + e_n \rangle \subseteq \mathbb{Z}^n$

(7) Für welche $n \in \mathbb{N}$ sind $\mathbb{I}_n$, $\mathbb{A}_{n-1}$ bzw. $\mathbb{D}_n$ nicht ausgeartet, für welche $n \in \mathbb{N}$ sind sie regulär?

Aufgabe 3. Sei $E := \mathbb{Q}e_1 \oplus \mathbb{Q}e_2$. Entscheide, ob die symmetrischen bilinearen Moduln (E, b) und (E, b'), definiert durch ihre Gram-Matrizen isometrisch sind:

(a) ${}_e b_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und ${}_e b'_e = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) ${}_e b_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und ${}_e b'_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4.

Beweise die folgende Formulierung von Satz 1.15 für lokale Ringe:

Sei A ein lokaler Ring, I sein maximales Ideal und (E, b) ein endlich erzeugter freier bilinearer A-Modul. Dann ist $E = E_1 \perp E_2 \perp \dots \perp E_r \perp F$ mit E_i regulär und $\dim(E_i) \in \{1, 2\}$ für alle $1 \leq i \leq r$, und $b(F, F) \subseteq I$.

Zerlege dann das Gitter $\mathbb{Z}_{(2)}\mathbb{A}_3$ in eine solche orthogonale Summe. (Erinnerung: $\mathbb{Z}_{(2)} = \{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid 2 \nmid b\}$, die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ am Primideal $2\mathbb{Z}$.)