G. Nebe Besprechung am 16.11.2016

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei (V, q) ein quadratischer, regulärer $\mathbb{Q}$-Vektorraum und L, M seien zwei volle, ganze $\mathbb{Z}$-Gitter in V und $L_p := L \otimes \mathbb{Z}_p$ die Kompletierung von L an p.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{p \in \mathbb{P} \mid L_p \neq M_p\}$ endlich ist.

b) Folgern Sie, dass (L_p, q_p) für fast alle $p \in \mathbb{P}$ regulär ist.

c) Bestimmen Sie Vertreter der Quadratklassen in $U(\mathbb{Z}_2)$ und $U(\mathbb{Q}_2)$.

Aufgabe 2. Nach Satz 1.15 wissen wir, dass quadratische Räume über $\mathbb{Q}_p$ immer eine Orthogonalbasis besitzen. Dies wollen wir nun ausnutzen, um quadratische Räume kleiner Dimension zu klassifizieren.

a) Bestimmen Sie alle eindimensionalen quadratischen Räume über $\mathbb{Q}_p$.

b) Bestimmen Sie für $p \neq 2$ alle zweidimensionalen Räume, indem Sie untersuchen, welche Paare von Räumen aus a) isometrische Ergebnisse liefern. Es kann helfen erst folgende Hilfsaussagen für einen regulären, zweidimensionalen Raum (V, q) zu zeigen:

   1. Es existiert genau dann ein $x \in V$ mit $q(x) = \det(V)$, wenn $(V, q) \cong [\det(V), 1]$ gilt.
   2. Ist $x \in V$ mit $q(x) = \alpha \neq 0$, so gilt $(V, q) \cong [\det(V)\alpha^{-1}, \alpha]$.
   3. Gilt $p \equiv 1 \mod 4$, so existieren $a, b \in \mathbb{Q}_p$ (sogar $a, b \in \mathbb{Z}$) mit $a^2 + b^2 = p$. (Diese Aussage kann wahlweise auch als bekannt vorausgesetzt werden.)

Aufgabe 3. Nun wiederholen wir Aufgabe 2 nochmal für $\mathbb{Z}_p$.

1. Bestimmen Sie bis auf Isometrie alle eindimensionalen quadratischen $\mathbb{Z}_p$ Gitter. Hinweis: Das werden sehr viele.

2. Bestimmen Sie bis auf auf Isometrie alle regulären quadratischen $\mathbb{Z}_p$ Gitter der Dimension 2.