G. Nebe Besprechung am 30.11.2016

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 5

Aufgabe 1.

Sei (V, q) ein regulärer oder halbregulärer quadratischer Vektorraum über einem Körper K.

a) Bestimmen Sie die Bahnen von $O(V)$ auf den Mengen $M_1 = \{U \leq V \mid q(U) = \{0\}\}$ und $M_2 = \{x \in V \mid q(x) = 0\}$.

b) Sei weiterhin $U \leq V$ singulär mit $\dim(U) = m$. Zeigen Sie, dass ein Teilraum $U' \leq V$ der Dimension m existiert mit $U \cap U' = \{0\}$, sodass die Gram-Matrix von q eingeschränkt auf $U \oplus U'$ die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ & 0 \end{pmatrix}$$

hat, also einem hyperbolischen Modul entspricht. Folgern Sie, dass V mindestens m hyperbolische Ebenen abspaltet (vergleiche 4.13).
Folgern Sie weiterhin, dass jeder singuläre Teilraum eines regulären Vektorraums scharf primitiv ist (vergleiche 4.11).

c) Zeigen Sie, dass $\overline{q} : U^{\perp}/U \to K, x + U \mapsto q(x)$ eine wohldefinierte quadratische Form auf $U^{\perp}/U$ ist und dass dieser Raum regulär/halbregulär ist. Bestimmen Sie weiterhin den anisotropen Kern von $U^{\perp}/U$ in Abhängigkeit des anisotropen Kerns von V.

d) Sei nun $V \cong \mathbb{H}^n$ für ein n und K endlich mit $|K| = \ell$. Zeigen Sie, dass V genau

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_\ell \prod_{i=0}^{m-1} (\ell^{n-1-i} + 1)$$

singuläre Teilräume der Dimension m enthält.
Hinweis: Verwenden Sie Lemma 4.14 und Teil c) für eine Induktion.

Aufgabe 2.
Sei K ein Körper.

a) Bestimmen Sie explizit $O(\mathbb{H})$, $O(N)$ und $O([1])$.
Hinweis: Betrachten Sie bei $O(N)$ analog zu den singulären Vektoren aus Beweis (4.15) die Elemente mit Norm 1.

b) Folgern Sie Satz 4.15(b) und (c).

c) Sei nun $V = \mathbb{H} \perp \mathbb{H}$ und $M = \{0 \neq x \in V \mid q(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $O(V)$ primitiv auf M operiert.

Aufgabe 3.
Sei (E, q) ein freier, endlich dimensionaler quadratischer $\mathbb{Z}_p$-Modul für ein $p \in \mathbb{P}$. Wir sagen, dass q ein $x \in \mathbb{Z}_p$ darstellt, wenn ein $e \in E$ existiert mit $q(e) = x$. Weiterhin nennen wir so eine Darstellung **primitiv**, wenn e ein primitiver Vektor ist (also zu einer Basis von E ergänzbar).

1. Sei $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ eine Basis von E und $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n \in E$ mit $x_i \in \mathbb{Z}_p$. Zeigen Sie, dass x genau dann primitiv ist, wenn ein i existiert mit $x_i \in U(\mathbb{Z}_p)$.

2. Sei $u \in U(\mathbb{Z}_p)$. Zeigen Sie, dass jede Darstellung von u bereits primitiv ist.

3. Sei nun $n = 2$, p ungerade und $q = [1, 1]$. Zeigen Sie, dass q ganz $U(\mathbb{Z}_p)$ darstellt. Unter welchen Bedingungen an p ist (E, q) anisotrop?