G. Nebe Besprechung am 07.12.2016

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 6

Aufgabe 1.
Sei K ein endlicher Körper. Zeigen Sie, dass $O_4^-(K)$ von Spiegelungen erzeugt wird.

Aufgabe 2
Wir betrachten noch einmal $L := \mathbb{E}_8 \oplus \mathbb{E}_8$ und $M := \tilde{\mathbb{D}}_{16}$ aus Bemerkung 4.26.

a) Zeigen Sie, dass $L_p = L \otimes \mathbb{Z}_p$ und $M_p = M \otimes \mathbb{Z}_p$ für alle Primzahlen p isometrisch sind.

b) Zeigen Sie, dass L und M anisotrop sind. Folgern Sie aus 4.26, dass der anisotrope Kern eines $\mathbb{Z}$-Gitters im Allgemeinen nicht bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 3
Sei (A, b) eine billineare Gruppe, A_p die p-Sylowgruppe für ein $p \in \mathbb{P}$ und $A^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

a) Zeigen Sie, dass A isomorph zu A^* ist.

b) Zeigen Sie, dass A genau dann schwach metabolisch ist, wenn A_p für alle p schwach metabolisch ist.

c) Sei nun $\exp(A)$ quadratfrei. Zeigen Sie, dass (A, b) genau dann regulär ist, wenn $(A_p, b_{|A_p})$ für alle p ein regulärer $\mathbb{F}_p$-Vektorraum ist. Hierzu identifizieren wir wie in der Vorlesung $(1/p)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$.

Aufgabe 4
Beweisen Sie die fehlenden Teile von Lemma 5.25 Skript.