G. Nebe Besprechung am 14.12.2016

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 7

Aufgabe 1.
Sei K ein Körper und (E, q) ein regulärer quadratischer K-Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Ist (E, q) nicht anisotrop, so ist (E, q) universell.

b) Für $a \in U(K)$ gilt $a \in q(E)$ genau dann, wenn $(E, q) \perp [-a]$ nicht anisotrop ist.

Gelten die Aussagen in a) und b) auch dann noch, wenn man

c) „Körper“ durch „HIB“ ersetzt?

d) K durch $\mathbb{Z}_p$ ersetzt für eine Primzahl p?

Aufgabe 2.

a) Betrachte die beiden bilinearen $\mathbb{Z}$-Gitter L und L', gegeben durch Gram-Matrizen $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 32 \end{pmatrix}$.
Berechnen Sie für alle Primzahlen p eine Jordanzerlegung von $L_p = L \otimes \mathbb{Z}_p$ sowie $L'_p = L' \otimes \mathbb{Z}_p$ und folgern Sie, dass L_p und L'_p für alle p isometrisch sind.
Zeigen Sie weiterhin, dass L und L' nicht isometrisch sind.

b) Betrachte das bilineare $\mathbb{Z}_2$-Gitter L gegeben durch die Gram-Matrix
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass L zwei Jordan-Zerlegungen $(L, b) \cong (L_1, b_1) \perp (L_2, 2b_2)$ und $(L, b) \cong (L'_1, b'_1) \perp (L'_2, 2b'_2)$ besitzt mit $(L_1, b_1) \ncong (L'_1, b'_1)$.

Aufgabe 3.
Wir setzen hier Aufgabe 3 von Blatt 5 fort, die dortigen Resultate können also verwendet werden. Zeigen Sie

a) Die quadratische Form $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ über $\mathbb{Z}_p$ stellt genau dann $u \in \mathbb{Z}_p$ primitiv dar, wenn einer der folgenden Fälle erfüllt ist:
   1. $p \equiv 1 \bmod 4$
   2. $p \equiv 3 \bmod 4$ und $p \nmid u$
   3. $p = 2$ und $u \equiv 1, 2, 5 \bmod 8$ (*Hinweis*: eine solche Darstellung für u liefert $x_1^2 = u - x_2^2 \equiv 1 \bmod 8$. Lifte nach $\mathbb{Z}_2$, um zu zeigen dass die Bedingung hinreichend ist.)

b) Die quadratische Form $q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 x_i^2$ über $\mathbb{Z}_p$ stellt genau dann $u \in \mathbb{Z}_p$ primitiv dar, wenn einer der folgenden Fälle erfüllt ist:
   1. $p \neq 2$
   2. $p = 2$ und $u \equiv 1, 2, 3, 5, 6 \bmod 8$ (*Hinweis*: benutze Teil (2), um zu zeigen dass die Bedingung hinreichend ist.)

c) Die quadratische Form $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 x_i^2$ über $\mathbb{Z}_2$ stellt genau dann $u \in \mathbb{Z}_2$ primitiv dar, wenn $u \not\equiv 0 \mod 8$.

d) Die quadratische Form $q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^5 x_i^2$ über $\mathbb{Z}_2$ stellt jedes $u \in \mathbb{Z}_2$ primitiv dar.