G. Nebe Besprechung am 21.12.2016

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 8

Aufgabe 1.
Sei (E, q) ein quadratischer A-Modul mit Clifford-Algebra (C, g).
Nach 9.6 existiert zu jedem $u \in O(E, q)$ ein eindeutiges $c(u) \in \mathrm{Aut}(C)$, das u fortsetzt. Hierdurch wird eine Abbildung $c : O(E, q) \to \mathrm{Aut}(C)$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass c ein Gruppenhomomorphismus ist. Ist g injektiv, so auch c.

b) Seien C_a und C_b zwei Clifford-Algebren von (E, q). Wir wissen aus 9.3, dass C_a und C_b isomorph sind. Zeigen Sie, dass C_a und C_b sogar graduiert isomorph sind, das heißt es existiert ein A-Algebrenisomorphismus $\varphi : C_a \to C_b$ mit $\varphi((C_a)_i) = (C_b)_i$ für $i = 0, 1$.

c) Seien (E, q) und (F, q') isometrisch. Zeigen Sie, dass $C(E)$ und $C(F)$ dann graduiert isomorph sind.

d) Geben Sie ein Beispiel für zwei isomorphe aber nicht isometrische Räume (E, q), (F, q'), sodass $C(E)$ und $C(F)$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 2.
In der Vorlesung haben wir gesehen, dass die Clifford-Algebra der hyperbolischen Ebene ein Matrixring ist. Berechnen Sie analog die Clifford-Algebra der Normform $N(\mathbb{F}_\ell)$ für ein ungerades ℓ. Zeigen Sie, dass $C(\mathbb{H}(\mathbb{F}_\ell))$ und $C(N(\mathbb{F}_\ell))$ isomorph sind als $\mathbb{F}_\ell$-Algebren, aber nicht isomorph als graduierte $\mathbb{F}_\ell$-Algebren.
Anmerkung: Da wir aus der Clifford-Algebra später Invarianten für quadratischen Formen und Wittgruppen bestimmen wollen, ist die Graduierung also sehr wichtig.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie Remark 9.17.

Aufgabe 4. (Knobelaufgabe)
Sei $K \in \{\mathbb{Q}_2(i), \mathbb{Q}_3(i)\}$. Was können Sie über K aussagen? Wie sieht die Bewertung auf K aus, wie der diskrete Bewertungsring in K? Wie sehen die Quadratklassen in $U(K)$ aus, wie die anisotropen K-Vektorräume bis auf Isometrie? Finden Sie noch mehr interessante Eigenschaften?