G. Nebe Besprechung am 18.01.2017

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 10

Aufgabe 1.
Sei K ein Körper und (V, q) ein regulärer quadratischer Raum über K, sodass $\mathrm{O}(V, q)$ von Spiegelungen erzeugt wird. Weiterhin sei $\theta : \mathrm{SO}(V, q) \to K^*/(K^*)^2$ die Spinor-Norm.

a) Zeigen Sie: Ist q surjektiv, so auch θ. Folgern Sie: Ist $\mathrm{ind}(V) > 0$, so ist θ surjektiv.

b) Sei nun $K = \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $\theta(\mathrm{SO}(V, q))$ für den Fall, dass q definit ist.

c) Sei nun $(V, q) = [1, 1]$ über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $q(V)$ und $\theta(\mathrm{SO}(V, q))$.

d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(V, q) = \{g \in \mathrm{O}(V, q) \mid \dim(\mathrm{Bild}(\mathrm{id}_V - g)) \in 2\mathbb{Z}\}$.

e) Gilt d) auch für halbreguläre Räume?

Aufgabe 2.

Sei $A = K$ ein Körper und (E, q) regulär oder halbregulär von Rang ≤ 4. Zeigen Sie
$E = \{x \in C_1(E, q) \mid x = \iota(x)\}$ und folgern Sie $\mathrm{Spin}(E, q) = \{g \in \mathrm{C}_0(E, q) \mid \theta(g) = 1\}$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$, $0 \neq a, b \in K$ und (E, q), (E_1, q_1), (E_2, q_2) reguläre quadratische K Vektorräume.
Die Quaternionenalgebra $(a, b) = \left(\frac{a,b}{K}\right)$ ist definiert als die vierdimensionale K-Algebra mit Basis $(1, i, j, ij)$ und Relationen $i^2 = a$, $j^2 = b$ und $ij = -ji$.

a) Zeigen Sie $\mathrm{C}([a, b]) \cong (a, b)$.

b) Zeigen Sie $\mathfrak{c}(E, aq) = \mathfrak{c}(E, q)$ falls $\dim(E)$ ungerade.

c) Benutzen Sie ohne Beweis, dass $\mathfrak{c}(E, aq) = \mathfrak{c}(E, q)\mathfrak{c}([a, d_\pm(E, q)])$ falls $\dim(E)$ gerade ist.

d) Zeigen Sie $\mathrm{C}(E_1 \perp E_2) \cong \mathrm{C}_0(E_1) \otimes \mathrm{C}_0(E_2) \otimes \mathrm{C}([\frac{1}{2}d_\pm(E_1), \frac{1}{2}d_\pm(E_2)])$ und folgern Sie die untenstehende Multiplikationsformel für die Clifford Invariante falls beide Räume E_i ungerade Dimension haben.
Ohne Beweis:
Es gilt für die Clifford Invariante der orthogonalen Summe $(E, q) = (E_1, q_1) \perp (E_2, q_2)$:

$$\mathfrak{c}((E, q)) = \begin{cases} \mathfrak{c}(E_1, q_1)\mathfrak{c}(E_2, q_2)\mathfrak{c}([d'_\pm(E_1, q_1), d'_\pm(E_2, q_2)]), & \dim(E_1) \equiv \dim(E_2) \pmod 2, \\ \mathfrak{c}(E_1, q_1)\mathfrak{c}(E_2, q_2)\mathfrak{c}([-d'_\pm(E_1, q_1), d'_\pm(E_2, q_2)]), & \dim(E) \equiv \dim(E_1) \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

Hier bezeichne $d'_\pm(E, q)$ die Halbdiskriminante von (E, q) also $d'_\pm = d_\pm$ für Räume gerader Dimension und $d'_\pm = \frac{1}{2}d_\pm$ für Räume ungerader Dimension.

e) Seien nun $\mathbb{I}_n$ der n-dimensionale quadratische $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Orthonormalbasis $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ und $\mathbb{A}_{n-1} = \langle \sum_{i=1}^n e_i \rangle^\perp \leq \mathbb{I}_n$. Berechnen Sie mit den Formeln aus Teil d) die Clifford-Invarianten dieser Räume.

Sie dürfen hier die Rechenregeln aus 12.10 verwenden.