G. Nebe Besprechung am 25.01.2017

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 11

Aufgabe 1

Sei $n \in 8\mathbb{Z}$ und $\mathbf{1} := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{F}_2^n$. Setze $V := \mathbf{1}^\perp / \langle \mathbf{1} \rangle$ und $q : V \to \mathbb{F}_2, q(x + \langle \mathbf{1} \rangle) := \frac{wt(x)}{2} + 2\mathbb{Z}$. Sei $U \leq V$ ein maximal isotroper Teilraum. Dann gilt nach Blatt 3, dass $V \cong \mathbb{H}^{(n-2)/2}$ ist und somit $\dim(U) = \frac{n-2}{2}$.
Zeigen Sie:

a) U ist das Bild eines selbstdualen doppelt-geraden Codes C_U in $\mathbb{F}_2^n$ unter der Projektion $\mathbf{1}^\perp \to V$.

b) Die Abbildung $D : O(V, q) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $g \mapsto (-1)^{\dim(U/U \cap g(U))}$ ist ein Homomorphismus mit Kern $SO(V, q)$. (Hinweis: Aufgabe 1 Blatt 10.)

   Insbesondere gilt $\mathrm{Stab}_{O(V,q)}(U) \subseteq SO(V, q)$.

c) Die symmetrische Gruppe S_n operiert durch Permutation der Einträge auf $\mathbb{F}_2^n$, lässt $\mathbf{1}$ fest und bettet somit natürlich in $O(V, q)$ ein. Zeige, dass die Einschränkung von D auf S_n das Signum ist.

d) Folgere: für einen selbstdualen doppelt-geraden Code $C \leq \mathbb{F}_2^n$ (vgl. Blatt 3) gilt $\mathrm{Aut}(C) \leq A_n \trianglelefteq S_n$.

Aufgabe 2
Bestimme die Clifford-Invarianten aller anisotroper quadratischer Räume über $\mathbb{Q}_p$.