G. Nebe Besprechung am 31.01.2017 (Dienstag!)

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 12

Aufgabe 1

Sei (V, q) ein regulärer $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension n und Signatur s und sei $L \leq V$ ein volles, gerades Gitter. Zeigen Sie:

a) Ist $\det(L)$ ungerade, so ist n gerade.

b) Gilt für alle Primteiler p von $\det(L)$, dass $p \equiv 1(\mod 4)$, so ist $s \equiv 0(\mod 4)$.
Hinweis: Gaußsummen und Milgram-Braun.

Aufgabe 2
Sei

$$s : W(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{p \in \mathbb{P}, p \geq 3} W(\mathbb{F}_p)$$

wie in Abschnitt 13.1 definiert.
(1) Berechnen Sie $s(V)$ für

a) $V = \mathbb{Q}\mathbb{A}_{p-1}$ für eine Primzahl $p \neq 2$.

b) $V = \mathbb{Q}\mathbb{D}_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

c) $V = \mathbb{Q}\mathbb{I}_n$ für $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sei $s([V, q]) = (4, 0, N(\mathbb{F}_3), [2]_{p=5}, 0, \ldots)$.
Bestimmen Sie $e([V, q)]$, $d_{\pm}([V, q])$ und die Clifford Invariante $c([V, q])$.
Finden Sie den eindeutigen anisotropen Vertreter von $[(V, q)]$.

Aufgabe 3
Sei (L, b) ein billineares $\mathbb{Z}$-Gitter mit Rank ≤ 4 und Determinante 2.

1. Zeigen Sie, dass $r, s, t \in \mathbb{N}_0$ existieren mit

$$(L, b) \cong \langle 1 \rangle^r \bigoplus \langle -1 \rangle^s \bigoplus \mathbb{H}(\mathbb{Z})^t \bigoplus \langle \pm 2 \rangle,$$

   wobei das Vorzeichen der 2 eindeutig durch r, s, t bestimmt ist, da $det(L) = 2$.

2. Bestimmen Sie bis auf Isometrie alle billinearen $\mathbb{Z}$-Gitter vom Rang ≤ 4 und Determinante 2.

Hinweis: Hermite Ungleichung.