G. Nebe Besprechung am 02.11.2016

Quadratische Formen, WS 2016/17

Blatt 2

Aufgabe 1.
Diese Aufgabe verallgemeinert einige Ideen des Beweises von Aufgabe 4 auf Blatt 1.

Sei A ein Dedekindring, $\mathfrak{m} \leq A$ ein maximales Ideal und $K := A/\mathfrak{m}$ der Restklassenkörper. Weiterhin sei (E, q) ein quadratischer A-Modul und

$$\mathfrak{m}E := \{me \mid m \in \mathfrak{m}, e \in E\} \leq E.$$

a) Zeigen Sie, dass $V_\mathfrak{m} := E/\mathfrak{m}E$ ein K-Vektorraum ist.

b) Auf V definieren wir $\overline{q} : V \to K, e + \mathfrak{m}E \mapsto q(e) + \mathfrak{m}$. Zeigen Sie, dass $\overline{q}$ eine wohldefinierte quadratische Form auf V ist.

c) Sei (E, q) regulär. Zeigen Sie, dass dann auch $(V, \overline{q})$ regulär ist. Gilt auch die Umkehrung?

d) Sei nun E endlich erzeugt, frei und nicht ausgeartet. Zeigen Sie, dass $V_\mathfrak{m}$ für alle bis auf endlich viele maximale Ideale $\mathfrak{m}$ regulär ist.

e) Sei nun $A = \mathbb{Z}$ und $E = \mathbb{D}_4$ wie auf Blatt 1 definiert. Bestimmen Sie für $p = 2$ und $p = 3$ den Isometrietyp von E/pE als $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.

Anmerkung: Sehr ähnliche Aussagen gelten, wenn man statt $E/\mathfrak{m}E$ die Lokalisierung $E \otimes A_{(\mathfrak{m})}$ oder deren Kompletierung $E \otimes A_\mathfrak{m}$ betrachtet.

Aufgabe 2.
Wir betrachten erneut Gitter wie auf Blatt 1 definiert, A sei wieder ein noetherscher Integritätsbereich.

a) Seien L, M Gitter und es gelte $M \subseteq L$. Zeigen Sie $L^\# \subseteq M^\#$ und $L/M \cong M^\#/L^\#$ als A-Moduln.

b) Sei jetzt $A = \mathbb{Z}$, $L = L^\#$ und $X \leq L$ regulär und primitiv. Zeigen Sie

$$(X^\perp)^\#/X^\perp \cong X^\#/X$$

wobei $X^\perp$ das orthogonale Komplement von X in L bezeichne und $X^\#$ beziehungsweise $(X^\perp)^\#$ jeweils im vom Gitter aufgespannten Vektorraum gebildet werden.

c) Wir definieren das (bis auf Isometrie eindeutige) unimodulare $\mathbb{Z}$-Gitter $\mathbb{E}_8$ und zwei seiner Teilgitter:

$$\mathbb{E}_8 := \langle \mathbb{D}_8, \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{8} e_i \rangle$$
$$\mathbb{E}_7 := \{\sum_{i=1}^{8} a_i e_i \in \mathbb{E}_8 \mid a_7 = a_8\}$$
$$\mathbb{E}_6 := \{\sum_{i=1}^{8} a_i e_i \in \mathbb{E}_8 \mid a_6 = a_7 = a_8\}$$

Bestimmen Sie $\mathbb{E}_i^{\#}/\mathbb{E}_i$ für $i \in \{6, 7, 8\}$. Geben Sie weiterhin $\mathbb{E}_i^{\#}$ explizit an.

Aufgabe 3.
Für ein $\mathbb{Z}$-Gitter L von Rang n mit quadratischer Form q definiert

$$O(L) := \{g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid Lg = L \text{ und } q(\ell g) = q(\ell) \text{ für alle } \ell \in L\}$$

die orthogonale Gruppe von L (manchmal auch als Automorphismengruppe von L bezeichnet).

a) Zeigen Sie $O(L) = O(L^{\#})$.

Das Gitter L heißt **gerade**, wenn $q(L) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt oder äquivalent $b_q(\ell, \ell) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $\ell \in L$. Sei ab jetzt L ein gerades Gitter.

b) Ein $x \in L$ mit $q(x) = 1$ heißt **Wurzel**. Sei x eine solche Wurzel. Dann definieren wir die **Spiegelung entlang** x durch

$$\sigma_x : L \to L, \ell \mapsto \ell - b_q(\ell, x)x.$$

Zeigen Sie, dass $\sigma_x \in O(L)$ gilt.
Wir definieren $S(L) := \langle \sigma_x \mid x \in L, q(x) = 1\rangle$ als die **Spiegelungsgruppe** von L.

c) Bestimmen Sie die Bahnen von $S(L)$ auf $L^{\#}/L$.

d) Zeigen Sie, dass $S(L)$ ein Normalteiler in $O(L)$ ist.

e) Zeigen Sie $S(\mathbb{A}_n) \cong S_{n+1}$ und $S(\mathbb{D}_n) \cong C_2^{n-1} \rtimes S_n$.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Menge aller Wurzeln. Untersuchen Sie dann die Operation der Wurzeln auf der Standardbasis des $\mathbb{Z}^n$, um die Isomorphie zu konstruieren.

f) Die Abbildung $-\mathrm{id} : L \to L, x \mapsto -x$ ist orthogonal. Untersuchen Sie, wann $-\mathrm{id} \in S(L)$ für $L = \mathbb{A}_n$ und $L = \mathbb{D}_n$ gilt.