

# 1 Gabriele Nebe: Dichte Kugelpackungen

## 1.1 Die Kepler-Packungen

Die Bestimmung dichter Kugelpackungen ist ein sehr altes Problem. Berühmt wurde es durch die *Kepler-Vermutung*, für die Sie zum Beispiel bei Wikipedia unter „Kepler-Vermutung“ eine historische Einführung finden. Stellen Sie sich das „alltägliche“ Problem vor, einen großen Flugzeughangar mit Tischtennisbällen zu füllen. Wie müssen Sie die Bälle anordnen, um dort möglichst viele Bälle hineinzubekommen? Eine (optimale) Lösung werden Sie sicherlich schnell finden: Man legt die erste Schicht der Bälle so wie die Marmeln in Abbildung 1.



Abbildung 1



Abbildung 2

Die zweite Schicht ordnet man so an, dass die Mittelpunkte der Kugeln genau über den Löchern der ersten Schicht liegen, und macht dann immer so weiter. Die Kugeln in der Kepler-Packung füllen ca. 74% des Raums aus, die *Dichte* der Packung ist somit 0,74.

Was fällt Ihnen auf? Nur über jedem zweiten Loch der ersten Schicht liegt eine Kugel in der zweiten Schicht. Das geht nicht anders, denn es gibt mehr Löcher als Kugeln in jeder Schicht: Um jedes Loch liegen drei Kugeln, um jede Kugel aber sechs Löcher. In der zweiten (dunklen) Schicht in Abbildung 2 gibt es also weiße Löcher (die über hellen Kugeln liegen) und schwarze Löcher (die über Löchern der ersten Schicht liegen). Für die dritte Schicht hat man somit zwei verschiedene Möglichkeiten: Die Kugeln der dritten Schicht liegen über den schwarzen oder den weißen Löchern der zweiten Schicht. Ebenso hat man für die vierte, fünfte und jede weitere Schicht jeweils zwei verschiedene Möglichkeiten, so dass sich bei unendlich vielen Schichten auch unendlich viele verschiedene gleich dichte Kugelpackungen ergeben. Die Kepler-Vermutung sagt nun aus, dass es keine dichteren Kugelpackungen im 3-dimensionalen Raum gibt. Sie wurde erst 1998 von Thomas C. Hales bewiesen. Auch dazu finden Sie viele Details im Internet, zum Beispiel auf der Homepage von Hales.

## 1.2 Was ist eine Kugel?

Um Kugelpackungen so weit zu verstehen, dass man sie auf andere Situationen übertragen und verallgemeinern kann, muss man die wesentlichen Eigenschaften einer Kugel erfassen und in eine mathematische Sprache, eine *Definition*, übersetzen.

### Definition 1.1

Eine *Kugel*  $K = K(M, r)$  ist die Menge aller Punkte des Raums, die von einem festen Punkt  $M$  höchstens Abstand  $r$  haben.

In unserem Fall betrachten wir den 3-dimensionalen Raum; seine Punkte  $P$  sind meist gegeben durch 3 reelle Koordinaten  $P = (p_1, p_2, p_3)$  und der *Abstand* zwischen  $P$  und  $M$ , den wir mit  $d(P, M)$  bezeichnen, ist die Länge der Verbindungsstrecke zwischen  $P$  und  $M$ . Nach dem Satz von Pythagoras berechnet sich diese Länge als

$$d(P, M) = \sqrt{(p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2 + (p_3 - m_3)^2}.$$

Um von einer Kugel sprechen zu können, benötigt man also einen Raum, auf dem ein Abstand definiert ist. Dies führt uns wieder auf eine neue Frage. Was ist ein *Abstand*? Also analysieren wir wieder, welche Eigenschaften wir von einem Abstand erwarten.

### Definition 1.2

Es sei  $d$  eine Funktion, die jedem Paar von Punkten  $P, M$  in einem Raum  $\mathcal{E}$  eine reelle Zahl  $d(P, M)$  zuordnet. Eine solche Funktion  $d$  heißt *Abstand* auf  $\mathcal{E}$ , falls sie die folgenden 3 Eigenschaften hat:

- $d(P, M) \geq 0$  für alle  $P, M \in \mathcal{E}$ , wobei  $d(P, M) = 0$  nur für  $P = M$  gilt.
- $d(P, M) = d(M, P)$  für alle  $P, M \in \mathcal{E}$ .
- $d(P, M) + d(M, Q) \geq d(P, Q)$  für alle  $P, M, Q \in \mathcal{E}$ .

Die erste Bedingung sagt aus, dass zwei verschiedene Punkte immer einen positiven Abstand haben, nur gleiche Punkte haben Abstand 0. Die zweite Bedingung ist die Symmetrie des Abstands: Der Abstand von  $P$  zu  $M$  ist gleich dem Abstand von  $M$  zu  $P$ . Die dritte Bedingung ist die *Dreiecksungleichung*: Der Umweg über  $M$  kann nicht kürzer sein als der direkte Weg zwischen  $P$  und  $Q$ . Sie können diese ganz natürlichen Forderungen an einen Abstand für die oben angegebene Funktion  $d$  direkt nachrechnen.

Ausgestattet mit diesen Einsichten können wir jetzt den Begriff einer Kugel allgemein definieren.

### Definition 1.3

Es sei  $\mathcal{E}$  ein Raum mit einem Abstand  $d$ . Es sei  $M \in \mathcal{E}$  ein Punkt dieses Raums und  $r$  eine positive reelle Zahl. Dann ist

$$K = K(M, r) := \{P \in \mathcal{E} \mid d(P, M) \leq r\}$$

die Kugel um  $M$  mit Radius  $r$ . Die Kugel  $K$  ist also die Menge aller Punkte von  $\mathcal{E}$ , die von  $M$  höchstens Abstand  $r$  haben. Der Punkt  $M$  heißt *Mittelpunkt* der Kugel  $K$ .

Eine Kugelpackung ist eine Menge gleich großer Kugeln in  $\mathcal{E}$ , die sich berühren dürfen, aber nicht durchdringen. Mathematisch ist es einfacher zu sagen, dass jeder Punkt des Raums  $\mathcal{E}$  in

höchstens einer dieser Kugeln liegt, es sei denn, er hat genau Abstand  $r$  vom Mittelpunkt der Kugel (liegt also auf dem Rand der Kugel), dann kann er auch auf dem Rand mehrerer Kugeln liegen.

**Definition 1.4**

Eine Kugelpackung in  $\mathcal{E}$  ist gegeben durch einen gemeinsamen Radius  $r$  und eine Menge von Mittelpunkten  $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \dots\} \subset \mathcal{E}$ . Man nennt

$$\mathcal{K}(\mathcal{M}, r) = \bigcup_{i=1}^{\infty} K(M_i, r)$$

eine *Kugelpackung* in  $\mathcal{E}$ , falls sich zwei verschiedene Kugeln höchstens berühren. Gibt es also für einen Punkt  $P \in \mathcal{E}$  zwei verschiedene Mittelpunkte  $M_1, M_2 \in \mathcal{M}$  mit  $d(P, M_1) \leq r$  und  $d(P, M_2) \leq r$ , so gilt  $d(P, M_1) = d(P, M_2) = r$ .

Die *Dichte* einer unendlichen Kugelpackung kann man über immer größer werdende endliche Teilpackungen definieren. Die Dichte einer endlichen Kugelpackung (also zum Beispiel Tischtennisbälle in einem Hangar) ist das Volumen des von den Kugeln ausgefüllten Raums geteilt durch das Volumen des Gesamtraums (also des Hangars), also der Anteil des von den Kugeln eingenommenen Raums. Für unendliche Kugelpackungen benötigen Sie für eine mathematisch korrekte Definition den *Grenzwert*begriff. Darauf wollen wir hier verzichten, es genügt uns der intuitive Begriff von Dichte.

## 1.3 Euklidische Räume

Das in Abschnitt 1.2 vorgestellte Modell unseres Raums, in welchem jeder Punkt durch 3 reelle Koordinaten gegeben ist, lässt sich leicht auf beliebige Dimensionen (also eine beliebige Anzahl von Koordinaten) verallgemeinern. Wieder müssen wir die wesentlichen Eigenschaften analysieren. In unserer realen Welt können wir Streckenlängen und Winkel messen, zum Beispiel rechte Winkel definieren und von Würfeln sprechen. Für Kugelpackungen ist es das Wichtigste, Abstände zwischen zwei Punkten messen zu können. In der folgenden Definition wollen wir dies auf Punkte verallgemeinern, die durch  $n$  reelle Koordinaten gegeben sind, und so ein Modell für den  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum geben.

**Definition 1.5**

Es sei  $n$  eine natürliche Zahl. Die Punkte  $P$  des  $n$ -dimensionalen *Euklidischen Raums*  $\mathcal{E}_n$  sind gegeben durch  $n$  reelle Koordinaten  $(p_1, \dots, p_n)$ . Der *Abstand* zwischen  $P = (p_1, \dots, p_n)$  und  $M = (m_1, \dots, m_n)$  ist

$$d(P, M) = \sqrt{(p_1 - m_1)^2 + (p_2 - m_2)^2 + \dots + (p_n - m_n)^2}.$$

Die Funktion  $d$  erfüllt die drei Bedingungen eines Abstands aus Definition 1.2.

Auch Mathematiker können sich keinen 4-dimensionalen Euklidischen Raum vorstellen, aber wir können mit Hilfe des Modells in ihm rechnen. Da zwei Punkte immer in einer Ebene liegen, kann man den Abstand wieder mit Pythagoras als die Länge der Verbindungsstrecke interpretieren. So gilt zum Beispiel

$$d((1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)) = d((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)) = d((1, 0), (0, 1)) = \sqrt{2}.$$

Die 16 Punkte

$$\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$$

mit beliebigen Vorzeichenkombinationen bilden zum Beispiel die Ecken des 4-dimensionalen Würfels mit Kantenlänge 1, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt  $(0,0,0,0)$  ist. Die Diagonale hat die Länge

$$d\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right) = 2.$$

Zum Vergleich: Im Zweidimensionalen hat die Diagonale Länge  $\sqrt{2}$ . Wie viele Ecken hat ein 5-dimensionaler Würfel? Wie lang ist seine Diagonale?

Aber fangen wir langsam an, bei Dimension 1. Jeder Punkt im eindimensionalen Euklidischen Raum ist gegeben durch eine einzige reelle Zahl. Die Kugeln sind Intervalle, zum Beispiel ist

$$K((0), 1) = [-1, 1] = \{(x) \in \mathcal{E}_1 \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$

Der Raum  $\mathcal{E}_1$  lässt sich durch Kugeln vollständig füllen, die folgende Kugelpackung, die man wegen der Eindimensionalität auch als Linienpackung bezeichnet, hat Dichte 1:

Abbildung 3: Linienpackung

Als Mittelpunkte kann man zum Beispiel alle geraden Zahlen wählen und als gemeinsamen Radius 1,  $\mathcal{M} = \{0, 2, -2, 4, -4, \dots\}$ ,  $r = 1$ .

In Dimension 2 sind die Kugeln genau die Kreise. Schon im 18. Jahrhundert zeigte Lagrange, dass die *hexagonale Kreispackung* die dichteste Packung in der Ebene ist. Die Kreise nehmen mehr als 90% der Ebene ein.

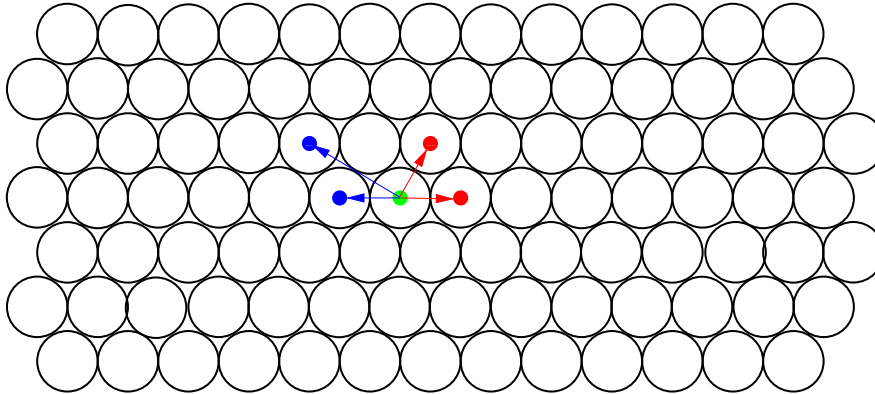


Abbildung 4: Hexagonale Kreispackung

Ebenso wie man die Kepler-Packungen durch Aufeinanderschichten hexagonaler Kreispackungen erhält, entsteht die hexagonale Kreispackung aus Schichten der Linienpackung. Sie erkennen sicherlich die Zeilen im obigen Bild als Kreise, die entlang der Linienpackung aufgereiht sind. Man schichtet solche Zeilen versetzt übereinander. Hier hat man, im Gegensatz zur Kepler-Packung, jedoch keine verschiedenen Wahlmöglichkeiten bei jeder Schicht.

Wie verhält sich die Dichte bei wachsender Dimension? In Dimension 1 kann man 100% des Raums mit Kugeln füllen, in Dimension 2 mehr als 90%. Bei den oben konstruierten Kepler-Packungen im 3-dimensionalen Raum sind nur ca. 74% des Raums von Kugeln eingenommen,

Kugelpackungen scheinen also in größeren Dimensionen immer weniger dicht zu werden. Das kann man mathematisch beweisen. Es liegt aber im Wesentlichen daran, dass das Volumen der Kugel mit Durchmesser 1 (also Radius  $1/2$ ) mit steigender Dimension immer kleiner wird. Beachten Sie, die Kugel mit Durchmesser 1 ist die größte Kugel, die in den Einheitswürfel passt. Der Einheitswürfel hat Kantenlänge 1, Volumen 1, und man kann den ganzen Raum mit Einheitswürfeln ausfüllen. Die folgende Tabelle gibt das gerundete Volumen  $v_n$  der Kugel mit Durchmesser 1 im  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum an.

Volumen der Kugel mit Durchmesser 1 im  $n$ -dimensionalen Raum

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v_n$	1	0,785	0,524	0,308	0,164	0,081	0,037	0,016	0,006

Nimmt die größte Kugel, die in den Einheitswürfel passt, in Dimension 3 noch mehr als die Hälfte des Würfels ein, so sind es in Dimension 9 gerade mal 0,6%, also weniger als ein Hundertstel. Füllt man den Raum also mit Einheitswürfeln und steckt in jeden dieser Würfel eine Kugel mit Durchmesser 1, so hat die daraus sich ergebende Kugelpackung Dichte  $v_n$ . Diese  $n$ -dimensionale Kugelpackung bezeichne ich als die  $n$ -dimensionale *Würfelpackung*.

## 1.4 Ein Intermezzo: Der Hamming-Raum

Seit Einführung der digitalen Datenverarbeitung spielen in den Anwendungen neben den reellen Zahlen auch Binärzahlen, üblicherweise mit 0 und 1 bezeichnet, eine wichtige Rolle, da man dort mit zwei möglichen Zuständen arbeitet, 0 wie „Schalter aus“, 1 wie „Schalter ein“. Mathematisch stellt man einen digitalen Baustein mit  $n$  Schaltern durch den *Hamming-Raum*  $\mathcal{H}_n$  dar; das ist der Raum aller 0/1-Folgen der Länge  $n$ . Zum Beispiel ist

$$\mathcal{H}_3 = \{(000), (100), (010), (110), (001), (101), (011), (111)\}.$$

$\mathcal{H}_n$  besteht also genau aus  $2^n$  Folgen, die man auch manchmal als Wörter der digitalen Sprache bezeichnet. Der *Hamming-Abstand* zwischen zwei solchen Folgen ist die Anzahl der Positionen, an denen sich die Folgen unterscheiden:

$$d((a_1 a_2 \dots a_n), (b_1 b_2 \dots b_n)) = \#\{i \in \{1, \dots, n\} \mid a_i \neq b_i\}.$$

Man kann wieder nachrechnen, dass der Hamming-Abstand die drei Bedingungen an einen Abstand aus Definition 1.2 erfüllt. Bezüglich des Hamming-Abstands erhält man folgende Kugeln

$$K((000), 1) = \{(000), (100), (010), (001)\} \text{ und } K((111), 1) = \{(111), (011), (101), (110)\}.$$

Die Kugelpackung, die aus diesen beiden Kugeln besteht, ist der ganze Raum  $\mathcal{H}_3$ . Ein noch schöneres Beispiel einer solchen Kugelpackung mit Dichte 1 erhält man für  $\mathcal{H}_7$ : Wählt man zum Beispiel als Menge der Mittelpunkte

$$\mathcal{M} := \left\{ \begin{array}{llll} M_1 = (0000000), & M_2 = (1000110), & M_3 = (1100101), & M_4 = (0100011), \\ M_5 = (0110100), & M_6 = (1110010), & M_7 = (1010001), & M_8 = (0010111), \\ M_9 = (0011010), & M_{10} = (1011100), & M_{11} = (1111111), & M_{12} = (0111001), \\ M_{13} = (0101110), & M_{14} = (1101000), & M_{15} = (1001011), & M_{16} = (0001101) \end{array} \right\},$$

so liefern die Kugeln mit Radius 1 um diese 16 Mittelpunkte eine Kugelpackung, die den gesamten Raum ausfüllt. Man bezeichnet  $\mathcal{M}$  daher als *perfekten Code*.

Kugelpackungen im Hamming-Raum werden benutzt, um fehlerfrei Informationen über einen digitalen Kanal zu übertragen. Verwendet man zum Beispiel obigen perfekten Code  $\mathcal{M}$  zur Nachrichtenübertragung, so hat die Sprache genau 16 Wörter, die Elemente von  $\mathcal{M}$ . Der Sender schickt ein solches Wort über einen Kanal zum Empfänger, dabei schleichen sich immer kleinere Fehler ein: Obwohl 0 gesendet wurde, wird manchmal 1 empfangen und umgekehrt. Nimmt man jedoch an, dass pro Wort höchstens ein Fehler aufgetreten ist, das empfangene Wort also höchstens Hamming-Abstand 1 von dem gesendeten Wort hat, so liegt es in genau einer der 16 Kugeln, und der Empfänger findet schnell das Wort in  $\mathcal{M}$ , das sich von dem empfangenen in höchstens einem Buchstaben unterscheidet. Hört der Empfänger zum Beispiel (1110000), so gibt das Wort keinen Sinn, da es ja nicht zu der Sprache  $\mathcal{M}$  gehört. Das eindeutig bestimmte Wort in  $\mathcal{M}$ , das dem empfangenen am nächsten ist, ist (1110010). Der Empfänger weiß also, dass der vorletzte Buchstabe fehlerhaft übertragen worden ist, und versteht (dekodiert) das richtige Wort (1110010).<sup>1</sup>

Die Menge  $\mathcal{M}$  der Mittelpunkte der Kugelpackung hat hier eine zusätzliche Struktur: Eine Addition auf der Menge  $\{0, 1\}$  ist definiert durch

$$0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1 \text{ und } 1 + 1 = 0.$$

Folgen addiert man nun gliedweise, also zum Beispiel  $(1011) + (0110) = (1+0, 0+1, 1+1, 1+0) = (1101)$ . Wendet man diese Addition auf die Elemente von  $\mathcal{M}$  an, so findet man, dass die Summe von 2 Punkten aus  $\mathcal{M}$  wieder in  $\mathcal{M}$  liegt. Zum Beispiel ist  $M_{10} + M_{15} = M_8$ . Anstatt alle 16 Wörter der Sprache anzugeben, genügen hier 4 sorgfältig ausgewählte Wörter, zum Beispiel  $M_2, M_4, M_8$  und  $M_{16}$ . Dann besteht  $\mathcal{M}$  aus allen  $2^4 = 16$  Summen, die man aus diesen 4 Elementen bilden kann. Diese Strategie werden wir auch für die Kugelpackungen im Euklidischen Raum ausnutzen.

## 1.5 Regelmäßige Kugelpackungen

Kommen wir also zurück zum Euklidischen Raum. Wenn das Kugelpackungsproblem in Dimension 3 schon so schwierig ist, wieso betrachtet man dann höhere Dimensionen? Es gibt mathematische Fragestellungen, die in höheren Dimensionen einfacher zu beantworten sind als in Dimension 3 (oder 4). Das Kugelpackungsproblem gehört zwar nicht dazu, ist jedoch wegen seiner Anwendungen auch in sehr hohen Dimensionen ein wichtiges Problem.

### 1.5.1 Fehlerkorrektur analoger Signale

Ein analoges Signal  $f$  besteht aus einer Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Frequenzen. Lässt man nur endlich viele Frequenzen zu, so kann man das Signal aus endlich vielen Werten

<sup>1</sup>Mit Hilfe des *Golay-Codes*, einem perfekten Code mit Wortlänge 23, der eng mit der unten beschriebenen *Leech-Packung* verwandt ist, konnte die Voyager-Sonde 1979-1980 mit nur 30 Watt Übertragungsleistung scharfe Farbbilder von Saturn und Jupiter zur Erde senden (siehe auch wikipedia).

$(f(x_1), \dots, f(x_n))$  rekonstruieren<sup>2</sup>. Das Auswerten des Signals nennt man auch Abtasten, und daher ist dieser Satz in der Elektrotechnik als das *Abtasttheorem* bekannt. Die Anzahl der Werte, die zur Rekonstruktion des Signals benötigt werden, hängt von den zugelassenen Frequenzen und der Dauer des Signals ab. Sie ist aber in allen praxisrelevanten Fällen sehr viel größer als 3.

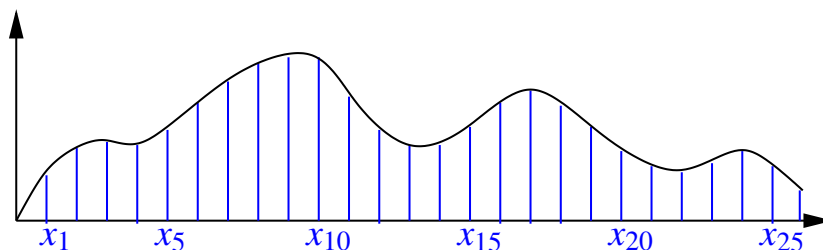


Abbildung 5

Sendet man ein Signal, so wird es auf dem Übertragungsweg in der Regel verfälscht, es schleichen sich Fehler ein, so dass niemals das gesendete Signal auch fehlerfrei empfangen wird. Die Kunst ist es jetzt, ein System zu entwickeln, in dem der Empfänger fehlerhafte Signale korrigieren kann, jedenfalls, solange der Fehler eine gewisse Größe nicht überschreitet. Daher werden nicht alle möglichen Signale als Wörter der Sprache zugelassen, sondern nur solche, die genau den Mittelpunkten einer Kugelpackung entsprechen. Empfängt man nun ein Signal, das innerhalb einer dieser Kugeln liegt, so weiß man, dass der Sender eigentlich den Mittelpunkt gemeint hat, zumindest, wenn der aufgetretene Fehler nicht zu groß ist. Die Größe des zu korrigierenden Fehlers und damit der Radius der Kugeln ist dabei meist fest vorgegeben. Je dichter die Kugelpackung gewählt wird, desto mehr Kugeln liegen in einem beschränkten Gebiet und desto mehr Information kann man mit der gleichen Energie pro Zeiteinheit übertragen.

## 1.5.2 Regelmäßige Kugelpackungen

Für diese Anwendungen ist es wesentlich, dass die Kugelpackung durch möglichst wenige Daten gegeben ist. Bei beliebigen Kugelpackungen muss man neben dem Radius  $r$  alle (also unendlich viele) Mittelpunkte der Kugeln kennen.

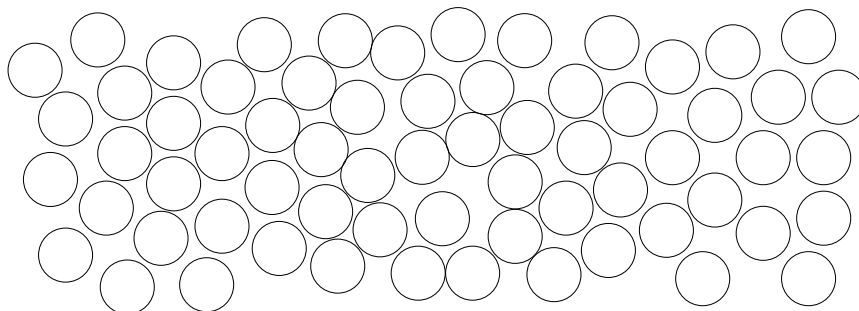


Abbildung 6: Unregelmäßige Kreispackung

<sup>2</sup>Ein analoges Phänomen kennen Sie vielleicht für Polynomfunktionen. Zwei reelle Polynome vom Grad  $n$  stimmen überein, wenn ihre Werte an  $n + 1$  verschiedenen Punkten gleich sind.

Bei regelmäßigen Kugelpackungen im  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raum genügt, wie unten erläutert wird, die Kenntnis von  $n$  geeigneten Mittelpunkten, um die Packung eindeutig zu bestimmen. Die Linienpackung und auch die hexagonale Kreispackung sind regelmäßig, ebenso wie eine der unendlich vielen Kepler-Packungen.

**Definition 1.6**

Eine Kugelpackung  $\mathcal{K}(\mathcal{M}, r)$  heißt *regelmäßig*, falls

$$(m_1 - p_1, \dots, m_n - p_n) \in \mathcal{M} \text{ für je zwei } (m_1, \dots, m_n), (p_1, \dots, p_n) \in \mathcal{M}.$$

Das heißt, die Differenz von zwei Mittelpunkten ist wieder ein Mittelpunkt.

Die Menge  $\mathcal{M}$  der Mittelpunkte einer regelmäßigen Kugelpackung enthält immer den Nullpunkt: Für beliebiges  $(m_1, \dots, m_n) \in \mathcal{M}$  gilt nämlich  $(0, \dots, 0) = (m_1 - m_1, \dots, m_n - m_n)$ .

Man kann zeigen, dass es immer  $n$  Mittelpunkte  $M_1, \dots, M_n \in \mathcal{M}$  gibt, so dass  $\mathcal{M}$  aus den Summen und Differenzen dieser Punkte besteht. Man kommt also vom Nullpunkt  $(0, \dots, 0)$  zu jedem beliebigen Punkt  $M$  von  $\mathcal{M}$ , indem man eine gewisse Anzahl von Schritten in Richtung  $M_1$  oder  $-M_1$  geht, dann in Richtung  $M_2$  oder  $-M_2$  usw. Die Anzahl  $n$  der Richtungen, in die man gehen muss, stimmt mit der Anzahl der Koordinaten jedes Punktes überein.

Zum Beispiel sind die Mittelpunkte der Würfelpackung alle Punkte  $(m_1, \dots, m_n)$ , deren sämtliche Koordinaten ganze Zahlen sind. Bezeichnen

$$M_1 = (1, 0, \dots, 0), M_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, M_n = (0, \dots, 0, 1),$$

so kommt man vom Nullpunkt  $(0, \dots, 0)$  zu jedem anderen Mittelpunkt  $(m_1, \dots, m_n)$  der Würfelpackung, indem man  $m_1$  Schritte in Richtung  $M_1$  geht,  $m_2$  Schritte in Richtung  $M_2$ , ... und  $m_n$  Schritte in Richtung  $M_n$ . Bei negativen Koordinaten (zum Beispiel  $m_1 = -2$ ) muss man entsprechend in die umgekehrte Richtung (also 2 Schritte in Richtung  $-M_1$ ) gehen. Anstatt gleich die gesamte Kugelpackung durch alle unendlich vielen Mittelpunkte anzugeben, haben wir nun ein Verfahren, um systematisch alle Mittelpunkte aufzulisten, das mit sehr wenig Information (nämlich nur den  $n$  Punkten  $M_1, \dots, M_n$ ) auskommt.

Dies kann man auch nochmals in Abbildung 4 sehen. Bezeichnet der grüne Punkt den Nullpunkt, so kann man für  $M_1$  und  $M_2$  die beiden roten Punkte wählen (mit Koordinaten  $(1, 0)$  und  $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ). Man kommt vom Nullpunkt zu jedem anderen Mittelpunkt, indem man eine gewisse Anzahl von Schritten in Richtung der roten Pfeile (und ihrer Umkehrungen) geht. Die gewählten Punkte zur Festlegung der Richtungen sind nicht eindeutig, man kann ebenso gut auch die beiden blauen Punkte (mit Koordinaten  $(-1, 0)$  und  $(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ) wählen.

Die dichtesten regelmäßigen Kugelpackungen in Dimension  $\leq 8$  sind schon seit 1930 bekannt. Ihre Dichte ist in der folgenden Tabelle angegeben.

Dichteste regelmäßige Kugelpackung im Vergleich mit der Würfelpackung.

Dimension	1	2	3	4	5	6	7	8
Dichte	1	0,907	0,740	0,617	0,465	0,373	0,295	0,254
Dichte/ $v_n$	1	1,155	1,414	2	2,828	4,619	8	16

Die dichteste Kugelpackung in Dimension 8 ist also 16-mal so dicht wie die Würfelpackung.



In höheren Dimensionen ist die Frage nach der dichtesten regelmäßigen Kugelpackung noch offen, mit einer einzigen sensationellen Ausnahme: Dimension 24. Dort gibt es eine sehr dichte Kugelpackung, die *Leech-Packung*, deren Dichte 16.777.216-mal so groß ist wie die der Würfelpackung. Sie wurde 1940 von Ernst Witt entdeckt, der seine Entdeckung nicht veröffentlichte, und dann 1965 von John Leech wiedergefunden. Erst 2004 konnten Henry Cohn und Abhinav Kumar beweisen, dass die Leech-Packung die dichteste regelmäßige Kugelpackung in Dimension 24 ist. Die Leech-Packung erhält man genauso wie die Kepler-Packungen durch sukzessives Schichten von Packungen kleinerer Dimension. Formalisiert man also den Prozess, mit dem wir die Kepler-Packung aus der hexagonalen Kreispackung konstruiert haben, so kann man durch Schichten regelmäßiger Kepler-Packungen die dichteste regelmäßige Packung in Dimension 4 konstruieren. Zeichnerisch ist dies natürlich nicht mehr möglich. Hier hilft uns die Mathematik, Eigenschaften so zu formalisieren, dass sie auch auf Situationen übertragen werden können, in denen die reine Vorstellungskraft versagt. So erhält man alle dichtesten regelmäßigen Kugelpackungen in Dimensionen 2 bis 8 durch sukzessives Schichten aus der Linienpackung. Führt man den Prozess fort, so findet man schließlich in Dimension 24 die Leech-Packung. Für Dimension 9 bis 23 ist es ein offenes Problem, die dichteste regelmäßige Kugelpackung zu bestimmen. In Dimension 11, 12, 13 kennt man sogar dichtere Kugelpackungen als die geschichteten, und erst in Dimension 24 kann man, wegen der außerordentlichen Eigenschaften der Leech-Packung, wieder beweisen, dass dies die dichteste regelmäßige Kugelpackung ist.

### 1.5.3 Die Leech-Packung und sporadische Gruppen

Dichte Kugelpackungen und insbesondere die Leech-Packung haben Beziehungen zu verschiedenen Gebieten der Mathematik und Physik. Ich möchte hier nur auf eine einzige eingehen, den Bezug zur *Gruppentheorie*, der über die Symmetrien der Kugelpackungen hergestellt wird. In dem Artikel von Rebecca Waldecker in diesem Buch erfährt man mehr über dieses Thema.

Betrachten wir die hexagonale Kreispackung, so fällt ihre sechseckige Struktur auf. Die Kreispackung bleibt unverändert, wenn man sie um  $60^\circ$  um den Mittelpunkt eines der Kreise dreht. Neben den offensichtlichen Verschiebungen lässt die hexagonale Kreispackung auch noch Spiegelungen als Symmetrien zu. Diese Abbildungen kann man rückgängig machen und beliebig kombinieren und erhält wieder eine Symmetrie der Kugelpackung. Mathematisch ausgedrückt bilden die Symmetrien einer Kugelpackung eine *Gruppe*.

Gruppen sind eine allgegenwärtige mathematische Struktur; sie treten oft als Symmetriegruppen auf. Ihr Studium ist daher ein zentrales Forschungsgebiet innerhalb der Mathematik. Sie sind nach festen Regeln aus Elementarbausteinen aufgebaut, den sogenannten *einfachen Gruppen*. Die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen ist eines der bedeutendsten Projekte der Gruppentheorie des letzten Jahrhunderts und vergleichbar mit dem Humangenomprojekt in der Medizin. Eine Gruppe von Mathematikern hat auf über 15.000 gedruckten Seiten die Elementarbausteine aller endlichen Gruppen bestimmt. Diese fallen in 18 unendliche Serien bis auf 26 Ausnahmen, die 26 *sporadisch einfachen* Gruppen. Eine dieser sporadisch einfachen Gruppen, die Conwaygruppe, erhält man aus den Symmetrien der Leech-Packung. Lässt man keine Verschiebungen zu (fixiert man also einen Mittelpunkt der Packung), so hat die Leech-Packung 8.315.553.613.086.720.000 Symmetrien (im Vergleich dazu hat die hexagonale Kreispackung nur 12 Symmetrien).

Die Klassifikation aller Elementarbausteine ist erst der Anfang der Bestrebungen, alle endlichen Gruppen zu verstehen. Die Elementarbausteine, insbesondere die sporadisch einfachen Gruppen, für deren Existenz man noch keine einheitliche Erklärung hat, müssen noch sehr viel besser untersucht werden. Eine Methode ist es, sie als Symmetriegruppen gewisser Objekte zu realisieren. Die Leech-Packung ist mit mehreren dieser sporadisch einfachen Gruppen verbunden, man untersucht mit ihrer Hilfe sogar die größte sporadische Gruppe, die *Monstergruppe*. Diese hat mehr Elemente als die Anzahl der Atome der Erde.

### 1.5.4 Einige Rekorde

Selbst wenn man in den meisten Dimensionen die dichteste Kugelpackung nicht bestimmen kann, so kennt man doch einige sehr dichte Packungen. Bei der Übertragung eines analogen Signals  $f$  benötigt man nach dem Abtasttheorem nur eine gewisse Anzahl, sagen wir der Einfachheit halber 144, Funktionswerte  $W(f) := (f(x_1), \dots, f(x_{144}))$ . Diese Folge  $W(f)$  aus 144 reellen Zahlen kann man nun als einen Punkt im 144-dimensionalen Raum auffassen, aber auch als eine Folge von 6 Punkten

$$P_1 = (f(x_1), \dots, f(x_{24})), P_2 = (f(x_{25}), \dots, f(x_{48})), \dots, P_6 = (f(x_{121}), \dots, f(x_{144}))$$

im 24-dimensionalen Raum oder als eine Folge von 48 Punkten im 3-dimensionalen Raum. Überträgt man solche Signale  $f$ , indem man je 24 Funktionswerte zu den Koordinaten von Mittelpunkten  $P_1, \dots, P_6$  der Leech-Packung zusammenfasst, so kann man bei gleicher Fehlerkorrektur und aufzuwendender Energie ungefähr eine Million mal so viel Information übertragen wie beim Kodieren der 48 Punkte im 3-dimensionalen Raum mit Hilfe der Kepler-Packung. Fasst man je 48 Werte zusammen, überträgt man also 3 Punkte mit je 48 Koordinaten, so kann man Leech noch einmal um ungefähr den Faktor 17.000 schlagen. Erst im August 2010 habe ich eine neue Rekordpackung gefunden, nach der verschiedene Mathematiker schon seit 30 Jahren suchen. Sie lebt in Dimension 72, mit ihr kann man mehr als 68 Milliarden mal so viel Information übertragen wie mit der Leech-Packung.

Interessant sind die Packungen auch wegen ihrer großen *Kusszahlen*. Darunter versteht man die Anzahl der Kugeln, die eine gegebene Kugel berühren. In einer regelmäßigen Kugelpackung ist diese Anzahl konstant. Bei der hexagonalen Kreispackung ist diese Kusszahl gleich 6, in den Kepler-Packungen 12 (sechs Kugeln berühren die ausgewählte Kugel in derselben Schicht und je drei in der darüber und darunter liegenden Schicht). Bei der Leech-Packung berühren 196.560 Kugeln eine feste Kugel der Packung, bei der oben erwähnten 48-dimensionalen Packung sind es 52.416.000 und bei der Rekordpackung in Dimension 72 sogar 6.218.175.600. Diese Anzahlen bestimmt man nicht mehr durch direkte Computerrechnungen – dazu würde ein Computer zu lange brauchen – sondern durch theoretische Überlegungen. Und das ist gerade das Spannende an diesem Gebiet: Man muss Theorie aus verschiedenen Bereichen der Mathematik mit konkreten Rechnungen kombinieren, um Ergebnisse zu erzielen. Neben dieser innermathematischen Interdisziplinarität, die beim Arbeiten mit dichten Kugelpackungen eingeht, sind die Packungen selbst recht explizite Objekte. Die Qualität der gefundenen Kugelpackungen läßt sich mit Hilfe eines Maßes messen, das durch Anwendungen motiviert ist, so dass die aufgestellten Rekorde weltweit Beachtung finden.

### 1.5.5 Praxisrelevanz dieser Rekordpackungen

Wenn die oben erwähnte 72-dimensionale Packung so extrem viel besser ist als die Kepler-Packung, wieso wird sie in der Praxis nicht eingesetzt? Zum einen weil sie noch zu neu ist. Es dauert meist einige Zeit, bis sich die neuen Erkenntnisse der Mathematik in den Anwendungen durchsetzen. Wichtiger ist aber die Schwierigkeit des Dekodierens. Wie bestimmt man denjenigen Mittelpunkt der Kugel, in dem das empfangene Signal liegt? Also den Mittelpunkt, der dem empfangenen Signal am nächsten liegt? Die Zeit, die man dazu benötigt, verdoppelt sich in etwa mit jeder Dimension. Verwendet man die Kepler-Packung, so kann man jede der Dreiergruppen einzeln dekodieren, im Gegensatz zur Leech-Packung, wo man direkt im 24-dimensionalen Raum arbeiten muss. Damit eine dichte Kugelpackung also praxistauglich ist, muss sie eine zusätzliche Struktur tragen, die man ausnutzen kann, um die Dekodierung wesentlich zu beschleunigen. So beschäftigen sich einige Arbeiten eigens mit speziellen Dekodierverfahren für die Leech-Packung. Die neue 72-dimensionale Packung hat eine recht ähnliche Konstruktion wie die Leech-Packung, so dass man hoffen kann, dass auch sie durch einen eigens entwickelten Dekodieralgorithmus irgendwann einmal praxistauglich wird.

## 1.6 Weiterführende Literatur

Dieser Abschnitt gibt eine sehr subjektive Auswahl über weiterführende Literatur. Da immer wieder neue Rekorde aufgestellt werden, ist das Internet das Medium der Wahl, um Tabellen der aktuell besten Kugelpackungen und Codes zu unterhalten. Wikipedia ist auch für mathematische Themen eine sehr gute, wenn auch vorsichtig zu verwendende Quelle.

*Codierungstheorie.* Das Büchlein „Codierungstheorie und Kryptographie“ von Wolfgang Willem's gibt eine gut lesbare kurze Einführung in die Codierungstheorie. Das historisch erste und immer noch umfassende Lehrbuch der mathematischen Codierungstheorie ist „The theory of error correcting codes“ von Jessie MacWilliams und Neil Sloane. Tabellen bester Codes findet man zum Beispiel im Internet unter „<http://www.codetables.de/>“.

*Dichte Kugelpackungen.* Die „Bibel“ der Theorie der Kugelpackungen ist das Werk „Sphere packings, lattices, and groups“ von John Conway und Neil Sloane. Es gibt eine Einführung in die grundlegenden Eigenschaften der wichtigsten bekannten regelmäßigen Kugelpackungen und enthält auch eine Sammlung fundamentaler Originalaufsätze. Die Menge der Mittelpunkte regelmäßiger Kugelpackungen bildet eine mathematische Struktur, die man als „Gitter“ (auf Englisch „lattice“) bezeichnet. Eine Datenbank wichtiger Gitter pflege ich (gemeinsam mit Neil Sloane) im Internet. Geometrische Aspekte der Theorie regelmäßiger Kugelpackung werden in dem Lehrbuch „Perfect lattices in Euclidean spaces“ von Jacques Martinet (oder seinem französischen Original „Les réseaux parfaits des espaces euclidiens“) behandelt. Die Beziehungen zwischen Kugelpackungen, Codes und einem weiteren Gebiet der Mathematik, der Theorie der Modulformen, sind in dem kleinen Büchlein von Wolfgang Ebeling, „Lattices and codes“ dargestellt. Einen Übersichtsartikel „Gitter und Modulformen“ (DMV Jahresbericht 2002) zu dem Thema können Sie über meine Homepage erhalten. Einen eher populärwissenschaftlichen Artikel hat Noam Elkies in den Notices der AMS veröffentlicht: „Lattices, Linear Codes, and Invariants“. Den Text erhalten Sie zum Beispiel über die Homepage von Noam Elkies.