Einleitung

Diese Diplomarbeit behandelt einige Möglichkeiten der Wiedererkennung von positiv definiten, ganzzahligen Gittern. Dabei werden zwei wesentlich verschiedene Ansätze verfolgt.

Im ersten Teil sind Gitter durch ihre Grammatrix gegeben.

'Gegeben seien zwei Grammatrizen.
Entscheide, ob sie zu isometrischen Gittern gehören!'
Invarianten einer Isometrieklasse von Gittern L sind z. B. die Dimension und Determinante von L, die Anzahl von Vektoren bestimmter Länge, die Minimallänge von Vektoren in L oder auch die auf $L^{\#}/L$ induzierte quadratische Form. Diese Invarianten bestimmen aber die Isometrieklasse von L nicht eindeutig.

Die Reduktionstheorie liefert 'Fastnormalformen' für die Grammatrizen einer Isometrieklasse. So gibt es nur endlich viele Grammatrizen von Gittern einer Isometrieklasse, die zu Minkowski-reduzierten Basen gehören. Da aber gerade bei interessanten Gittern (wie E_8 oder das Leech-Gitter) dieses 'Endlich' sehr groß ist, habe ich versucht, den Begriff 'reduziert' zu verfeinern. Dadurch erhielt ich weniger mögliche Grammatrizen.

Minkowski nannte die Basen von L reduziert, die das lexikographisch kleinste Längentupel lieferten. Herr Prof. Engel nennt eine Minkowski-reduzierte Basis reduziert, wenn für diese Basis das Maximum der Koeffizienten der Vektoren von L bis zu einer wohlbestimmten Länge minimal wird. [9]

In Anlehnung an die Definition Engels nenne ich eine Minkowski-reduzierte Basis von L reduziert, falls die duale Basis aus kürzestmöglichen Vektoren besteht. Für E_8 gibt es noch 42 solcher Grammatrizen modulo Anordnung der Basisvektoren und Vorzeichenwechsel.

Die Normalform unter den Grammatrizen eines Gitters wird als die Matrix definiert, welche das kleinste charakteristische Polynom hat. Dabei ist die Ordnung auf den charakteristischen Polynomen $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ definiert als die lexikographische Ordnung der Beträge der Koeffizienten in der Reihenfolge $(|a_{n-1}|, |a_1|, |a_{n-2}|, |a_2|, \ldots)$. $|a_0|$ ist die Determinante der Grammatrix, welche konstant auf einer Isometrieklasse ist, $|a_{n-1}|$ ist die Spur der Grammatrix, $|a_1|$ ist die Spur der Adjungierten der Grammatrix. $|a_{n-1}|$ ist minimal, falls die Basis des Gitters aus kürzesten Vektoren besteht, $|a_1|$ ist minimal, falls die Basis des dualen Gitters aus kürzesten Vektoren besteht. ...

Am Beispiel von E_8 wird die Bestimmung der Normalform durchgeführt.

Der zweite Teil behandelt eine Methode, gewisse 32-dimensionale, gerade, unimodulare Gitter zu konstruieren und wiederzuerkennen.

Gerade, unimodulare Gitter treten nur in durch 8 teilbaren Dimensionen auf. Für die Dimensionen 8,16 und 24 sind diese Gitter durch ihre Wurzelteilgitter klassifiziert. Unter Wurzeln versteht man Vektoren der Quadratlänge 1 oder 2. Das Wurzelteilgitter ist das von den Wurzeln erzeugte Teilgitter. Im 32-dimensionalen gibt es jedoch mehrere Isometrieklassen von Gittern mit gleichen Wurzelteilgittern. Herr Prof. Koch hat für einige dieser Gitter Konstruktionsmöglichkeiten über Codes angegeben. Zu den so konstruierten Gittern kann man eine Funktion ausrechnen, mit deren Hilfe man die Menge der Isometrieklassen dieser Gitter unterteilen kann. (Zwei Gitter mit verschiedenen Funktionswerten sind nicht isometrisch.) Für einige der Gitter ohne Wurzeln, die zu unimodularen Gittern mit Wurzelsystem $24A_1$ benachbart sind, wird diese Funktion berechnet.

Insbesondere ergibt sich, daß es mindestens 15 Isometrieklassen unimodularer, gerader, 32-dimensionaler Gitter ohne Wurzeln gibt.

Teil I: Grammatrizen

(I.1) Definitionen.

Sei R ein Hauptidealbereich mit Quotientenkörper K, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit nichtausgearteter, symmetrischer Bilinearform ϕ. Ein R-*Gitter* L in V ist ein endlich erzeugter, freier R-Modul L, mit $\langle L\rangle_K = V$. L enthält also eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von V, so daß B den R-Modul L erzeugt: $\langle b_1, \ldots, b_n\rangle_R = L$. Bei festem R und ϕ ist L durch B eindeutig bestimmt, aber i.a. hat L mehrere (unendlich viele) Gitterbasen B. Da es nur auf die Skalarprodukte der Basisvektoren untereinander ankommt, betrachtet man die Bahnen von Basen unter der Operation der orthogonalen Gruppe von (V, ϕ):
$O(V, \phi) := \{\varphi : V \to V \mid \varphi\ K\text{-linear und } \phi(\varphi(v), \varphi(w)) = \phi(v, w) \text{ für alle } v, w \in V\} =$
$\{\varphi : V \to V \mid \varphi\ K\text{-linear und } \phi(\varphi(b_i), \varphi(b_j)) = \phi(b_i, b_j) \text{ für alle } 1 \le i, j \le n\}$
für eine K-Basis B von V. Bei dieser Operation bleibt die Grammatrix $Gr := (\phi(b_i, b_j)_{i,j=1}^n)$ von L bzgl. B invariant.

Zu zwei Basen $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ von V mit $\phi(b_i, b_j) = \phi(b'_i, b'_j)$ für alle $1 \le i, j \le n$ ist die K-lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ definiert durch $\varphi(b_i) = b'_i$ in $O(V, \phi)$.
Also entsprechen den Grammatrizen von Gittern in V genau die Bahnen von $O(V, \phi)$ auf der Menge der Basen von V.
Zwei Gitter L, L' in V heißen *isometrisch*, falls es eine Abbildung $\varphi \in O(V, \phi)$ mit $\varphi(L) = L'$ gibt.
Im folgenden sei $R := \mathbb{Z}$, $K := Quot(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$. L sei ein ($\mathbb{Z}$-)Gitter im Euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum (V, ϕ) (ϕ symmetrische, positiv definite, nichtausgeartete Bilinearform). L heißt *ganzzahlig*, falls $\phi(L, L) \subseteq \mathbb{Z}$ ist, und L heißt *gerade* , falls $\phi(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$. Ich betrachte hier nur ganzzahlige Gitter L.

Das zu L *duale Gitter* $L^\# := \{v \in V \mid \phi(v, l) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } l \in L\} \cong Hom_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ hat die zu B bzgl. ϕ duale Basis $F = (f_1, \ldots, f_n)$ mit $\phi(f_i, b_j) = \delta_{ij}$ als Gitterbasis. Schreibt man $f_i := \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$, so ist $(\phi(f_i, f_j)) = (a_{ij}) = (\phi(b_i, b_j))^{-1}$. Die Grammatrix von $L^\#$ ist also Gr^{-1}.
L heißt *unimodular*, falls $L^\# = L$ ist.

Eine Grammatrix Gr von L bestimmt zwar die Isometrieklasse des Gitters L eindeutig, aber L hat i.a. unendlich viele Grammatrizen Gr. Nun möchte man aber gerne bei zwei durch ihre Grammatrizen Gr, Gr' gegebenen Gitter L, L' entscheiden können, ob die beiden Gitter isometrisch sind. Um dieses der Grammatrix Gr direkt anzusehen braucht man eine Normalform unter den Grammatrizen von L. Dabei möchte man mit möglichst kleinen Zahlen arbeiten, also sollte die Normalform der Grammatrizen des Gitters L zu einer Gitterbasis aus kurzen Vektoren gehören.

Definition 1:

Sei L ein ganzzahliges Gitter im Euklidischen $\mathbb{R}$-Vektorraum (V, ϕ). Eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ heißt *Minkowski-reduzierte Basis*, falls $(\phi(b_1, b_1), \ldots, \phi(b_n, b_n))$ unter allen Basen das lexikographisch kleinste Längentupel ist.

Einen Algorithmus zur Bestimmung einer Minkowski-reduzierten Basis findet man in [8]. Dieser Algorithmus ist aber sehr langsam.

Ein schnellerer Algorithmus ist der "LLL-Algorithmus", benannt nach seinen Erfindern A.K. Lenstra, H.W. Lenstra und L. Lovasz [6]. Dieser Algorithmus findet eine annähernd Minkowski-reduzierte Basis in polynomialer Zeit. Die zu einer Minkowski-reduzierten Basis gehörige Grammatrix ist aber i.a. immer noch nicht eindeutig. Man kann also noch weitere Forderungen stellen, um unter den Minkowski-reduzierten Basen von L diejenige mit der "schönsten" Grammatrix zu finden. Dazu kann man zunächst die Betrachtung des dualen Gitters $L^\#$ mit einbeziehen:

Definition 2:

Eine Grammatrix von L heißt *Engel-reduziert*, wenn sie zu einer Minkowski-reduzierten Basis B von L gehört, die unter allen Gitterbasen dadurch ausgezeichnet ist, daß das Maximum der Koeffizienten der Vektoren von L, die nicht länger als der längste Basisvektor sind, minimal wird. ([9])

Die Engelsche Reduktionsbedingung bedeutet, daß die zu B duale Basis aus sehr kurzen Vektoren besteht.

Diese Tatsache brachte mich auf die Idee einer dritten Definition von reduziert:

Definition 3:

Eine Grammatrix von L heißt *reduziert*, wenn sie zu einer Minkowski-reduzierten Basis von L gehört, deren duale Basis aus kürzestmöglichen Vektoren besteht.

Diese Definition von reduziert führt immer noch zu keiner eindeutigen Normalform. Wie in (I.3) gezeigt wird, gibt es für das Gitter E_8 noch 42 verschiedene Grammatrizen, die zu Gitterbasen aus Vektoren der Quadratlänge 2, deren duale Basis auch aus Vektoren der Quadratlänge 2 besteht, gehören.

Die Summe der Längen der Basisvektoren in B ist die Spur der Grammatrix Gr von L, die Summe der Längen der Basisvektoren in der zu B dualen Basis F ist die Spur der Grammatrix Gr^{-1} von $L^{\#}$ ($=\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{det(Gr)} det(Gr_{i,i})$, wo $Gr_{i,i}$ die Matrix bezeichne, die aus Gr durch Streichen der i-ten Zeile und Spalte entsteht.) Diese Beobachtung führte zur Betrachtung des charakteristischen Polynoms von Gr: $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i$.

$a_n = 1$ und der Koeffizient $a_0 = (-1)^n det(Gr)$ sind eindeutig durch die Isometrieklasse von L bestimmt. $a_{n-1} = -Spur(Gr)$, $|a_1| = Spur(Gr^{-1}) det(Gr)$. Man kann also versuchen, die Beträge der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von Gr in der Reihenfolge
$|a_{n-1}|,\ |a_1|,\ |a_{n-2}|,\ |a_2|, \ldots$ zu minimieren.

Definition 4:

Eine Grammatrix Gr von L heißt *charakteristisch reduziert*, falls die Beträge der Koeffizienten des charakteristischen Polynoms von Gr in der Reihenfolge $|a_{n-1}|,\ |a_1|,\ |a_{n-2}|,\ |a_2|, \ldots$ minimal für alle Wahlen von Gitterbasen sind.

Selbst die vierte Definition von reduziert bestimmt die Grammatrix des Gitters nicht eindeutig. Permutation der Basisvektoren mit Vorzeichenwechsel ändert das charakteristische Polynom der Grammatrix nicht. Mir ist kein Beispiel bekannt, bei dem die charakteristisch reduzierte Grammatrix abgesehen von diesen monomialen Transformationen nicht eindeutig wird.

Allerdings habe ich keinen Algorithmus, eine charakteristisch reduzierte Grammatrix herzustellen. Das im folgenden beschriebene und an Beispielen erläuterte Verfahren liefert nur Näherungslösungen, bei denen ich i.a. nicht entscheiden kann, wie gut sie sind. Im Beispiel E_8 lieferte die Methode jedoch alle reduzierten Grammatrizen.

Es ist nicht klar, ob i.a. eine charakteristisch reduzierte Grammatrix Minkowski-reduziert ist: Im Gegensatz zu Minkowski, der die Längentupel der Basisvektoren betrachtete, betrachte ich die Summen der Quadratlängen der Basisvektoren.

(I.2) Algorithmen.

Es folgt eine Beschreibung der verwendeten Algorithmen:

A) **'P-adisches Invertieren'**

Für eine Primzahl p, die die Determinante der Grammatrix nicht teilt (die Determinante der Grammatrix lieferte der LLL-Algorithmus), bestimme ich zunächst X, die Inverse der Grammatrix modulo p . Es gilt also

$$Gr \cdot X \equiv Id \pmod{p}.$$

Bezeichne A_i die Inverse modulo p^i. Es ist also

$$Gr \cdot A_i = Id + p^i \cdot R_i$$

für eine Restmatrix $R_i \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Setzt man $A_{i+1} = A_i + p^i \cdot Y_i$, so ergibt

$$Gr \cdot (A_i + p^i \cdot Y_i) \equiv Id + p^i \cdot (R_i + Gr \cdot Y_i) \equiv Id \pmod{p^{i+1}}$$

die Kongruenz

$$Y_i \equiv X \cdot R_i \pmod{p}.$$

Also braucht man nur einmal modulo p zu invertieren und in jedem Schritt einmal modulo p^2 und einmal modulo p zu multiplizieren. Der Algorithmus bricht ab, wenn die Genauigkeit, nämlich p^i, größer als das Doppelte des größten Eintrags der Adjungierten ist. Die Einträge in der Adjungierten der Grammatrix kann man dazu beliebig abschätzen. Eine mögliche Abschätzung liefert das Maximum der Koeffizienten der kürzesten Vektoren bzgl. der Basis B.

Es gilt das folgende
Lemma:

Sei L ein ganzzahliges Gitter im Euklidischen Vektorraum (V, ϕ). Sei weiter $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von L mit Grammatrix $Gr = (\phi(b_i, b_j))_{i,j=1}^n$ und $F = (f_1, \ldots, f_n)$ die zu B duale Basis. Sei $S := 2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n |Gr_{i,j}|$ und M das Maximum der Koeffizienten v_i der Vektoren $v = \sum_{i=1}^n v_i b_i$ in L der Quadratlänge $\leq S$. Dann gilt für das Maximum H der Einträge der Adjungierten der Grammatrix $H < det(Gr) \cdot (M+1)^2$.

Beweis:

Es genügt zu zeigen, daß das Maximum der Quadratlängen der Vektoren f_i $1 \leq i \leq n$ kleiner als $(M+1)^2$ ist. Sei also $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\phi(f_i, f_i) \geq 1$. Sei weiter $v = \sum_{j=1}^n v_j b_j \in L$ ($v_j \in \mathbb{Z}$) so, daß $\frac{f_i}{\sqrt{\phi(f_i,f_i)}} = v + \sum_{j=1}^n x_j b_j$ mit $x_j \in \mathbb{R}$, $|x_j| \leq \frac{1}{2}$ ist. Dann ist

$$\phi(v, v) = 1 - 2 \cdot \frac{x_i}{\sqrt{\phi(f_i, f_i)}} + \sum_{k,j=1}^n x_k \cdot x_j \cdot \phi(b_k, b_j) < S.$$

Also ist $\sqrt{\phi(f_i, f_i)} = \phi(f_i, \frac{f_i}{\sqrt{\phi(f_i,f_i)}}) = v_i + x_i < M + 1$.

Eine andere Möglichkeit der Abschätzung der Einträge in der Adjungierten erhält man, indem man das Maximum M der $(n-1) \times (n-1)$ Hauptminoren der Grammatrix. Die Einträge der Adjungierten sind dann $\leq M$.

Da beide Verfahren aber sehr aufwendig sind, ist es i. a. sinnvoller die Maximalwerte zu schätzen.

Hat man keine Abschätzung für die Einträge in der Inversen der Grammatrix, so wird nach je S Schritten (S ist frei wählbar) eine Probe durchgeführt, wo getestet wird, ob die Inverse modulo p^i mit einem Vielfachen der Inversen der Grammatrix übereinstimmt: $Gr \cdot A_i = \lambda_i \cdot Id$ für ein $\lambda_i \in \mathbb{Z}$?

Ist diese Gleichung erfüllt, dann ist $Gr^{-1} = \lambda_i^{-1} \cdot A_i$.

Das Rechnen modulo p wurde mit einer Indextabelle realisiert: Zunächst bestimmt man einen Erzeuger $prim$ der zyklischen, multiplikativen Gruppe $\mathbb{F}_p^*$. Für die Primzahlen ≤ 101 sind diese Erzeuger im Programm aufgeführt. In der Praxis wird wohl kaum der Fall eintreten, daß alle Primzahlen ≤ 101 die Determinante der Grammatrix teilen, deshalb wurde auf eine Berechnung des primitiven Elementes verzichtet. In der ersten Zeile der Indextabelle speichert man in der i-ten Spalte die Werte $prim^i \pmod p$, in der zweiten Zeile die Indizes j von $prim^i + 1 \equiv prim^j \pmod p$. Ist $prim^i + 1 \equiv 0 \pmod p$, so ist j irgendein Sonderwert (z. B. $j = -1$). Nun ist die Multiplikation und Division sehr leicht zu realisieren ($prim^n \cdot prim^m = prim^{n+m}$), indem man einfach an der geeigneten Stelle der Indextabelle nachschaut und benutzt, daß $prim^i \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow i$ ist ein Vielfaches von $p - 1$. Die zweite Zeile benötigt man zur Addition zweier Zahlen. Für $n \leq m$ ist

$$prim^n + prim^m = prim^n \cdot (prim^{m-n} + 1).$$

B) **'Tripelreduktion'**

Algorithmus zur Verkleinerung der Einträge in der Inversen der Grammatrix.

Das automatisierte Verfahren probiert alle möglichen injektiven Tripel $(i, j, k) \in \{1, \ldots, n\}^3$ durch und versucht durch Addition eines geeigneten Vielfachen der j-ten und k-ten Zeile bzw. Spalte zur i-ten Zeile bzw. Spalte der Grammatrix, das Maximum der Einträge in der Inversen zu verkleinern, ohne das Maximum der Einträge in der Grammatrix zu vergrößern. Dabei ist zu beachten, daß die Inverse kontragredient transformiert wird: Addiert man das λ-fache der j-ten und das ν-fache der k-ten Zeile bzw. Spalte zur i-ten Zeile bzw. Spalte der Grammatrix, so muß man das $-\lambda$-fache der i-ten Zeile bzw. Spalte zur j-ten Zeile bzw. Spalte der Inversen und das $-\nu$-fache der i-ten Zeile bzw. Spalte zur k-ten Zeile bzw. Spalte der Inversen addieren.

Nachdem zuletzt alle Tripel ohne Erfolg nocheinmal durchprobiert wurden, bricht der Algorithmus ab.

Ich habe auch ein Programm 'quadred' geschrieben, das alle möglichen Quadrupel $(i, j, k, l) \in \{1, \ldots, n\}^4$ durchprobiert und versucht durch Addition eines geeigneten Vielfachen j-ten, k-ten und l-ten Zeile bzw. Spalte zur i-ten Zeile bzw. Spalte der Grammatrix, das Maximum der Einträge in der Inversen zu verkleinern, ohne das Maximum der Einträge in der Grammatrix zu vergrößern. Die Quadrupelreduktion lieferte bei den betrachteten Gittern (E_8, E_{12}, E_{16}, Leech-Gitter ...) aber kein besseres Ergebnis als die Tripelreduktion, sie hat nur eine um den Faktor n (=Dimension des Gitters) höhere Laufzeit.

C) **'Automorphismenbestimmung'**

Ausgehend von eine reduzierten Grammatrix Gr, addiere ich ein Vielfaches eines Basisvektors zu einem anderen Basisvektor so, daß die neue Grammatrix wieder reduziert ist. Die durch solche wiederholten Transformationen entstehenden neuen Grammatrizen merke ich mir in einer doppeltverzeigerten Liste. Zu jeder Grammatrix speichere ich zusätzlich, durch welche Transformation ich sie aus ihrem Vorgänger erhalten habe. Dabei genügt es, nur solche Grammatrizen abzuspeichern, welche nicht durch Permutation der Basisvektoren mit Vorzeichenwechsel ineinander überführt werden können, also ein Repräsentantensystem der Bahnen unter der Operation (durch Konjugation) der Gruppe aller monomialen Matrizen. Erhält man eine Grammatrix N, die in derselben Bahn, wie eine schon abgespeicherte Grammatrix A liegt, so hat man einen Automorphismus des Gitters (bzgl. der Ausgangsmatrix Gr) gefunden:
Man führt die Transformationen, die man benötigt hat, um A aus Gr zu erhalten, hintereinander aus. Dann führt man die Inversen der Transformationen, mit denen man aus Gr die Matrix N erhalten hat in umgekehrter Reihenfolge aus. Die Komposition (das Produkt der Matrizen) ist dann ein Automorphismus des Gitters (als Matrix bzgl. der Ausgangsbasis geschrieben).

(I.3) E_8, ein Beispiel.

Am Beispiel von E_8 wird eine Bestimmung der charakteristisch reduzierten Grammatrix durchgeführ

a) Definition

E_8 ist ein 8-dimensionales Gitter, das von Vektoren der Quadratlänge 2 erzeugt wird, ein sogenanntes Wurzelgitter. Ein *Wurzelgitter* ist ein ganzzahliges Gitter, das von Vektoren der Quadratlänge 1 und 2 erzeugt wird. Die Isometrieklassen von Wurzelgittern sind bekannt: Es gibt drei "Typen" von einfachen (d.h. nicht in zwei orthogonale Summanden zerlegbaren) geraden Wurzelgittern: A_n, D_m und E_l $(n, m \in \mathbb{N},\ m \geq 4,\ l \in \{6, 7, 8\})$, wo der Index die Dimension des Wurzelgitters (:= Dimension des zugrundeliegenden $\mathbb{Q}$-Vektorraums) angibt. Recht handliche Definitionen der einzelnen Wurzelgitter fand ich in [7]. Danach kann man die Wurzelgitter $L \subseteq \mathbb{Q}^{n\times 1}$ mit Standardskalarprodukt ϕ wie folgt beschreiben:

$$A_n = \{\begin{pmatrix} x_0 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{tr} \in \mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} x_i = 0\}$$

$$D_m = \{\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix}^{tr} \in \mathbb{Z}^{n} \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ gerade } \}$$

$$E_8 = \{\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_8 \end{pmatrix}^{tr} \in \mathbb{Q}^8 \mid \sum_{i=1}^{8} x_i \text{ gerade, alle } x_i \in \mathbb{Z} \text{ oder alle } x_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\}$$

Für ein festes $v_0 \in E_8$ mit $\phi(v_0, v_0) = 2$ ist

$$E_7 = \{v \in E_8 \mid \phi(v, v_0) = 0\}.$$

Die Isometrieklasse des durch v_0 definierten Gitters E_7 ist unabhängig von der Wahl von $v_0 \in E_8$, da nämlich die Automorphismengruppe ($= \{\varphi \in O(V, \phi) \mid \varphi(L) \subseteq L\}$) eines einfachen Wurzelgitters transitiv auf den Vektoren der Quadratlänge 2 operiert. Wählt man z.B. $v_0 = \frac{1}{2}(1 \ldots 1) \in E_8$, so ist

$$E_7 = \{\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_8 \end{pmatrix}^{tr} \in E_8 \mid \sum_{i=1}^{8} x_i = 0\}$$

E_6 ist auch ein Teilgitter von E_8 definiert durch:

$$E_6 = \{\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_8 \end{pmatrix}^{tr} \in E_8 \mid x_1 + x_8 = x_2 + \ldots + x_6 = 0\}$$

Die folgende Tabelle stellt einige charakteristische Merkmale der einzelnen einfachen Wurzelgitter dar:

	$\lvert L_2 \rvert$	$OR,\ n\ gerade$	$OR,\ n\ ungerade$	det
A_n	$(n+1)n$	$\frac{n}{2}$	$\frac{n+1}{2}$	$n+1$
D_n	$2(n^2-n)$	n	$n-1$	4
E_6	72	4		3
E_7	126		7	2
E_8	240	8		1

In dieser Tabelle bezeichnet $\lvert L_2 \rvert$ die Anzahl der Vektoren der Quadratlänge 2, *det* die Determinante eine Grammatrix des Gitters und *OR* den *Orthogonalrang* des Wurzelgitters, das ist die maximale Anzahl von Vektoren der Quadratlänge 2, die paarweise aufeinander senkrecht stehen.

b) Anwendung der Reduktionsalgorithmen

Eine mögliche Gitterbasis von E_8 ist

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

mit Grammatrix

$$Gr = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Inverse dieser Matrix ist:

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 0 & 6 & 2 & 8 & 4 & 0 \\ 10 & 0 & 30 & 24 & 18 & 12 & 6 & 15 \\ 8 & 6 & 24 & 20 & 15 & 10 & 5 & 12 \\ 6 & 2 & 18 & 15 & 12 & 8 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 12 & 10 & 8 & 6 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Dies schien mir keine optimale Grammatrix zu sein. Um die Einträge in der Inversen zu verkleinern, benutzte ich den unter (I.2 A)) beschriebenen Algorithmus der Tripelreduktion.

Als Ergebnis erhielt ich folgendes Matrizenpaar:

$$\text{Grammatrix:} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Inverse:} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Es gibt also eine Grammatrix von E_8, die nur Zweien auf der Diagonalen hat und deren Inverse auch nur Zweien auf der Diagonalen hat (eine 2-Matrix). Dies ist ein optimales Ergebnis, kleiner

kann man die Diagonalelemente der Grammatrix und ihrer Inversen nicht machen. Inwieweit ist diese Matrix eindeutig?
Um dies herauszufinden, versuchte ich die Matrix in eine andere 2-Matrix umzuformen, indem ich Paarreduktion auf die zugrundeliegende Basis anwandte, d. h. eine Zeile der Grammatrix zu einer anderen addierte (bzw. von einer anderen subtrahierte) und die entsprechende Spaltenoperation durchführte und dann die kontragrediente Umformung auf die Inverse anwandte. Dabei führte ich nur solche Umformungen aus, die innerhalb der Menge der 2-Matrizen durchführbar waren, bei denen sich also die Diagonalelemente der Grammatrix und ihrer Inversen nicht änderten. Dadurch erhält man folgende 42 verschiedene Grammatrizen von E_8. (Als verschieden bezeichne ich zwei Grammatrizen, wenn sie nicht durch Vertauschen von Zeilen und der entsprechenden Spalten, bzw. Multiplikation einzelner Zeilen und der entsprechenden Spalten mit -1 ineinander überführt werden können.):

c) Die 42 reduzierten Grammatrizen von E_8

$$Gr\ 1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 7 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,9 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,9 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,10 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,10 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,11 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,11 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 12 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 12 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 13 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\ 13 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 14 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\ 14 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 15 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\ 15 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 16 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\ 16 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 17 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\ 17 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 18 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\ 18 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 19 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 19 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 20 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 20 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 21 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 21 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 22 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 22 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 23 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 23 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 24 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 24 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,25 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,25 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,26 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,26 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,27 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,27 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,28 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,28 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 29 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 29 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,30 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\,30 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,31 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Inv\,31 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,32 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\,32 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,33 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Inv\,33 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,34 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\,34 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,35 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\,35 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\,36 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Inv\,36 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 37 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 37 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 38 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 38 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 39 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 39 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 40 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 40 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 41 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 41 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Gr\ 42 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad Inv\ 42 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Die charakteristischen Polynome der reduzierten Grammatrizen von E_8

$$F_1(x) = x^8 - 16x^7 + 89x^6 - 234x^5 + 320x^4 - 234x^3 + 89x^2 - 16x + 1 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot f_2$$
$$F_2(x) = x^8 - 16x^7 + 90x^6 - 240x^5 + 335x^4 - 248x^3 + 93x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_3 \cdot h_4'$$
$$F_3(x) = x^8 - 16x^7 + 91x^6 - 240x^5 + 328x^4 - 240x^3 + 91x^2 - 16x + 1 = a_1^2 \cdot c_3 \cdot c_3'$$
$$F_4(x) = x^8 - 16x^7 + 91x^6 - 244x^5 + 336x^4 - 244x^3 + 91x^2 - 16x + 1 = a_1^2 \cdot a_2 \cdot j_4$$
$$F_5(x) = x^8 - 16x^7 + 91x^6 - 246x^5 + 344x^4 - 252x^3 + 93x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot c_5$$
$$F_6(x) = x^8 - 16x^7 + 92x^6 - 240x^5 + 326x^4 - 240x^3 + 92x^2 - 16x + 1 = a_1^4 \cdot d_2^2$$
$$F_7(x) = x^8 - 16x^7 + 92x^6 - 244x^5 + 334x^4 - 244x^3 + 92x^2 - 16x + 1 = a_1^2 \cdot e_6$$
$$F_8(x) = x^8 - 16x^7 + 92x^6 - 252x^5 + 357x^4 - 262x^3 + 95x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_3 \cdot i_4'$$
$$F_9(x) = x^8 - 16x^7 + 93x^6 - 248x^5 + 335x^4 - 240x^3 + 90x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_3' \cdot h_4$$
$$F_{10}(x) = x^8 - 16x^7 + 93x^6 - 252x^5 + 344x^4 - 246x^3 + 91x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_2 \cdot c_5'$$
$$F_{11}(x) = x^8 - 16x^7 + 93x^6 - 252x^5 + 349x^4 - 252x^3 + 93x^2 - 16x + 1 = a_4 \cdot f_4$$
$$F_{12}(x) = x^8 - 16x^7 + 93x^6 - 256x^5 + 358x^4 - 256x^3 + 93x^2 - 16x + 1 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot f_2$$
$$F_{13}(x) = x^8 - 16x^7 + 93x^6 - 254x^5 + 355x^4 - 258x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_7$$
$$F_{14}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 258x^5 + 355x^4 - 254x^3 + 93x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_7'$$
$$F_{15}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 256x^5 + 354x^4 - 256x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = a_1^2 \cdot d_2 \cdot d_4$$
$$F_{16}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 256x^5 + 355x^4 - 256x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = c_4^2$$
$$F_{17}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 258x^5 + 359x^4 - 258x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = a_8$$
$$F_{18}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 260x^5 + 363x^4 - 260x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = a_2 \cdot b_6$$
$$F_{19}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 264x^5 + 375x^4 - 264x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = a_2^3 \cdot e_2$$
$$F_{20}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 260x^5 + 366x^4 - 264x^3 + 95x^2 - 16x + 1 = b_8$$
$$F_{21}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 262x^5 + 369x^4 - 264x^3 + 95x^2 - 16x + 1 = a_3 \cdot a_5'$$
$$F_{22}(x) = x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 262x^5 + 372x^4 - 270x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot b_2 \cdot b_5$$
$$F_{23}(x) = x^8 - 16x^7 + 95x^6 - 262x^5 + 357x^4 - 252x^3 + 92x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot a_3' \cdot i_4$$
$$F_{24}(x) = x^8 - 16x^7 + 95x^6 - 264x^5 + 366x^4 - 260x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = b_8'$$
$$F_{25}(x) = x^8 - 16x^7 + 95x^6 - 264x^5 + 369x^4 - 262x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = a_3' \cdot a_5$$
$$F_{26}(x) = x^8 - 16x^7 + 95x^6 - 266x^5 + 374x^4 - 266x^3 + 95x^2 - 16x + 1 = a_2 \cdot c_6$$
$$F_{27}(x) = x^8 - 16x^7 + 95x^6 - 268x^5 + 382x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = b_4 \cdot e_4'$$
$$F_{28}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 270x^5 + 372x^4 - 262x^3 + 94x^2 - 16x + 1 = a_1 \cdot b_2 \cdot b_5'$$
$$F_{29}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 382x^4 - 268x^3 + 95x^2 - 16x + 1 = b_4' \cdot e_4$$
$$F_{30}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 382x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = a_1^2 \cdot b_2^2 \cdot d_2$$
$$F_{31}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 382x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = c_8$$
$$F_{32}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 383x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = c_8$$
$$F_{33}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 384x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = d_8$$
$$F_{34}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 386x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = d_4^2$$
$$F_{35}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 386x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = d_4^2$$

$$F_{36}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 274x^5 + 391x^4 - 274x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = a_2 \cdot d_6$$
$$F_{37}(x) = x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 274x^5 + 391x^4 - 278x^3 + 97x^2 - 16x + 1 = b_2 \cdot a_3 \cdot b_3'$$
$$F_{38}(x) = x^8 - 16x^7 + 97x^6 - 278x^5 + 391x^4 - 274x^3 + 96x^2 - 16x + 1 = b_2 \cdot a_3' \cdot b_3$$
$$F_{39}(x) = x^8 - 16x^7 + 97x^6 - 280x^5 + 401x^4 - 280x^3 + 97x^2 - 16x + 1 = a_4 \cdot g_4$$
$$F_{40}(x) = x^8 - 16x^7 + 98x^6 - 288x^5 + 418x^4 - 288x^3 + 98x^2 - 16x + 1 = b_2 \cdot d_4$$
$$F_{41}(x) = x^8 - 16x^7 + 98x^6 - 288x^5 + 419x^4 - 288x^3 + 98x^2 - 16x + 1 = a_2^2 \cdot c_2^2$$
$$F_{42}(x) = x^8 - 16x^7 + 100x^6 - 304x^5 + 454x^4 - 304x^3 + 100x^2 - 16x + 1 = b_2^4$$

Dabei bezeichnen die Symbole x_i folgende über $\mathbb{Q}$ irreduzible Faktoren:

$$a_1 := x - 1 \quad (1)$$
$$a_2 := x^2 - 3x + 1 \quad (5)$$
$$b_2 := x^2 - 4x + 1 \quad (12)$$
$$c_2 := x^2 - 5x + 1 \quad (21)$$
$$d_2 := x^2 - 6x + 1 \quad (32)$$
$$e_2 := x^2 - 7x + 1 \quad (45)$$
$$f_2 := x^2 - 8x + 1 \quad (60)$$
$$a_3 := x^3 - 5x^2 + 6x - 1 \quad (49)$$
$$a_3' := x^3 - 6x^2 + 5x - 1 \quad (49)$$
$$b_3 := x^3 - 6x^2 + 7x - 1 \quad (257)$$
$$b_3' := x^3 - 7x^2 + 6x - 1 \quad (257)$$
$$c_3 := x^3 - 6x^2 + 8x - 1 \quad (229)$$
$$c_3' := x^3 - 8x^2 + 6x - 1 \quad (229)$$
$$a_4 := x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1 \quad (725)$$
$$b_4 := x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1 \quad (1.125)$$
$$b_4' := x^4 - 8x^3 + 14x^2 - 7x + 1 \quad (1.125)$$
$$c_4 := x^4 - 8x^3 + 15x^2 - 8x + 1 \quad (4.752)$$
$$d_4 := x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 8x + 1 \quad (4.352)$$
$$e_4 := x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 9x + 1 \quad (1.957)$$
$$e_4' := x^4 - 9x^3 + 18x^2 - 8x + 1 \quad (1.957)$$
$$f_4 := x^4 - 9x^3 + 17x^2 - 9x + 1 \quad (16.317)$$
$$g_4 := x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 9x + 1 \quad (5.125)$$
$$h_4 := x^4 - 9x^3 + 19x^2 - 10x + 1 \quad (35.537)$$
$$h_4' := x^4 - 10x^3 + 19x^2 - 9x + 1 \quad (35.537)$$
$$i_4 := x^4 - 9x^3 + 21x^2 - 10x + 1 \quad (23.377)$$
$$i_4' := x^4 - 10x^3 + 21x^2 - 9x + 1 \quad (23.377)$$
$$j_4 := x^4 - 11x^3 + 28x^2 - 10x + 1 \quad (120.224)$$
$$a_5 := x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 33x^2 + 11x - 1 \quad (117.688)$$
$$a_5' := x^5 - 11x^4 + 33x^3 - 30x^2 + 10x - 1 \quad (117.688)$$

$$b_5 := x^5 - 11x^4 + 34x^3 - 36x^2 + 11x - 1 \quad (223.952)$$
$$b_5' := x^5 - 11x^4 + 36x^3 - 34x^2 + 11x - 1 \quad (223.952)$$
$$c_5 := x^5 - 12x^4 + 39x^3 - 41x^2 + 12x - 1 \quad (3.808.388)$$
$$c_5' := x^5 - 12x^4 + 41x^3 - 39x^2 + 12x - 1 \quad (3.808.388)$$
$$a_6 := x^6 - 13x^5 + 53x^4 - 84x^3 + 53x^2 - 13x + 1 \quad (140.664.064)$$
$$b_6 := x^6 - 13x^5 + 54x^4 - 85x^3 + 54x^2 - 13x + 1 \quad (77.452.544)$$
$$c_6 := x^6 - 13x^5 + 55x^4 - 88x^3 + 55x^2 - 13x + 1 \quad (45.134.912)$$
$$d_6 := x^6 - 13x^5 + 56x^4 - 93x^3 + 56x^2 - 13x + 1 \quad (25.518.160)$$
$$e_6 := x^6 - 14x^5 + 63x^4 - 104x^3 + 63x^2 - 14x + 1 \quad (364.482.560)$$
$$a_7 := x^7 - 15x^6 + 78x^5 - 176x^4 + 179x^3 - 79x^2 + 15x - 1 \quad (5.556.931.648)$$
$$a_7' := x^7 - 15x^6 + 79x^5 - 179x^4 + 176x^3 - 78x^2 + 15x - 1 \quad (5.556.931.648)$$
$$a_8 := x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 258x^5 + 359x^4 - 258x^3 + 94x^2 - 16x + 1 \quad (42.495.779.072)$$
$$b_8 := x^8 - 16x^7 + 94x^6 - 260x^5 + 366x^4 - 264x^3 + 95x^2 - 16x + 1 \quad (25.196.107.008)$$
$$b_8' := x^8 - 16x^7 + 95x^6 - 264x^5 + 366x^4 - 260x^3 + 94x^2 - 16x + 1 \quad (25.196.107.008)$$
$$c_8 := x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 383x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 \quad (9.482.305.863.680)$$
$$d_8 := x^8 - 16x^7 + 96x^6 - 272x^5 + 384x^4 - 272x^3 + 96x^2 - 16x + 1 \quad (9.680.453.632)$$

Die eingeklammerten Zahlen hinter den Faktoren der charakteristischen Polynome sind die Körperdiskriminanten ihrer Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$. Die minimalen irreduziblen Faktoren vom Grad ≤ 4 dieser charakteristischen Polynome definieren total reelle Körper minimaler Diskriminante:
$x^2 - 3x + 1$ liefert die Diskriminante 5, $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$ liefert die Diskriminante 49, $x^4 - 7x^3 + 13x^2 - 7x + 1$ liefert die Diskriminante 725.
Die Minimaldiskriminanten für total reelle Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ vom Grad 5,6,7 und 8 sind: Grad 5: 14.641, Grad 6: 300.125, Grad 7: 20.134.393, Grad 8: 282.300.416. Für die Mitteilung der Körperdiskriminanten möchte ich mich bei Herrn Prof. Pohst bedanken. (cf. M. Pohst:
'The minimum discriminant of seventh degree totally real algebraic number fields', in Number Theory and Algebra ed. by H.Zassenhaus, Academic Press 1977, 235-240
'On the computation of number fields of small discriminants including the minimum discriminants of sixth degree fields', J. of Number Theory 14 (1982), 99-117
'The minimum discriminant of totally real octic fields', (zusammen mit J. Martinet und F. Diaz y Diaz), J. of Number Theory)

Wie man sieht, bestimmt also das charakteristische Polynom die Grammatrix nicht eindeutig (bis auf Ähnlichkeitstransformation mit monomialen ganzzahlig-invertierbaren Matrizen): Die Matrizen 30 und 31, bzw. 34 und 35 haben das gleiche charakteristische Polynom, können jedoch nicht durch Vertauschen von Zeilen und Spalten und Vorzeichenwechsel ineinander überführt werden.

e) Verbindungsgraph

Aus diesen 42 Matrizen kann man einen Graphen konstruieren. Die Knoten des Graphen stehen in Bijektion zu den Matrizen. Zwei (nicht notwendig verschiedene) Knoten werden miteinander durch eine Kante verbunden, falls die eine Matrix durch Addition eines Vielfachen eines Basisvektors zu einem anderen und anschließender Ähnlichkeitstransformation mit einer monomialen ganzzahlig-invertierbaren Matrix aus der anderen hervorgeht. Man erhält den folgenden Graphen:

	1	7	13	19	25	31	37	
1	....1.	...1..	......	......	......	......	......	2
2	..1.1.	11..1.	1.....	.1....	......	......	......	7
3	.1.1..	1.1...	....1.	......	......	......	......	5
4	..1.1.	1..1.1	11....	......	.1....	......	......	8
5	11.1..	.1.1..	11...1	...1..	......	......	......	9
6	......	1.....	......	......	......	......	......	1
7	.111.1	1.1.1.	1111..	......	......	......	......	11
8	.1..1.	.1....	1...11	.111..	..1...	......	1.....	11
9	..1...	1.111.	.1....	11	......	......	......	8
10	1..11.	..1...	11...1	....1.	...1..	......	......	9
11	.1....	1.1..1	...111	..1...	1.....	..1...	......	10
12	...1..	11	11	11...1	.11.1.	1	......	12
13	.1.11.	11.1..	111.1.	.1.1..	1.....	111...	......	16
14	...11.	1.11..	111.1.	..1.11	...1..	111...	......	16
15	......	1.....	111.1.	.1...1	......	1.....	......	8
16	......	1...1.	....1.	.1...1	.1....	......	......	6
17	..1...	.1..11	11111.	.11.11	11....	11	11....	19
18	....1.	.1.111	......	.11111	1..1.1	.11...	......	15
19	......	1	......	......	......	1	......	2
20	.1....	.1...1	1.1111	.1.1..	1.1...	.111..	1.....	16
21	......	.1..1.	.1..11	..1..1	.11...	1	1.1...	12
22	....1.	.1....	1....1	.1.1..	.1...1	.11...	1.....	11
23	......	..11..	.1..11	11	1..11.	......	.1....	11
24	......	..1..1	.11111	..1.11	...11.	.111..	.1....	16
25	......	....1.	1...11	.1..1.	11..1.	1	.11...	13
26	...1..	1	...11.	..11..	1.111.	..1..1	....1.	13
27	......	.1...1	......	.11...	.11...	.111.1	1..1..	12
28	......	...1..	.1...1	11	.1.1.1	.11...	.1....	11
29	......	1	......	11	11..1.	.111.1	.1.1..	12
30	......	......	1	...1..	...1..	.1....	......	4
31	......	......	111...	......	......	......	11....	5
32	......	......	11...1	.1.1.1	..1111	.11...	111...	15
33	......	....1.	11...1	.1.1.1	.1111.	.1....	111...	15
34	......	......	......	.1...1	..1.1.	....1.	..11..	7
35	......	......	....1.	......	......	...1.1	...1..	4
36	......	1	....1.	1.1...	111.1.	11	...11.	12
37	......	.1....	....1.	.111..	..1...	111...	.111..	12
38	......	......	....1.	11	1..11.	111...	1.11..	12
39	......	......	......	..1...	1.....	.111..	11111.	10
40	......	......	......	......	..1.1.	...111	111111	11
41	......	......	......	......	.1....	1	..11..	4
42	......	......	......	......	......	......	...1..	1

Dabei stellen die Zeilen und Spalten der Tabelle die Matrizen dar. Zwei Matrizen i, j sind durch eine Kante verbunden, falls in der Tabelle in der i-ten Spalte und j-ten Zeile (bzw. in der j-ten Spalte und i-ten Zeile) eine Eins steht. In der letzten Spalte sind die Anzahlen der Einsen in der jeweiligen Zeile aufgeführt.

f) Automorphismen

Die geschlossenen Wege im Graphen entsprechen Automorphismen des Gitters, indem man die Umformungen hintereinander ausführt. (vgl. (I.2 C)))

Einige nichtmonomiale Automorphismen bzgl. der 'kleinsten' Grammatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

habe ich so gefunden: Der Weg

$$1 \to 5 \to 14 \to 10 \to 1$$

lieferte den Automorphismus

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Führt man die Umformungen

$$1 \to 10 \to 13 \to 5 \to 1$$

hintereinander aus, so findet man den Automorphismus

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und der Weg

$$1 \to 10 \to 14 \to 24 \to 14 \to 10 \to 1$$

liefert

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies sind nur einige Beispiele für Automorphismen. Mit dem unter (I.2 C)) beschriebenen Algorithmus erhält man sehr viel mehr Automorphismen.

g) Vollständigkeitsbeweis

Satz:
Es gibt genau diese 42 Grammatrizen von E_8, die nur Zweien auf der Diagonalen haben und deren Inverse auch nur Zweien auf der Diagonalen hat.

Dazu zunächst ein vorbereitendes:
Lemma:
Sei

$$G := \begin{pmatrix} A & C \\ C^{tr} & B \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$$

die Grammatrix eines Gitters, mit Matrizen $A \in \mathbb{Z}^{m\times m},\ B \in \mathbb{Z}^{(n-m)\times(n-m)},\ C \in \mathbb{Z}^{m\times(n-m)}$. (Es genügt für G vorauszusetzen, daß G symmetrisch, nichtsingulär und A invertierbar ist.) Setzt man

$$G^{-1} =: \begin{pmatrix} X & Y \\ Y^{tr} & Z \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{n\times n}$$

mit Matrizen $X \in \mathbb{Q}^{m\times m},\ Z \in \mathbb{Q}^{(n-m)\times(n-m)},\ Y \in \mathbb{Q}^{m\times(n-m)}$, so erhält man:

$$det(G) = det(A)det(Z^{-1}).$$

Beweis: (des Lemmas)
Sei

$$U := \begin{pmatrix} 1 & -A^{-1}C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$U^{tr}GU = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^{tr}A^{-1}C \end{pmatrix}.$$

Die Grammatrix des dualen Gitters, G^{-1} transformiert sich kontragredient:

$$(U^{tr}GU)^{-1} = U^{-1}G^{-1}U^{-tr}.$$

$$(U^{tr}GU)^{-1} = \begin{pmatrix} X + YC^{tr}A^{-1} + A^{-1}CY^{tr} + A^{-1}CZC^{tr}A^{-1} & Y + A^{-1}CZ \\ Y^{tr} + ZC^{tr}A^{-1} & Z \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist die Inverse der Blockdiagonalmatrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B - C^{tr}A^{-1}C \end{pmatrix}$, also muß

$$X + YC^{tr}A^{-1} + A^{-1}CY^{tr} + A^{-1}CZC^{tr}A^{-1} = A^{-1}$$
$$Y + A^{-1}CZ = Y^{tr} + ZC^{tr}A^{-1} = 0.$$

und $Z = (B - C^{tr}A^{-1}C)^{-1}$ sein. Weiter ist

$$det(G) = det(A)det(B - C^{tr}A^{-1}C) = det(A)det(Z^{-1})$$

und

$$det(G^{-1}) = det(A^{-1})det(Z).$$

Für ein unimodulares Gitter ($det(G) = det(G^{-1}) = 1$) gilt also:

$$1 = \frac{det(A)}{det(Z)}, \quad \text{folglich } det(Z) = det(A).$$

Ein weiterer Beweis für die Tatsache, daß für ein unimodulares Gitter $det(A) = det(Z)$ ist, ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Sei L ein unimodulares, ganzzahliges Gitter mit Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ und zugehöriger Grammatrix $G = (\phi(b_i, b_j))$ wie oben. Sei $F = (f_1, \dots, f_n)$ die zu B duale Basis, eine Basis von $L^{\#} = L$. Die ersten m Basisvektoren $b_1, \dots b_m$ von L erzeugen ein reines, m-dimensionales Teilgitter T von L. (Ein Teilgitter X von L heiße rein, falls eine Basis von X zu einer Basis von L ergänzt werden kann.) Das orthogonale Komplement von T in L wird von $f_{m+1}, \dots, f_n$ erzeugt:

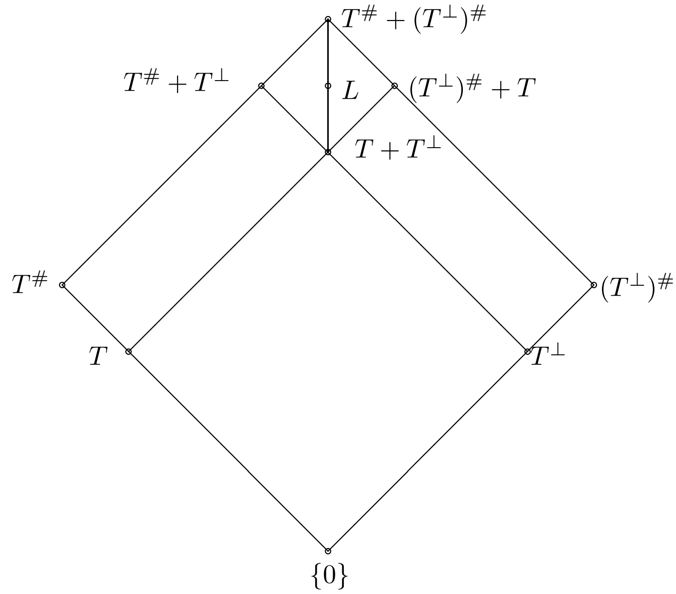
$$(\langle b_1, \dots, b_m\rangle^{\perp})_L = \langle f_{m+1}, \dots, f_n\rangle$$

Denn:

Sei $x \in L$. Dann ist $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ mit Koeffizienten $\alpha_i \in Z$.

Weiter gilt $x \in (\langle b_1, \ldots, b_m \rangle^{\perp})_L$ genau dann, wenn $0 = \phi(x, b_i) = \alpha_i$ für alle $1 \leq i \leq m$, also $x \in \langle f_{m+1}, \ldots, f_n \rangle$ ist.

Es ist $T \perp T^{\perp} =: S$ ein Teilgitter von L von endlichem Index.



Behauptung:

$$det(T) = det(T^{\perp}) = [L : S]$$

Beweis: $\varphi : L \to L^{\#} \cong Hom(L, \mathbb{Z}) : x \mapsto \phi(x, \cdot)$, wo $\phi(x, \cdot) : L \to \mathbb{Z} : y \mapsto \phi(x, y)$, ist ein Isomorphismus. φ liefert einen Homomorphismus $L \to T^{\#} \cong Hom(T, \mathbb{Z})$, indem man einen Homomorphismus $L \to \mathbb{Z}$ als Homomorphismus $T \to \mathbb{Z}$ auffaßt:

$$\varphi' : L \to T^{\#} \cong Hom(T, \mathbb{Z}) : x \mapsto \phi(x, \cdot)'$$

wo $\phi(x, \cdot)' : T \to \mathbb{Z} : y \mapsto \phi(x, y)$. Dieser Homomorphismus φ' hat als Kern $T^{\perp} = \{x \in L \mid \phi(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in T\}$. φ' ist surjektiv, da man jede lineare Abbildung $f' : T \to \mathbb{Z}$ zu einer linearen Abbildung $f : L \to \mathbb{Z}$ fortsetzen kann, wie folgt:

Eine Basis $(b_1, \ldots, b_m)$ von T läßt sich zu einer Basis $(b_1, \ldots, b_m, b_{m+1}, \ldots, b_n)$ von L ergänzen. f' ist festgelegt durch $(f'(b_1), \ldots, f'(b_m))$, f ist festgelegt durch $(f(b_1), \ldots, f(b_n))$. Jede Wahl der Bilder der Basisvektoren liefert einen Homomorphismus. Also ist φ' eine Projektion $\pi : L \to T^{\#}$. Analog erhält man die Projektion $\pi' : L \to (T^{\perp})^{\#}$. Es ist $Kern(\pi) = T^{\perp}$ und $Kern(\pi') = T$. Weiter ist $T \cap T^{\perp} = 0$. $S := T \perp T^{\perp} = Kern(\pi) \perp Kern(\pi')$ ist ein Teilgitter von L. L ist subdirektes Produkt von $T^{\#}$ und $(T^{\perp})^{\#}$.

$$L/S \cong ((T^{\perp})^{\#} + T)/(T^{\perp} + T) \cong (T^{\perp} + T^{\#})/(T^{\perp} + T) \cong T^{\#}/T \cong (T^{\perp})^{\#}/T^{\perp}$$

Also ist $[L : S] = det(T^{\perp}) = det(T)$.

<u>Nun zum eigentlichen Beweis:</u>

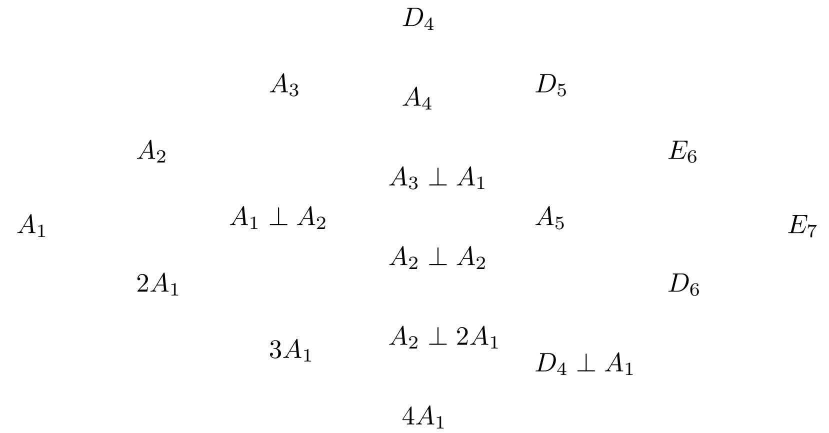
Sei $(b_1,\dots,b_8)=B$ eine Basis von E_8, die nur aus Vektoren der Quadratlänge 2 besteht, so daß $F=(f_1,\dots,f_8)$, die zu B duale Basis, auch nur aus Vektoren der Quadratlänge 2 besteht. (Solch eine Basis B nenne ich eine 2-Basis.) Dann erzeugen für $n\le 8$ je n Basisvektoren b_i bzw. f_i ein Wurzelgitter der Dimension n. Jeder Vektor erzeugt ein A_1, und je 7 Vektoren aus B bzw. F erzeugen ein E_7. Letzteres folgt, da für $\{i_1,\dots,i_8\}=\{1,\dots,8\}$

$$det(\phi(b_{i_k},b_{i_l}))_{k,l=1}^{7}det(\phi(f_{i_8},f_{i_8}))=2$$

ist und E_7 das einzige siebendimensionale Wurzelgitter der Determinante 2 ist. Allgemein gilt:

$$det(\phi(b_{i_k},b_{i_l}))_{k,l=1}^{m}det(\phi(f_{i_k},f_{i_l}))_{k,l=m+1}^{8}$$

für $\{i_1,\dots,i_8\}=\{1,\dots,8\}$. Die von einer Teilmenge der Basisvektoren erzeugten Wurzelgitter bilden eine zusammenhängenden gerichteten Graphen.



Die Richtung $A\to B$ (im Graph von links nach rechts) bedeutet hierbei, daß eine Basis von A existiert, die zu einer Basis von B durch Hinzufügen eines Vektors der Quadratlänge 2 ergänzt werden kann, so daß diese Basis zu einer 2-Basis von E_8 ergänzt werden kann. Bis zur Dimension 4 sind alle Wurzelgitter möglich, danach nur noch solche Wurzelgitter der Dimension n, deren Determinante schon unter den Determinanten der Wurzelgitter der Dimension $8-n$ vorkommt. Die Beweisidee ist nun, alle möglichen Wege im Graphen zu durchlaufen und die berechneten Grammatrizen mit den schon gefundenen zu vergleichen. Eine Grammatrix repräsentiert eine Äquivalenzklasse von Basen modulo der Automorphismengruppe des Gitters.
$G:=C_2\wr S_8$ operiert auf der Menge der Gitterbasen durch Permutation der Basisvektoren mit Vorzeichenwechsel. Zwei Grammatrizen A und A' heißen äquivalent (modulo G), falls sie Grammatrizen zu Basen in derselben Bahn von G sind. (A' entsteht aus A durch Permutation der Zeilen und entsprechender Permutation der Spalten und Multiplikation einzelner Zeilen und der entsprechenden Spalten mit -1.) Es werden im folgenden nur Repräsentanten für die einzelnen Äquivalenzklassen gesucht. Dabei starte ich bei $A_1=\langle b_1\rangle$. O. B. d. A. kann man annehmen, daß $\langle b_1,b_2\rangle\cong A_1\perp A_1=:2A_1$ ist, denn sonst gäbe es eine Grammatrix von E_8, in der keine Null vorkommt:

$$\langle b_1,b_2\rangle\cong A_2 \text{ hat Grammatrix } \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$\langle b_1,b_2,b_3\rangle\cong A_3 \text{ hat Grammatrix } A:=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$$

Folglich hat jeder Basisvektor mit jedem anderen Basisvektor das Skalarprodukt 1 oder mit jedem anderen Basisvektor das Skalarprodukt -1, (da nämlich sonst $\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$ eine Hauptteilmatrix der Grammatrix wäre) , also ist die Grammatrix von $(b_1, \ldots, b_8) =: B$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dies ist aber eine Matrix der Determinante 9, folglich ist B keine Basis von E_8. Also kann o.B.d.A. angenommen werden, daß $\langle b_1, b_2 \rangle \cong 2A_1$ ist. Weiter kann man o. B. d. A. annehmen, daß $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ zu einem der Gitter $3A_1$ oder $A_2 \perp A_1$ isometrisch ist. Denn sonst gäbe es eine 2-Matrix von E_8, in der in keiner Zeile (bzw. Spalte) 2 Nullen stünden. $\langle b_1, b_2 \rangle \cong 2A_1$ und $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle \cong A_3$ impliziert, daß die Grammatrix von (b_1, b_2, b_3) (modulo monomialer Transformationen)

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

$\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$ ist nicht zu einem in zwei orthogonale Summanden zerfallenden Gitter isometrisch, da die Grammatrix sonst mehr als zwei Nullen in einer Zeile haben würde. Mit Rechnung findet man keine Möglichkeit, daß $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \cong A_4$ ist und zwei Möglichkeiten für $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \cong D_4$ nämlich:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der möglichen Grammatrizen habe ich ein Programm benutzt, das mit einem Gauß-Algorithmus die Determinante von $\begin{pmatrix} A & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix} =: C$ ausrechnet, und dabei alle $s \in \{0, 1, -1\}^{dim}$ ausprobiert, wobei ich gewisse Nebenbedingungen an C stellte, damit nicht offensichtlich äquivalente Matrizen berechnet wurden.
(z. B. kann man annehmen, daß der erste von Null verschiedene Koeffizient von s größer als Null ist und keine 5 Nullen in einer Spalte (bzw. Zeile) von C stehen, oder falls z. B. die zweite und dritte Zeile und Spalte in A vertauschbar sind, (Vertauschen der zweiten und dritten Zeile bzw. Spalte überführt A wieder in sich, ist also ein Automorphismus des Gitters, das von den ersten $dim(A)$ Basisvektoren aufgespannt wird bezüglich dieser Basis) so kann man z. B. annehmen, daß $s_2 \leq s_3$ ist, u.ä.).
$\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \not\cong D_4 \perp A_1$, da sonst die Grammatrix mindestens 4 Nullen in einer Zeile haben würde und $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \not\cong A_5$, da der Orthogonalrang von D_4 4 und der von A_5 nur 3 ist. (In D_4 gibt es ein System von 4 paarweise aufeinander senkrecht stehenden Vektoren der Quadratlänge 2, in A_5 nur 3 solche Vektoren.) Man erhält nur eine mögliche Grammatrix für $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong D_5$, nämlich:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese kann man nicht zu einer Grammatrix von E_6 und nur auf eine Weise zu einer Grammatrix von D_6 ergänzen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix kann man nicht zu einer Grammatrix von E_7 ergänzen.

Also bleiben nur noch die folgenden Fälle zu betrachten:

$$\text{Weg 1}: \ A_1 \to 2A_1 \to 3A_1 \to 4A_1$$

$$\text{Weg 2}: \ A_1 \to 2A_1 \to 3A_1 \to 2A_1 \perp A_2$$
$$\text{Weg 3}: \ A_1 \to 2A_1 \to 3A_1 \to A_1 \perp A_3$$
$$\text{Weg 4}: \ A_1 \to 2A_1 \to 3A_1 \to D_4$$
$$\text{Weg 5}: \ A_1 \to 2A_1 \to A_1 \perp A_2 \to 2A_1 \perp A_2$$
$$\text{Weg 6}: \ A_1 \to 2A_1 \to A_1 \perp A_2 \to A_2 \perp A_2$$
$$\text{Weg 7}: \ A_1 \to 2A_1 \to A_1 \perp A_2 \to A_1 \perp A_3$$
$$\text{Weg 8}: \ A_1 \to 2A_1 \to A_1 \perp A_2 \to A_4$$
$$\text{Weg 9}: \ A_1 \to 2A_1 \to A_1 \perp A_2 \to D_4$$

Diese Wege werden im folgenden betrachtet, wobei immer angenommen werden kann, daß man nicht schon eine äquivalente Grammatrix auf einem früheren Weg betrachtet hat.

Weg 1:

Zuerst betrachte ich alle möglichen 2-Basen $(b_1, \dots b_8)$ von E_8, bei denen die ersten vier Basisvektoren paarweise senkrecht aufeinander stehen, also $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \cong 4A_1$. D.h. ich beginne mit der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und versuche diese Matrix so durch einen Spaltenvektor $s \in \{0, 1, -1\}^4$ zu ergänzen, daß die Matrix $C := \begin{pmatrix} A & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix}$ eine Grammatrix von $D_4 \perp A_1$, D_5 oder A_5 ist. Dabei scheidet die Möglichkeit, daß $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong A_5$ ist, aus, da es in A_5 nur 3 paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren der Quadratlänge 2 gibt, in $4A_1$ jedoch schon 4.(Der Orthogonalrang von A_5 ist 3, der von $4A_1$ jedoch schon 4.)

Durch Lösen der Gleichung $det(C) = 4$ bzw. 8, ($\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong D_5$ bzw. $\cong D_4 \perp A_1$) findet man (bis auf Äquivalenz modulo G) nur eine Möglichkeit für C:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong D_4 \perp A_1$$

Nun berechne ich alle Möglichkeiten für $D := \begin{pmatrix} C & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix}$, wo s wieder ein Spaltenvektor mit Einträgen $\in \{0, 1, -1\}$ (diesmal der Dimension 5) ist. Jetzt ist die Gleichung $det(D) = 4$ zu lösen, da $\langle b_1, \dots, b_6 \rangle \cong D_6$ sein muß . ($\langle b_1, \dots, b_6 \rangle \cong E_6$ ist nicht möglich, da E_6 nur den Orthogonalrang 4 hat, während es in $D_4 \perp A_1$ schon 5 paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren der Quadratlänge 2 gibt.) Von den möglichen Lösungen D, brauche ich nur diejenigen zu betrachten, bei denen von den ersten vier Einträgen von s genau drei den Betrag eins haben, da auch $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_6 \rangle \cong D_4 \perp A_1$ ein mögliches reines Teilgitter von E_8 sein muß . Es ergeben sich bis auf Äquivalenz modulo G genau zwei Möglichkeiten:

$$D1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder } D2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Jetzt suche ich nach den möglichen $E := \begin{pmatrix} Di & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix}$, wo $i \in \{1,2\}$ und $s \in \{0,1,-1\}^6$ ist mit $det(E) = 2$. Im Fall $D1$ erhält man bis auf Äquivalenz modulo G folgende drei Möglichkeiten für E:

$$E1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; E2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Im Fall $D = D2$ ergeben sich

$$E1' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; E2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$E3' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Durch Vertauschen der Zeilen und Spalten 2 und 3 und 6 und 7 und Multiplikation der vierten Spalte und Zeile mit -1, kann man $E2'$ in $E2$ überführen. Durch Vertauschen der Zeilen und Spalten 2 und 4 und 5 und 7 und anschließender Multiplikation der zweiten Spalte und Zeile mit -1, kann man $E3'$ in $E3$ überführen. Die verbleibenden 4 möglichen Grammatrizen für E_7: $E1, E2, E3$ und $E1'$ kann man zu folgenden Grammatrizen von E_8 ergänzen:

$$F1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$F1' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F2' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F3' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F4' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$F1'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F2'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F3'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} F4'' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$F1''' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F2''' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F3''' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F4''' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Inversen dieser Matrizen haben alle nur Zweien auf der Diagonale. $F1$ ist äquivalent zur Matrix Nummer 42 (modulo G), $F2, F3, F4, F1'$ sind alle vier äquivalent zur Matrix Nummer 40 (modulo G), $F2'$ entspricht der Matrix Nummer 41, $F3', F3'', F4'', F1''', F2''', F4'''$ der Matrix Nummer 36, und $F3'''$ der Matrix Nummer 19 und zwar wie folgt:

Vertauschen der 5-ten und 7-ten Zeile bzw. Spalte und der vierten und zweiten Zeile bzw. Spalte und Multiplikation der dritten Zeile bzw. Spalte von $F3$ überführt $F3$ in $F2$; Vertauschen der 6-ten und 7-ten Zeile bzw. Spalte und der dritten und zweiten Zeile bzw. Spalte und Multiplikation der vierten Zeile bzw. Spalte von $F4$ überführt $F4$ in $F2$.

Ändert man die Basis $B = (b_1, \ldots, b_8)$ mit Grammatrix $F1' = (\phi(b_i, b_j))_{i,j=1}^8$ in $B' = (b_4, b_3, b_2, -b_1, b_8, -b_7, b_6, b_5) = (b_1', \ldots b_8')$, so ist $(\phi(b_i', b_j'))_{i,j=1}^8 = F2$. Diese Umformung wird mit

$$F1'[4, 3, 2, -1, 8, -7, 6, 5] = F2$$

abgekürzt. Entsprechend werden im folgenden alle Elemente von $C_2 \wr S_8$ abgekürzt. In dieser Notation ist dann:

$$F4'[2, 3, 1, 4, 5, 8, -6, 7] = F2$$

$$F1''[2, 1, 3, -4, 5, -6, 8, 7] = F2$$

$$F2[2, 3, 4, -1, -7, -6, 5, 8] = Gr40$$

$$F1[4, 3, 2, 1, 5, 6, -7, 8] = Gr42$$

$$F2'[1, 3, 4, -2, -8, 6, 5, 7] = Gr41$$

$$F2''[4, 2, 3, 1, 5, -7, -6, 8] = Gr35$$

$$F3''[-2, 1, 4, -3, 6, -5, -8, 7] = F3'$$

$$F4''[2, 1, 3, -4, 5, -6, 8, 7] = F3'$$

$$F1'''[4, 3, 1, -2, 7, -8, 5, 6] = F3'$$

$$F2'''[3, 4, 1, -2, 7, -8, 5, 6] = F3'$$

$$F4'''[2, 4, 1, -3, 6, 8, 5, 7] = F3'$$

$$F3'[3, -4, 2, -1, -6, 5, 7, 8] = Gr36$$

$$F3'''[4, 3, 2, 1, 5, 6, 7, 8] = Gr19$$

Weg 1 ist damit beendet.

Weg 2:

Nun betrachte ich alle möglichen 2-Basen $B = (b_1, \ldots, b_8)$ von E_8, bei denen die ersten 4 Basisvektoren ein Gitter erzeugen, das isomorph zu $A_2 \perp 2A_1$ ist. O.B.d.A. sei die Grammatrix von (b_1, b_2, b_3, b_4)

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sucht man jetzt alle Spaltenvektoren $s \in \{0, 1, -1\}$ mit

$$det \begin{pmatrix} A & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix} = 8$$

(man versucht, die Basis (b_1, b_2, b_3, b_4) von $4A_1 \perp A_2$ zu einer Basis $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ von $D_4 \perp A_1$ zu ergänzen), so findet man keine Lösung. Folglich gibt es keine 2-Basis B von E_8 mit $\langle b_1, \ldots b_4 \rangle \cong 2A_1 \perp A_2$ und $\langle b_1, \ldots b_5 \rangle \cong A_1 \perp D_4$. Also gibt es überhaupt keine 2-Basis B von E_8, bei der vier Vektoren aus B ein Gitter erzeugen, das isomorph zu $2A_1 \perp A_2$ ist.

Denn sonst seien diese vier Vektoren o.B.d.A. b_1, b_2, b_3, b_4 mit Grammatrix A. (Jede andere Grammatrix einer Basis aus Vektoren der Quadratlänge 2 von $2A_1 \perp A_2$ ist äquivalent (modulo G) zu A.) Sei weiter $F = (f_1, \ldots, f_8)$ die zu B duale Basis. Dann ist auch F eine 2-Basis und $\langle f_5, f_6, f_7, f_8 \rangle \cong 2A_1 \perp A_2$.

$(det(\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle) = det(\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle^{\perp}) = det(\langle f_5, f_6, f_7, f_8 \rangle)\ )$

Außerdem ist $\langle f_4, f_5, f_6, f_7, f_8 \rangle \cong A_1 \perp D_4$,
da $det(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle) = det(3A_1) = 8 = det(\langle b_1, b_2, b_3 \rangle^{\perp}) = det(\langle f_4, f_5, f_6, f_7, f_8 \rangle)$ ist. Also erhält man, indem man eventuell F umordnet und einzelne Basisvektoren aus F mit -1 multipliziert, eine 2-Basis F' von E_8, deren erste vier Basisvektoren die Grammatrix A haben und deren erste fünf Basisvektoren ein Gitter erzeugen, welches isomorph zu $A_1 \perp D_4$ ist. Folglich müßte ich bei der obigen Suche nach s eine Lösung gefunden haben, was aber nicht der Fall war. Also gibt es keine 2-Basis von E_8, bei der vier Basisvektoren ein Gitter, isomorph zu $2A_1 \perp A_2$ erzeugen. Damit ist auch der Weg 5 abgeschlossen.

Weg 3:

Ich nehme an, daß $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine 2-Basis von E_8 ist, deren erste drei Vektoren paarweise aufeinander senkrecht stehen, also ein zu $3A_1$ isometrisches Gitter erzeugen und deren erste vier Vektoren ein zu $A_3 \perp A_1$ isometrisches Gitter erzeugen. Die Grammatrix von (b_1, b_2, b_3, b_4) kann o. B. d. A. als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

angenommen werden. Dann gibt es 6 Ergänzungen von A zu Grammatrizen von $D_4 \perp A_1$, A_5 ind D_5 nämlich:

$$C1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C6 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C1$ und $C2$ haben Determinante 8, $C3$ und $C4$ haben Determinante 6 und $C5$ und $C6$ haben Determinante 4. $C1$ und $C2$ können nicht zu Grammatrizen von E_6 ergänzt werden, da der Orthogonalrang von $D_4 \perp A_1$ 5 ist, E_6 jedoch nur Orthogonalrang 4 hat. Aus den Ci ergeben sich folgende 6-dimensionale Matrizen der Determinanten 4 und 3:
$C1$ liefert folgende vier Grammatrizen von D_6:

$$D1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C2$ liefert folgende Grammatrizen von D_6:

$$D5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D6 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D9 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $C3$ findet man folgende Matrizen der Determinante 4:

$$D10 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D11 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D12 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und der Determinante 3:

$$D13 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D14 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D15 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $C4$ ergeben sich folgende noch nicht betrachtete Matrizen der Determinante 4:

$$D16 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D17 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D18 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und folgende der Determinante 3:

$$D19 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D20 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D21 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C5$ und $C6$ liefern keine neuen Matrizen.

Man findet folgende Vektoren s_j^{tr}, so daß

$$\begin{pmatrix} Di & s_j \\ s_j^{tr} & 2 \end{pmatrix} =: Ej$$

die Determinante 2 hat und die Matrizen Ej nicht schon vorher betrachtet worden sind:
Zu $D1$ findet man:

$$s_1^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_2^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_3^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_4^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_5^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_6^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D2$ ergeben sich:

$$s_7^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_8^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_9^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{10}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{11}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{12}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{13}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{14}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{15}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D3$ findet man:

$$s_{16}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{17}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{18}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{19}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{20}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{21}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D4$ ergeben sich:

$$s_{22}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{23}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{24}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{25}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{26}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{27}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{28}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{29}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{30}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{31}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D5$ findet man:

$$s_{32}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{33}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{34}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{35}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{36}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{37}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{38}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D6$ findet man:

$$s_{39}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{40}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{41}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{42}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{43}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{44}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{45}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D7$ ergeben sich:

$$s_{46}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{47}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{48}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{49}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{50}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{51}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{52}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{53}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{54}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{55}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D8$ findet man:

$$s_{56}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{57}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{58}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{59}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{60}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{61}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{62}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{63}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{64}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D9$ findet man folgende neue Matrizen:

$$s_{65}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{66}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{67}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D10$ liefert keine neuen Äquivalenzklassen von Matrizen und zu $D11$ findet man:

$$s_{68}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{69}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{70}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$s_{71}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D12$ findet man:

$$s_{72}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$s_{73}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{74}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{75}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$D13$ liefert keine neuen Matrizen und zu $D14$ ergeben sich:

$$s_{76}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{77}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$D15$ liefert die Matrix mit:

$$s_{78}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D16$ findet man:

$$s_{79}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{80}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D17$ ergeben sich:

$$s_{81}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{82}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{83}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{84}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D18$ findet man:

$$s_{85}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{86}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{87}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$s_{88}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$D19$ liefert:

$$s_{89}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s_{90}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zu $D20$ findet man die Matrix mit

$$s_{91}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$D21$ liefert:

$$s_{92}^{tr} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dabei habe ich mich bemüht, Matrizen die durch Vertauschen von Zeilen und Spalten bzw. Multiplikation einzelner Zeilen und Spalten mit -1 auseinander hervorgehen, nicht mehrfach aufzuführen. Aus diesen 92 Matrizen hat der Computer folgende nicht äquivalente 2-Matrizen von E_8 konstruiert:

$$F1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F9 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F10 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F11 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F12 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F13 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F14 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F15 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F16 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F17 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F18 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F19 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F20 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F21 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F22 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F23 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F24 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F25 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F26 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F27 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F28 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$F1[5,1,4,6,-3,2,8] = Gr\ 32$$
$$F2[1,-5,4,3,-2,6,7,8] = Gr\ 28$$
$$F3[1,3,2,4,-5,6,8,7] = Gr\ 30$$
$$F4[6,-3,5,7,-8,1,2,-4] = Gr\ 38$$
$$F5[1,-5,-4,3,2,6,8,7] = Gr\ 33$$
$$F6[1,5,4,2,-3,6,8,7] = Gr\ 24$$
$$F7[1,3,-2,-2,4,6,8,7] = Gr\ 22$$
$$F8[1,-5,4,3,-2,6,7,8] = Gr\ 18$$
$$F9[1,-3,2,5,-4,6,8,7] = Gr\ 23$$
$$F10[1,3,2,5,4,7,8,6] = Gr\ 37$$
$$F11[1,5,3,2,4,7,8,6] = Gr\ 29$$
$$F12[4,7,8,6,1,3,2,5] = Gr\ 40$$
$$F13[1,2,3,4,5,8,7,6] = Gr\ 31$$
$$F14[1,3,2,4,5,7,8,6] = Gr\ 14$$
$$F15[1,-5,-2,-3,-4,7,8,6] = Gr\ 34$$
$$F16[1,-2,-3,-5,-4,7,8,6] = Gr\ 20$$
$$F17[1,3,2,4,5,8,7,6] = Gr\ 25$$
$$F18[1,-2,-3,-4,-5,7,8,6] = Gr\ 15$$
$$F19[1,2,3,5,4,7,6,8] = Gr\ 27$$
$$F20[1,2,3,4,5,6,7,8] = Gr\ 21$$
$$F21[1,2,3,5,4,6,8,7] = Gr\ 26$$
$$F22[1,-3,-2,-5,-4,6,8,7] = Gr\ 17$$
$$F23[1,2,3,5,4,6,7,8] = Gr\ 12$$
$$F24[1,3,2,5,4,6,7,8] = Gr\ 8$$
$$F25[1,2,3,4,5,7,6,8] = Gr\ 13$$
$$F26[1,2,3,4,5,8,6,7] = Gr\ 10$$
$$F27[1,2,3,4,5,7,6,8] = Gr\ 5$$
$$F28[1,3,2,4,5,7,8,6] = Gr\ 39$$

Hiermit ist Weg 3 beendet.

<u>Weg 4:</u>

Sei $B = (b_1, \ldots, b_8)$ eine 2-Basis von E_8, mit $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle \cong 3A_1$ und $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \cong D_4$. Bis auf Äquivalenz (modulo G) hat dann (b_1, b_2, b_3, b_4) die Grammatrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ist $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong D_4 \perp A_1$, so hätten die ersten fünf Basisvektoren von B die Grammatrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und es ist $\langle b_1, b_2, b_3, b_5 \rangle \cong 4A_1$. Diese Basis habe ich dann schon in Weg 1 betrachtet. Weiter ist $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \ncong A_5$, da der Orthogonalrang von A_5 nur drei ist, während es in D_4 schon 4 paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren der Quadratlänge 2 gibt. Bleibt also nur noch die Möglichkeit, daß $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong D_5$ ist. Also ist die Gleichung $det(C) = 4$ mit $C = \begin{pmatrix} A & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix}$ $s \in \{0, 1, -1\}^6$ zu lösen. Dabei kann angenommen werden, daß die ersten drei Einträge von s nicht Null sind, da sonst $\langle b_1, b_2, b_3, b_5 \rangle$ in zwei orthogonale Summanden zerfällt, ich jedoch schon alle möglichen 2-Basen B, deren erste drei Vektoren ein Gitter isomorph zu $3A_1$ erzeugen und bei denen von den ersten vier Vektoren von B einer auf den anderen drei senkrecht steht, in den Wegen 1 bis 3 betrachtet habe. Solche s gibt es nicht, also ist die Betrachtung von Weg 4 schon beendet.
Unter Weg 2 war schon gezeigt worden, daß es keine Möglichkeit für Weg 5 gibt, also kommen wir nun zu Weg 6.

<u>Weg 6:</u>

Ich betrachte alle 2-Basen $B = (b_1, \ldots, b_8)$ von E_8 mit $\langle b_1, b_2 \rangle \cong 2A_1$, $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle \cong A_1 \perp A_2$ und $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \cong A_2 \perp A_2$. Die Grammatrix von (b_1, b_2, b_3, b_4) kann o.B.d.A. als

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

angenommen werden. Da alle Fälle von 2-Basen von E_8, bei denen drei Basisvektoren ein zu $3A_1$ isomorphes Gitter erzeugen schon betrachtet wurden, kann man nun annehmen, daß es in B keine drei Vektoren gibt, die paarweise aufeinander senkrecht stehen. Mit dieser Bedingung ergibt sich keine Möglichkeit, dafür, daß $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong D_5$ ist, aber man findet zwei mögliche Grammatrizen für $\langle b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \rangle \cong A_5$, nämlich

$$C1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$C1$ kann zu folgenden Grammatrizen von D_6 bzw. E_6 ergänzt werden:

$$D1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad D4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D6 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hierbei sind $D1, D2$ und $D3$ Grammatrizen von D_6 und $D4, D5, D6$ und $D7$ Grammatrizen von E_6. Zu $C2$ findet man

$$D1' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D2' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D3' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D4' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$D1'$ und $D2'$ sind Grammatrizen von D_6, $D3'$ und $D4'$ sind Grammatrizen von E_6. Weiter ist $D2'$ äquivalent (modulo G) zu $D2$:

$$D2'[2, 1, 4, 3, 6, 5] = D2$$

und $D3'$ ist äquivalent zu $D5$:

$$D3'[1, -2, -3, 4, 6, 5] = D5.$$

Unter der Bedingung, daß je drei Vektoren der Basis B, nicht paarweise aufeinander senkrecht stehen und je fünf Vektoren der Basis B kein zu $A_2 \perp A_3$ isomorphes Gitter erzeugen (dieses Gitter kommt nämlich nicht im Graphen1 vor) und je 6 Vektoren der Basis B ein Gitter erzeugen, das nicht in zwei paarweise orthogonale Gitter zerfällt, kann man $(b_1, \dots b_6)$ auf folgende Arten zu einer Basis von E_7 ergänzen:

Zu $D1$ erhält man die Möglichkeiten:

$$E1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $D2$ ergeben sich:

$$E2' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E6 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E9 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E10 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E11 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $D3$ findet man:

$$E12 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E7' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E13 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E14 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E5' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad E15 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $D4$ ergibt sich:

$$E8' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $D5$ erhält man:

$$E6' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E3' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E15' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $D6$ findet man:

$$E1' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E9' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E13' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$D7$ kann man ergänzen zu:

$$E12' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E4'' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $D1'$ ergeben sich:

$$E6'' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E16 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E17 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E18 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E19 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$D4'$ liefert:

$$E17' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E11'' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E11''' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist Ei' zu Ei äquivalent, und zwar erhält man Ei, indem man die 6. und 7. Zeile bzw. Spalte von Ei' vertauscht. Weiter ist

$$E4''[1,3,2,4,7,6,5] = E4$$

$$E6''[1,2,3,4,7,6,5] = E6$$

$$E11''[1,2,3,4,7,6,5] = E11$$

$$E11'''[2,1,4,3,7,6,5] = E11$$

Versucht man nun $E1$ bis $E19$ zu 2-Matrizen von E_8 zu ergänzen, so erhält man:

$$F1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F5 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F6 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F7 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F8 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F9 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F10 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F11 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} F12 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F13 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} F14 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F15 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} F16 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F17 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F18 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F19 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F20 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F21 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F22 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F23 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F24 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F25 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F26 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F27 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} F28 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F29 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F30 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F31 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} F32 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F33 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} F34 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F35 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F36 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F37 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} F38 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F39 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} F40 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F41 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} F42 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F43 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es ergeben sich folgende nicht äquivalente Matrizen:

$$F1[3,4,1,6,5,2,7,8] = Gr\ 16$$

$$F2[3,4,6,1,5,2,7,8] = Gr\ 11$$

$$F9[4,5,2,3,7,1,6,8] = Gr\ 7$$

$$F12[1,2,3,8,4,6,5,7] = Gr\ 9$$

$$F16[1,2,3,7,4,5,6,8] = Gr\ 4$$

$$F19[3,4,1,7,2,5,6,8] = Gr\ 2$$

$$F30[1,2,3,4,5,6,8,7] = Gr\ 6$$

Die anderen $F\ i$ liegen jeweils in einer der Äquivalenzklassen dieser sieben Matrizen. Weg 6 ist hiermit abgeschlossen.

Weg 7:

$$\langle b_1, b_2, b_3\rangle \cong A_1 \perp A_2 \text{ und } \langle b_1, b_2, b_3, b_4\rangle \cong A_1 \perp A_3$$

Die Grammatrix von (b_1, b_2, b_3, b_4) hat also o. B. d. A. die Form:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ oder } A' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ oder } A'' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wenn A'' die Grammatrix von (b_1, b_2, b_3, b_4) ist, so ist $\langle b_1, b_2, b_4\rangle \cong 3A_1$. Dann habe ich die Basis $B = (b_1, \ldots, b_8)$ aber schon betrachtet. Weiter ist $det(A') = 0$, also ist A die Grammatrix von (b_1, b_2, b_3, b_4). Gesucht ist nun also eine Matrix $C = \begin{pmatrix} A & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix}$ mit $det(C) = 8, 6$ oder 4. Es kann angenommen werden, daß in s höchstens ein Eintrag Null ist, denn sonst wäre z. B. $s_1 = s_2 = 0$, so wäre $\langle b_1, b_2, b_5\rangle \cong 3A_1$. Falls $s_2 = s_3 = 0$ ist, so ist $\langle b_1, b_5\rangle \perp \langle b_2, b_3\rangle$, und ich habe die Basis B schon betrachtet. Dann gibt es (bis auf Äquivalenz modulo G) genau zwei Lösungen:

$$C1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } C2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hierbei ist $det(C1) = 6$ und $det(C2) = 8$. Nun suche ich nach Lösungen $D = \begin{pmatrix} Ci & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix}$ mit $det(D) = 3$ oder 4, $s \in \{0, 1 - 1\}^5$, $i \in \{1, 2\}$. Es kann angenommen werden, daß die ersten drei Einträge von s nicht Null sind, da $\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_6\}$ unter den möglichen fünfelementigen Teilmengen von B vorkommen muß . Für $C1$ ergeben sich die Möglichkeiten

$$D1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } D2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

der Determinante 3 und

$$D3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

der Determinante 4 Für $C2$ findet man:

$$D3' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad D4' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

der Determinante 3. Es ist

$$D3'[1, -2, -3, -4, 6, 5] = D3 \text{ und } D4'[1, 2, 3, 4, 6, 5] = D4.$$

Versucht man die Basis $(b_1, \dots, b_6)$ zu einer Basis von E_7 zu ergänzen, so daß $(b_1, \dots, b_7)$ möglicherweise zu einer noch nicht betrachteten 2-Basis von E_8 ergänzt werden kann, so findet man folgende Gram-matrizen:
Zu $D1$:

$$E1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $D2$ findet man:

$$E1' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E2' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E3' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Für $D3$ findet man:

$$E1'' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E2'' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und zu $D4'$ ergibt sich

$$E1'' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$E1$ kann auf zwei Arten zu einer 2-Matrix von E_8 ergänzt werden:

$$F1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $E2$ findet man:

$$F3=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&1&-1&1&-1\\ 0&1&2&1&1&-1&1&-1\\ 0&1&1&2&1&-1&0&-1\\ 1&1&1&1&2&0&1&0\\ 1&-1&-1&-1&0&2&0&1\\ 1&1&1&0&1&0&2&0\\ 1&-1&-1&-1&0&1&0&2 \end{pmatrix} \quad F4=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&1&-1&1&1\\ 0&1&2&1&1&-1&1&1\\ 0&1&1&2&1&-1&0&1\\ 1&1&1&1&2&0&1&1\\ 1&-1&-1&-1&0&2&0&0\\ 1&1&1&0&1&0&2&1\\ 1&1&1&1&1&0&1&2 \end{pmatrix}$$

und zu $E1'$ findet man

$$F5=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&1&1&-1&-1\\ 0&1&2&1&1&1&-1&-1\\ 0&1&1&2&1&1&0&-1\\ 1&1&1&1&2&1&0&0\\ 1&1&1&1&1&2&0&0\\ 1&-1&-1&0&0&0&2&1\\ 1&-1&-1&-1&0&0&1&2 \end{pmatrix}$$

$E2'$ läßt sich zu

$$F6=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&-1&1&1&1\\ 0&1&2&1&-1&1&1&1\\ 0&1&1&2&-1&0&1&1\\ 1&-1&-1&-1&2&0&0&0\\ 1&1&1&0&0&2&1&1\\ 1&1&1&1&0&1&2&1\\ 1&1&1&1&0&1&1&2 \end{pmatrix} \quad F7=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&1&-1&1&-1\\ 0&1&2&1&1&-1&1&-1\\ 0&1&1&2&0&-1&1&-1\\ 1&1&1&0&2&0&1&0\\ 1&-1&-1&-1&0&2&0&1\\ 1&1&1&1&1&0&2&0\\ 1&-1&-1&-1&0&1&0&2 \end{pmatrix}$$

ergänzen und zu $E3'$ findet man

$$F8=\begin{pmatrix} 2&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&2&1&1&1&1&1&-1\\ 0&1&2&1&1&1&1&-1\\ 0&1&1&2&1&1&0&-1\\ 1&1&1&1&2&1&1&0\\ 1&1&1&1&1&2&1&0\\ 1&1&1&0&1&1&2&0\\ 1&-1&-1&-1&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$F1[8,4,5,7,1,6,2,3]=Gr\ 7$$
$$F2[1,4,2,3,8,6,5,7]=Gr\ 3$$
$$F3[7,-4,-6,8,1,5,2,3]=Gr\ 7$$
$$F4[1,4,2,3,7,6,5,8]=Gr\ 3$$
$$F5[-7,4,5,6,-1,-8,2,3]=Gr\ 7$$
$$F6[1,4,2,3,6,5,7,8]=Gr\ 3$$
$$F7[5,4,-8,-6,1,7,2,3]=Gr\ 7$$
$$F8[1,4,2,3,7,8,5,6]=Gr\ 3$$

Weg 7 ist hiermit abgeschlossen

<u>Weg 8:</u>

Nun betrachte ich alle möglichen 2-Basen $B = (b_1, \ldots, b_8)$ von E_8 mit $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle \cong A_1 \perp A_2$ und $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle \cong A_4$, die ich nicht schon in einem der früheren Fälle betrachtet habe.
$\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ hat die Grammatrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösen der Gleichung

$$det \begin{pmatrix} A & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix}$$

liefert bis auf Äquvalenz (modulo G) zwei Grammatrizen für $\langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$, nämlich:

$$A1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$A2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Im folgenden kann angenommen werden, daß in keiner Zeile der Grammatrix $B^{tr}B$ von E_8 mehr als ($\geq$) 3 Nullen sind, da es sonst vier Basisvektoren aus B gibt, die ein vierdimensionales Gitter erzeugen, von dem ein orthogonaler Summand abgespalten werden kann. Alle Möglichkeiten solcher Basen habe ich schon betrachtet. Für eine Grammatrix von $(b_1, \ldots, b_5)$ ergeben sich zu $A1$ die folgenden Möglichkeiten:

$$C1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

der Determinante 4 und keine Möglichkeit der Determinante 6 oder 8. Zu $A2$ ergeben sich folgende neue Möglichkeiten:

$$C1' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C2' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C3' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad C4' := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ebenfalls der Determinante 4 und keine neuen Möglichkeiten der Determinate 6 oder 8. Die Ci und Ci' kann man zu Grammatrizen von E_6 ergänzen, sie liefern keine neuen Grammatrizen von D_6.

Es ergeben sich folgende Grammatrizen von E_6:
Zu $C1$:

$$D1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} D2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $C2$ findet man:

$$D3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} D4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} D6 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $C3$ und $C4$ findet man keine neuen Möglichkeiten und zu $C1'$ ergeben sich:

$$D7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} D8 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $C2'$ findet man:

$$D9 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} D10 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D11 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $C3'$ findet man:

$$D12 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} D13 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D14 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Zu $C4'$ ergibt sich noch

$$D15 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Grammatrizen kann man zu folgenden neuen Grammatrizen von E_7 ergänzen:

$$E1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E3 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E4 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E5 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad E6 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$E7 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Diese Grammatrizen kann man zu folgenden zwei neuen 2-Matrizen von E_8 ergänzen:

$$F1 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dabei ist

$$F1[1,2,3,6,4,5,7,8] = Gr\ 1$$

$$F2[1,2,3,8,4,5,7,6] = Gr\ 6$$

Damit ist Weg 8 beendet.

Für Weg 9 gibt es keine Möglichkeit, d. h. es gibt kein $s \in \{0,1,-1\}^3$ mit

$$det \begin{pmatrix} A & s \\ s^{tr} & 2 \end{pmatrix} = 4$$

wo A wie bei Weg 8 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ definiert ist.

Damit ist der Beweis beendet.

Inwieweit ist er zuverlässig?
Das Durchlaufen der Wege wurde weitestgehend 'von Hand' durchgeführt, der Computer berechnete nur die Vektoren s, die die Ausgangsmatrix zu einer symmetrischen Matrix der jeweiligen Determinante ergänzten. Das Streichen äquivalenter oder schon vorher betrachteter Matrizen habe ich 'von Hand' vorgenommen. Dabei können natürlich Fehler auftreten. Aber abgesehen davon, daß ich mich bemüht habe, sehr sorgfältig zu arbeiten und alle Wege noch einmal nachkontrolliert habe, würde eine neue (nicht unter den 42 gefundenen Matrizen vorkommende) Matrix eine neue Zusammenhangskomponente im Graphen bedeuten. Das heißt: diese Matrix kommt nicht alleine vor, mit ihr habe ich alle durch wiederholte Paarreduktion innerhalb der Menge der 2-Matrizen aus ihr hervorgehenden Matrizen und deren Inverse übersehen. Dies erscheint mir doch unwahrscheinlich.

(II.4) Weitere Beispiele.

Das Gitter E_8 war nur ein Beispiel. Man kann auch Grammatrizen von anderen Gittern auf eine Normalform bringen. Gegeben eine Grammatrix Gr eines Gitters. Gr läßt sich im allgemeinen nicht so leicht invertieren, eventuell sind auch die Einträge in der Grammatrix sehr groß. Um die Einträge zu verkleinern und auch eine halbwegs ansehnliche Inverse zu erreichen, kann man zunächst einen LLL-Algorithmus anwenden. Die LLL-reduzierte Grammatrix hat meist kleinere Einträge, und auch die Inverse ist nicht allzu schlecht. Jedoch treten beim Vorgang des Invertierens (z.B. durch successive Ränderung) unter Umständen sehr große Zahlen (rationale Zahlen mit großem Zähler bzw. Nenner) auf. Dies führt bei großen Dimensionen oft zu einem overflow. Um das zu vermeiden, habe ich die Matrix p-adisch invertiert. (s. (I.2 A)))

Auf das Matrizenpaar (Grammatrix und Inverse) kann man dann Tripelreduktion anwenden, um die Diagonalelemente der Inversen zu verkleinern. (vgl. (I.2 B)))

Nach der Tripelreduktion kann man annehmen, daß der zweite und vorletzte Koeffizient des charakteristischen Polynoms minimal sind. Als nächstes kann man versuchen, die Summe der 2×2 Hauptunterdeterminanten der Grammatrix zu verkleinern (also den Betrag des drittletzten Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $|a_{n-2}|$). Dazu habe ich Paarreduktion auf die Grammatrix angewandt, so daß sich $|a_{n-1}|$ und $|a_1|$ nicht änderten. Die aus der Ausgangsmatrix hervorgehenden Grammatrizen bilden einen Graphen (wie im Beispiel E_8). Unter Umständen wird der Graph sehr groß. So gibt es z.B. für das Leech Gitter (das einzige 24-dimensionale, gerade, unimodulare Gitter ohne Wurzeln) mehr als 2000 verschiedene Matrizen in einer Zusammenhangskomponente dieses Graphen. Es ist dann wohl nicht möglich, durch Ausrechnen aller charakteristischen Polynome (wie bei E_8) eine Normalform für die Grammatrix des Leech Gitter zu bestimmen. Man kann jedoch versuchen, eine Grammatrix zu finden, bei der $|a_{n-2}|$ möglichst klein ist, also beim Leech Gitter eine Grammatrix mit nur Vieren auf der Diagonale und möglichst vielen Zweien und wenigen Nullen als Nichtdiagonalelemente. Problematisch war dabei, daß man $|a_{n-2}|$ nicht monoton durch Paarreduktion innerhalb der Menge der Grammatrizen des Leech Gitters mit nur Vieren auf der Diagonalen, deren Inverse auch nur Vieren auf der Diagonalen hat, verkleinern kann. Außerdem weiß man nicht, wann eine Normalform (bzw. das Minimum von $|a_{n-2}|$) erreicht ist.

Die 'kleinste' Grammatrix, die ich für das Leech Gitter gefunden habe ist

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
4 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 4 & 0 & -2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\
1 & 2 & 0 & 4 & 0 & -2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\
1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 4 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
-1 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & -1 & -2 & 2 & 1 & 1 & -2 \\
0 & 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\
2 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 4 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 2 & -2 & 2 & 2 & -1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\
1 & -1 & 2 & -1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & 4 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -2 & 2 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & -2 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -2 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & -2 & 4 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
2 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 2 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 4 & -1 & -2 & 2 & 0 & 1 \\
-1 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & 2 & -2 & -2 & 1 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 & -2 & 1 \\
-2 & -2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 0 & 4 & 0 & -1 & -2 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 2 & -2 & -2 & 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 4
\end{array}\right)$$

mit Inverser

$$\left(\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrrr}
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 2 & 2 & -2 & -1 & 2 \\
0 & 4 & -2 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & -1 & -1 & 1 \\
0 & -2 & 4 & -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 2 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 \\
1 & 0 & -2 & 4 & 1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 2 \\
0 & 2 & -2 & 1 & 4 & 1 & 2 & -1 & -2 & 2 & 2 & -1 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & 2 \\
0 & 2 & -2 & 2 & 1 & 4 & 2 & -2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & -2 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\
1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 2 & 4 & -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
0 & -2 & 2 & -1 & -1 & -2 & -1 & 4 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -2 & 2 & 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\
1 & -2 & 2 & -1 & -2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -1 & -2 & 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 & -1 \\
0 & 1 & -2 & 1 & 2 & 1 & 1 & -2 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & -2 & -2 & 2 & 1 & -1 & -2 & 2 \\
0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & -2 & -2 & -2 & 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\
2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 1 & 2 & -2 & -2 & 1 \\
0 & 2 & -2 & 2 & 2 & 2 & 1 & -2 & -1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -1 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 \\
2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 \\
0 & 2 & -2 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & -1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \\
-2 & -2 & 2 & -2 & -1 & -2 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -1 & 4 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\
-2 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 4 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\
-2 & -1 & 1 & -2 & -1 & -2 & -2 & 2 & 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -1 & 2 & 2 & 4 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 2 & 2 & 2 & 4 & -1 & -1 & 0 & 2 & -2 \\
2 & 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -1 & 4 & 2 & -2 & -1 & 2 \\
2 & 2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & -2 & -2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 & -1 & 2 \\
-2 & -1 & 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 2 & 0 & -2 & -2 & 4 & 2 & -1 \\
-1 & -1 & 2 & -2 & -1 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -1 & -1 & -2 & 2 & 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\
2 & 1 & -2 & 2 & 2 & 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 & -2 & -2 & -2 & 2 & 2 & -1 & -2 & 4
\end{array}\right)$$

Bei dieser Grammatrix ist $|a_{n-2}| = 3704$ und $|a_2| = 3984$.

Das zugehörige charakteristische Polynom ist
$f(x) = 1 - 96 \cdot x + 3984 \cdot x^2 - 94540 \cdot x^3 + 1431764 \cdot x^4 - 14645084 \cdot x^5 + 104580160 \cdot x^6 - 532341966 \cdot x^7 + 1958664759 \cdot x^8 - 5260832792 \cdot x^9 + 10394600888 \cdot x^{10} - 15209368624 \cdot x^{11} + 16583920436 \cdot x^{12} - 13554884828 \cdot x^{13} + 8346494443 \cdot x^{14} - 3884505486 \cdot x^{15} + 1367310246 \cdot x^{16} - 362881508 \cdot x^{17} + 72027705 \cdot x^{18} - 10531434 \cdot x^{19} + 1105756 \cdot x^{20} - 79942 \cdot x^{21} + 3704 \cdot x^{22} - 96 \cdot x^{23} + x^{24}$.

Auch aus einem unvollständigen Graphen kann man aber schon Nutzen ziehen. Jeder geschlossene Weg in dem Graphen entspricht einem Automorphismus des Gitters, indem man die Umformungen hintereinander ausführt (vgl. (I.2 C))). So konnte z.B für ein sechsdimensionales Gitter ein Erzeugendensystem der Automorphismengruppe des Gitters bestimmt werden:

Als 'kleinste' Grammatrix erhielt ich:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -2 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 4 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

und Determinante 7^3. Zu dieser Grammatrix gehört folgendes Erzeugendensystem der Automorphismengruppe des Gitters:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die von diesen Matrizen erzeugte Gruppe ist isomorph zur $C_2 \times PGL(2,7)$ und hat die Ordnung $4 \cdot 168$ ist also isomorph zur Automorphismengruppe des Gitters (M. Pohst, W. Plesken: 'On maximal finite irreducible subgroups of $Gl(n,\mathbb{Z})$' Math. Comp. 31 (1977) 536-573).

Nicht für jede Grammatrix ist dieses Verfahren, Automorphismen zu finden, erfolgreich. Für die 14-dimensionale Matrix

$$\begin{pmatrix}
4 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 4 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\
1 & -1 & 4 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
2 & -1 & 1 & 4 & -2 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 \\
-1 & 2 & -1 & -2 & 4 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 2 \\
-1 & 0 & -1 & -2 & 2 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & -2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
-2 & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 1 & -2 & -2 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 4 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & 4 & 2 & -2 & -1 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & -1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 2 \\
1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -2 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 \\
1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 4
\end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix}
4 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -1 & 1 & -1 \\
-1 & 4 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & -1 \\
1 & 1 & 4 & -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & -2 \\
-1 & 1 & -1 & 4 & -1 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\
2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\
-1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 & -2 \\
1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\
2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 4 & 2 & -1 & -1 & 1 & -2 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 & -1 & 1 & 2 & -1 \\
-2 & 2 & -1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & -1 & 4 & 1 & -1 & -1 \\
-1 & 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 4 & 1 \\
-1 & -1 & -2 & 2 & -2 & -1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 4
\end{pmatrix}$$

lieferte z.B. ein unvollständiger Graph mit 200 Matrizenpaaren keinen Automorphismus.

Die Determinante dieses Gitters ist 3^7 und die Automorphismengruppe hat die Ordnung $2^6 \cdot 3^6 \cdot 7 \cdot 13$.

(A.I. Kostrikin, I.A. Kostrikin, V.A. Ufnarovskii: 'Invariant Lattices of Type G_2 and their Automorphism Groups')

Teil II: Codes

(II.1) Definitionen und Begriffe.

Im ersten Teil waren Gitter (genauer Isometrieklassen von Gittern) durch ihre Grammatrizen gegeben. Eine andere Möglichkeit, gewisse Gitter zu konstruieren, ist die Angabe eines Erzeugendensystems des Gitters über binäre Codes. Ein *(binärer linearer) Code* C, der Länge n ist ein linearer Teilraum von $\mathbb{F}_2^n$. Ein Vektor $x \in \mathbb{F}_2^n$ heißt ein *Wort*. Identifiziert man $\mathbb{F}_2^n$ mit $\mathbb{F}_2^{\{1,\ldots,n\}}$, der Menge der Abbildungen $x : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$, so kann man $x \in \mathbb{F}_2^n \equiv \mathbb{F}_2^{\{1,\ldots,n\}}$ durch seine Trägermenge $supp(x)$ angeben. Die Elemente von $supp(x) \equiv x$ geben also die Positionen der Einsen im Vektor x an. S_n operiert auf $\mathbb{F}_2^n$. Zwei Codes $C, C' \subseteq \mathbb{F}_2^n$ heißen *äquivalent*, falls ein $\pi \in S_n$ existiert mit $C = C'\pi$. Die *Automorphismengruppe* von C $Aut(C)$ ist die Gruppe aller $\pi \in S_n$ mit $C\pi = C$. Das *Gewicht* $w(c) = |c|$ eines Wortes $c \in \mathbb{F}_2^n$ ist die Anzahl der Elemente in $c \equiv supp(c)$ (die Anzahl der Einsen im Vektor c). Für $r \in \mathbb{N}$ sei $C_r := \{c \in C \mid |c| = r\}$ die Menge der Elemente von C mit Gewicht r. Das *Minimalgewicht* eines Codes C ist gleich $min\{|c| \mid c \in C\}$. Der *Gewichtszeiger* f_C von C ist das homogene Polynom $f_C(\eta, \xi) = \sum_{c \in C} \eta^{|c|}\xi^{n-|c|}$. Der *duale Code* $C^\perp$ von C ist das orthogonale Komplement von C bzgl. der Bilinearform in $\mathbb{F}_2^n$: $C^\perp := \{x \in \mathbb{F}_2^n \mid |x \cap c| \text{ gerade für alle } c \in C\}$. Nach dem Satz von MacWilliams ist der Gewichtszeiger von $C^\perp$ $f_{C^\perp}(\eta, \xi) = \frac{1}{|C|} f_C(\xi - \eta, \xi + \eta)$ [10]. Ein Code C heißt *orthogonal*, falls $|c_1 \cap c_2|$ gerade ist für alle $c_1, c_2 \in C$, also $C \subseteq C^\perp$. C heißt *selbstdual*, falls $C = C^\perp$. Ein selbstdualer Code C der Länge n hat die Dimension $\frac{n}{2}$ (da $dimC + dimC^\perp = n$) und ist gerade, d.h. $|c|$ ist gerade, für alle $c \in C$. Weiter ist $\mathbb{1} := (1, \ldots, 1) \in C^\perp = C$. Ein Code C heißt *doppelt gerade*, falls $|c| \in 4\mathbb{Z}$ für alle $c \in C$ ist.

Einem orthogonalen Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ kann man ein ganzzahliges Gitter $\Phi(C) \subseteq \mathbb{R}^n$ zuordnen:

Für zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$ das Standardskalarprodukt. Sei $(a_1, \ldots, a_n)$ eine orthogonale Basis des $\mathbb{R}^n$ mit $(a_i, a_i) = 2$. Dann ist $\Phi(C)$ das Gitter, welches von den Vektoren $a_i,\ i = 1, \ldots, n$ und $\sum_{i \in c} \frac{1}{2} a_i$ für $c \in C$ erzeugt wird. $\Phi(C)$ hat den Orthogonalrang n und ist ganzzahlig, da

$$(\sum_{i \in c} \frac{1}{2} a_i, \sum_{i \in c'} \frac{1}{2} a_i) = \frac{1}{2}|c \cap c'| \in \mathbb{Z}$$

(da C orthogonaler Code) und

$$(a_j, \sum_{i \in c} \frac{1}{2} a_i) = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_i, a_j) = 1 & j \in c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Weiter ist $\Phi(C^\perp)$ isometrisch zu $\Phi(C)^\#$, dem zu $\Phi(C)$ dualen Gitter.

Sei umgekehrt L ein ganzzahliges Gitter im $\mathbb{R}^n$ mit Orthogonalrang n. Sei $\{a_1, \ldots a_n\}$ ein System paarweise orthogonaler Wurzeln (Vektoren der Quadratlänge 2) in L und $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_{\mathbb{Z}}$ das Teilgitter von L, das von $a_1, \ldots, a_n$ erzeugt wird. Jedes Element x von L hat dann die Form $x \equiv \sum_{i \in c} \frac{1}{2} a_i\ (mod\ H)$ für ein $c \in \mathbb{F}_2^n$. Die dabei auftretenden Worte c bilden einen orthogonalen Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$ (da L ganzzahliges Gitter), für den $\Phi(C)$ isometrisch zu L ist. Es gilt:

Die Konstruktion Φ induziert eine Bijektion zwischen der Menge der Äquivalenzklassen orthogonaler Codes in $\mathbb{F}_2^n$ und der Menge der Isometrieklassen ganzzahliger Gitter in $\mathbb{R}^n$ mit Orthogonalrang n. Dabei entsprechen selbstdualen Codes unimodulare Gitter, und doppelt geraden Codes entsprechen gerade Gitter im $\mathbb{R}^n$. ([1] 1.3 Satz 3)

Durch die Konstruktion Φ erhält man also alle ganzzahligen Gitter im $\mathbb{R}^n$ mit Orthogonalrang n. Wie erhält man andere ganzzahlige Gitter?

Sei L ein gerades, unimodulares Gitter der Dimension n. (Dann ist $n \equiv 0\ (mod\ 8)$.) Sei s der Orthogonalrang von L und $\{a_1, \ldots, a_s\}$ ein maximales System orthogonaler Wurzeln in L. Dann heißt $n - s = \delta(L)$ der *Defekt* von L. $s = \epsilon(L)$ heißt auch der *Effekt* von L. Nach [1] 1.7 Satz 4 und 5 gilt für ein unimodulares, ganzzahliges Gitter L der Dimension n:

Ist n gerade, so ist $\delta(L) \notin \{1, 2, \ldots, 7, 9, 10, 11, 13\}$.

Ist n ungerade, so ist $\delta(L) \notin \{0, 1, \ldots, 6, 8, 9, 10, 12\}$.

Sei $\tilde{U} := \langle a_1, \ldots, a_s \rangle_{\mathbb{R}}$ der von $a_1, \ldots a_s$ erzeugte $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dann ist $U := \tilde{U} \cap L$ ein s-dimensionales, gerades Gitter mit Orthogonalrang s. U ist also isometrisch zu $\Phi(C)$ für einen orthogonalen, doppelt geraden Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^s$ und heißt das *Codegitter* von L. Sei $\tilde{V}$ das orthogonale Komplement von $\tilde{U}$ in $\mathbb{R}^n$, $\tilde{V} = \tilde{U}^\perp$. Dann ist $dim(\tilde{V}) = n - s = \delta(L)$ der Defekt von L. $V := \tilde{V} \cap L$ heißt das *Defektgitter* von L. V enthält keine Vektoren der Quadratlänge 2. Jedes $x \in L$ läßt sich in der Form $x = u + v$ mit $u \in U^\#, v \in V^\#$ schreiben. L ist subdirektes Produkt von $U^\#$ und $V^\#$. Also ist $det(V) = det(U)$ und $V^\#/V \cong U^\#/U$. Für $u \in U^\#$ ist das $v \in V^\#$ mit $u + v \in L$ modulo V eindeutig bestimmt: Denn seien $u + v, u + v' \in L$. Dann ist $(u + v) - (u + v') = v - v' \in L \cap V^\# = V$. Ebenso ist für $v \in V^\#$ das $u \in U^\#$ mit $v + u \in L$ modulo U eindeutig bestimmt. Man erhält also einen Isomorphismus

$$\Psi : V^\#/V \to U^\#/U : \bar{v} := v + V \mapsto \bar{u} := u + U \text{ mit } v + u \in L.$$

Aus dieser Analyse ergibt sich eine weitere Konstruktionsmöglichkeit für ein gerades, unimodulares Gitter L:

Man braucht ein Codegitter U, ein Defektgitter V und einen Isomorphismus $\Psi : V^\#/V \to U^\#/U$, so daß $L := \{x + y \mid x \in U^\#, y \in V^\#, \Psi(\bar{y}) = \bar{x}\}$ ein unimodulares, gerades Gitter ist. Insbesondere müssen U und V gerade Gitter gleicher Determinante sein, $V \cap U = \{0\}$. $U = \Phi(C)$ für einen doppelt geraden Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^s$ enthält s paarweise orthogonale Wurzeln a_i. Also ist $U^\#/U$ eine Gruppe von Exponenten 2, denn für $x \in U^\# = \Phi(C^\perp) = \langle U, \sum_{i \in c} \frac{1}{2} a_i \mid c \in C^\perp \rangle$ ist $2x \in U$.

Sei nun U ein gerades Gitter im $\mathbb{R}^n$, $U^\#/U =: \mathcal{U}$ eine Gruppe vom Exponenten 2, also ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum. Sei weiter $l : U^\#/U \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ eine Längenfunktion mit $l(\bar{u}) \equiv (u, u)\ (mod\ 2\mathbb{Z})$ für $\bar{u} := u + U \in U^\#/U$. Dann ist

a) $l(\bar{0}) = 0$ und

b) $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(\bar{u}, \bar{v}) := \frac{1}{2}(l(\bar{u} + \bar{v}) - l(\bar{u}) - l(\bar{v}))$ ist eine nichtausgeartete Bilinearform auf $\mathcal{U}$ mit Werten in $\frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit a) und b) heißt *$\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit ganzzahliger Längenfunktion.* Nach [1] 1.8 Lemma 1 ist die Dimension eines $\mathbb{F}_2$-Vektorraums mit ganzzahliger Längenfunktion gerade und es gibt genau zwei Klassen von $\mathbb{F}_2$-Vektorräumen $\mathcal{U}$ mit ganzzahliger Längenfunktion von gegebener Dimension $2m$:

1. $\mathcal{U}$ hat eine Basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m)$ mit

$$l(\mathbf{a}_i) = l(\mathbf{b}_i) = 1,\ 1 \le i \le m$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

Die Anzahl der Vektoren der Länge 0 ist $2^{2m-1} - (-2)^{m-1}$.

2. $\mathcal{U}$ hat eine Basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m)$ mit

$$l(\mathbf{a}_i) = l(\mathbf{b}_i) = 1,\ 1 \le i < m$$

$$l(\mathbf{a}_m) = l(\mathbf{b}_m) = 0$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) = 0$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0$$

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}}(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

Die Anzahl der Vektoren der Länge 0 ist $2^{2m-1} + (-2)^{m-1}$.

Solch eine Basis $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}_m)$ heißt *normiert*. Gerade Gitter U im $\mathbb{R}^n$ für die $U^\#/U$ den Exponenten 2 hat und l Werte in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ annimmt treten nur dann auf, wenn n durch 4 teilbar ist. $U^\#/U$ gehört zur ersten Klasse, falls $n \equiv 4m \ (mod\ 8)$ ist und zur zweiten Klasse, falls $n \equiv 4 + 4m \ (mod\ 8)$ ist.

Sei nun L ein gerades, unimodulares Gitter mit Defekt 8. Dann ist das Defektgitter von L $V \cong \sqrt{2}E_8$. $V^\#/V$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum mit ganzzahliger Längenfunktion von der Klasse 1. Sei $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4)$ eine normierte Basis von $V^\#/V$ und $(\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{c}_4, \mathbf{d}_4)$ eine weitere normierte Basis von $V^\#/V$. Dann gibt es einen Automorphismus von $V^\#$, der einen Automorphismus σ von $V^\#/V$ induziert, mit $\mathbf{a}_i\sigma = \mathbf{c}_i$ und $\mathbf{b}_i\sigma = \mathbf{d}_i$ für $i = 1, \ldots 4$. ([1] 1.8 Lemma 2)

Es gibt drei Bahnen der Automorphismengruppe von V auf $V^\#/V$:
Eine Bahn der Länge 1: $\{\bar{0}\}$, eine Bahn der Länge 135: $\{\bar{v} \mid l(\bar{v}) = 0, \bar{v} \neq \bar{0}\}$ und eine Bahn der Länge 120: $\{\bar{v} \mid l(\bar{v}) = 1\}$.

Sei $\{a_1, \ldots, a_{n-8}\}$ ein System paarweise orthogonaler Wurzeln in L, $\tilde{U} := \langle a_1, \ldots, a_{n-8}\rangle_{\mathbb{R}}$ und $U := \tilde{U} \cap L$ das Codegitter von L. Dann ist $U = \Phi(C)$ für eine doppelt geraden Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^{n-8}$ der Dimension $\frac{n}{2} - 8$. $U^\#/U \cong V^\#/V$ gehört auch zur ersten Klasse. Da $l(U^\#/U) \subseteq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ganzzahlig ist, ist $C^\perp$ gerade. Diese Bedingung ist gleichbedeutend damit, daß $\mathbb{1} \in (C^\perp)^\perp = C$ ist.

Sei umgekehrt C ein doppelt gerader Code der Dimension $\frac{n}{2} - 8$ in $\mathbb{F}_2^{n-8}$ mit $\mathbb{1} \in C$, $U := \Phi(C)$, $(\mathbf{c}_1, \mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{c}_4, \mathbf{d}_4)$ eine normierte Basis von $U^\#/U$ und $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{a}_4, \mathbf{b}_4)$ eine normierte Basis von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$. Durch $\Psi(\mathbf{a}_i) := \mathbf{c}_i$ und $\Psi(\mathbf{b}_i) := \mathbf{d}_i$ wird ein Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\Psi : \frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8 \to U^\#/U$$

mit $l(x) + l(\Psi(x)) = 0$ definiert. Dann ist

$$L := \Lambda(C) := \{x + y \mid x \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8, y \in U^\#, \Psi(\bar{x}) = \bar{y}\}$$

ein gerades, unimodulares Gitter vom Defekt 8. Es gilt ([1] 1.8 Satz 6):

Die Zuordnung $C \to \Lambda(C)$ definiert eine eineindeutige Abbildung der Klassen doppelt gerader Codes C der Dimension $\frac{n}{2} - 8$ in $\mathbb{F}_2^{n-8}$ mit $\mathbb{1} \in C$ auf die Isometrieklassen gerader, unimodularer Gitter in $\mathbb{R}^n$ mit Defekt 8.

Das nächste Ziel ist jetzt, 32-dimensionale, gerade, unimodulare Gitter ohne Wurzeln zu konstruieren, die zu geraden, unimodularen Gittern mit Defekt 0 oder 8 benachbart sind.

Zwei ganzzahlige Gitter $L, L' \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen *benachbart*, falls $[L : (L \cap L')] = [L' : (L \cap L')] = 2$ ist. Ist L unimodular, so erhält man L' in folgender Weise: Sei $v \in L' - L$. Dann ist $w := 2v \in L$ und $(w, w) = 4(v, v) \in 4\mathbb{Z}$. Sei

$$L^w := \{x \in L \mid (x, w) \text{ gerade }\}.$$

Dann ist

$$L' = L_w := L^w \cup (\frac{w}{2} + L^w).$$

L_w heißt die *Modifikation* von L mit w. Ist L gerade und $(w, w) \in 8\mathbb{Z}$, so ist auch L_w gerade. Ausgehend von einem beliebigen geraden (bzw. ganzzahligen) unimodularen Gitter L erhält man jedes gerade (bzw. ganzzahlige) unimodulare Gitter durch eine Kette benachbarter Gitter.

Es gibt genau fünf Isometrieklassen 32-dimensionaler, gerader, unimodularer Gitter, die zu geraden Gittern mit Defekt 0 benachbart sind. Diese sind in [1] Abschnitt 2 klassifiziert und von der Form $\Phi(C)_v$, wo C einer der fünf (bis auf Äquivalenz einzigen doppelt geraden, selbstdualen) Codes RM,QR,G,U oder F in $\mathbb{F}_2^{32}$ ist und $v = \sum_{i=1}^{32} \frac{1}{2}a_i$.

Für ein 32-dimensionales, gerades, unimodulares Gitter L sei

$$\nu(L) := min\{\delta(L_v) \mid v \in L, (v, v) \equiv 0 \ (mod\ 8)\}$$

das Minimum der Defekte zu L benachbarter, gerader Gitter. Die 32-dimensionalen, geraden, unimodularen Gitter L ohne Wurzeln mit $\nu(L) = 8$ sind alle von der Form $L = \Lambda(C)_w$ für einen

8-dimensionalen, doppelt geraden Code $C \subseteq \mathbb{F}_2^{24}$ mit $\mathbb{1} \in C$. Damit L keine Wurzeln hat, kann man o. B. d. A. $w = \frac{3}{2}a_1 - \sum_{i=2}^{24} \frac{1}{2}a_i$ wählen. L hat genau dann keine Wurzeln, wenn $\Lambda(C)$ das Wurzelsystem $24A_1$ hat. Dies ist genau dann der Fall, wenn $C_4 = C_2^\perp = \emptyset$ ist. Diese beiden Bedingungen bestimmen den Gewichtszeiger von C eindeutig:

$$(*) f_C(\eta, \xi) = \xi^{24} + 39 \cdot \xi^{16}\eta^8 + 176 \cdot \xi^{12}\eta^{12} + 39 \cdot \xi^8\eta^{16} + \eta^{24}$$

$$f_{C^\perp}(\eta, \xi) = \xi^{24} + 90 \cdot \xi^{20}\eta^4 + 960 \cdot \xi^{18}\eta^6 + 6159 \cdot \xi^{16}\eta^8 + 14400 \cdot \xi^{14}\eta^{10} +$$
$$22316 \cdot \xi^{12}\eta^{12} + 14400 \cdot \xi^{10}\eta^{14} + 6159 \cdot \xi^8\eta^{16} + 960 \cdot \xi^6\eta^{18} + 90 \cdot \xi^4\eta^{20} + \eta^{24}$$

Ein Code C mit Gewichtszeiger (*) heißt *speziell*, falls eine Menge $d \subseteq \{1, \ldots, 24\}$ existiert mit $|d| = 4$ und $|\{c \in C_8 \mid d \subseteq c\}| = 5$. Ein spezieller Code C heißt *gerade*, falls $|d \cap c|$ gerade ist für alle $c \in C$ und sonst *ungerade*. Gemäß [1] 2.5 gilt:

Bis auf Äquivalenz gibt es genau 2 spezielle gerade Codes S_1 und S_2 und einen speziellen ungeraden Code S_3.

Wählt man $d = \{1, 2, 3, 4\}$ und setzt man

$$d_i := \{1, 2, 3, 4, 1 + 4i, 2 + 4i, 3 + 4i, 4 + 4i\} \quad 1 \leq i \leq 5,$$

so ist

$$S_1 \sim \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, c_1, c_2, c_3\rangle$$

mit

$$c_1 = \{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22\}$$
$$c_2 = \{1, 2, 5, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$$
$$c_3 = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 19, 21, 23\}$$
$$S_2 \sim \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, c_1, c_2', c_3'\rangle$$

mit

$$c_2' = \{1, 2, 5, 6, 9, 11, 13, 15, 18, 19, 22, 23\}$$
$$c_3' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23\}$$

und

$$S_3 \sim \langle d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, c_1, c_3', c_1''\rangle$$

mit

$$c_1'' = \{2, 3, 4, 5, 9, 13, 17, 21\}$$

Für einen Code C mit Gewichtszeiger (*) ist $\Lambda(C)_w$ genau dann zu einem geraden Gitter mit Defekt 0 benachbart wenn C ein spezieller gerader Code ist, also $C \sim S_1$ oder S_2. Dabei ist $(\Lambda(S_1))_w \cong \Phi(U)_v$ und $(\Lambda(S_2))_w \cong \Phi(G)_v$.

In [4] hat Herr Prof. Koch weitere fünf (nichtspezielle) Codes mit Gewichtszeiger (*) angegeben:

$$C_1 = \langle P_1, P_2, P_3, P_4', P_5', P_6', P_7', P_8'\rangle$$

mit

$$P_1 := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}\ ,\ P_2 := \{9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\},$$
$$P_3 := \{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\},$$
$$P_4' := \{9, 10, 11, 12, 17, 18, 19, 20\}\ ,\ P_5' := \{9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 22\},$$
$$P_6' := \{1, 2, 3, 4, 9, 11, 13, 15\},$$
$$P_7' := \{1, 2, 5, 6, 17, 19, 21, 23\}\ ,\ P_8' := \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 17, 19\}.$$
$$C_i = \langle P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6^i, P_7^i, P_8^i\rangle \quad 2 \leq i \leq 5$$

mit

$$P_4 := \{1, 2, 3, 4, 17, 18, 19, 20\}\ ,\ P_5 := \{5, 6, 9, 10, 11, 12, 21, 22\},$$

$$P_6^2 := \{1,2,7,8,13,14,17,18\}\ ,\ P_7^2 := \{3,5,9,10,15,16,19,21\},$$
$$P_8^2 := \{1,7,9,11,13,15,17,23\},$$
$$P_6^3 := \{1,2,3,7,13,14,17,23\}\ ,\ P_7^3 := \{1,2,9,10,13,15,17,18\},$$
$$P_8^3 := \{1,3,4,5,9,11,19,21\},$$
$$P_6^4 := \{1,2,9,10,13,14,17,18\}\ ,\ P_7^4 := \{1,7,9,15,19,21,23,24\},$$
$$P_8^4 := \{3,5,11,13,17,21,22,23\},$$
$$P_6^5 := \{1,2,5,7,9,13,17,18\}\ ,\ P_7^5 := \{1,3,4,5,10,14,19,23\},$$
$$P_8^5 := \{1,3,11,15,17,19,21,23\}.$$

Frau C. Gohlisch fand weitere vier Codes mit Gewichtszeiger (*) (briefliche Mitteilung durch Herrn Prof. Koch):

$$G_i := \langle x_1, \ldots, x_7, x_8^i \rangle,\ 1 \le i \le 4.$$

Dabei sind

$$x_1 := \{1,\ldots,24\},\ x_2 := \{1,\ldots,12\},\ x_3 := \{1,\ldots,6,13,\ldots,18\}$$
$$x_4 := \{1,2,3,7,8,9,13,14,15,19,20,21\},\ x_5 := \{1,4,7,10,13,16,19,22\},$$
$$x_6 := \{2,5,8,11,14,17,20,23\},\ x_7 := \{1,4,7,11,13,17,21,24\},$$
$$x_8^1 := \{1,5,8,12,15,17,19,23\},$$
$$x_8^2 := \{1,4,8,12,15,16,19,23\},$$
$$x_8^3 := \{1,6,8,10,13,17,19,24\},$$
$$x_8^4 := \{1,5,8,11,15,18,19,23\},$$

Also sind durch $L_i := \Lambda(C_i)_w\ ,\ L'_j := \Lambda(G_i)_w,\ 1 \le i \le 5,\ 1 \le j \le 4$ und $L''_i := \Lambda(S_i)_w\ ,\ 1 \le i \le 3$ zwölf unimodulare, gerade, 32-dimensionale Gitter ohne Wurzeln gegeben, die zu geraden, unimodularen Gittern mit Defekt 8 benachbart sind. Welche Eigenschaften haben diese Gitter? Woran kann man sie wiedererkennen?

Die *Theta-Reihe* eines Gitters L ist definiert als

$$\Theta_L(z) := \sum_{x \in L} q^{\frac{(x,x)}{2}}\ ,\ q := e^{2\pi i z}.$$

Für ein gerades unimodulares Gitter L der Dimension n ist $\Theta_L(z)$ eine Modulform vom Gewicht $\frac{n}{2}$ zur vollen Modulgruppe ([5] Kap. VII). Für $n = 32$ liegt Θ_L also in M_8, der $\mathbb{C}$-Algebra der Modulformen vom Gewicht 16. Eine Basis von M_8 ist $(E_2^4, E_2E_3^2)$, wo $E_2 = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n$ und $E_3 = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n$ ist $(\sigma_i(n) := \sum_{d|n} d^i)$. Also ist $\Theta_L(z) = xE_2^4 + (1-x)E_2E_3^2$ (der Koeffizient von q^0 ist 1). Betrachtet man ein Gitter L ohne Wurzeln, so ergibt sich x als $\frac{4}{9}$.

$$\Theta_L(z) = \frac{4}{9}E_2^4 + \frac{5}{9}E_2E_3^2 = 1 + 146880q^2 + 64757760q^3 + 4844836800q^4 + \ldots$$

D. h. L hat 146.880 Vektoren der Quadratlänge 4 und 4.844.836.800 Vektoren der Quadratlänge 8.

Für ein gerades, unimodulares, 32-dimensionales Gitter L ohne Wurzeln sei

$$f_L(i) := |\{v \in L_8 \mid \epsilon(L_v) = i\}| \text{ für } i = 1, \ldots, 32$$

die Anzahl der Vektoren $v \in L_8$, für die L_v den Orthogonalrang i hat. Für eine beliebige Wurzel $w \in L_v$ gilt $L_v = L_{2w}$. Daher ist $g_L(i) := \frac{f_L(i)}{2i}$ eine ganze Zahl. Die Funktion g_L ist eine sehr feine Invariante des Gitter L und erfüllt die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{32} i g_L(i) = 2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 733$$

$$\sum_{i=1}^{32} i^2 g_L(i) = 2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 17^2$$

$$\sum_{i=1}^{32} i^3 g_L(i) = 2^{14} \cdot 3^7 \cdot 5^2 \cdot 17$$

Für die Gitter L mit $\nu(L) = 0$ hat Herr Prof. Koch die Funktion g_L schon ausgerechnet. Für einige der Gitter L mit $\nu(L) = 8$ wird dies im folgenden durchgeführt:

Sei $v \in L_8$. Dann ist das Wurzelsystem von L_v vom Typ

$$(1 + \frac{h(v)}{2})A_1$$

wo $h(v) := |\{x \in L_4 \mid (x,v) = 4\}|$ ist. Die Wurzeln von L_v sind $\{\pm\frac{v}{2}, \frac{v}{2} - x \mid x \in M_v\}$, wo $M_v := \{x \in L_4 \mid (x,v) = 4\}$. Sei nun C einer der gegebenen Codes $\subseteq \mathbb{F}_2^{24}$, doppelt gerade mit Gewichtszeiger (*). Sei $w := \frac{3}{2}a_1 - \sum_{i=2}^{24} \frac{1}{2}a_i = 2a_1 \sum_{i=1}^{24} \frac{1}{2}a_i$ und $L = \Lambda(C)_w$ das zu C gehörige 32-dimensionale, unimodulare Gitter ohne Wurzeln. $x = \sum_{i=1}^{24} x_i a_i + b \in \Lambda(C)$ liegt in $\Lambda(C)^w \Leftrightarrow$ (x,w) ist gerade $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{24} x_i + 4 \cdot x_1$ ist gerade $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{24} x_i$ gerade (da $x_1 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$).

(II.2) Kurzbeschreibung der Berechnung der Funktionen g_Λ.

Zur Berechnung der Funktion g_Λ für ein Gitter $\Lambda = \Lambda(C)_w$ wie oben bestimme ich zunächst die von der Wahl des Codes unabhängigen Daten:

Die Vektoren der Quadratlänge 4 und 8 werden in Typen unterteilt aufgezählt. Dazu war es notwendig, von Hand sorgfältig alle Möglichkeiten durchzugehen, verschiedene Vektoren zu Typen zusammenzufassen und solange zu suchen, bis die Anzahl der gefundenen Vektoren gleich dem entsprechenden Koeffizienten der bekannten Fourier-Entwicklung der Theta-Reihe des Gitters ist. Die Listen dieser Vektoren sind in (II.3) und (II.4) aufgeführt.

Anschließend bestimme ich ebenfalls von Hand für Repräsentanten v jedes Typs von Vektoren der Quadratlänge 8 die Mengen M_v der Vektoren der Quadratlänge 4, die mit v Skalarprodukt vier haben.

Dies geschieht in (II.5).

Die Berechnung der Funktion g_Λ erfolgt dann, indem ich zunächst mit Hilfe eines Computers für jeden Typ von Vektoren der Quadratlänge 8 die Anzahl der Vektoren v dieses Typs bestimme mit $|M_v| = H$ $(0 \leq H \leq 62)$. Die Berechnung von $|M_v|$ geschieht durch Anzahlberechnungen in den einzelnen Codes und einigen Zählungen in E_8. Es war also notwendig, für jeden Fall, den ich nicht durch theoretische Überlegungen erledigen konnte, ein Programm zu schreiben. Trotz Ausnutzung einiger Eigenschaften der Codes und des Gitters E_8 haben diese in Pascal geschriebenen Programme eine recht hohe Laufzeit (auf einer MIPS M 120) in der Größenordnung von einer Stunde.
Durch Aufsummieren der Werte für die einzelnen Typen erhält man dann die Werte für g_Λ.
Die Zwischenergebnisse sind in (II.6) und die Werte für die Funktion g_Λ für die einzelnen Codes sind in (II.7) aufgeführt.

(II.3) Vektoren der Quadratlänge 4 in L:

A) $\pm a_i \pm a_j$, $i,j \in \{1,\dots,24\}$

B) $\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i$, $u \subseteq c \in C_8, |u|$ gerade

C) $\pm(\frac{3}{4}a_j + \sum_{i\neq j} \epsilon_c(i)\frac{1}{4}a_i)$, $j \in c \in C$

D) $\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b$, $u \subseteq c \in C_6^\perp, b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c},\ (b,b) = 1,\ |u|$ ungerade

E) $\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b$, $u \subseteq c \in C_4^\perp, b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c},\ (b,b) = 2,\ |u|$ gerade

F) b , $b \in \sqrt{2}E_8,\ (b,b) = 4$

G) $-\sum_{i\notin c} \frac{1}{4}a_i + \sum_{i\in c} \frac{1}{4}a_i + b$, $c \in C_6^\perp \cup C_{10}^\perp \cup C_{14}^\perp \cup C_{18}^\perp,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ (b,b) = 1,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$

$\tilde{c}$ bezeichne für $c \in C^\perp$ die Klasse von $\sum_{i\in c} \frac{1}{2}a_i \in U^\#$ in $U^\#/U$ $(U := \Phi(C))$ und für $u \in \mathbb{F}_2^{24}$, $i \in \{1,\dots,24\}$ sei $\epsilon_u(i) := \begin{cases} 1 & i \notin u \\ -1 & i \in u \end{cases}$.

Die Anzahl der Vektoren vom Typ A) in L ist $|A)| = 12 \cdot 23 \cdot 2^2 = 1.104$.
Entsprechend gilt:

$$|B)| = 39 \cdot 2^7 = 4.992$$

$$|C)| = 2 \cdot (24 + 39 \cdot 16 + 176 \cdot 12 + 39 \cdot 8) = 6.144$$

$$|D)| = 960 \cdot 2^6 = 61.440$$

$$|E)| = 90 \cdot 16 \cdot 2^3 = 11.520$$

$$|F)| = 240$$

$$|G)| = 2 \cdot (960 + 14400 + 14400 + 960) = 61.440$$

Bei den Anzahlberechnungen habe ich benutzt, daß die Vektoren ungerader (bzw. gerader) Länge von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8 - \sqrt{2}E_8$ sich gleichmäßig auf die 120 (bzw. 135) Klassen ungerader (bzw. gerader) Länge von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8 - \{\bar{0}\}$ verteilen. In jeder Klasse ungerader Länge von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8 - \{\bar{0}\}$ gibt es also 2 Vektoren von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8 - \sqrt{2}E_8$ der Quadratlänge 1, 56 Vektoren der Quadratlänge 3, 252 Vektoren der Quadratlänge 5, etc..

In jeder Klasse gerader Länge von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8 - \{\bar{0}\}$ gibt es 16 Vektoren von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8 - \sqrt{2}E_8$ der Quadratlänge 2, 128 Vektoren der Quadratlänge 4, 448 Vektoren der Quadratlänge 6, etc.. Hierzu und auch für spätere Berechnungen habe ich die folgende Tabelle benutzt:

Norm	Anzahl	Vektoren
0	1	0^8
2	240	$1^2 0^6,\ E(\frac{1}{2}^8)$
4	2160	$20^7,\ 1^4 0^4,\ D(\frac{3}{2}\frac{1}{2}^7)$
6	6720	$21^2 0^5,\ 1^6 0^2,\ E(\frac{3}{2}^2\frac{1}{2}^6)$
8	17520	$2^2 0^6,\ 21^4 0^3,\ 1^8,\ D(\frac{3}{2}^3\frac{1}{2}^5)E(\frac{5}{2}\frac{1}{2}^7)$
10	30240	$310^6,\ 2^2 1^2 0^4,\ 21^6 0,\ D(\frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}^6),\ E(\frac{3}{2}^4\frac{1}{2}^4)$
12	60480	$31^3 0^4,\ 2^3 0^5,\ 2^2 1^4 0^2,\ E(\frac{5}{2}\frac{3}{2}^2\frac{1}{2}^5),\ D(\frac{3}{2}^5\frac{1}{2}^3)$

Tabelle "Vektoren von E_8"

Sie stammt aus [7] S.123 und gibt Repräsentanten der Vektoren der Quadratlänge ≤ 12 in E_8 an. Es wurde die Definition aus Teil I für E_8 benutzt. Alle Vektoren der Quadratlänge ≤ 12 in E_8 erhält man durch Permutation und Vorzeichenwechsel der Koordinaten der Repräsentanten. Die Symbole

D (bzw. E) bedeuten, daß man nur eine ungerade (bzw. gerade) Anzahl von Vorzeichenwechsel vornehmen darf.

Insgesamt habe ich 146.800 verschiedene Vektoren der Quadratlänge 4 in L gefunden. L hat genau 146.800 Vektoren der Quadratlänge 4, also sind die unter A)-G) aufgeführten Vektoren alle Vektoren der Quadratlänge 4 in L.

(II.4) Vektoren der Quadratlänge 8 in L:

a) $\pm 2a_i\ ,\ i \in \{1,\ldots,24\}$

b) $\pm a_i \pm a_j \pm a_k \pm a_l\ ,\ i,j,k,l \in \{1,\ldots,24\}$

c) $\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u \subseteq c \in C_{16},\ |u|$ gerade

d) $\epsilon_u(j)a_j + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u - \{j\} \subseteq c \in C_{12},\ j \notin c,\ |u \cap c|$ ungerade

e) $\epsilon_u(j)a_j + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u \subseteq c \in C_8,\ j \in c,\ |u|$ ungerade

f) $\pm a_j \pm a_k + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u \subseteq c \in C_8,\ j,k \notin c,\ |u|$ gerade

g) $\pm a_i \pm a_j + b\ ,\ i,j \in \{1,\ldots,24\},\ b \in \sqrt{2}E_8,\ (b,b) = 4$

h) $\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b\ ,\ u \subseteq c \in C_8,\ |u|$ gerade , $b \in \sqrt{2}E_8,\ (b,b) = 4$

i) $b\ ,\ b \in \sqrt{2}E_8,\ (b,b) = 8$

j) $\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b\ ,\ u \subseteq c \in C^\perp,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$

1. $c \in C_4^\perp,\ (b,b) = 6,\ |u|$ gerade
2. $c \in C_6^\perp,\ (b,b) = 5,\ |u|$ ungerade
3. $c \in C_8^\perp - C_8,\ (b,b) = 4,\ |u|$ gerade
4. $c \in C_{10}^\perp,\ (b,b) = 3,\ |u|$ ungerade
5. $c \in C_{12}^\perp - C_{12},\ (b,b) = 2,\ |u|$ gerade
6. $c \in C_{14}^\perp,\ (b,b) = 1,\ |u|$ ungerade

k) $\epsilon_u(j)a_j + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b\ ,\ u - \{j\} \subseteq c \in C^\perp,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$

1. $j \notin c \in C_4^\perp,\ (b,b) = 4,\ |u \cap c|$ ungerade
2. $j \notin c \in C_6^\perp,\ (b,b) = 3,\ |u \cap c|$ gerade
3. $j \notin c \in C_8^\perp - C_8,\ (b,b) = 2,\ |u \cap c|$ ungerade
4. $j \notin c \in C_{10}^\perp,\ (b,b) = 1,\ |u \cap c|$ gerade
5. $j \in c \in C_4^\perp,\ (b,b) = 2,\ |u|$ ungerade
6. $j \in c \in C_6^\perp,\ (b,b) = 1,\ |u|$ gerade

l) $\pm a_j \pm a_k + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b\ ,\ u \subseteq c \in C^\perp,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$

1. $j,k \notin c \in C_4^\perp,\ (b,b) = 2,\ |u|$ gerade
2. $j,k \notin c \in C_6^\perp,\ (b,b) = 1,\ |u|$ ungerade

m) $-\sum \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i + \sum_{i\in c_2} \epsilon_u(i)\frac{3}{4}a_i + b\ ,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ \tilde{u} = \Psi(\bar{b})$

1. $(b,b) = 0,\ |c_2| = 5,\ (u \in C)$
2. $(b,b) = 1,\ |c_2| = 4$
3. $(b,b) = 2,\ |c_2| = 3$
4. $(b,b) = 3,\ |c_2| = 2$
5. $(b,b) = 4,\ b \in \sqrt{2}E_8,\ |c_2| = 1,\ (u \in C)$
6. $(b,b) = 4,\ b \notin \sqrt{2}E_8,\ |c_2| = 1$
7. $(b,b) = 5,\ |c_2| = 0$

n) $-\sum \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i + \sum_{i\in c_2} \epsilon_u(i)\frac{3}{4}a_i + \epsilon_u(j)\frac{5}{4}a_j + b\ ,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ u \in C^\perp,\ \tilde{u} = \Psi(\bar{b})$

1. $(b,b)=0,\ |c_2|=2$
2. $(b,b)=1,\ |c_2|=1$
3. $(b,b)=2,\ |c_2|=0$

Für die Anzahlen gilt:

$$|a)| = 2\cdot 24 = 48$$
$$|b)| = 2^4\cdot\begin{pmatrix}24\\4\end{pmatrix} = 170.016$$
$$|c)| = 2^{15}\cdot 39 = 1.277.952$$
$$|d)| = 2^{12}\cdot 12\cdot 176 = 8.650.752$$
$$|e)| = 2^7\cdot 8\cdot 39 = 39.936$$
$$|f)| = 2^9\cdot 8\cdot 15\cdot 39 = 2.396.160$$
$$|g)| = 1104\cdot 240 = 264.960$$
$$|h)| = 4992\cdot 240 = 1.198.080$$
$$|i)| = 2.160$$
$$|j1)| = 2^3\cdot 90\cdot 448 = 322.560$$
$$|j2)| = 2^5\cdot 960\cdot 252 = 7.741.440$$
$$|j3)| = 2^7\cdot 6120\cdot 128 = 100.270.080$$
$$|j4)| = 2^9\cdot 14400\cdot 56 = 412.876.800$$
$$|j5)| = 2^{11}\cdot 22140\cdot 16 = 725.483.520$$
$$|j6)| = 2^{13}\cdot 14400\cdot 2 = 235.929.600$$
$$|k1)| = 2^4\cdot 90\cdot 20\cdot 128 = 3.686.400$$
$$|k2)| = 2^6\cdot 960\cdot 18\cdot 56 = 61.931.520$$
$$|k3)| = 2^8\cdot 6120\cdot 16\cdot 16 = 401.080.320$$
$$|k4)| = 2^{10}\cdot 14400\cdot 14\cdot 2 = 412.876.800$$
$$|k5)| = 2^3\cdot 90\cdot 4\cdot 16 = 46.080$$
$$|k6)| = 2^5\cdot 960\cdot 6\cdot 2 = 368.640$$
$$|l1)| = 2^4\cdot 90\cdot 20\cdot 19\cdot 16 = 8.755.200$$
$$|l2)| = 2^6\cdot 960\cdot 18\cdot 17\cdot 2 = 37.601.280$$
$$|m1)| = 256\cdot\begin{pmatrix}24\\5\end{pmatrix} = 10.881.024$$
$$|m2)| = 256\cdot\begin{pmatrix}24\\4\end{pmatrix}\cdot 240 = 652.861.440$$
$$|m3)| = 256\cdot\begin{pmatrix}24\\3\end{pmatrix}\cdot 2160 = 1.119.191.040$$
$$|m4)| = 256\cdot\begin{pmatrix}24\\2\end{pmatrix}\cdot 6720 = 474.808.320$$
$$|m5)| = 256\cdot 24\cdot 240 = 1.474.560$$
$$|m6)| = 256\cdot 24\cdot 17280 = 106.168.320$$
$$|m7)| = 256\cdot 30240 = 7.741.440$$
$$|n1)| = 256\cdot\begin{pmatrix}24\\2\end{pmatrix}\cdot 22 = 1.554.432$$
$$|n2)| = 256\cdot 24\cdot 23\cdot 240 = 33.914.880$$
$$|n3)| = 256\cdot 24\cdot 2160 = 13.271.040$$

Insgesamt ergibt sich genau die richtige Anzahl von Vektoren der Quadratlänge 8 in L, nämlich 4.844.836.800.

(II.5) Die Mengen M_v.

Bei der Berechnung der Mengen M_v für die Vektoren $v \in L$ der Quadratlänge 8 kann man durch Anwenden geeigneter Automorphismen einige Vorzeichen in v o.B.d.A. als positiv wählen.

Einfach auszurechnende Automorphismen sind ψ_c für $c \in \mathbb{F}_2^n$ definiert durch $\psi_c(a_i) := \epsilon_c(i)a_i$ für alle $1 \leq i \leq 24$ und $\psi_c(x) = x$ für alle $x \in L$ mit $(x, a_i) = 0$ für alle $1 \leq i \leq 24$. Nach [2] Satz 1.3 ist ψ_c genau dann ein Automorphismus von L, wenn $c \in Code(\Lambda(C))$ ist, wo der $Code(\Lambda)$ für ein Gitter Λ mit $(a_1, \ldots, a_s)$ als System orthogonaler Wurzeln definiert ist als die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^s$ mit $\sum_{i \in x} \frac{1}{2} a_i \in \Lambda$.

Zu den Vektoren v der Quadratlänge 8 gehören die folgenden Mengen M_v der Vektoren der Quadratlänge 4, die mit v das Skalarprodukt 4 haben:
(Man beachte, daß mit $x \in M_v$ auch $v - x \in M_v$ ist. Also ist $|M_v|$ gerade. Die Mengen der x und der $v - x$ sind entweder in einer Menge oder in direkt aufeinander folgenden Mengen aufgeführt.)

a) $v = \epsilon_u(i)2a_i$:

$$M_v = \{\epsilon_u(i)a_i \pm a_j \mid j \in \{1, \ldots, 24\} - \{i\}\}$$

$$|M_v| = 46$$

und die Anzahl Vektoren $v \in L_8$ vom Typ a) mit $h(v) = 46$ ist:

$$A_a(46) = 48$$

b) $v = \epsilon_u(i)a_i + \epsilon_u(j)a_j + \epsilon_u(k)a_k + \epsilon_u(l)a_l$:

$$M_v = \{\epsilon_u(m_1)a_{m_1} + \epsilon_u(m_2)a_{m_2} \mid m_1, m_2 \in \{i,j,k,l\}\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \frac{1}{2}\epsilon_t(i)a_i \mid \{i,j,k,l\} \subseteq x \in C_8,\ u = t \cap \{i,j,k,l\},\ |t| \text{ gerade }\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \frac{1}{2}\epsilon_t(i)a_i + b \mid \begin{array}{l} \{i,j,k,l\} \subseteq x \in C_6^{\perp},\ b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x} \\ u = t \cap \{i,j,k,l\},\ |t| \text{ ungerade} \end{array} \Bigg\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \frac{1}{2}\epsilon_u(i)a_i + b \mid \{i,j,k,l\} = x \in C_4^{\perp},\ b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ |u| \text{ gerade },\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x}\}$$

$$|M_v| = 6 + 2^3 \cdot A_4(\{i,j,k,l\}) + 2^2 \cdot C_4(\{i,j,k,l\}) + 16 \cdot D_4(\{i,j,k,l\}, |u|),$$

wo

$$A_4(y) := |\{x \in C_8 \mid y \subseteq x\}|$$

$$C_4(y) := |\{x \in C_6^{\perp} \mid y \subseteq x\}|$$

$$D_4(y,n) := \begin{cases} 1 & y \in C_4^{\perp},\ n \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei

$$B_1(H) := |\{y \in \{1, \ldots, 24\}^4 \mid 2 \cdot A_4(y) + C_4(y) + 4 \cdot D_4(y, 0) = H\}|$$

und

$$B_1'(H) := |\{y \in \{1, \ldots, 24\}^4 \mid 2 \cdot A_4(y) + C_4(y) = H\}|$$

Dann ist die Anzahl der Vektoren $v \in L_8$ vom Typ b) mit $h(v) = H$

$$A_b(6 + 4H) = 2^3 B_1(H) + 2^3 B_1'(H).$$

Die Berechnung der Funktionen B_1 und B_1' wie auch die der meisten anderen Funktionen B_i wurde mit Hilfe eines Computers geleistet. Die Tabellen der Funktionswerte für die einzelnen Codes sind in (II.6) aufgeführt.

c) $v = \sum_{i \in c} \epsilon_u(i) \frac{1}{2} a_i, \; u \subseteq c \in C_{16}, \; |u|$ gerade :

$$M_v = \{\sum_{i \in x} \frac{1}{2} \epsilon_u(i) a_i \mid x \in C_8, \; x \subseteq c, \; |u \cap x| \text{ gerade } \} \cup$$

$$\{\epsilon_u(j) \frac{3}{4} a_j + \sum_{i \neq j} \epsilon_x(i) \frac{1}{4} a_i \mid x \in C, \; j \in c, \; \{j\} \cap u = \{j\} - x, \; |(x \cap c) \Delta u| = 2\} \cup$$

$$\{- \sum_{i \neq j} \epsilon_x(i) \frac{1}{4} a_i + \epsilon_x(j) \frac{3}{4} a_j \mid x \in C, \; j \notin c, \; c - u = x \cap c\} \cup$$

$$\{\sum_{i \notin x} \frac{1}{4} a_i - \sum_{i \in x} \frac{1}{4} a_i + b \mid b \in (\frac{1}{\sqrt{2}} E_8)_1, \; x \in C_{ung}^{\perp}, \; \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}, \; c \cap x = u\}$$

$$|M_v| = A_8(c,u) + 2 \cdot A'(c,u) + 8 \cdot A(c,u) + 2 \cdot C(c,u),$$

wo

$$A_8(c,u) := |\{x \in C_8 \mid x \subseteq c, \; |u \cap x| \text{ gerade } \}|$$
$$A(c,u) := |\{x \in C \mid u = x \cap c\}|$$
$$A'(c,u) := |\{x \in C \mid |u \Delta (x \cap c)| = 2\}|$$
$$C(c,u) := |\{x \in C_{ung}^{\perp} \mid u = x \cap c\}|$$

Δ bezeichnet die symmetrische Differenz: $x \Delta u := (x - u) \cup (u - x)$. Mit $C_{ung}^{\perp}$ bezeichne ich die Vereinigung aller Worte $c \in C^{\perp}$ mit $|c| \equiv 2 \pmod 4$. Sei $C_c := \{x \in C \mid x \subseteq c\}$ und $C_c^{\perp} := \{x \in \mathbb{F}_2^c \mid |x \cap y| \text{ gerade für alle } y \in C_c\}$, wo $\mathbb{F}_2^c = \{f : supp(c) \to \{0,1\}\}$. Sei $H(c) := dim(C_c)$. Es ist $dim(C_c) + dim(C_c^{\perp}) = 16$, also $dim(C_c^{\perp}) = 16 - H(c)$. Die $2^{16-H(c)}$ Worte u in $C_c^{\perp}$ haben alle gerades Gewicht (da $|c \cap u|$ gerade ist). In $\mathbb{F}_2^c$ gibt es genau 2^{15} Worte geraden Gewichts. Also liegen genau $2^{15} - 2^{16-H(c)} = 2^{16-H(c)}(2^{H(c)-1} - 1)$ Worte geraden Gewichts in $\mathbb{F}_2^c - C_c^{\perp}$. Sei

$$B_2(H) := |\{(c,u) \in C_{16} \times \mathcal{P}(c) \mid A_8(c,u) + 2 \cdot A'(c,u) + 8 \cdot A(c,u) + 2 \cdot C(c,u) = H\}|.$$

Dann ist $A_c(H) = B_2(H)$.
Zur Berechnung von B_2:
Sei $c \in C_{16}, \, u \subseteq c, \; |u|$ gerade. Unterscheide 4 Fälle:

(i) Es gibt $x \in C$ mit $x \cap c = u$. Dann ist $A(c,u) = 2$ ($u = x \cap c = (x + \mathbb{1} + c) \cap c$) und $u \in C_c^{\perp}$. Weiter ist $C(c,u) = 0$, da $((C^{\perp})_{\mathbb{1}+c})_{ung} = \emptyset$, und $A'(c,u) = 0$, da C doppeltgerader Code ist. Für festes c gibt es 128 solcher u.

(ii) Es gibt $x \in C$ mit $|u \Delta (x \cap c)| = 2$. Dann überführt der Automorphismus Ψ_x u auf die 'Normalform' $\{i_1, i_2\} = u \Delta (x \cap c)$. Also zähle ich für alle 'Normalformen' $\{i_1, i_2\}$ die $x \in C$ mit $|(x \cap c) \Delta \{i_1, i_2\}| = 2$. Da $C_4 = \emptyset$, haben diese x Gewicht 8. Für jedes solche x überführt der Automorphismus Ψ_x die 'Normalform' $\{i_1, i_2\}$ in eine 'Normalform' $\{j_1, j_2\}$. Dabei ist $\{i_1, i_2\} = \{j_1, j_2\} \Leftrightarrow x \in \{0, \mathbb{1} + c\}$. Also wird jedes u $\frac{A'(c,u)}{2}$-mal gezählt. Für alle 'Normalformen' $\{i_1, i_2\} =: t$ bestimme ich $C(c,t)$. Falls $C(c,t) = 0$ ist, muß ich noch nachschauen, ob $t \in C_c^{\perp}$ liegt oder nicht. (Mit t liegen dann auch alle $t + x, \; x \in C$ in $C_c^{\perp}$, ist $t = y \cap c$ mit $y \in C_6^{\perp}$, so ist für $x \in C$ $t + x = c \cap (x + y)$ und $x + y$ liegt in der gleichen Klasse in $C^{\perp}/C$ wie y.)

(iii) Es gibt kein $x \in C$ mit $|u \Delta (x \cap c)| = 2$, aber ein $y \in C_{ung}^{\perp}$ mit $u = c \cap y$. Dann ist $|u| \neq 2$ und y liegt nicht in einer der unter (ii) betrachteten Klassen von $C^{\perp}/C$. Für jedes solche u bestimme ich die Anzahl der Klassen $Y \in C^{\perp}/C$, für die ein $y \in Y$ existiert, mit $y \cap c = u$. Dann ist $(y + \mathbb{1} + c) \cap c = y \cap c = u$, also gibt es in jeder Klasse 2 Worte y mit demgleichen $y \cap c$. Sind $y, y' \in C_{ung}^{\perp}$ mit $y \cap c = y' \cap c$, so gilt für jedes $x \in C$ $(y + x) \cap c = (y' + x) \cap c$. Die $u = c \cap y$ für ein $y \in C^{\perp}$ sind natürlich $\in C_c^{\perp}$.

(iv) Für die restlichen $u \subseteq c$ $|u|$ gerade ist $A'(c,u) = A(c,u) = C(c,u) = 0$. Man braucht also nur noch zu wissen, wieviele von diesen u in $C_c^\perp$ liegen und wieviele nicht. Die Anzahl erhält man, indem man in den ersten drei Fällen mitzählt, wieviele $u \in C_c^\perp$ ($u \notin C_c^\perp$) schon behandelt worden sind.

d) $v = \epsilon_u(j)a_j + \sum_{i \in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i$, $u - \{j\} \subseteq c \in C_{12}$, $j \notin c$, $|u - \{j\}|$ ungerade :
Indem man eventuell zu $-v$ übergeht, kann man annehmen, daß $j \notin u$. Also o.B.d.A. $v = a_j + \sum_{i \in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i$, $u \subseteq c \in C_{12}$, $j \notin c$, $|u|$ ungerade .
Dann ist

$$M_v = \{\sum_{i \in x} \epsilon_y(i)\frac{1}{2}a_i \mid j \in x \in C_8,\ |x \cap c| = 6,\ u \cap x = y \cap c,\ j \notin y \subseteq x,\ |y| \text{ gerade } \}\cup$$

$$\{\frac{3}{4}a_j + \sum_{i \neq j} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid j \in x \in C,\ |u\Delta(x \cap c)| = 1\}\cup$$

$$\{\epsilon_u(k)\frac{3}{4}a_k + \sum_{i \neq k} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid k \in c,\ j \notin x \in C,\ u\Delta(x \cap c) = \{k\}\}$$

$$|M_v| = A_6(c,j) + A(c,u),$$

wo

$$A_6(c,j) := |\{x \in C_8 \mid |c \cap x| = 6,\ j \in x\}|$$

und

$$A(c,u) := |\{x \in C \mid |u\Delta(x \cap c)| = 1\}|.$$

Mit

$$B_3(H) := |\{(c,j,u) \in C_{12} \times \{1,\ldots,24\} \times \mathcal{P}(c) \mid j \notin c,\ A_6(c,j) + A(c,u) = H\}|$$

wird

$$A_d(H) = 2 \cdot B_3(H).$$

Zur Berechnung von B_3:

Falls ein $x \in C$ existiert mit $|(x \cap c)\Delta u| = 1$, so überführt der Automorphismus ψ_x (oder $\psi_{(\mathbb{1}+x+c)}$, je nachdem ob $j \notin x$ oder $j \notin \mathbb{1} + x + c$) v in $\sum_{i \in c} \frac{1}{2}a_i + a_j - a_k$ mit $k \in c$. Man kann also annehmen, daß $u = \{k\} \subseteq c$ ist.

$$A(c,\{k\}) = |\{x \in C \mid k \in x,\ |x \cap c| = 2\} \cup C_{(\mathbb{1}+c)}|$$

Es ist $C_{(\mathbb{1}+c)} = \{0, \mathbb{1} + c\}$, also $|C_{(\mathbb{1}+c)}| = 2$ (da $C_6 = C_4 = C_2 = \emptyset$). Es gibt 2^8 Worte in C. Genau die zwei Worte x und $\mathbb{1} + c + x$ haben denselben Durchschnitt mit c. Also gibt es 2^7 verschiedene $x \cap c$ mit $x \in C$. Folglich gibt es 2^7 verschiedene $u \subseteq c$, die dieselbe 'Normalform' $\{k\}$ haben, nämlich $(x \cap c) \cup \{k\}$, falls $k \notin x$, bzw. $(x \cap c) - \{k\}$, falls $k \in x$. Das Wort 'Normalform' habe ich deshalb in Anführungszeichen gesetzt, weil es zu einem u verschiedene 'Normalformen' geben kann. Jedes $x \in C$ mit $x \cap c = \{k,j\}$ transformiert nämlich die 'Normalform' $\{k\}$ (unter ψ_x) auf die 'Normalform' $\{j\}$. Durchläuft man alle 'Normalformen' $\{k\}$, so zählt man jedes u so oft, wie es $j \neq k$, $j \in c$ gibt mit $x \cap c = \{k,j\}$ für ein $x \in C$. Diese Zahl ist aber gerade $\frac{A(c,\{k\})}{2}$.

Unabhängig von u kann man zu demgleichen $c \in C_{12}$ für alle $j \notin c$ $A_6(c,j)$ bestimmen. Für festes $c \in C_{12}$ sei

$$A_c(H) := |\{u \subseteq c \mid |u| \text{ ungerade },\ A(c,u) = H\}|$$

und

$$B_c(H) := |\{j \in \mathbb{1} + c \mid A_6(c,j) = H\}|.$$

Dann ergibt sich

$$B_3(H) = \sum_{c \in C_{12}} \sum_{h1+h2=H} A_c(h1) \cdot B_c(h2).$$

e) $v = \epsilon_u(j)a_j + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u \subseteq c \in C_8,\ j \in c,\ |u|$ ungerade :

Durch eventuellen Übergang zu $-v$ läßt sich erreichen, daß das Vorzeichen von a_j positiv ist, also o.B.d.A. $v = \frac{3}{2}a_j + \sum_{i\in c, i\neq j} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u \subseteq c \in C_8,\ j \in c,\ |u|$ ungerade . Dann ist

$$M_v = \{a_j + \epsilon_u(k)a_k \mid k \in c - \{j\}\}\cup$$
$$\{\frac{1}{2}a_j + \sum_{i\in c, i\neq j} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i - \epsilon_u(k)a_k \mid k \in c - \{j\}\}\cup$$
$$\{\frac{3}{4}a_j + \sum_{i\neq j} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid j \in x \in C,\ u = x \cap c - \{j\}\}\cup$$
$$\{\frac{3}{4}a_j - \sum_{i\neq j} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid j \notin x \in C,\ c - u = x \cap c - \{j\}\}$$
$$|M_v| = 14 + B(c, j, u),$$

wo

$$B(c, j, u) := |\{x \in C \mid x \cap c - \{j\} = u\}|.$$

Sei

$$H(\mathbb{1} + c) := dim(C_{\mathbb{1}+c})$$

und

$$B_4(H) := |\{c \in C_8 \mid H(\mathbb{1} + c) = H\}|.$$

Dann ist

$$A_e(14 + 2^H) = 2 \cdot 2^{7-H} \cdot 8 \cdot B_4(H)$$

und

$$A_e(14) = \sum_H 2^{7-H} \cdot (2^H - 2) \cdot 8 \cdot B_4(H)$$

f) $v = \epsilon_u(j)a_j + \epsilon_u(k)a_k + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u \subseteq c \cup \{j, k\},\ j, k \notin c \in C_8,\ |u \cap c|$ gerade :

Da $C_2^{\perp} = \emptyset$, gibt es ein $x \in C$ mit $j \in x,\ k \notin x$. Durch eventuelle Anwendung des Automorphismus ψ_x läßt sich erreichen, daß die Vorzeichen von a_j und a_k gleich sind. Nach eventuellem Übergang zu $-v$ kann man o.B.d.A. annehmen, daß $v = a_j + a_k + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\ ,\ u \subseteq c,\ j, k \notin c \in C_8,\ |u|$ gerade . Dann ist

$$M_v = \{a_j + a_k\} \cup \{\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\}\cup$$
$$\{\frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k + \sum_{i\in x, i\neq j,k} \epsilon_y(i)\frac{1}{2}a_i \mid j, k \in x \in C_8,\ |c \cap x| = 4,\ (u \cap x) = (y \cap c),\ |y| \text{ gerade } \}\cup$$
$$\{\frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k + \sum_{i\in x, i\neq j,k} \epsilon_y(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid \begin{array}{l} j, k \in x \in C_6^{\perp},\ |c \cap x| = 4,\ (u \cap x) = y \\ |y| \text{ ungerade },\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x} \end{array}\right\}\cup$$
$$\{\frac{3}{4}a_j + \sum_{i\neq j} \epsilon_t(i)\frac{1}{4}a_i \mid j \in t \in C,\ k \notin t,\ t \cap c = u\}\cup$$
$$\{\frac{3}{4}a_k + \sum_{i\neq k} \epsilon_t(i)\frac{1}{4}a_i \mid j \notin t \in C,\ k \in t,\ t \cap c = u\}$$
$$|M_v| = 2 + 2(A_4(c, j, k) + C_4'(c, j, k, u) + A(c, j, k, u)),$$

wo

$$A_4(c, j, k) := |\{x \in C_8 \mid |c \cap x| = 4,\ j, k \in x\}|,$$

$$C_4'(c,j,k,u) := |\{x \in C_6^\perp \mid |c \cap x| = 4,\ j,k \in x,\ |u \cap x| \text{ ungerade }\}|$$

und

$$A(c,j,k,u) := |\{x \in C \mid c \cap x = u,\ j \in x,\ k \notin x\}|.$$

Mit

$$B_5(H) := |\{(c,j,k,u) \in C_8 \times \{1,\dots,24\}^2 \times \mathcal{P}(c) \mid A_4(c,j,k) + C_4'(c,j,k,u) + A(c,j,k,u) = H\}|$$

wird dann

$$A_f(2+2H) = 2^2 \cdot B_5(H).$$

g) $v = \epsilon_u(k)a_k + \epsilon_u(j)a_j + b\ ,\ k,j \in \{1,\dots,24\},\ b \in \sqrt{2}E_8,\ (b,b) = 4:$
Wie unter f) kann man annehmen, daß $v = a_k + a_j + b\ ,\ k,j \in \{1,\dots,24\},\ b \in \sqrt{2}E_8$, $(b,b) = 4$. Dann ist

$$M_v = \{b\} \cup \{a_k + a_j\} \cup$$

$$\{\frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k + \sum_{i \in x, i \neq j,k} \epsilon_y(i)\frac{1}{2}a_i + \frac{b}{2} \mid x \in C_6^\perp,\ \Psi(\frac{\bar{b}}{2}) = \tilde{x},\ \{k,j\} \subseteq x,\ |y| \text{ ungerade }\} \cup$$

$$\{\frac{1}{2}a_j + \frac{1}{2}a_k + \sum_{i \in x, i \neq j,k} \epsilon_y(i)\frac{1}{2}a_i + b' \mid \begin{array}{l} x \in C_4^\perp,\ b' \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{b'}) = \tilde{x} \\ (b,b') = 2,\ \{k,j\} \subseteq x,\ |y| \text{ gerade} \end{array} \}$$

$$|M_v| = 2 + 2^3 \cdot C_2(\{k,j\}, \frac{b}{2}) + 2 \cdot D_2(\{k,j\}, b),$$

wo

$$C_2(c, \frac{b}{2}) := |\{x \in C_6^\perp \mid \Psi(\frac{\bar{b}}{2}) = \tilde{x},\ c \subseteq x\}|$$

und

$$D_2(c,b) := |\{(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid c \subseteq x,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (b,y) = 2\}|.$$

Mit

$$B_6(H) := |\{(c,b) \in \{1,\dots,24\}^2 \times (\sqrt{2}E_8)_4 \mid 4 \cdot C_2(c, \frac{b}{2}) + D_2(c,b) = H\}|$$

wird dann

$$A_g(2+2H) = 2^2 \cdot B_6(H).$$

Zur Berechnung von $B_6(H)$:

Damit man die Skalarprodukte (b,y) ausrechnen kann, benötigt man eine Grammatrix bzgl. einer Basis B von E_8 und eine normierte Basis von $E_8/2E_8$. (Multiplikation mit $\sqrt{2}$ überführt $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ in $E_8/2E_8$. Da ich nicht gerne mit $\sqrt{2}$ rechne, werden im folgenden alle (Computer-) Berechnungen in $E_8/2E_8$ durchgeführt.) Als Grammatrix von E_8 kann man z.B. die Matrix Gr_{42} aus Teil I nehmen:

$$Gr_{42} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Bezeichne $(b_1, b_2, \dots, b_8)$ eine Basis von E_8 mit dieser Grammatrix. Als normierte Basis von $E_8/2E_8$ kann man z.B.

$$\overline{B} := (\overline{b_1}, \overline{b_6}, \overline{b_2}, \overline{b_5}, \overline{-b_1 + b_2 + 3b_3 - 2b_5 + 2b_6}, \overline{-2b_1 + 2b_2 - b_5 + b_6 + 3b_8},$$

$\overline{b_1 + b_2 + 3b_4 - 2b_5 - 2b_6}, \overline{-2b_1 - 2b_2 + b_5 + b_6 + 3b_7})$

wählen. Dann ist die Grammatrix bzgl. dieser Basis

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ (mod\ 2)$$

und $\langle \bar{B} \rangle_{\mathbb{Z}} \equiv \langle b_1, \ldots, b_8 \rangle_{\mathbb{Z}}$ $(mod\ 2E_8)$.

Um zu testen, ob zwei Vektoren v, w in der gleichen Klasse von $E_8/2E_8$ liegen, braucht man nur die Koeffizientenvektoren zu addieren und zu prüfen, ob die Koeffizienten der Summe gerade sind. Man kann die Berechnung der Skalarprodukte erheblich dadurch beschleunigen, daß man sich zusätzlich zu v auch $Gr * v$ speichert.

Die Berechnung von B_6 geschieht dann wie folgt:

Zunächst durchläuft man alle Vektoren von E_8 der Quadratlänge 4 und testet, ob $(y, b) = 2$ ist. Für alle geeigneten y merkt man sich die Darstellung der Klasse von y in $E_8/2E_8$ als $\mathbb{F}_2$-Linearkombination in der normierten Basis. Diese Information kann man in einem Feld Z der Größe 63 unterbringen, da es zu jedem $b \in (E_8)_2$ insgesamt 126 $y \in (E_8)_4$ gibt mit $(b, y) = 2$ und je zwei y in einer Klasse liegen. Für alle $(i, j) \in \{1, \ldots, 24\}^2$ zählt man dann zunächst die $c \in C_6^\perp$, die in der b entsprechenden Klasse $\in C^\perp/C$ liegen mit $i, j \in c$: C_2. Schließlich durchläuft man noch alle Klassen in Z und bestimmt die Anzahl der $c \in C_4^\perp$ mit $i, j \in c$, die in diesen Klassen liegen: D_2. Dann erhält man $H = 4 \cdot C_2 + 2 \cdot D_2$.

h) $v = \sum_{i \in c} \epsilon_u(i) \frac{1}{2} a_i + b$, $u \subseteq c \in C_8$, $|u|$ gerade , $b \in \sqrt{2}E_8$, $(b, b) = 4$:

$$M_v = \{b, \sum_{i \in c} \epsilon_u(i) \frac{1}{2} a_i\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \epsilon_y(i) \frac{1}{2} a_i + \frac{b}{2} \mid x \in C_6^\perp,\ \Psi(\frac{\bar{b}}{2}) = \tilde{x},\ u \cap x = y \cap c,\ |c \cap x| = 4,\ |y| \text{ ungerade } \} \cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24} \epsilon_x(i) \frac{1}{2} a_i + \frac{b}{2} \mid x \in C_{ung}^\perp,\ \Psi(\frac{\bar{b}}{2}) = \tilde{x},\ u = x \cap c\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \epsilon_u(i) \frac{1}{2} a_i + b' \mid x \in C_4^\perp,\ \Psi(\bar{b'}) = \tilde{x},\ (b, b') = 2,\ x \subseteq c,\ |u \cap x| \text{ gerade } \}$$

$$|M_v| = 2 + 2 \cdot C_4(c, \frac{b}{2}) + C(c, b, u) + D'_4(c, u, \frac{b}{2}),$$

wo

$$C_4(c, \frac{b}{2}) := |\{x \in C_6^\perp \mid \Psi(\frac{\bar{b}}{2}) = \tilde{x},\ |c \cap x| = 4\}|,$$

$$C(c, b, u) := |\{x \in C_{ung}^\perp \mid \Psi(\frac{\bar{b}}{2}) = \tilde{x},\ c \cap x = u\}|$$

und

$$D'_4(c, u, \frac{b}{2}) := |\{(x, y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}} E_8)_2 \mid (b, y) = 2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ x \subseteq c,\ |u \cap x| \text{ gerade } \}|.$$

Mit

$$B_7(H) := |\{(c, b, u) \in C_8 \times (\sqrt{2}E_8)_4 \times \mathcal{P}(c) \mid 2 \cdot C_4(c, \frac{b}{2}) + C(c, b, u) + D'_4(c, u, \frac{b}{2}) = H\}|$$

wird dann

$$A_h(2+H) = B_7(H).$$

Die Berechnung von B_7 ist ähnlich der von B_6. Man muß noch zusätzlich die Vorzeichen (u) berücksichtigen. Wie unter g) bezeichne Z wieder die Liste aller Klassen $Y \in E_8/2 \cdot E_8$, für die es ein $y \in Y$ der Quadratlänge 4 gibt, mit $(b,y) = 2$. Nicht für alle $x \in C_4^\perp$ mit $\tilde{x} \in Z$ und $x \subseteq c$ ist $|u \cap x|$ gerade für jedes $u \subseteq c$, $|u|$ gerade. Mit x ist auch $x+c \subseteq c$ und $x+c$ liegt in der gleichen Klasse von $C^\perp/C$ wie x. Es ist für $u \subseteq c$, $|u|$ gerade: $|u \cap x|$ gerade $\Leftrightarrow$ $|u \cap (x+c)|$ gerade. Also ist D'_4 gerade. Sind $x, x' \in C_4^\perp$, $x, x' \subseteq c$, $\tilde{x}, \tilde{x'} \in Z$, $|x \cap x'| = 2$, so ist auch $x + x' \in C_4^\perp$ und es gibt ein $y \in \tilde{x} + \tilde{x'}$ mit $(b,y) = 2$. Also bilden die Worte $x \in C_4^\perp$, $x \subseteq c$, $\tilde{x} \in Z$ zusammen mit c und $\emptyset$ einen geraden, linearen Code C' der Länge 8. Zur Berechnung von $C(c,b,u)$ zählt man einfach die Worte $x \in C$ mit $x \cap c = \emptyset$. Diese Anzahl sei A. Dann ist $C(c,b,u) = A$ für $\frac{256}{A}$ $u \subseteq c$ und alle b und $C(c,b,u) = 0$ für die restlichen $u \subseteq c$, $|u|$ gerade. Für die $u \subseteq c$ mit $C(c,b,u) = A$ ist für alle $x \subseteq c$ mit $\tilde{x} \in Z$ $|x \cap u|$ gerade, denn mit $x' \cap c = u$, $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$, $\Psi(\bar{y}) = \tilde{x}$ ist $x' + \frac{b}{2}, x + y \in L$, folglich $(x' + \frac{b}{2}, x+y) = \frac{|x' \cap x|}{2} + (\frac{b}{2}, y) = \frac{|u \cap x|}{2} + 1 \in \mathbb{Z}$.

i) $v = b$, $b \in \sqrt{2}E_8$, $(b,b) = 8$:

$$M_v = \{\sum_{i \in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + \frac{b}{2} \mid x \in C_4^\perp,\ \Psi(\frac{\bar{b}}{2}) = \tilde{x},\ u \subseteq x,\ |u| \text{ gerade }\} \cup$$

$$\{y \in (\sqrt{2}E_8)_4 \mid (y,b) = 4\}$$

$$|M_v| = 14 + 8 \cdot D(\frac{\bar{b}}{2}),$$

wo

$$D(\bar{b}) := |\{x \in C_4^\perp \mid \Psi(\bar{b}) = \tilde{x}\}|.$$

Mit

$$B_8(H) := |\{\bar{b} \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8)_0 - \{\bar{0}\} \mid D(\bar{b}) = H\}|$$

wird dann

$$A_i(14 + 8H) = 16 \cdot B_8(H).$$

j) $\sum_{i \in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b$, $u \subseteq c \in C^\perp$, $b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8$, $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$:

1. $c \in C_4^\perp$, $(b,b) = 6$, $|u|$ gerade :

$$M_v = \{\sum_{i \in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b) = 2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{c}\} \cup$$

$$\{y \in (\sqrt{2}E_8)_4 \mid (y,b) = 4\} \cup$$

$$\left\{\sum_{i \in x} \epsilon_{u'}(i)\frac{1}{2}a_i + y \;\middle|\; \begin{array}{l} y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b) = 3,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ x \in C_4^\perp \\ |c \cap x| = 2,\ (u \cap x) = (u' \cap c),\ |u'| \text{ gerade} \end{array}\right\}$$

Wählt man mit den Bezeichnungen aus der Tabelle 'Vektoren von E_8' z.B. $\sqrt{2}b = (31^30^4)$, so sieht man, daß es drei $y \in (\sqrt{2}E_8)_4$ mit $(y,b) = 4$ gibt, nämlich die y mit $\frac{1}{\sqrt{2}}y = (1(10^2)0^4)$, wo die zweite 1 an der zweiten, dritten oder vierten Position stehen darf. Also ist

$$|M_v| = 6 + 2 \cdot D_2(c,b),$$

wo

$$D_2(c,b) := |\{(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid |x \cap c| = 2,\ \tilde{x} = \Psi(\bar{y}),\ (y,b) = 3\}|.$$

Definiert man

$$B_9(H) := |\{(c,b) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_6 \mid D_2(c,b) = H\}|$$

so ist

$$A_{j1}(6+2H) = 2^3 \cdot B_9(H).$$

2. $c \in C_6^\perp,\ (b,b) = 5,\ |u|$ ungerade :

$$M_v = \{\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b) = 1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{c}\} \cup \{y \in (\sqrt{2}E_8)_4 \mid (y,b) = 4\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} x \in C_4^\perp,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 2.5 \\ |c \cap x| = 3,\ u \cap x = t \cap c,\ |t| \text{ gerade} \end{array}\Bigg\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} x \in C_4^\perp,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 3 \\ |c \cap x| = 2,\ u \cap x = t \cap c,\ |t| \text{ gerade} \end{array}\Bigg\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} x \in C_6^\perp,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 2 \\ |c \cap x| = 4,\ u \cap x = t \cap c,\ |t| \text{ ungerade} \end{array}\Bigg\}$$

$$|M_v| = 2 + 4 \cdot D_2(c,b) + D_3(c,b),$$

wo

$$D_2(c,b) := |\{(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid |x \cap c| = 2,\ \tilde{x} = \Psi(\bar{y}),\ (y,b) = 3\}|$$

und

$$D_3(c,b) := |\{(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid |x \cap c| = 3,\ \tilde{x} = \Psi(\bar{y}),\ (y,b) = 2.5\}|$$

Definiert man

$$B_{10}(H) := |\{(c,b) \in C_6^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_5^+ \mid 4 \cdot D_2(c,b) + D_3(c,b) = H\}|$$

so ist

$$A_{j2}(2+H) = 2^6 \cdot B_{10}(H).$$

Es bezeichnet $(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_5^+$ die Menge der Vektoren der Quadratlänge 5 in $(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_5$, deren erster von Null verschiedener Koeffizient bzgl. einer fest gewählten Basis > 0 ist.

3. $c \in C_8^\perp - C_8,\ (b,b) = 4,\ |u|$ gerade :

$$M_v = \{\sum_{i\in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b) = 2,\ x \in C_4^\perp,\ x \subseteq c,\ |x \cap u| \text{ gerade },\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x}\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b) = 2.5,\ x \in C_4^\perp \\ |x \cap c| = 3,\ x \cap u = c \cap t,\ |t| \text{ gerade},\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x} \end{array}\Bigg\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b) = 1.5,\ x \in C_6^\perp \\ |x \cap c| = 5,\ x \cap u = c \cap t,\ |t| \text{ ungerade},\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x} \end{array}\Bigg\}$$

$$|M_v| = D_4'(c,b,u) + 2 \cdot D_3(c,b),$$

wo

$$D_4'(c,b,u) := |\{(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid (y,b) = 2,\ x \subseteq c,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ |x \cap u| \text{ gerade }\}|$$

und

$$D_3(c,b) := |\{(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid (y,b) = 2.5,\ |x \cap c| = 3,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x}\}|.$$

Mit

$$B_{11}(H) := |\{(c,b,u) \in C_8^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4 - \sqrt{2}E_8 \times \mathcal{P}(c) \mid \Psi(\bar{b}) = \tilde{c},\ D_4'(c,b,u) + 2 \cdot D_3(c,b) = H\}$$

wird dann

$$A_{j3}(H) = B_{11}(H).$$

<u>Zur Berechnung von B_{11}:</u>

Für alle $c \in C_8^\perp - C_8$ konstruiere ich mir 2 Mengen, nämlich $D3$, die Menge aller Klassen aus $C^\perp/C$, in denen es ein Wort x der Länge 4 gibt mit $|c \cap x| = 3$ und $D4$, die Menge aller Klassen aus $C^\perp/C$, in denen es ein Wort x der Länge 4 gibt mit $|c \cap x| = 4$. Ist $D3 \cup D4 = \emptyset$, so erhöht sich der Wert von $B_{11}(0)$ um $128 \cdot 128 = 16384$, da dann für alle 128 Vektoren $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4$ mit $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$ und alle 128 $u \subseteq c$ mit $|u|$ gerade $D_4'(c,b,u) + 2 \cdot D_3(c,b) = 0$ ist.

Ansonsten bestimme ich für alle 128 Vektoren $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4$ mit $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$ $z :=$ die Anzahl der Vektoren $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$, die in einer der Klassen aus $D3$ liegen mit $(y,b) = 2.5$ und $z1 :=$ die Anzahl der Vektoren $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$, die in einer der Klassen aus $D4$ liegen mit $(y,b) = 2$.

Die $x \in C_4^\perp$ mit $x \subseteq c$ bilden zusammen mit c und 0 einen doppeltgeraden orthogonalen Code der Länge 8 (da für $x_1, x_2 \subseteq c, x_1 \neq x_2 + c \ \Rightarrow |x_1 \cap x_2| = 2$ ($C_2^\perp = \emptyset!$), also $x_1 + x_2 \in C_4^\perp$).

Für festes $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4$ (z. B. $\sqrt{2}b = (21^4 0^3)$) und festes $x \subseteq c, x \in C_4^\perp$ gibt es höchstens ein $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $\Psi(\bar{y}) = \tilde{x}$ und $(y,b) = 2$.

(Dies sieht man am besten, wenn man $\sqrt{2}y = (20^7)$ betrachtet. In der Klasse von y liegen nur noch die Vektoren x von der Form $\sqrt{2}x = ((20^7))$. Für diese x gilt aber $(x,b) = 2 \Leftrightarrow x = y$.)

Sind nun $(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $x_i \subseteq c,\ \Psi(\bar{y_i}) = \tilde{x_i}$ und $(y_i,b) = 2$ $(i = 1,2)$, $|x_1 \cap x_2| = 2$, so ist $x_1 + x_2 \in C_4^\perp,\ x_1 + x_2 \subseteq c$ und es gibt ein $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $\Psi(\bar{y}) = \tilde{x_1} + \tilde{x_2}$ und $(b,y) = 2$.

Also bilden die $x \in C_4^\perp, x \subseteq c$ mit $\exists y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (b,y) = 2$ einen doppeltgeraden, orthogonalen Code.

Ist nun $z1 = 2$, so haben 64 $u \subseteq c,\ |u|$ gerade einen geraden Durchschnitt mit beiden $x \in C_4^\perp, x \subseteq c$ mit $\exists y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (b,y) = 2$ (diese x sind von der Form x und $x + c$). Also erhöht sich $B_{11}(2z + z1)$ um 64 und $B_{11}(2z)$ um 64. Ist $z1 = 6 = 2^3 - 2$, so erhöht sich $B_{11}(2z + z1)$ um 32 und $B_{11}(2z + 2)$ um 96. Ist $z1 = 14 = 2^4 - 2$, so erhöht sich $B_{11}(2z + z1)$ um 16 und $B_{11}(2z + 6)$ um 112. Ist $z1 = 30 = 2^5 - 2$, so erhöht sich $B_{11}(2z + z1)$ um 8 und $B_{11}(2z + 14)$ um 120.

4. $c \in C_{10}^\perp,\ (b,b) = 3,\ |u|$ ungerade :

$$M_v = \{\sum_{i \in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b) = 2,\ x \in C_4^\perp \\ x \subseteq c,\ |u \cap x| \text{ gerade },\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x} \end{array}\Bigg\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b) = 1,\ x \in C_6^\perp,\ x \subseteq c,\ |u \cap x| \text{ ungerade },\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x}\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b) = 1.5,\ x \in C_6^\perp \\ u \cap x = t \cap c,\ |t| \text{ ungerade},\ |x \cap c| = 5,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x} \end{array}\Bigg\} \cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{4}\epsilon_x(i)a_i + y \mid (x,y) \in C_{ung}^{\perp} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b) = 1.5,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ x \cap c = u\}$$

$$|M_v| = 2 \cdot C_6(c,b,u) + C_5(c,b) + C(c,b,u),$$

wo

$$C_6(c,b,u) := |\{(x,y) \in C_6^{\perp} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid (y,b) = 1,\ x \subseteq c,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ |x \cap u| \text{ ungerade }\}|,$$

$$C_5(c,b) := |\{(x,y) \in C_6^{\perp} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid (y,b) = 1.5,\ |x \cap c| = 5,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x}\}|$$

und

$$C(c,b,u) := |\{(x,y) \in C_{ung}^{\perp} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid (y,b) = 1.5,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ x \cap c = u\}|.$$

Mit

$$B_{12}(H) := |\{(c,b,u) \in C_{10}^{\perp} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3 \times \mathcal{P}(c) \mid \Psi(\bar{b}) = \tilde{c},\ 2 \cdot C_6(c,b,u) + C_5(c,b) + C(c,b,u) = H\}|$$

wird dann

$$A_{j4}(H) = B_{12}(H).$$

Zur Berechnung von B_{12}:
Seien $c \in C_{10}^{\perp}$, $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ mit $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$ fest gewählt. Sind $x_1, x_2 \subseteq c$, $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in C_4^{\perp}$, so ist $|x_1 \cap x_2| \in \{1,2\}$, da aus $|x_1 \cap x_2| = 3$ folgen würde, daß $|x_1 + x_2| = 2$, und $|x_1 \cap x_2| = 0$ implizierte $|x_1 + x_2 + c| = 2$, was beides im Widerspruch zu $C_2^{\perp} = \emptyset$ steht. Seien $y_i \in \Psi^{-1}(\tilde{x_i})$, $(i = 1,2)$ Vektoren in $(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$, die mit b Skalarprodukt 2 haben. Dann ist $|(y_1,y_2)| \in \{0, 0.5, 1, 1.5\}$. Da $(y_1 + y_2, b) = 4$ ist, folgt mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung $16 = (y_1+y_2,b)^2 \leq (y_1+y_2, y_1+y_2) \cdot (b,b) = 6 \cdot (2 + (y_1,y_2))$. Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $y_1 + y_2 = \pm b$, also $y_1 = \pm b - y_2$ und $(y_1,y_1) = 3 \pm 4 + 2$ ungerade ist, was einen Widerspruch zu $(y_1,y_1) = 2$ liefert. Also ist $\frac{2}{3} < (y_1,y_2)$, folglich $(y_1,y_2) \in \{1, 1.5\}$.
Es ist

$$(\frac{1}{2}\sum_{i \in x_1} a_i + y_1, \frac{1}{2}\sum_{i \in x_2} a_i + y_2) = \frac{|x_1 \cap x_2|}{2} + (y_1,y_2).$$

Da L ein ganzzahliges Gitter ist, folgt $|x_1 \cap x_2| = 1 \Leftrightarrow (y_1,y_2) = 1.5$ und $|x_1 \cap x_2| = 2 \Leftrightarrow (y_1,y_2) = 1$. Falls $|x_1 \cap x_2| = 1$ ist, so ist $c + x_1 + x_2 \in C_4^{\perp}$ und $c + x_1 + x_2 \subseteq c$.
Behauptung:
Es gibt in der Klasse $Y := \Psi^{-1}(\tilde{x_1} + \tilde{x_2} + \tilde{c}) \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ keinen Vektor y der Quadratlänge 2, der mit b Skalarprodukt 2 hat.
Ein Repräsentant in Y ist z.B. $b + y_1 + y_2$. Angenommen es gäbe einen Vektor $y = b + y_1 + y_2 + 2z$ mit $z \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8$ der Quadratlänge 2, der mit b Skalarprodukt 2 hat. Dann ist $2 = (y,y) = 18 + 4(z,z) + 4(z, y_1 + y_2 + b)$ und $2 = (b,y) = 7 + 2(b,z)$, folglich $(b,z) = -2.5$ und $(z, y_1 + y_2) = -1.5 - (z,z)$. Mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung findet man $6.25 = (b,z)^2 \leq 3(z,z)$, also $(z,z) \geq 3$ und $(1.5 + (z,z))^2 = (z, y_1 + y_2)^2 \leq 7(z,z)$, folglich $(z,z) \leq 3$. Insgesamt ist dann $(z,z) = 3$ und $(z, y_1 + y_2) = -4.5$. Also ist $(z,y_1) < -2$ oder $(z,y_2) < -2$. Sei o. B. d. A. $(z,y_1) < -2$, dann ist $(z,y_1) \leq -2.5$ und $(z,y_1)^2 \geq 6.25$. Andererseits ist (Cauchy-Schwarz) $(z,y_1)^2 \leq (z,z) \cdot (y_1,y_1) = 6$. Daraus ergibt sich ein Widerspruch.
Ist nun $|x_1 \cap x_2| = 2$, so ist $x_1 + x_2 \in C_4^{\perp}$, $x_1 + x_2 \subseteq c$ und in der Klasse $\Psi^{-1}(\tilde{x_1} + \tilde{x_2})$ findet man einen Vektor y der Quadratlänge 2, mit $(b,y) = 2$, nämlich $y = 2b - y_1 - y_2$.

Weiter ist zu $x \in C_4^\perp,\ x \subseteq c$ das $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $\Psi(\bar{y} = \tilde{x}$ und $(y,b) = 2$ (falls es existiert) eindeutig bestimmt. Denn dann ist $c + x \in C_6^\perp$ und $b - y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ mit $\Psi(\overline{b-y}) = \tilde{c} - \tilde{x}$ und $(b-y,b) = 1$. In der Klasse von $b-y$ in $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ gibt es aber nur 2 Vektoren der Quadratlänge 1, nämlich $b-y$ und $-(b-y)$. Es ist $(-(b-y),b) = -1$, also ist $-(b-y)$ nicht von der Form $b - y'$ mit $y' \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$, $\Psi(\bar{y'}) = \tilde{x}$ und $(y',b) = 2$.

Nach dieser theoretischen Überlegung kann man die Berechnung von B_{12} wie folgt gestalten:
Für alle $c \in C_{10}^\perp$ bestimmt man zunächst die $x \in C_4^\perp$ mit $x \subseteq c$. Die Nummern der Klassen dieser Worte x gemäß der lexikographischen Ordnung der Koeffizientenvektoren $\in \mathbb{F}_2^8$ bzgl. einer festen normierten Basis von $C^\perp/C$ merkt man sich in einer Menge Dm. Ist $Dm = \emptyset$, so erhöht sich $B_{12}(0)$ um $56 \cdot 2^9 = 28672$. Sonst bestimmt man für alle Vektoren $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ mit $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$ die Anzahl der Klassennummern $i \in Dm$, für die es einen Vektor $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ der Klasse Nummer i (=i-te Klasse von Vektoren gerader Länge in $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ bzgl. der lexikographischen Ordnung der Koeffizientenvektoren $\in \mathbb{F}_2^8$ zu einer festen normierten Basis von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$) mit $(b,y) = 2$ gibt. Diese Anzahl sei A. Ist $A = 0$, so erhöht sich $B_{12}(0)$ um $2^9 = 512$. Ist $A = 1$, so erhöhen sich $B_{12}(0)$ und $B_{12}(1)$ je um $2^8 = 256$, da es für $x \subseteq c,\ x \in C_4^\perp$ 256 $u \subseteq c$ mit $|u|$ ungerade und $|u \cap x|$ gerade gibt. Ist $A = 2$, so erhöhen sich $B_{12}(0)$ und $B_{12}(2)$ je um $2^7 = 128$ und $B_{12}(1)$ um 256. Ist $A = |Dm| = 3$, so gibt es $x_1, x_2 \subseteq c$ mit $|x_1| = |x_2| = |x_1 + x_2| = 4$, $x_i \in C^\perp$. Dann haben 128 u mit $|u|$ ungerade einen geraden Schnitt mit x_1 und x_2 , also erhöht sich $B_{12}(3)$ um 128 und $B_{12}(1)$ um 384.
Ist $A = 3$ und $|Dm| = 7$, so testet man, ob die ersten beiden Worte $x \in C_4^\perp$ mit $x \subseteq c$, für die es einen Vektor y in der zu x gehörenden Klasse von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ der Quadratlänge 2 mit $(b,y) = 2$ gibt, einen geraden Durchschnitt haben. Dann ist nämlich das dritte solche Wort x die Summe der ersten beiden. Sonst sind die drei Worte linear unabhängig.
Für $|Dm| = 7$ nimmt A nur noch die Werte 5 oder 7 an. Ist $A = 7$, so bilden die $x \in C_4^\perp$ mit $x \subseteq c$, für die es einen Vektor y in der zu x gehörenden Klasse von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ der Quadratlänge 2 mit $(b,y) = 2$ gibt, einen linearen Code. Ist $A = 5$, so sind diese x von der Form $x_1, x_2, x_3, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3$.
Zusätzlich hat man noch die Menge der Worte $x \in C^\perp$ zu berücksichtigen, für die es ein $y \in (\Psi^{-1}(\tilde{x}))_1$ mit $(b,y) = 1.5$ gibt. Ist $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ mit $(b,y) = 1.5$, so gibt es nur noch einen anderen Vektor der Quadratlänge 1 in $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8$, der mit b Skalarprodukt 1.5 hat, nämlich $b - y$. Für ein Wort x aus der Klasse von y (in $C^\perp/C$) ist dann $x + \mathbb{1} + c$ in der Klasse von $b - y$. Es ist $x \cap c = (x + \mathbb{1} + c) \cap c$. Folglich findet man für jedes Wort aus der Klasse von x ein Wort aus der Klasse von $x + c$, das mit c dengleichen Durchschnitt hat. In der Klasse von x gibt es genausoviele x' mit $c \cap x = c \cap x'$, wie es Worte in C gibt, die c nicht schneiden. Definiert man

$$D := |\{x \in C_8 \mid x \subseteq \mathbb{1} + c\}| + 1,$$

so gibt es für festes b und c $2D$ Worte in $C^\perp$ (die ein y in der entsprechenden Klasse von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ mit $(y,y) = 1$ und $(b,y) = 1.5$ haben) mit gleichem Durchschnitt mit c. Insgesamt gibt es also $\frac{256}{D}$ verschiedene Durchschnitte u mit c.
Für welche dieser u und wieviele der oben bestimmten $x \in C_6^\perp$, die in einer Klasse mit Nummer $\in Dm$ liegen, ist $|u \cap x|$ ungerade?
Sei $u = x' \cap c,\ x' \in C^\perp, y' \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y'}) = \tilde{x'},\ (y',b) = 1.5$ und $x \subseteq c,\ x \in C_6^\perp, y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 1$. Dann ist $|u \cap x|$ ungerade $\Leftrightarrow$ $|x' \cap x|$ ist ungerade $\Leftrightarrow$ $(y,y') \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. (Es ist $(x+y, x'+y') = \frac{1}{2}|x \cap x'| + (y,y') \in \mathbb{Z}$.) Weiter ist $(y,y') \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}. \Leftrightarrow (y, b - y') \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.
Behauptung: $(y,y') = \frac{1}{2}$.

Dies folgt wieder mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung.
Es ist $(y+y',b)^2 = 6.25 \leq 3\cdot(y+y',y+y') = 3\cdot(2+2(y,y'))$. Also ist $(y,y')>0$. Da $(y,y')<1$ ist, folgt die Behauptung.
Damit ist also für alle diese u (die man durch Schnitt von c mit einem Wort $x'\in C^\perp$ erhält, so daß in der zu x' gehörenden Klasse in $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ ein Vektor der Quadratlänge 1 liegt, der mit b Skalarprodukt 2 hat) $|u\cap x|$ ungerade.

5. $c\in C_{12}^\perp - C_{12},\ (b,b)=2,\ |u|$ gerade :

$$M_v = \{\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i \mid x\in C_8,\ x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ gerade }\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid x\in C_4^\perp,\ x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ gerade },\ \Psi(\bar{b})=\tilde{x}\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b)=1,\ x\in C_6^\perp,\ x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ ungerade },\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x}\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{4}\epsilon_x(i)a_i + y \mid (x,y)\in C_{ung}^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b)=1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ x\cap c=u\}$$

$$|M_v| = 2\cdot A_8(c,u) + C_6(c,b,u) + C(c,b,u),$$

wo

$$A_8(c,u) := |\{x\in C_8 \mid x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ gerade }\}|,$$

$$C(c,b,u) := |\{(x,y)\in C_{ung}^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid (y,b)=1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ x\cap c=u\}|$$

und

$$C_6(c,b,u) := |\{(x,y,u)\in C_6^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1\times\mathcal{P}(c) \mid \begin{array}{l}\Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ (y,b)=1\\ x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ ungerade}\end{array}\Big\}|.$$

Mit

$$B_{13}(H) := |\{(c,b,u)\in C_{12}^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2\times\mathcal{P}(c) \mid \begin{array}{l}\Psi(\bar{b})=\tilde{c},\ 2\cdot A_8(c,u)+\\ C_6(c,b,u)+C(c,b,u)=H\end{array}\Big\}|$$

wird dann

$$A_{j5}(H) = B_{13}(H).$$

Die Berechnung von $B_{13}(H)$ führe ich gleichzeitig für die Paare c und $\mathbb{1}+c\in C_{12}^\perp - C_{12}$ aus. Für die 11070 Paare $\{c,\mathbb{1}+c\}$ bestimme ich

$$A8 := \{x\in C_8 \mid x\subseteq c\}$$

$$A1 := \{x\in C_8 \mid x\subseteq \mathbb{1}+c\}$$

$$C6 := \{x\in C_6^\perp \mid x\subseteq c\}$$

$$B6 := \{x\in C_6^\perp \mid x\subseteq \mathbb{1}+c\}$$

und die Mengen

$$Cm6 := \{\text{Klassen}(x) \mid x\in C6\} \text{ bzw. } Bm6 := \{\text{Klassen}(x) \mid x\in B6\}.$$

Sei $a8 := |A8|,\ a1 := |A1|,\ c6 := |C6|,\ b6 := |B6|$. Für alle acht positiven Vektoren $b[j],\ j=1,\ldots,8$ aus der c (und damit auch $\mathbb{1}+c$) entsprechenden Klasse in $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ bestimme ich die Anzahlen $cc6[j]$ ($bb6[j]$) der Klassen aus $Cm6$ ($Bm6$), in denen es einen Vektor $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ mit $(b,y)=1$ gibt. Außerdem setze ich $mb[j,k]=mb[k,j]=1$

$(mc[j,k]=mc[k,j]=1$),falls es in $Bm6$ (bzw. $Cm6$) eine Klasse gibt, in der es einen Vektor $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ gibt mit $(b[j],y)=(b[k],y)=1$.

Sei nun $x\in C^{\perp}_{ung},\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ mit $\Psi(\bar{y})=\tilde{x}$ und $(y,b[j])=1$.

Es ist $x\cap c=(x+\mathbb{1}+c)\cap c=:u,\ \Psi(\overline{b[j]-y})=\tilde{x}+\tilde{c}$ und $(b[j]-y,b[j])=1$.

Welche anderen Worte $x'\in C^{\perp}$ kann man zu x addieren, so daß $(x'':=x+x')\ x''\cap c=u$ und $(y'',b[j])=1$ ist?

Sei z. B. $\sqrt{2}b[j]=(20^7)$. Dann sind $\sqrt{2}y,\sqrt{2}y''\in\{(1(10^6))\}$, und $\sqrt{2}y-\sqrt{2}y''\in\{(0(1^20^5))\}$. Also kann man genau die Worte $x'\in B6$ zu x addieren, in deren Klasse es ein y' der Quadratlänge 1 gibt mit $(y',b[j])=0$ und $(y',b[k])=1$ für ein $k\neq j$. Die Anzahl solcher x' ist gerade

$$A[j]:=\sum_{k\neq j}\frac{bb6[k]}{2}-(a1+1)\cdot mb[j,k].$$

Zu $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ gibt es 14 $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ mit $(b,y)=1$ $(\sqrt{2}b=(20^7)\Rightarrow\sqrt{2}y\in\{(1(10^6))\})$. Diese y liegen in verschiedenen Klassen von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$. Also gibt es $vm:=\frac{14\cdot256}{A[j]}$ verschiedene $u=x\cap c$ mit $x\in C^{\perp}_{ung}\ y\in(\Psi^{-1}(\tilde{x}))_1,\ (b[j],y)=1$. Für diese u ist $|M(v)|=2\cdot a8+cc6[j]+A$ $(v=\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+b[j])$, falls $|u\cap x|$ ungerade ist, für alle $x\in C6$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $u=c\cap x'$ mit $x'\notin$ Klasse(x) und $x'\notin$ Klasse$(x+c)$ (die zugehörigen $y,y'\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ müssen halbzahliges Skalarprodukt haben), also für $\frac{(14-\frac{cc6[j]}{a8+1})\cdot256}{A[j]}$ verschiedene u. Für die übrigen $u=x'\cap c$ gibt es $2\cdot(a8+1)\ x\in C_6^{\perp}$ mit $x\cap u$ gerade, also ist $|M(v)|=cc6[j]-2+A$.

Für die restlichen $u\subseteq c$ ist $C(c,b[j],u)=0$. Man braucht also nur noch zu berechnen, wieviele der restlichen u in $C_c^{\perp}$ liegen und welche Anzahl der $u\in C_c^{\perp}$ $(u\notin C_c^{\perp})$ mit wievielen $x\in C6[j]:=\{x\in C_6^{\perp}\mid x\subseteq c,$ es gibt ein $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ in der Klasse von x mit $(b[j],y)=1\}$ einen ungeraden Durchschnitt hat. Dazu beachte man, daß für $x,y\in C6[j]$ $x+y\notin C6[j]$ ist. Falls $x\in C6[j]$ mit $|u\cap x|$ ungerade, $u\in C_c^{\perp}$, so ist für alle $a\in C_c$ $a+x\in C6[j]$ und $|u\cap(a+x)|$ ungerade. Ist $u\notin C_c^{\perp}$, so ist $|u\cap x|$ ungerade $\Rightarrow|u\cap(a+x)|$ gerade für alle $a\subseteq c$ mit $|u\cap a|$ ungerade.

Analog ergeben sich die Werte für $\mathbb{1}+c$.

6. $c\in C_{14}^{\perp},\ (b,b)=1,\ |u|$ ungerade :

$$M_v=\{\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\mid x\in C_8,\ x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ gerade }\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+b\mid x\in C_6^{\perp},\ x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ ungerade },\ \Psi(\bar{b})=\tilde{x}\}\cup$$

$$\{-\epsilon_x(j)\frac{3}{4}a_j+\sum_{i\neq j}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i\mid x\in C,\ (x\cap c)\Delta u=\{j\}\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+b\mid x\in C^{\perp},\ \Psi(\bar{b})=\tilde{x},\ |(x\cap c)\Delta u|=1\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\frac{1}{4}\epsilon_x(i)a_i+y\mid(x,y)\in C^{\perp}_{ung}\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ x\cap c=u\Rightarrow(y,b)=0.5\}$$

$$|M_v|=2\cdot(A_8(c,u)+A(c,u))+C(c,u),$$

wo

$$A_8(c,u):=|\{x\in C_8\mid x\subseteq c,\ |u\cap x| \text{ gerade }\}|$$

$$C(c,u) := |\{x \in C^\perp_{ung} \mid x \cap c = u\}|$$

und

$$A(c,u) := |\{x \in C \mid |(x \cap c)\Delta u| = 1\}|.$$

Mit

$$B_{14}(H) := |\{(c,u) \in C^\perp_{14} \times \mathcal{P}(c) \mid 2 \cdot A_8(c,u) + 2 \cdot A(c,u) + C(c,u) = H\}|$$

wird dann

$$A_{j6}(H) = B_{14}(H).$$

k) $\epsilon_u(j)a_j + \sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b\ ,\ u - \{j\} \subseteq c \in C^\perp,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$

1. $j \notin c \in C^\perp_4,\ (b,b) = 4,\ |u \cap c|$ ungerade :

$$M_v = \{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C^\perp_4,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ gerade} \\ |c \cap x| = 2,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 2 \end{array} \Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C^\perp_4,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ gerade} \\ |c \cap x| = 1,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 2.5 \end{array} \Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C^\perp_6,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ ungerade} \\ |c \cap x| = 3,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 1.5 \end{array} \Big\}$$

$$|M_v| = D_2(j,c,b) + 4 \cdot D_1(j,c,b),$$

wo

$$D_2(j,c,b) := |\{(x,y) \in C^\perp_4 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 2,\ |c \cap x| = 2,\ j \in x\}|$$

und

$$D_1(j,c,b) := |\{(x,y) \in C^\perp_4 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 2.5,\ |c \cap x| = 1,\ j \in x\}|.$$

Mit

$$B_{15}(H) := |\{(j,c,b) \in \{1,\ldots,24\} \times C^\perp_4 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)^+_4 \mid D_2(j,c,b) + 4 \cdot D_1(c,j,b) = H\}|$$

ist dann

$$A_{k1}(H) = 2^4 \cdot B_{15}(H).$$

Zur Berechnung von B_{15}:
Für $j \notin c \in C^\perp_4$ bestimme ich zunächst die Menge

$$M(c,j) := \{x \in C^\perp_4 \mid j \in x,\ |c \cap x| \in \{1,2\}\}.$$

Die $x \in M(c,j)$ liegen in verschiedenen Klassen von $C^\perp/C$, denn seien $x, x' \in M(c,j)$, so ist $|x + x'| = |x| + |x'| - 2|x \cap x'| < 8$, da $j \in x \cap x'$ ist. Folglich ist $x + x' \notin C$, falls $x \neq x'$, also liegen x und x' in verschiedenen Klassen von $C^\perp/C$. Ist $M(c,j) = \emptyset$, so ist $D_2(c,j,b) = 0$ für alle 128 $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4$ mit $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$. Ist $|M(c,j)| = 2$ und $M(c,j) = \{x, c+x\}$ mit $|x \cap c| = 2$, so ist $D_2(c,j,b) = 2$ für 128 $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4$ mit $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$.
Um dieses zu sehen betrachtet man am besten $E_8/2E_8$. Da die Automorphismengruppe von E_8 transitiv auf den Vektoren der Quadratlänge 2,4 und 6 operiert und genau zwei Bahnen auf den Vektoren der Quadratlänge 8 hat (nämlich die Vektoren, die von der Form $2v$ mit $v \in (E_8)_2$ sind liegen in einer Bahn, der Rest in der anderen) kann

man mit den Bezeichnungen aus der Tabelle 'Vektoren von E_8' o.B.d.A. $y := (20^7)$ und $b := (21^4 0^3)$ betrachten. Die Vektoren der b' Quadratlänge 8 mit denen y Skalarprodukt 4 hat, sind von der Form $(2(1^4 0^3))$, wo beliebige Permutationen mit Vorzeichenwechsel unter den Einsen und Nullen zugelassen sind. Von diesen b' liegen noch 7 Vektoren in der Klasse von b (modulo $2E_8$), denn es muß für diese b' gelten:

$$(21^4 0^3) - (2(1^4 0^3)) \in \{(0(2^4 0^3)), (0(2^2 0^5))\}.$$

In der Klasse von y liegen alle Vektoren y' von der Form $((20^7))$. Dies sind alle 16 Vektoren der Quadratlänge 4 in der Klasse von y. Die $b'' \in (E_8)_8 - 2E_8$, die mit y' Skalarprodukt 4 haben, sind gerade von der Form $((21^4 0^3))$, wo die 2 an der gleichen Position wie die 2 in y' steht und auch das gleiche Vorzeichen hat. Nun ist zum Beispiel $(21^4 0^3) - (120^3 1^3) = (1(-1)1^3(-1)^3) \in 2E_8$. Analog sieht man, daß zu jedem dieser y' wieder 8 b'' in der Klasse von b liegen.

Die Abbildung $y \mapsto b - y$ mit $(y, b) = 4$, y, b wie oben, ist eine Bijektion zwischen den Vektoren y der Quadratlänge 4 mit $\Psi(y) = \tilde{x}$ und den Vektoren y' der Quadratlänge 4 mit $\Psi(y') = \tilde{x} + \tilde{c}$ und $(b, y') = 4$.

Also ist $D_2(c, j, b) = 2$ für $16 \cdot 8 = 128$ b.

Ist aber nun $|M(c, j)| > 2$, so kann man nicht so leicht sehen, auf welche Klassen sich die $x \in M(c, j)$ verteilen. Ich mache mir dann eine Liste der $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $\Psi(y) = \tilde{x}$ für ein $x \in M(c, j)$. Für alle $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4$ mit $\Psi(b) = \tilde{c}$ zähle ich die y aus dieser Liste, die mit b das Skalarprodukt 2 (2.5) haben. Diese Anzahl ist gleich $D_2(c, j, b)$ $(D_1(c, j, b))$.

2. $j \notin c \in C_6^\perp$, $(b, b) = 3$, $|u \cap c|$ gerade :

$$M_v = \{\sum_{i \in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_4^\perp,\ |u \cap x| \text{ gerade },\ |c \cap x| = 3 \\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y, b) = 1.5 \end{array} \Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_4^\perp,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ gerade} \\ |c \cap x| = 2,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y, b) = 2 \end{array} \Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_6^\perp,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ ungerade} \\ |c \cap x| = 4,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y, b) = 1 \end{array} \Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i \in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_6^\perp,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ ungerade} \\ |c \cap x| = 3,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y, b) = 1.5 \end{array} \Big\}$$

$$|M_v| = 2 \cdot D_2(j, c, b) + D_3(j, c, b, u) + 2 \cdot C_3(j, c, b).$$

Hier ist

$$D_2(j, c, b) := |\{(x, y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ j \in x,\ |c \cap x| = 2,\ (y, b) = 1\}|.$$

$$D_3(j, c, b, u) := |\{(x, y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid \begin{array}{l} \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ j \in x,\ |c \cap x| = 3, \\ (y, b) = 1.5,\ |u \cap x| \text{ gerade} \end{array} \Big\}|.$$

$$C_3(j, c, b) := |\{(x, y) \in C_6^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ j \in x,\ |c \cap x| = 3,\ (y, b) = 1.5\}|.$$

Mit

$$B_{16}(H) := |\{(j, c, b, u) \in \{1, \ldots, 24\} \times C_6^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3 \times \mathcal{P}(c) \mid$$
$$2 \cdot D_2(j, c, b) + D_3(j, c, b, u) + 2 \cdot C_3(j, c, b) = H\}|$$

ist dann

$$A_{k2}(H) = 2 \cdot B_{16}(H).$$

Die Berechnung von B_{16} erfolgt ähnlich zu der von B_{15}. Wie bei B_{15} kann man die Vektoren y und b in den theoretischen Anzahlüberlegungen für den Fall $|M(c,j)| = 1$ fixieren. Sei also $y := (20^7)$ und $b := (21^2 0^5)$ mit $(b,y) = 4$. Dann hat nur noch $(2(-1)^2 0^5)$ in der Klasse von b mit y Skalarprodukt 4. Für die anderen y' aus der Klasse von y gibt es nur zu den y', die in der zweiten und dritten Koordinate eine Null haben, ein (dann natürlich wieder zwei) b' in der Klasse von b der Quadratlänge 6 mit $(b',y') = 4$. Also ist $D_2(c,j,b) = 1$ für $12 \cdot 2 = 24$ b und $D_2(c,j,b) = 0$ für $56 - 24 = 32$ b (falls $|M(c,j)| = 1$).

3. $j \notin c \in C_8^\perp - C_8,\ (b,b) = 2,\ |u \cap c|$ ungerade :

$$M_v = \{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_4^\perp,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ gerade} \\ |c \cap x| = 2,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x} \end{array}\Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i \mid j \in x \in C_8,\ |c \cap x| = 6,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ gerade } \} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_6^\perp,\ t \cap (c \cup \{j\}) = u \cap x,\ |t| \text{ ungerade} \\ |c \cap x| = 4,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 1 \end{array}\Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_4^\perp,\ |u \cap x| \text{ gerade },\ |c \cap x| = 3 \\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b) = 1.5,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x} \end{array}\Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_6^\perp,\ |u \cap x| \text{ ungerade },\ |c \cap x| = 5 \\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (y,b) = 0.5,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x} \end{array}\Big\}$$

$$|M_v| = C_4(j,c,b) + 2 \cdot A_6(j,c) + 2 \cdot C_5(j,c,b,u),$$

wo

$$A_6(j,c) := |\{x \in C_8 \mid j \in x,\ |x \cap c| = 6\}|,$$

$$C_5(j,c,b,u) := |\{(x,y) \in C_6^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid j \in x,\ |c \cap x| = 5,\ (y,b) = 0.5,\ |u \cap x| \text{ ungerade } \}|$$

und

$$C_4(j,c,b) := |\{(x,y) \in C_6^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid \Psi(\bar{y}) = \tilde{c},\ |c \cap x| = 4,\ (y,b) = 1,\ j \in x\}|.$$

Mit

$$B_{17}(H) := |\{(j,c,b,u) \in \{1,\ldots,24\} \times C_8^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2^+ \times \mathcal{P}(c) \mid$$

$$C_4(j,c,b) + 2 \cdot A_6(j,c) + 2 \cdot C_5(j,c,b,u) = H\}|$$

ist dann

$$A_{k3}(H) = 2 \cdot B_{17}(H).$$

4. $j \notin c \in C_{10}^\perp,\ (b,b) = 1,\ |u \cap c|$ gerade : Nach eventuellem Übergang zu $-v$ kann angenommen werden, daß $j \notin u$. Dann ist

$$M_v = \{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid j \in x \in C_6^\perp,\ t \cap c = u \cap x,\ |t| \text{ ungerade },\ |c \cap x| = 4,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x}\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i \mid j \in x \in C_8,\ |c \cap x| = 6,\ t \cap c = u \cap x,\ |t| \text{ gerade } \} \cup$$

$$\{\sum_{i\in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} j \in x \in C_6^\perp,\ |u \cap x| \text{ ungerade },\ |c \cap x| = 5 \\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (b,y) = 0.5,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x} \end{array}\Big\} \cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+b \mid x\in C^\perp,\ x\cap c=u,\ j\notin x,\ \Psi(\bar b)=\tilde x\}\cup$$

$$\{\frac{3}{4}a_j+\sum_{i\neq j}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid x\cap c=u,\ j\in x\in C\}$$

$$|M_v| = 2\cdot(A_6(j,c)+A(j,c,u))+C_5(j,c,b,u),$$

wo

$$A_6(j,c) := |\{x\in C_8 \mid j\in x,\ |x\cap c|=6\}|,$$
$$A(j,c,u) := |\{x\in C \mid j\in x,\ x\cap c=u\}$$

und

$$C_5(j,c,u) := |\{x\in C_6^\perp \mid j\in x,\ |x\cap u| \text{ ungerade },\ |c\cap x|=5\}|.$$

Mit

$$B_{18}(H) := |\{(j,c,u)\in\{1,\dots,24\}\times C_{10}^\perp\times\mathcal{P}(c) \mid 2\cdot A_6(j,c)+2\cdot A(j,c,u)+C_5(j,c,u)=H\}|$$

ist dann

$$A_{k4}(H) = 4\cdot B_{18}(H).$$

5. $j\in c\in C_4^\perp,\ (b,b)=2,\ |u|$ ungerade :

$$M_v = \{\epsilon_u(j)a_j+\epsilon_u(i)a_i \mid i\in c-\{j\}\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\cdot\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+b \mid |t|=1,\ j\notin t\}$$

$$|M_v| = 6 \text{ und } A_{k5}(6)=46.080.$$

6. $j\in c\in C_6^\perp,\ (b,b)=1,\ |u|$ gerade :

$$M_v = \{\epsilon_u(j)a_j+\epsilon_u(i)a_i \mid i\in c-\{j\}\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\cdot\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+b \mid |t|=1,\ j\notin t\}$$

$$|M_v| = 10 \text{ und } A_{k6}(10)=368.640.$$

l) $\epsilon_u(j)a_j+\epsilon_u(k)a_k+\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+b$, $u-\{j,k\}\subseteq c\in C^\perp,\ b\in\frac{1}{\sqrt2}E_8,\ \Psi(\bar b)=\tilde c$

1. $j,k\notin c\in C_4^\perp,\ (b,b)=2,\ |u\cap c|$ gerade :

$$M_v = \{\epsilon_u(j)a_j+\epsilon_u(k)a_k\}\cup\{\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+b\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+y \mid \left.\begin{array}{l} j,k\in x\in C_6^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt2}E_8)_1,\ \Psi(\bar y)=\tilde x,\ (y,b)=1 \\ |x\cap c|=2,\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x,\ |t| \text{ ungerade}\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i \mid \{j,k\}\cup c\subseteq x\in C_8,\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x,\ |t| \text{ gerade }\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+b \mid \left.\begin{array}{l} j,k\in x\in C_4^\perp,\ |x\cap c|=0, \\ t\cap\{j,k\}=u\cap x,\ |t| \text{ gerade },\ \Psi(\bar b)=\tilde x\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+y \mid \left.\begin{array}{l} j,k\in x\in C_6^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt2}E_8)_1,\ \Psi(\bar y)=\tilde x,\ (y,b)=0.5 \\ |x\cap c|=3,\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x,\ |t| \text{ ungerade}\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+y \mid \begin{array}{l} j,k\in x\in C_4^\perp,\ |x\cap c|=1,\ |u\cap x| \text{ gerade} \\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b)=1.5,\ \Psi(\bar y)=\tilde x \end{array}\Bigg\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+y \mid \begin{array}{l} j,k\in x\in C_4^\perp,\ |x\cap c|=2,\ |u\cap x| \text{ gerade} \\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ (y,b)=1,\ \Psi(\bar y)=\tilde x \end{array}\Bigg\}$$

$$|M_v|=2+4\cdot A_6(c,j,k)+2\cdot C_4(c,j,k,b)+2\cdot C_5(c,j,k,b)+D_2(j,k,c,b,u),$$

wo

$$A_6(c,j,k):=|\{x\in C_8\mid\{j,k\}\cup c\subseteq x\}|$$

$$C_4(c,j,k,b):=|\{(x,y)\in C_6^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1\mid j,k\in x,\ \Psi(\bar y)=\tilde x,\ |x\cap c|=2,\ (y,b)=1\}|,$$

$$C_5(c,j,k,b):=|\{(x,y)\in C_6^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1\mid j,k\in x,\ \Psi(\bar y)=\tilde x,\ |x\cap c|=3,\ (y,b)=0.5\}|,$$

$$D_2(j,k,c,b,u):=|\{(x,y)\in C_4^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2\mid \begin{array}{l} j,k\in x,\ |x\cap c|=2,\ |u\cap x| \text{ gerade} \\ (y,b)=1,\ \Psi(\bar y)=\tilde x \end{array}\Bigg\}|.$$

Definiert man

$$B_{19}(H):=|\{(c,j,k,b,u)\in C_4^\perp\times\{1,\dots,24\}^2\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2\times\mathcal{P}(c)\mid$$

$$4\cdot A_6(c,j,k)+2\cdot C_4(c,j,k,b)+2\cdot C_5(c,j,k,b)+D_2(j,k,c,b,u)=H\}|,$$

so ist

$$A_{l1}(2+H)=2^2\cdot B_{19}(H).$$

2. $j,k\notin c\in C_6^\perp,\ (b,b)=1,\ |u\cap c|$ ungerade :

$$M_v=\{\epsilon_u(j)a_j+\epsilon_u(k)a_k\}\cup\{\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+b\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+y \mid \begin{array}{l} j,k\in x\in C_4^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar y)=\tilde x,\ (y,b)=1 \\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x,\ |c\cap x|=2,\ |t| \text{ gerade} \end{array}\Bigg\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+y \mid \begin{array}{l} j,k\in x\in C_6^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar y)=\tilde x \\ (y,b)=0,\ |x\cap c|=4,\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x,\ |t| \text{ ungerade} \end{array}\Bigg\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+y \mid \begin{array}{l} j,k\in x\in C_6^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar y)=\tilde x, \\ (y,b)=0.5,\ |x\cap c|=3,\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x,\ |t| \text{ ungerade} \end{array}\Bigg\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i\mid j,k\in x\in C_8,\ |c\cap x|=4,\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x,\ |t| \text{ gerade }\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in x}\epsilon_t(i)\frac{1}{2}a_i+b \mid \begin{array}{l} j,k\in x\in C_6^\perp,\ |x\cap c|=2,\ t\cap(c\cup\{j,k\})=u\cap x \\ |t| \text{ ungerade },\ \Psi(\bar b)=\tilde x \end{array}\Bigg\}$$

$$|M_v|=2+4\cdot A_4(c,j,k)+2\cdot C_4'(c,j,k,b,u)+C_3(c,j,k),$$

wo

$$A_4'(c,j,k):=|\{x\in C_8\mid j,k\in x,\ |c\cap x|=4\}|$$

$$C_3(c,j,k):=|\{x\in C_6^\perp\mid j,k\in x,\ |c\cap x|=3\}|$$

$C_4'(c,j,k,b,u):=$

$$|\{(x,y)\in C_6^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1\mid j,k\in x,\ |c\cap x|=4,\ |u\cap x| \text{ ungerade },\ \Psi(\bar y)=\tilde x,\ (y,b)=0\}|.$$

Definiert man

$$B_{20}(H) := |\{(c,j,k,b,u) \in C_6^\perp \times \{1,\dots,24\}^2 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \times \mathcal{P}(C) \mid$$

$$4 \cdot A_4(c,j,k) + 2 \cdot C_4'(c,j,k,b,u) + C_3(c,j,k) = H\}|,$$

so ist

$$A_{l2}(2+H) = B_{20}(H).$$

m) $v = -\sum_{i\in c_1} \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i + \sum_{i\in c_2} \epsilon_u(i)\frac{3}{4}a_i + b\ ,\ b \in \frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ c_1 \cup c_2 = \{1,\dots 24\},\ \tilde{u} = \Psi(\bar{b}):$

1. $(b,b) = 0,\ |c_2| = 5:$

$$M_v = \{\sum_{i\in c_2} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + \frac{1}{2}(\epsilon_u(j)a_j - \epsilon_u(k)a_k - \epsilon_u(l)a_l) \mid c_2 \cup \{j,k,l\} \in C_8\} \cup$$

$$\{\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j + \sum_{i\neq j} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid \begin{array}{l} x \in C,\ \{j\} \cap u = \{j\} - x,\ j \notin c_2 \\ |(c_1 - u)\Delta(x \cap c_1)| = 2 \end{array}\Bigg\} \cup$$

$$\{-\sum_{i\in c_1\cap c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + \sum_{i\in c_2-\{i_0\}} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i \mid c = c_2 - \{i_0\} \cup (c_1 \cap c) \in C_8\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in c_2-\{i_0\}} \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i + \epsilon_u(i_0)\frac{3}{4}a_{i_0} - \sum_{i\notin c\cup\{i_0\}} \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i + \sum_{i\in c-c_2} \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i \mid c \in C,\ c\cap c_2 = c_2 - \{i_0\}\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in c_2} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i - \epsilon_u(j)\frac{1}{2}a_j + b \mid c = c_2 \cup \{j\} \in C_6^\perp,\ b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i - \sum_{i\notin c} \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i + b \mid c = c_2 \cup \{j\} \in C_{ung}^\perp,\ b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}\}$$

$$|M_v| = 2 \cdot (3 \cdot A_5(c_2) + \sum_{i_0\in c_2} B(c_2, i_0) + 2 \cdot C_5(c_2)),$$

wo

$$A_5(c_2) := |\{x \in C_8 \mid c_2 \subseteq x\}|$$
$$B(c_2, i_0) := |\{x \in C_8 \mid c_2 \cap x = c_2 - \{i_0\}\}|$$
$$C_5(c_2) := |\{x \in C_6^\perp \mid c_2 \subseteq x\}|.$$

Mit

$$B_{21}(H) := |\{c_2 \in \{1,\dots,24\}^5 \mid 3 \cdot A_5(c_2) + \sum_{i_0\in c_2} B(c_2, i_0) + 2 \cdot C_5(c_2) = H\}|$$

wird dann

$$A_{m1}(2H) = 256 \cdot B_{21}(H).$$

2. $(b,b) = 1,\ |c_2| = 4:$

$$M_v = \{\sum_{i\in c_2\cap c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i - \sum_{i\in c_1\cap c} \frac{1}{2}\epsilon_u(i)a_i \mid c \in C_8,\ c_2 \subseteq c\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in c} \frac{1}{4}a_i - \sum_{i\notin c} \frac{1}{4}a_i + b \mid c \in C_{ung}^\perp,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c},\ |(c - c_2)\Delta(u - c_2)| = 4,\ c_2 - u = c \cap c_2\} \cup$$

$$\{\epsilon_u(j)\frac{1}{2}a_j - \epsilon_u(k)\frac{1}{2}a_k + \sum_{i\in c_2} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid c = c_2 \cup \{j,k\} \in C_6^\perp,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}\} \cup$$

$$\{-\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j + \sum_{i\neq j} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid x \in C,\ j \in u \Leftrightarrow j \notin x,\ j \notin c_2,\ x\cap c_2 = u\cap c_2,\ |x\cap c_1 \Delta c_1 - u| = 1\} \cup$$

$$\{\sum_{i\in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid c \in C_6^\perp,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c},\ |c \cap c_2| = 3\} \cup$$

$$\{\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j + \sum_{i\neq j} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid x \in C,\ j \in u \Leftrightarrow j \in x,\ j \in c_2,\ x\cap c_2 = u\cap c_2,\ |x\cap c_1 \Delta c_1 - u| = 3\} \cup$$

$$\{-\epsilon_u(j)\frac{1}{2}a_j - \epsilon_u(k)\frac{1}{2}a_k + \sum_{i\in c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid \begin{array}{l} c = c_2 \cup \{j,k\} \in C_6^\perp,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{c},\ (b,y) = 0.5 \end{array}\Bigg\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i + y \mid \begin{array}{l} x \in C_{ung}^\perp,\ x\cap c_2 = u\cap c_2,\ x\cap c_1 = c_1 - u \\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (b,y) = 0.5 \end{array}\Bigg\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + y \mid c_2 \in C_4^\perp,\ |c_2\cap u| \text{ gerade },\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{c_2},\ (y,b) = 1\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c}\frac{1}{4}a_i - \sum_{i\not\in c}\frac{1}{4}a_i + y \mid c \in C^\perp,\ y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{c},\ (y,b) = 0,\ c_2 - u = c\cap c_2,\ c - c_2 = u$$

$$|M_v| = 2\cdot(A_4(c_2) + 2\cdot C_4(c_2,b) + C_3(c_2,b) + D_4(c_2,b,u) + C_4'(c_2,b)),$$

wo

$$A_4(c_2) := |\{x \in C_8 \mid c_2 \subseteq x\}|$$

$$C_4(c_2,b) := |\{x \in C_6^\perp \mid c_2 \subseteq x,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x}\}|$$

$$C_3(c_2,b) := |\{x \in C_6^\perp \mid |c_2\cap x| = 3,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x}\}|$$

$$C_4'(c_2,b) := |\{x \in C_6^\perp \mid c_2 \subseteq x,\ \text{es gibt } y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (b,y) = 0.5\}|$$

$$D_4(c_2,b,u) = |\{(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid c_2 = x,\ |c_2\cap u| \text{ gerade },\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 1\}|$$

Es ist für $(x,y) \in C_4^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $\Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 1,\ (y+b,y+b) = 5$, also $|x+u| = 4 + |u| - 2|x\cap u| \equiv 2 \pmod 4$. Folglich ist für diese (x,y) $|x\cap u|$ gerade. Ebenso ist für $(x,y) \in C_6^\perp \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ mit $\Psi(\bar{y}) = \tilde{x},\ (y,b) = 0.5$ $|x\cap u|$ ungerade und falls $y = b$ ist, ist $|x\cap u|$ gerade. Mit

$$B_{22}(H) := |\{(c_2,b) \in \{1,\dots,24\}^4 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1^+ \mid$$

$$A_4(c_2) + 2\cdot C_4(c_2,b) + C_3(c_2,b) + C_4'(c_2,b) + D_4(c_2,b,u) = H\}|$$

wird dann

$$A_{m2}(2H) = 2\cdot 256\cdot B_{22}(H).$$

<u>Zur Berechnung von $B_{22}(H)$:</u>

Für $c_2 \in \{1,\dots,24\}^4$ bestimme ich zunächst

$$z1 := |\{x \in C \mid c_2 \subseteq x\}|$$

$$z2 := |\{x \in C_6^\perp \mid c_2 \subseteq x\}|$$

$$z3 := |\{x \in C_6^\perp \mid |c_2\cap x| = 3\}|.$$

Ist $c_2 \in C^\perp$, so gibt es 112 $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$, die mit einem $y \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $\Psi(\bar{y}) = \tilde{c_2}$ Skalarprodukt 1 haben. Zu jedem solchen b gibt es dann 2 solcher y, nämlich y und $2b - y$. Weiter ist $z2 = 0$ und für $x \in C_6^\perp$ mit $|c_2\cap x| = 3$ und $y' \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y}) = \tilde{x}$ ist $(y',y) \neq 1$ halbzahlig für jedes y mit $\Psi(\bar{y}) = \tilde{c_2}$.

Ist $c_2 \not\in C^\perp$, so kann man für die Fälle $z2 = 0$ und $z3$ beliebig, bzw. $z3 = 0$ und $z2 \in \{1,2,3\}$ die Anzahlen der b mit $z1 + 2\cdot C_4(c_2,b) + C_3(c_2,b) + C_4'(c_2,b) = H$ durch theoretische Überlegungen erhalten.

In den restlichen Fällen muß man die einzelnen $b \in (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ durchlaufen und $|M_v|$ einzeln berechnen.

3. $(b,b)=2,\ |c_2|=3:$

$$M_v=\{\sum_{i\in c\cap c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i-\sum_{i\in c\cap c_1}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+b\mid c\in C_4^{\perp},\ |c\cap c_2|=2,\ \Psi(\bar{b})=\tilde{c}\}\cup$$

$$\{\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j+\sum_{i\neq j}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i\mid \left.\begin{array}{l} j\in c_2,\ x\in C,\ \{j\}\cap x=\{j\}\cap u,\\ u\cap c_2=x\cap c_2,\ |(c_1-u)\Delta(x\cap c_1)|=2\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c,i\neq j}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i-\epsilon_u(j)\frac{1}{2}a_j+y\mid c_2\cup\{j\}=c\in C_4^{\perp},\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{c},\ (b,y)=1.5\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+y\mid \left.\begin{array}{l} x\in C_{ung}^{\perp},\ u\cap c_2=x\cap c_2,\ |(c_1-u)\Delta(x\cap c_1)|=1\\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ (b,y)=1.5\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+b\mid c\in C_4^{\perp},\ c_2\subseteq c,\ \Psi(\bar{b})=\tilde{c}\}\cup$$

$$\{\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j+\sum_{i\neq j}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i\mid j\in c_1,\ x\in C,\ u\cap c_2=x\cap c_2,\ (c_1-u)\Delta(x\cap c_1)=\{j\}\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i-\sum_{i\in c-c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+y\mid \left.\begin{array}{l} c_2\subseteq c\in C_6^{\perp},\ |u\cap c|\text{ gerade}\\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{c},\ (y,b)=1\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+y\mid y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ (y,b)=1,\ u\cap c_2=x\cap c_2,\ |(c_1-u)\Delta(x\cap c_1)|=3\}$$

$$|M_v|=2\cdot(D_2(c_2,b)+D_3(c_2,b)+D_3'(c_2,b)+C_3(c_2,b)),$$

wo

$$D_2(c_2,b):=|\{x\in C_4^{\perp}\mid \Psi(\bar{b})=\tilde{x},\ |c_2\cap x|=2\}|,$$

$$D_3(c_2,b):=|\{x\in C_4^{\perp}\mid \Psi(\bar{b})=\tilde{x},\ c_2\subseteq x\}|,$$

$$D_3'(c_2,b):=|\{(x,y)\in C_4^{\perp}\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2\mid \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ c_2\subseteq x,\ (b,y)=1.5\}|$$

$$C_3(c_2,b):=|\{(x,y)\in C_6^{\perp}\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1\mid \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ (y,b)=1(\Rightarrow |u\cap x|\text{ gerade }),\ c_2\subseteq x\}|.$$

Definiert man

$$B_{23}(H):=|\{(c_2,b)\in\{1,\ldots,24\}^3\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2^+\mid D_2(c_2,b)+D_3(c_2,b)+D_3'(c_2,b)+C_3(c_2,b)=H\}|,$$

so ist

$$A_{m3}(2H)=2\cdot 256\cdot B_{23}(H).$$

4. $(b,b)=3,\ |c_2|=2:$

$$M_v=\{-\epsilon_u(j)\frac{1}{2}a_j-\epsilon_u(k)\frac{1}{2}a_k+\sum_{i\in c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+y\mid \left.\begin{array}{l} \{j,k\}\cup c_2=c\in C_4^{\perp},\ |u\cap c|\text{ gerade}\\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{c},\ (y,b)=2\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+y\mid y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ c_2\cap u=c_2\cap x,\ |(c_1-u)\Delta(c_1\cap x)|=2,\ (y,b)=1\}\cup$$

$$\{-\sum_{i\in c-c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+\sum_{i\in c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+y\mid \left.\begin{array}{l} c_2\subseteq c\in C_6^{\perp},\ |u\cap c|\text{ ungerade}\\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{c},\ (y,b)=1.5\end{array}\right\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+y \mid y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ c_2\cap u=c_2\cap x,\ |(c_1-u)\Delta(c_1\cap x)|=4,\ (y,b)=1.5$$

$$|M_v|=2\cdot(D_2'(c_2,b)+C_2(c_2,b)),$$

wo

$$D_2'(c_2,b):=|\{(x,y)\in C_4^{\perp}\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ (y,b)=2(\Rightarrow |u\cap x| \text{ gerade }),\ c_2\subseteq x\}|,$$

$$C_2'(c_2,b):=|\{(x,y)\in C_6^{\perp}\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ (y,b)=1.5(\Rightarrow |u\cap x| \text{ ungerade }),\ c_2\subseteq x\}|.$$

Mit

$$B_{24}(H):=|\{(c,b)\in\{1,\dots 24\}^2\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3 \mid D_2'(c,b)+C_2'(c,b)=H\}|$$

ist dann

$$A_{m4}(2H)=256\cdot B_{24}(H).$$

Zur Berechnung von B_{24}:

Zu jedem $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ gibt es 27 $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $(b,y)=2$ und 2 $y'\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ mit $(b,y')=1.5$. Diese y liegen in verschiedenen Klassen von $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$. Zu jedem $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ gibt es 84 verschiedene $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ mit $(b,y)=2$, und zu jedem $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1$ gibt es 56 verschiedene $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ mit $(b,y)=1.5$. Also gibt es zu jeder Klasse X gerader Länge in $\frac{1}{\sqrt{2}}E_8/\sqrt{2}E_8$ $84\cdot 16$ $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ mit $(b,y)=2$ für ein $y\in(X)_2$.

Falls zu $c_2\in\{1,\dots,24\}^2$ zwei Vektoren $x\neq x'\in C_4^{\perp}$ existieren mit $c_2\subseteq x$ und $c_2\subseteq x'$, so ist $|x+x'|=4$, folglich liegen x und x' nicht in derselben Klasse von $C^{\perp}/C$. Zu $c_2\in\{1,\dots,24\}^2$ kann man also zunächst die Menge $M(c_2):=\{x\in C_4^{\perp}\mid c_2\subseteq x\}$ bestimmen. Ist $M(c_2)=\emptyset$, so ist $D_2'(c_2,b)=0$ für alle $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$. Ist $|M(c_2)|=1$, so ist $D_2'(c_2,b)=1$ für 1344 $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ und Null für die restlichen b. Ist $|M(c_2)|>1$, so bestimmt man zunächst die $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$, für die ein $x\in M(c_2)$ existiert, mit $\Psi(y)=\tilde{x}$. Für alle $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_3$ geht man dann diese Liste der y durch und zählt die y mit $(y,b)=2$. Dann ist $D_2'(c_2,b)$ gleich dieser Anzahl.
Analog bestimmt man gleichzeitig $C_2'(c_2,b)$.

5. $(b,b)=4,\ b\in\sqrt{2}E_8,\ |c_2|=1,\ c_2=:\{j\}$:

$$M_v=\{b\}\cup\{\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j-\sum_{i\neq j}\epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i\}\cup$$

$$\{\epsilon_u(j)\frac{1}{2}a_j-\sum_{i\in c-\{j\}}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+\frac{b}{2}\mid j\in c\in C_6^{\perp},\ \Psi(\frac{\bar{b}}{2})=\tilde{c}\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+\frac{b}{2}\mid j\in x\in C^{\perp},\ \Psi(\frac{\bar{b}}{2})=\tilde{x},\ u\cap\{j\}=x\cap\{j\},\ c_1-u=x\cap c_1\}$$

$$|M_v|=2+2\cdot C_1(j,\frac{b}{2}),$$

wo

$$C_1(j,b):=|\{c\in C_6^{\perp}\mid j\in c,\ \Psi(\bar{b})=\tilde{c}\}|.$$

Mit

$$B_{25}(H):=|\{(j,b)\in\{1,\dots,24\}\times(\sqrt{2}E_8)_4 \mid C_1(j,\frac{b}{2})=H\}|$$

ist dann

$$A_{m5}(2+2H)=256\cdot B_{25}(H).$$

6. $(b,b)=4,\ b\not\in\sqrt{2}E_8,\ |c_2|=1:$

$$M_v=\{\frac{1}{2}a_j-\sum_{i\in c-\{j\}}\frac{1}{2}a_i+y\mid j\in c\in C_4^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{c},\ (b,y)=2.5\}\cup$$

$$\{\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+y\mid x\in C_{ung}^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (b,y)=1.5,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ |x\Delta u|=20,\ j\not\in x\Delta u\}$$

$$|M_v|=2\cdot D_1(j,b),$$

wo

$$D_1(j,b):=|\{(x,y)\in C_4^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2\mid(b,y)=2.5,\ j\in x,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x}\}|.$$

Mit

$$B_{26}(H):=|\{(j,b)\in\{1,\ldots,24\}\times((\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_4-\sqrt{2}E_8)^+\mid D_1(j,b)=H\}|$$

ist dann

$$A_{m6}(2H)=512\cdot B_{26}(H).$$

7. $(b,b)=5,\ |c_2|=0:$

$$M_v=\{-\sum_{i\in c}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i+y\mid c\in C_4^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{c},\ (b,y)=3,\ (\Rightarrow|u\cap c|\text{ gerade })\}\cup$$

$$\{-\sum_{i=1}^{24}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i+y\mid x\in C^\perp,\ y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ \Psi(\bar{y})=\tilde{x},\ (b,y)=2,\ |u\Delta x|=4\}\cup$$

$$\{-\sum_{i=1}^{24}\epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i+y\mid y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1,\ (b,y)=1\}\cup$$

$$\{y\in(\sqrt{2}E_8)_4\mid(b,y)=4\}$$

$$|M_v|=2+2\cdot F(b),$$

wo

$$F(b):=|\{(x,y)\in C_4^\perp\times(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2\mid(y,b)=3,\Psi(\bar{y})=\tilde{x}\}|.$$

Dann ist

$$A_{m7}(2+2H)=256\cdot16\cdot14\cdot B_8(H).$$

Zu jedem $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_5$ existiert genau ein $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ mit $(y,b)=3$. Zu jedem $y\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2$ gibt es $\frac{30240}{2160}=14$ $b\in(\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_5$ mit $(y,b)=3$. Also wird jede Klasse genau $16\cdot14$ mal getroffen.

n) $v=-\sum_{i=1}^{24}\epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i+\sum_{i\in c_2}\epsilon_u(i)\frac{3}{4}a_i-\epsilon_u(j)\frac{5}{4}a_j+b\ ,\ b\in\frac{1}{\sqrt{2}}E_8,\ u\in C^\perp,\ \tilde{u}=\Psi(\bar{b}):$

1. $(b,b)=0,\ |c_2|=2$

$$M_v=\{-\epsilon_u(j)a_j+\epsilon_u(i)a_i\mid i\in c_2\}\cup$$

$$\{\epsilon_u(k)\frac{3}{4}a_k-\sum_{i\neq k}\epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i\mid k\in c_2\}\cup$$

$$\{\sum_{i\in c_2}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i-\sum_{i\in x}\epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i\mid j\in x\cup c_2\in C_8\}\cup$$

$$\{-\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j+\sum_{i\neq j}\epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i\mid x\in C,\ \{j\}\cap u=\{j\}\cap x,\ |(c_1\cap u)\Delta(x\cap c_1)|=5,\ c_2-u=x\cap c_2\}$$

$$|M_v| = 4 + 2 \cdot A_3(c_2 \cup \{j\}),$$

wo

$$A_3(c) := |\{x \in C_8 \mid c \subseteq x\}|.$$

Mit

$$B_{27}(H) := |\{c \in \{1, \ldots, 24\}^3 \mid A_3(c) = H\}|$$

ist dann

$$A_{n1}(4 + 2H) = 256 \cdot 3 \cdot B_{27}(H).$$

2. $(b, b) = 1,\ c_2 = \{k\}:$

$$M_v = \{-\epsilon_u(j)a_j + \epsilon_u(k)a_k\} \cup$$

$$\{-\sum_{i=1}^{24} \epsilon_u(i)\frac{1}{4}a_i + b\} \cup$$

$$\{\epsilon_u(k)\frac{1}{2}a_k - \sum_{i \in x} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid j, k \in x \in C_6^{\perp},\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x}\} \cup$$

$$\{-\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j + \sum_{i \neq k} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid x \in C,\ \{j\} \cap u = \{j\} \cap x,\ \{k\} \cap u = \{k\} - x,\ |(c_1 \cap u)\Delta c_1 \cap x)| = 4\}$$

$$|M_v| = 2 + 2 \cdot C_2(\{j, k\}, b),$$

wo

$$C_2(c, b) := |\{x \in C_6^{\perp} \mid c \subseteq x,\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{x}\}|$$

Mit

$$B_{28}(H) := |\{(c, b) \in \{1, \ldots, 24\}^2 \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_1 \mid C_2(c, b) = H\}|$$

ist dann

$$A_{n2}(2 + 2H) = 256 \cdot 2 \cdot B_{28}(H).$$

3. $(b, b) = 2,\ |c_2| = 0:$

$$M_v = \{-\sum_{i \in c} \epsilon_u(i)\frac{1}{2}a_i + b \mid j \in c \in C_4^{\perp},\ \Psi(\bar{b}) = \tilde{c}\} \cup$$

$$\{-\epsilon_u(j)\frac{3}{4}a_j + \sum_{i \neq j} \epsilon_x(i)\frac{1}{4}a_i \mid x \in C,\ \{j\} \cap x = \{j\} \cap u,\ |(c_1 - u)\Delta(c_1 \cap x)| = 3\}$$

$$|M_v| = 2 \cdot D_1(j, b),$$

wo

$$D_1(j, b) := |\{x \in C_4^{\perp} \mid \Psi(\bar{b}) = \tilde{x},\ j \in x\}|$$

Mit

$$B_{29}(H) := |\{(j, b) \in \{1, \ldots, 24\} \times (\frac{1}{\sqrt{2}}E_8)_2 \mid D_1(j, b) = H\}$$

wird dann

$$A_{n3}(2H) = 256 \cdot B_{29}(H).$$

Für festes b gibt es zu jedem $j \in \{1, \ldots, 24\}$ höchstens ein $c \in C_4^{\perp}$ mit $j \in c$ und $\Psi(\bar{b}) = \tilde{c}$. Denn seien $c_1, c_2 \in C_4^{\perp}$ mit $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$ und $\tilde{c_1} = \tilde{c_2}$. Dann ist also $c_1 + c_2 \in C$ und $|c_1 + c_2| = |c_1| + |c_2| - 2 \cdot |c_1 \cap c_2| < 8$, also $|c_1 + c_2| = 0$, d. h. $c_1 = c_2$.
Insgesamt gibt es $16 \cdot 4 \cdot |C_4^{\perp}| = 16 \cdot 4 \cdot 90$ Paare (j, b) mit $D_1(j, b) = 1$. Also ist $B_{29}(0) = 120 \cdot 24 \cdot 16$ und $B_{29}(1) = 15 \cdot 24 \cdot 16$.

(II.6) Tabellen für die Funktionen B_i.

Es folgen die Tabellen der Werte der Funktionen $B_i(H)$ für die einzelnen Codes. Für nicht angegebene Werte H gilt $B_i(H) = 0$.

$B_1(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	1936	2008	1984	2124	2046	1920	1536	1980
1	2432	2976	3040	2688	2928	1536	2304	2880
2	3672	2468	2544	2940	2464	5904	5208	3330
3	1344	1568	1280	768	1488	0	768	0
4	656	868	968	1548	962	576	96	1980
5	0	448	576	192	480	0	0	0
6	470	222	174	366	174	600	540	450
7	64	0	32	0	64	0	0	0
8	0	60	24	0	20	0	96	0
10	52	8	4	0	0	72	72	6
14	0	0	0	0	0	18	6	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	2166	2052	1896	2040
1	2640	2946	3312	2592
2	2760	2400	1944	2832
3	1200	1518	1968	1824
4	1110	960	1050	752
5	480	486	0	288
6	270	210	366	126
7	0	42	0	96
8	0	12	90	72
10	0	0	0	4

$B_1'(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	1968	2048	2016	2172	2094	1920	1536	1980
1	2432	2976	3040	2688	2928	1536	2304	2880
2	3702	2486	2598	2982	2494	5928	5268	3420
3	1344	1568	1280	768	1488	0	768	0
4	624	852	936	1500	926	576	96	1980
5	0	448	576	192	480	0	0	0
6	468	212	124	324	144	624	504	360
7	64	0	32	0	64	0	0	0
8	0	36	24	0	8	0	96	0
10	24	0	0	0	0	42	54	6

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	2226	2103	1944	2112
1	2640	2946	3312	2592
2	2790	2436	1950	2850
3	1200	1518	1968	1824
4	1050	912	1038	680
5	480	486	0	288
6	240	174	360	108
7	0	42	0	96
8	0	9	54	72
10	0	0	0	4

$B_2(H):$

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	286720	309248	339968	362496	369152	0	196608	276480
2	177920	176768	128768	82944	91776	479232	227328	207360
4	212992	249856	325632	423936	345088	0	196608	276480
6	299008	209536	158336	92544	150784	448512	383232	155520
8	24576	93184	141312	168960	137728	0	0	230400
10	139776	131328	88064	78336	105728	61440	73728	23040
12	0	2048	10240	24576	14336	0	0	0
14	106240	74496	66048	23040	47616	221952	160512	69120
16	0	1024	2048	3072	2048	0	0	3072
18	17152	22656	9472	13824	11392	0	6144	0
22	8192	4480	7040	4224	1792	36864	17664	36480
26	0	3072	1024	0	512	0	0	0
30	4224	256	0	0	0	28800	14208	0
34	1024	0	0	0	0	0	0	0
38	0	0	0	0	0	0	1536	0
46	128	0	0	0	0	1152	384	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	391680	391296	369024	374784
2	48000	62592	121728	33024
4	445440	375168	230400	550912
6	76800	129024	224256	44160
8	161280	146304	29952	172032
10	103680	108288	214272	36864
12	30720	18048	9216	43008
14	7680	38400	69120	10752
16	3072	3072	384	6144
18	9600	5760	9600	3840
22	0	0	0	2432

$B_3(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	987136	1042432	1058816	1007616	1034240	786432	983040	1105920
2	2035712	1874944	1798144	1898496	1788928	3096576	2162688	1935360
4	958464	1069056	1069056	884736	1105920	0	884736	737280
6	321536	272384	335872	516096	335872	442368	294912	516096
8	20480	51200	51200	0	51200	0	0	0
10	0	15360	12288	18432	9216	0	0	30720
14	2048	0	0	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	998400	1026048	1013760	964608
2	1812480	1759488	1855488	1769472
4	1075200	1142784	1105920	1167360
6	362496	330240	316416	393216
8	76800	61440	30720	30720
10	0	5376	0	0
14	0	0	3072	0

$B_4(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
1	0	8	16	24	16	0	0	24
2	32	24	18	12	21	0	24	0
3	6	7	5	3	2	36	12	15
4	1	0	0	0	0	3	3	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
1	24	18	0	32
2	15	21	39	6
3	0	0	0	1

$B_5(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	227072	224768	223360	221952	221952	297984	245760	241920
1	106496	94208	97280	107520	104960	0	98304	46080
2	145408	136192	124160	108288	117504	193536	153600	126720
3	24576	62464	88064	101376	88576	0	0	138240
4	54912	55296	35200	26112	33728	39936	36864	34560
5	0	3072	11264	24576	15360	0	0	0
6	32512	16576	17536	4992	13696	53376	52992	5760
8	5696	5632	896	3840	3072	0	6144	0
10	1920	256	1152	384	128	9216	3648	5760
12	0	512	128	0	64	0	0	0
14	384	64	0	0	0	4800	1536	0
16	64	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	192	0
22	0	0	0	0	0	192	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	220800	220992	214656	228480
1	115200	109632	115200	129024
2	101760	110976	142464	81408
3	99840	94464	29952	95232
4	24960	28992	61824	12288
5	30720	19008	13824	43008
6	1920	12288	18048	4992
7	0	1152	768	3072
8	3840	1536	2304	384
10	0	0	0	1152

$B_6(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	9696	9280	9008	8736	8888	10752	9600	8640
2	7360	8144	8240	8736	8380	7872	8160	10080
4	4736	5568	5920	5280	5904	1536	2304	2880
6	7512	4848	4880	5712	4800	9888	10992	7920
8	1792	2944	2560	1824	2704	0	384	0
10	960	1056	1392	2112	1424	1728	384	2880
12	0	896	864	288	720	0	0	0
14	880	336	144	432	208	1248	960	720
16	160	0	80	0	88	0	0	0
18	0	48	32	0	4	0	288	0
22	24	0	0	0	0	96	48	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	8640	8778	9168	8496
2	8760	8400	7872	8400
4	5520	6144	6624	6096
6	5280	4548	3840	5220
8	2400	2844	3024	3312
10	1560	1476	1992	752
12	720	624	0	432
14	240	252	528	216
16	0	42	0	96
18	0	12	72	96
22	0	0	0	4

$B_7(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	169472	138752	103424	69120	103424	202752	173568	69120
2	0	61440	131072	208896	135168	0	0	184320
4	225792	163328	119552	70656	120576	158976	225024	69120
6	0	61440	106496	135168	98304	0	0	184320
8	98304	100608	72192	62976	82432	18432	46080	23040
10	0	0	8192	24576	12288	0	0	0
12	86656	53504	48640	15360	38912	173568	130944	46080
16	10240	13824	3584	9216	6144	0	1536	0
20	5120	3072	4864	3072	1280	20736	12288	23040
24	0	2816	1024	0	512	0	0	0
28	2816	256	0	0	0	23808	8448	0
32	512	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	768	0
44	128	0	0	0	0	768	384	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	69120	94464	164352	32256
2	215040	155904	0	292864
4	69120	108288	228864	34560
6	122880	103680	0	153600
8	76800	83712	132096	27648
10	30720	16128	0	43008
12	7680	33024	69120	9216
14	0	768	0	2048
16	7680	3072	4608	1536
24	0	0	0	2304

$B_8(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3	G_1	G_2	G_3	G_4
0	81	76	75	66	68	108	98	90	60	65	72	54
1	32	40	32	48	48	0	0	0	60	51	48	72
2	15	9	27	21	15	12	30	45	15	18	3	9
3	0	8	0	0	4	0	0	0	0	1	12	0
4	7	2	1	0	0	12	6	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	3	1	0	0	0	0	0

$B_9(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	12672	14848	18112	20736	18432	8448	13248	17280
2	20736	18176	14400	11904	15040	12288	15360	17280
4	4224	5760	6656	6912	5760	17280	7872	0
6	2304	1280	896	384	960	0	3072	5760
8	384	256	192	384	128	2304	576	0
10	0	0	64	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	192	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	21120	19488	14208	22080
2	12480	14208	19776	13056
4	5760	5664	5760	3456
6	960	960	576	1536
8	0	0	0	192

$B_{10}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	48960	44800	42528	40320	40624	78336	59392	48960
2	28672	32384	30976	32640	34464	0	12288	17280
4	25984	25504	28128	26496	25360	29184	38400	37440
6	7680	9728	12992	15168	13152	0	0	14400
8	8192	6048	4192	4032	5200	10752	9216	0
10	512	2112	1536	2112	1760	0	0	2880
12	768	288	544	192	368	2688	1664	0
14	0	64	64	0	32	0	0	0
16	192	32	0	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	38640	39300	41952	37872
2	35520	35352	36096	37056
4	23760	24612	23664	20376
6	16320	14900	12096	18240
8	4560	4812	4176	6360
10	1920	1524	2496	768
12	240	396	336	264
14	0	60	0	0
16	0	0	144	24
18	0	4	0	0

$B_{11}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	30539776	32112640	32858112	33128448	33056768	21626880	27426816	32624640
2	41623552	39616512	39071744	39297024	38987776	51806208	45711360	39628800
4	21299200	21397504	21250048	20545536	21032960	23199744	21037056	19537920
6	6213632	6342656	5971968	6316032	6209536	3440640	5701632	8110080
8	458752	753664	1073152	933888	935936	0	98304	184320
10	131072	45056	45056	49152	47104	196608	294912	184320
14	4096	2048	0	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	33300480	33299712	32793600	33005568
2	39198720	38880000	38716416	39505920
4	20520960	20920320	21620736	21282816
6	6328320	6139392	6254592	5480448
8	860160	976128	807936	860160
10	61440	52992	70656	135168
12	0	1536	0	0
14	0	0	6144	0

$B_{12}(H):$

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	62128128	62541824	62267392	62705664	62517248	62521344	61341696	62484480
2	73330688	71931904	71585792	69672960	70415360	81494016	76505088	71884800
4	39829504	42221568	43847680	46645248	45457408	22806528	34799616	42209280
6	24391680	21121024	19021824	16908288	18349056	36569088	29319168	18984960
8	3948544	5779456	7102464	7606272	6672384	0	1966080	9400320
10	2007040	2129920	1943552	2347008	2447360	2457600	1818624	737280
12	344064	499712	512000	417792	395264	0	0	737280
14	405504	182272	102400	49152	117760	589824	614400	0
16	16384	8192	24576	49152	24576	0	0	0
18	36864	22528	30720	36864	35840	0	73728	0
20	0	0	0	0	6144	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	62853120	62475264	62005248	62235648
2	68843520	70080000	72437760	69196544
4	47831040	46241280	42203136	48838656
6	16435200	17673216	21694464	15590400
8	7249920	6915072	5369856	7287808
10	2718720	2466816	1809408	2946304
12	337920	396288	571392	86016
14	61440	104448	294912	119808
16	61440	39936	24576	61440
18	46080	41472	27648	35328
20	0	4608	0	36864
26	0	0	0	2304
34	0	0	0	1280

$B_{13}(H):$

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	113606656	114614272	115449856	115494912	115222528	114425856	109903872	112250880
2	126422016	123228160	121421312	121085952	121093120	132022272	136626176	131880960
4	59080704	64352256	65126400	66539520	68278272	28311552	47185920	50319360
6	46836736	41687552	42589184	41011200	38473728	83813376	56157696	54743040
8	8847360	10485760	10240000	10874880	11376640	0	5242880	6451200
10	5425152	6277632	5666304	5105664	6122496	73728	3735552	3041280
12	229376	344064	802816	1290240	817152	0	0	1290240
14	2150400	1689600	1277952	1290240	1280000	4012032	3811840	2764800
18	76800	10240	48640	30720	20480	0	0	0
20	0	45056	90112	0	45056	0	0	0
22	46080	1536	24576	18432	12288	27648	18432	0
26	0	3584	3584	0	0	0	0	0
30	20480	2048	1024	0	0	55296	55296	0
38	0	0	0	0	0	0	2560	0
46	0	0	0	0	0	0	1536	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	115722240	115672320	114772992	115150848
2	119639040	119850112	122921472	119715840
4	70410240	69736704	64779264	73691136
6	36771840	37539072	41296896	33220608
8	12134400	11771520	10944000	12472320
10	5667840	5991168	5649408	6294528
12	1290240	1032192	860160	1204224
14	1105920	1056768	1388544	829440
16	0	3456	41472	0
18	0	23040	46080	15360
20	0	50688	0	135168
22	0	13824	27648	9216
26	0	896	10752	0
30	0	0	3072	3072

$B_{14}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	25788416	25718784	25866240	25853952	25812992	23986176	25755648	25804800
2	42090496	42217472	41750528	41385984	41578496	48316416	43008000	42762240
4	28229632	28667904	29388800	30425088	29943808	20447232	25755648	28016640
6	16736256	15065088	13824000	12607488	13549568	23052288	19759104	12902400
8	3227648	4395008	5402624	5775360	5058560	0	1966080	7741440
10	1318912	1429504	1294336	1572864	1617920	1867776	1228800	368640
12	212992	290816	299008	221184	235520	0	0	368640
14	319488	155648	94208	49152	114688	294912	442368	0
16	16384	8192	24576	49152	24576	0	0	0
18	24576	16384	20480	24576	24576	0	49152	0
20	0	0	0	0	4096	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	25804800	25824768	25767936	25976832
2	41226240	41390592	41889792	40519680
4	30904320	30345216	28987392	31809536
6	12410880	13126656	15310848	11996160
8	5468160	5233152	4141056	5468160
10	1812480	1629696	1210368	1910784
12	184320	239616	356352	49152
14	61440	104448	258048	119808
16	61440	39936	24576	61440
18	30720	27648	18432	24576
20	0	3072	0	24576
26	0	0	0	3072
34	0	0	0	1024

$B_{15}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	65792	65664	63488	57984	64960	24576	55296	51840
2	49152	41792	43776	58560	41088	122880	67584	69120
4	39936	55552	57344	39936	58752	24576	36864	34560
6	45184	29952	27648	39168	25664	46080	49152	46080
8	13824	22912	20736	14208	23360	0	6144	5760
10	12288	8320	9984	13440	8320	12288	12288	23040
12	3072	5120	5632	3840	5632	0	0	0
14	768	768	1536	2304	1600	0	3072	0
16	256	256	256	768	896	0	0	0
18	0	64	0	192	128	0	0	0
22	128	0	0	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	59040	64320	71280	63168
2	56640	43296	37056	51360
4	42240	56040	48768	41856
6	35520	26448	37104	35136
8	15360	22272	17568	19200
10	13440	9456	12864	9984
12	5760	5520	3456	4224
14	960	1968	2016	4032
16	480	768	240	576
18	960	240	0	864
20	0	72	0	0
22	0	0	48	0

$B_{16}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	8372224	8325120	8275968	8386560	8362496	9830400	8650752	8110080
2	8349696	8198144	8387584	8214528	8307200	4423680	8749056	9400320
4	6676480	7079936	7091200	7087104	6962176	7077888	4915200	6220800
6	4505600	4340736	4236288	4417536	4385280	8355840	5332992	2764800
8	1867776	2046976	2042880	1978368	2013184	0	2359296	4147200
10	1089536	783360	648192	595968	728576	1277952	737280	0
12	24576	167936	240640	267264	166912	0	0	322560
14	73728	21504	23552	18432	38400	0	221184	0
16	0	1024	11264	0	1536	0	0	0
18	6144	1024	8192	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	8432640	8380416	8315904	8552448
2	8087040	8242560	8266752	8236032
4	7326720	7124928	7231488	6966272
6	4139520	4269696	3985920	4111872
8	2042880	2034432	2239488	2196480
10	791040	700032	686592	691200
12	138240	173952	202752	162816
14	7680	34176	32256	44544
16	0	5376	0	1024
18	0	0	4608	3072
20	0	192	0	0

$B_{17}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	58384384	58706944	58518528	58515456	58554368	51511296	56033280	58245120
2	78692352	79367168	79289344	79454208	79180800	103464960	83509248	81285120
4	47988736	45783040	46004224	45686784	46137344	20840448	44630016	41656320
6	13746176	14489600	14579712	14401536	14325760	24281088	16023552	18800640
8	1531904	1973248	2038784	2359296	2230272	49152	196608	368640
10	180224	220160	109568	122880	111616	393216	147456	184320
14	16384	0	0	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	58414080	58430976	58540032	57882624
2	79687680	79274496	78603264	79048704
4	45496320	46241280	47517696	47640576
6	14438400	14208000	13824000	14057472
8	2257920	2228736	1830912	1628160
10	245760	152064	218112	282624
12	0	4608	0	0
14	0	0	6144	0

$B_{18}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	40343552	41270272	41314304	41631744	41577472	37552128	38338560	41195520
2	38629376	37007360	37101568	36765696	36698624	43966464	42172416	36864000
4	15847424	16905216	16896000	16852992	16925696	12582912	13959168	17786880
6	7092224	6251520	5861376	5824512	6074880	8331264	7901184	4792320
8	876544	1312768	1647616	1726464	1481728	0	491520	2488320
10	278528	355328	294912	344064	378880	638976	245760	0
12	94208	99328	96256	67584	75264	0	0	92160
14	55296	15360	4096	0	2560	147456	110592	0
16	2048	1024	3072	6144	3072	0	0	0
18	0	1024	0	0	512	0	0	0
20	0	0	0	0	512	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	41832960	41663232	41370624	41370624
2	36510720	36669696	36910080	37258752
4	16803840	16824192	16599552	16538624
6	5990400	6084096	6832128	6210048
8	1628160	1531008	1065984	1353216
10	384000	361728	291840	457984
12	61440	79872	127488	18432
14	0	0	18432	0
16	7680	4992	3072	7680
18	0	0	0	768
20	0	384	0	3072

$B_{19}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	518400	505344	505792	511872	499648	442368	506880	535680
2	319488	346112	354304	319488	365568	196608	294912	276480
4	618240	560896	552960	605184	537088	1186560	831360	668160
6	221184	264192	249856	227328	286720	0	98304	92160
8	291840	300544	314304	316416	277248	36864	159744	460800
10	73728	94208	92160	92160	106496	0	0	0
12	108288	85248	94976	86016	84736	307968	279168	138240
14	8192	8192	8192	24576	19456	0	0	0
16	22272	21504	15168	4224	11328	0	9216	17280
20	7168	2560	768	1536	512	9216	8064	0
24	0	0	320	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	9216	1152	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	504000	498240	489024	515328
2	337920	368832	390144	334848
4	583680	528672	523008	562176
6	245760	293952	281088	307200
8	295680	281664	292608	244992
10	138240	109632	82944	101376
12	49920	75840	105216	85248
14	15360	19392	7680	18432
16	18240	11520	13248	18432
18	0	768	0	0
20	0	288	3840	768

$B_{20}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	9965568	9062400	9048064	8663040	8968192	8749056	12288000	10137600
2	10420224	11501568	11390976	11956224	11726848	9437184	6684672	10506240
4	9822208	9428992	9781248	9400320	9095168	16023552	11452416	7188480
6	3637248	4816896	4698112	5148672	5095424	0	3145728	8294400
8	3440640	2125824	1814528	1499136	2013184	2875392	3366912	368640
10	32768	561152	724992	835584	557056	0	0	1105920
12	245760	86016	90112	98304	141312	516096	663552	0
14	0	12288	28672	0	4096	0	0	0
16	36864	6144	24576	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	8325120	8779776	9366528	9328128
2	12840960	12098304	11649024	11841536
4	8570880	8848896	8122368	7699968
6	5160960	5223936	5898240	6021120
8	1996800	1913856	1787904	2010624
10	675840	597504	638976	528384
12	30720	118272	110592	139776
14	0	19968	0	16384
16	0	0	27648	15360
18	0	768	0	0

$B_{21}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	12096	11848	11232	11112	11312	15360	12288	10800
1	14496	14112	15296	15168	14912	9600	15936	17280
2	5632	7696	7440	8064	7760	4608	1536	5040
3	7288	4960	4064	3480	4312	11232	10608	3960
4	1152	2456	3264	3576	2872	0	0	5040
5	1520	1088	960	912	1120	1344	2016	240
6	320	304	208	192	216	0	0	0
7	0	40	40	0	0	360	120	0
8	0	0	0	0	0	0	0	144

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	11160	11184	11832	11232
1	14880	15048	13920	14784
2	8280	7866	8088	8192
3	3864	4152	4632	3576
4	2880	2868	2880	3744
5	1440	1272	672	976
6	0	114	480	0

$B_{22}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	782272	802528	807392	809568	807040	712704	746496	812160
1	930336	884224	875008	870336	875392	1107072	1016256	865440
2	515200	547744	548736	551040	550464	362496	445440	547200
3	247136	228448	232096	232608	228832	324096	281664	243360
4	45504	67232	69984	69216	71072	0	30720	69120
5	28160	17408	14016	15168	14976	37248	23424	7200
6	0	2656	2880	2112	2272	0	0	5760
7	1344	0	128	192	192	6624	5664	0
9	288	0	0	0	0	0	576	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	808560	807624	799632	799008
1	873600	874848	893952	883968
2	547200	549384	537984	560224
3	235680	230184	228960	225120
4	66000	70536	70704	58608
5	17280	15456	16704	17856
6	1920	2088	2304	4800
7	0	120	0	576
8	0	0	0	80

$B_{23}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	661832	669528	667104	671424	671688	640512	637824	672480
1	767296	755456	763488	758592	752080	885696	829568	734400
2	454336	461168	455712	454176	465624	205824	381696	493920
3	230272	212096	207616	203904	204192	445440	290688	207360
4	43120	64800	70560	79680	69080	0	22400	50400
5	24320	19264	17184	13440	19536	0	14016	17280
6	1344	2128	2912	4704	3144	0	0	10080
7	3328	1408	1344	0	576	8448	9728	0
8	72	72	0	0	0	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	674400	671616	668280	671496
1	753120	755024	752736	751584
2	456240	460656	474624	468096
3	205440	204504	201888	205920
4	74400	71570	62520	61800
5	20640	18840	21504	22656
6	1680	3516	3024	3792
7	0	176	1344	576
8	0	18	0	0

$B_{24}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	526080	535424	530624	529152	529048	528384	506880	541440
1	676864	649024	653248	649920	653424	748032	738432	622080
2	387328	412928	415040	422784	419128	221184	322560	453600
3	197568	184064	185344	182976	181472	323328	230016	161280
4	43520	56960	55872	57600	57736	0	30720	60480
5	21824	14272	11968	10176	12080	29184	20736	11520
6	0	2048	2496	1920	1704	0	0	4320
7	1344	0	128	192	128	4608	4992	0
9	192	0	0	0	0	0	384	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	527040	526956	530976	516672
1	652800	655200	652224	662304
2	420960	419964	423744	435984
3	186240	182472	170112	177024
4	54720	56292	61536	45024
5	11520	12240	14400	13664
6	1440	1524	1728	3600
7	0	72	0	384
8	0	0	0	64

$B_{25}(H)$

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	176	112	128	192	176	192	288	0
1	448	784	912	864	776	0	0	1440
2	1760	1248	896	768	1056	2496	2304	0
3	256	512	736	864	640	0	0	1440
4	176	176	192	192	208	192	288	0
5	64	48	16	0	24	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	240	198	96	312
1	720	762	816	608
2	960	1020	1248	912
3	720	660	528	864
4	240	222	96	184
5	0	18	96	0

$B_{26}(H)$

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	83072	85920	88000	89184	88832	66048	78336	86400
1	78080	73856	71936	71808	71200	98304	82944	74880
2	33536	34624	33408	31680	32688	43008	36864	28800
3	11776	10752	10496	9984	11392	0	9216	17280
4	640	2080	3520	4320	2720	0	0	0
5	256	128	0	384	480	0	0	0
6	0	0	0	0	48	0	0	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	90000	89748	88056	90936
1	71040	70260	69408	69696
2	31200	32574	37584	31296
3	10560	10896	9888	11424
4	3600	3240	2040	2520
5	960	588	384	1248
6	0	54	0	240

$B_{27}(H)$

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	576	576	544	512	560	512	512	480
1	984	896	928	984	888	1248	1200	1080
2	192	400	448	432	456	0	0	360
3	272	128	64	48	96	192	288	80
4	0	16	32	48	24	0	0	0
5	0	8	8	0	0	72	24	0
6	0	0	0	0	0	0	0	24

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	520	558	680	576
1	984	888	600	792
2	360	444	648	576
3	160	128	96	80
4	0	6	0	0

$B_{28}(H)$:

H	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	S_1	S_2	S_3
0	165568	166336	166656	167040	166688	164352	164736	167040
1	84480	82688	82176	81408	82240	86016	86016	80640
2	14208	15360	15360	15744	15168	14592	13824	17280
3	512	512	768	768	832	0	0	0
4	192	64	0	0	32	0	384	0

H	G_1	G_2	G_3	G_4
0	167040	166752	165888	166560
1	81600	82272	84288	83200
2	15360	14880	13440	13632
3	960	1056	1344	1536
4	0	0	0	32

(II.7) Die Funktionswerte $g_L(i)$.

Aus diesen Werten ergeben sich folgende Tabellen für die Funktionen $g_L(i)$:

i	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
1	$731504640 = 2^{13} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5933$	$742293504 = 2^{15} \cdot 3^3 \cdot 839$	$743080960 = 2^{10} \cdot 5 \cdot 145133$	$745829376 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 107 \cdot 2269$	$744950016 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 313 \cdot 1033$
2	$437708416 = 2^7 \cdot 1429 \cdot 2393$	$426310432 = 2^5 \cdot 1091 \cdot 12211$	$425449312 = 2^5 \cdot 13295291$	$422540736 = 2^6 \cdot 3 \cdot 173 \cdot 12721$	$422376400 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 167 \cdot 6323$
3	$160104448 = 2^{16} \cdot 7 \cdot 349$	$166572032 = 2^{12} \cdot 11 \cdot 3697$	$167145472 = 2^{12} \cdot 13 \cdot 43 \cdot 73$	$168976384 = 2^{13} \cdot 20627$	$170220032 = 2^9 \cdot 332461$
4	$63485440 = 2^9 \cdot 5 \cdot 24799$	$58151160 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 161531$	$57284256 = 2^5 \cdot 3 \cdot 43 \cdot 13877$	$55703064 = 2^3 \cdot 3 \cdot 2320961$	$55540680 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 35603$
5	$9404416 = 2^{15} \cdot 7 \cdot 41$	$13055488 = 2^9 \cdot 43 \cdot 593$	$14078976 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 4583$	$15038976 = 2^9 \cdot 3 \cdot 9791$	$14129920 = 2^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 83$
6	$4523008 = 2^{10} \cdot 7 \cdot 631$	$3901248 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 521$	$3410560 = 2^7 \cdot 5 \cdot 73^2$	$3248448 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2417$	$3821600 = 2^5 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 281$
7	$229376 = 2^{15} \cdot 7$	$470016 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 17$	$600064 = 2^{11} \cdot 293$	$697344 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 227$	$539648 = 2^{10} \cdot 17 \cdot 31$
8	$617404 = 2^2 \cdot 154351$	$359233 = 7 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 73$	$293326 = 2 \cdot 11 \cdot 67 \cdot 199$	$227211 = 3 \cdot 53 \cdot 1429$	$270995 = 5 \cdot 83 \cdot 653$
9	$8192 = 2^{13}$	$7680 = 2^9 \cdot 3 \cdot 5$	$12288 = 2^{12} \cdot 3$	$19968 = 2^9 \cdot 3 \cdot 13$	$12800 = 2^9 \cdot 5^2$
10	$34048 = 2^8 \cdot 7 \cdot 19$	$17184 = 2^5 \cdot 3 \cdot 179$	$18944 = 2^9 \cdot 37$	$14400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	$15552 = 2^6 \cdot 3^5$
11	0	$4096 = 2^{12}$	$8192 = 2^{13}$	0	$5120 = 2^{10} \cdot 5$
12	$7168 = 2^{10} \cdot 7$	$2152 = 2^3 \cdot 269$	$4304 = 2^4 \cdot 269$	$4200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$2512 = 2^4 \cdot 157$
14	0	$1152 = 2^7 \cdot 3^2$	$1024 = 2^{10}$	$192 = 2^6 \cdot 3$	$544 = 2^5 \cdot 17$
16	$2102 = 2 \cdot 1051$	$357 = 3 \cdot 7 \cdot 17$	$188 = 2^2 \cdot 47$	$291 = 3 \cdot 97$	139
18	$128 = 2^7$	0	$32 = 2^5$	0	$48 = 2^4 \cdot 3$
20	0	$32 = 2^5$	$16 = 2^4$	0	$8 = 2^3$
24	$28 = 2^2 \cdot 7$	3	2	1	1

i	S_1	S_2	S_3
1	$696778752 = 2^{19} \cdot 3 \cdot 443$	$704839680 = 2^{16} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 239$	$742256640 = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 4027$
2	$500736000 = 2^{13} \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 163$	$471291904 = 2^{11} \cdot 230123$	$427720320 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 74257$
3	$95420416 = 2^{20} \cdot 7 \cdot 13$	$137625600 = 2^{18} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$163276800 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 1063$
4	$102048768 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 3691$	$75455040 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 53 \cdot 1483$	$60504264 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 59 \cdot 14243$
5	0	$5636096 = 2^{17} \cdot 43$	$13847040 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 601$
6	$3096576 = 2^{14} \cdot 3^3 \cdot 7$	$3502080 = 2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$	$2138880 = 2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 557$
7	0	0	$1059840 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 23$
8	$1358544 = 2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 83$	$1329240 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 53$	$399825 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 1777$
9	0	0	$4608 = 2^9 \cdot 3^2$
10	0	$30720 = 2^{11} \cdot 3 \cdot 5$	$5760 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$
12	$10752 = 2^9 \cdot 3 \cdot 7$	$5760 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	$6840 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 19$
16	$8232 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7^3$	$5340 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 89$	$405 = 3^4 \cdot 5$
20	0	$320 = 2^6 \cdot 5$	0
24	$112 = 2^4 \cdot 7$	$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$	3
32	3	1	0

i	G_1	G_2	G_3	G_4
1	$747179520 = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 271 \cdot 359$	$745561536 = 2^6 \cdot 3 \cdot 3883133$	$741661248 = 2^6 \cdot 3 \cdot 43 \cdot 89833$	$741625344 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 227 \cdot 709$
2	$420412320 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 181 \cdot 1613$	$421669300 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 324361$	$425374272 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 43441$	$421851040 = 2^5 \cdot 5 \cdot 13^2 \cdot 15601$
3	$171082240 = 2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9547$	$170785728 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 296503$	$168944128 = 2^9 \cdot 329969$	$175647744 = 2^{10} \cdot 3^3 \cdot 6353$
4	$54626208 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13^3 \cdot 37$	$54994011 = 3 \cdot 1609 \cdot 11393$	$56879712 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 43 \cdot 1531$	$52514712 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 729371$
5	$14641920 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 31 \cdot 41$	$14440640 = 2^6 \cdot 5 \cdot 45127$	$13168512 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 71$	$13552640 = 2^{10} \cdot 5 \cdot 2647$
6	$3976160 = 2^5 \cdot 5 \cdot 24851$	$3786264 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5843$	$3720000 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 31$	$4266464 = 2^5 \cdot 133327$
7	$537600 = 2^{10} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$582720 = 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 607$	$606720 = 2^9 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 79$	$617472 = 2^{10} \cdot 3^2 \cdot 67$
8	$181635 = 3 \cdot 5 \cdot 12109$	$218949 = 3 \cdot 59 \cdot 1237$	$357987 = 3 \cdot 7 \cdot 17047$	$218673 = 3^3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 89$
9	$20736 = 2^8 \cdot 3^4$	$19328 = 2^7 \cdot 151$	$12864 = 2^6 \cdot 3 \cdot 67$	$26112 = 2^9 \cdot 3 \cdot 17$
10	$16800 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$	$15888 = 2^4 \cdot 3 \cdot 331$	$19584 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 17$	$17184 = 2^5 \cdot 3 \cdot 179$
11	0	$5632 = 2^9 \cdot 11$	0	$18432 = 2^{11} \cdot 3^2$
12	$1280 = 2^8 \cdot 5$	$2350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 47$	$4368 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$	$2232 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 31$
14	$480 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$	$520 = 2^3 \cdot 5 \cdot 13$	$768 = 2^8 \cdot 3$	$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$
16	$195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$	$168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$507 = 3 \cdot 13^2$	$309 = 3 \cdot 103$
18	0	$28 = 2^2 \cdot 7$	0	$192 = 2^6 \cdot 3$
20	0	7	$48 = 2^4 \cdot 3$	$48 = 2^4 \cdot 3$
24	1	1	1	3

Diese Werte erfüllen die drei Gleichungen von Seite 64. Außerdem stimmen die Werte für die beiden Codes S_1 und S_2 mit den von Herrn Prof. Koch berechneten überein.

Die einzelnen Codes liefern verschiedene Funktionswerte, also sind die zwölf Gitter paarweise nicht isometrisch. Folglich gibt es mindestens 15 verschiedene unimodulare, gerade, 32-dimensionale Gitter, die keine Vektoren der Quadratlänge 2 enthalten. Genau fünf dieser Gitter sind zu Gittern mit Wurzelsystem $32A_1$ benachbart und in [2] beschrieben.

Die Berechnungen der Funktionen $B_i(H)$ erforderten zum Teil lange Rechenzeiten in der Größenordnung von etwa einer Stunde. Ohne die Benutzung einiger Eigenschaften der Codes und des Gitters E_8, wären die Rechenzeiten erheblich höher gewesen. Ich halte es für unmöglich, für ein 32-dimensionales, gerades, unimodulares Gitter ohne Wurzeln, das nicht über eine spezielle Konstruktion mit Hilfe von Codes gegeben ist, die Funktion g_L auszurechnen. Also ist im allgemeinen die Invariante g_L zur Bestimmung der Isometrieklasse eines Gitters ungeeignet. Außerdem ist nicht bekannt, ob die Invariante g_L fein genug ist, d.h. ob für nicht isometrische Gitter L, L' $g_L \neq g_{L'}$ ist. Die Funktion g_L ist nur für gerade Gitter ohne Wurzeln definiert, da für solche Gitter L das Wurzelsystem von zu L benachbarten Gitter von der Form $n \cdot A_1$ ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) ist. Von der Klassifikation aller 32-dimensionaler, gerader, unimodularer Gitter ist man also noch weit entfernt.

Literatur

[1] Helmut Koch/ Boris B. Venkov: 'Über ganzzahlige unimodulare euklidische Gitter', Journal für die reine und angewandte Mathematik 398 (1989) Seiten 144-168

[2] Helmut Koch/ Boris B. Venkov: 'Über gerade unimodulare Gitter der Dimension 32 III' Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn (1989), 89-85

[3] Helmut Koch: 'Zur Klassifikation binärer, linearer Codes $C \subseteq \mathbb{F}_2^{24}$ mit Codepolynom $f_C(x) = 1 + 39x^8 + 176x^{12} + 39x^{16} + x^{24}$' (Manuskript)

[5] J.-P. Serre: 'Cours d'Arithmétique', Presses Univ. France, Paris 1970

[6] A.K. Lenstra, H.W. Lenstra, L. Lovasz: 'Factoring Polynomials with Rational Coefficients', Math. Ann. 261, 515-534 (1982)

[7] J.H. Conway, N.J.A. Sloane: 'Sphere Packings, Lattices and Groups' Springer Verlag Berlin 1988

[8] M. Pohst, H. Zassenhaus: 'Algorithmic Algebraic Number Theory', Cambridge University Press, Cambridge, New York, Port Chester, Melbourne, Sydney, 1989

[9] Prof. Engel: Brief an Prof. Plesken, Bern, 2. 12. 1985

[10] F. J. MacWilliams: 'A theorem on the distribution of weights in a systematic code', Bell Syst. Tech. J., vol. 42, pp 79-84, (1963)