Orthogonale Darstellungen endlicher Gruppen und Gruppenringe

Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
genehmigte Habilitationsschrift zur Erlangung der venia legendi

vorgelegt von

Dr. rer. nat. Gabriele Nebe

aus Aachen

Berichter: Universitätsprofessor W. Plesken
Universitätsprofessor R. Scharlau
Universitätsprofessor G. Malle

Tag der Habilitation: 3. November 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Arbeit werden Gruppenringe und Gruppenalgebren endlicher Gruppen als Ordnungen bzw. Algebren mit Involution betrachtet.

Ein klassischer Zugang zur Untersuchung endlicher Gruppen ist die Darstellungstheorie, wie sie schon von Frobenius und Schur entwickelt wurde. Eine Darstellung einer endlichen Gruppe G ist ein Gruppenhomomorphismus in eine volle lineare Gruppe $\Delta : G \to GL(V)$ eines endlich dimensionalen Vektorraums V über einem Körper K. V heißt dann auch ein KG-Modul. Zwei grundlegende Ergebnisse der Darstellungstheorie endlicher Gruppen über Körpern der Charakteristik 0 sind die folgenden.

1) Es gibt endlich viele einfache KG-Moduln, so daß jeder KG-Modul V isomorph zu einer direkten Summe dieser einfachen Moduln ist.

2) Der Isomorphietyp von V ist schon durch seinen Charakter

$$\chi_V : \{\text{Konjugiertenklassen in } G\} \to K, [g] \mapsto Spur(\Delta(g))$$

eindeutig bestimmt.

Ist $K = \mathbb{Q}$ oder ein anderer reeller Zahlkörper, so zeigt ein einfaches Summationsargument, daß $\Delta(G)$ eine reguläre symmetrische Bilinearform ϕ auf V festläßt. Dann ist $\Delta : G \to O(V, \phi)$ eine orthogonale Darstellung. Kennt man die Darstellung Δ, so kann man den Vektorraum

$$\mathcal{F}_G(V) := \{\phi : V \times V \to K \mid \phi \text{ symmetrisch, } K\text{-bilinear,}$$

$$\phi(v\Delta(g), w\Delta(g)) = \phi(v, w) \text{ für alle } g \in G, v, w \in V\}$$

der G-invarianten Formen auf V durch Lösen eines linearen Gleichungssystems bestimmen. Auf der anderen Seite bestimmt der Charakter χ_V den KG-Modul V. Dies legt die Frage nahe, ob man aus der Kenntnis des Charakters χ_V etwas über die K-Isometrieklassen der Elemente von $\mathcal{F}_G(V)$ aussagen kann. In Abschnitt (3.1) wird ein charaktertheoretischer Ansatz zur Lösung dieser Frage vorgestellt, der Clifford-Algebren benutzt.

Der orthogonale KG-Modul (V, ϕ) läßt sich als orthogonale Summe einfacher KG-Moduln schreiben. Daher genügt es, einfache KG-Moduln zu betrachten. Zur Bestimmung der invarianten symmetrischen Bilinearformen auf V wird V als Summand eines reduziblen orthogonalen KG-Moduls (W, ψ) geschrieben. Aber

selbst im günstigsten Fall $dim_K(\mathcal{F}_G(V)) = 1$ – dann heißt V ein uniformer KG-Modul – bestimmt V die G-invariante Form nur bis auf Vielfache. Daher sind die orthogonalen Summanden von (W, ψ) nicht mehr eindeutig durch den Charakter χ_W bestimmt. Also benötigt man zusätzliche Methoden, die die Konstruktion von (W, ψ) ausnutzen, um die durch ψ auf den einfachen orthogonalen Summanden von (W, ψ) induzierten Formen zu bestimmen. In Kapitel 2 wird dafür eine einfache Formel, die orthogonale Frobenius-Reziprozität, entwickelt, falls W von einem orthogonalen Modul einer Untergruppe von G hochinduziert ist. Diese Formel wird dann für die symmetrische Gruppe S_n angewandt, um für gewisse einfache $\mathbb{Q}S_n$-Moduln eine Rekursionsformel für die invarianten Formen anzugeben. Eine weitere wichtige Konstruktion ist das Tensorprodukt orthogonaler KG-Moduln. In Abschnitt 3.4 werden daher Formeln für die Einschränkung der invarianten Form auf gewisse direkte Summanden von Tensorprodukten orthogonaler KG-Moduln entwickelt. Als Beispiele werden alle einfachen orthogonalen $\mathbb{Q}G$-Moduln für drei nicht abelsche quasieinfache Gruppen (Abschnitt 3.5) sowie allgemein für zyklische Gruppen (Abschnitt 3.3) bestimmt.

Die K-Darstellungen von G sind genau die Moduln der Gruppenalgebra

$$KG := \{\sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in K\}.$$

Die orthogonalen Darstellungen von G werden durch die Gruppenalgebra KG zusammen mit der durch $g \mapsto g^{-1}$ für alle $g \in G$ auf KG definierten K-linearen Involution $^\circ$ bestimmt.

Läßt man G durch Konjugation auf KG operieren, so trägt die Gruppenalgebra eine natürliche G-invariante Form T mit $T(a, b) := \frac{1}{|G|} Spur(ab^\circ)$ (wo $Spur$ die reguläre Spur bezeichnet). Die Gruppenelemente bilden eine Orthonormalbasis von (KG, T). Aus dieser Beobachtung erhält man Produktformeln in der Witt-Gruppe von K für die K-Isometrieklassen der G-invarianten Formen auf den einfachen KG-Moduln (vgl. Abschnitt 3.2).

Aus der Menge der Isometrieklassen orthogonaler KG-Moduln wird eine Gruppe, wobei die Addition die orthogonale Summe $\perp$ und $[(V, \phi)] \perp [(V, -\phi)] = 0$ definiert ist, die Grothendieck-Witt-Gruppe $GW(KG, ^\circ)$. Ist $G = \{1\}$, so erhält man die übliche Witt-Gruppe $W(K) = GW(K, id)$ der symmetrischen K-Bilinearformen. Die oben beschriebenen Rechnungen kann man als Berechnung des Vergißfunktors $GW(KG, ^\circ) \to W(K)$ interpretieren. Für beliebige Körper K ist $GW(KG, ^\circ)$ eine direkte Summe von Witt-Gruppen der Endomorphismenringe der orthogonalen einfachen KG-Moduln (vgl. Satz 1.3.8).

Ist R ein Dedekindbereich mit Quotientenkörper K, so definiert Dress in [Dress] eine exakte Sequenz

$$0 \to GW(RG, ^\circ) \to GW(KG, ^\circ) \xrightarrow{\delta} \oplus_{\wp \trianglelefteq_{max} R} GW((R/\wp)G, ^\circ).$$

Die Grothendieck-Witt-Gruppe von RG kann man als die Untergruppe der Gruppe $GW(KG, ^\circ)$ ansehen, die aus den orthogonalen KG-Moduln besteht, die ein

unimodulares RG-Gitter enthalten. Die Surjektivität der Abbildung δ ist in [Miy, Theorem C] für Gruppen G ungerader Ordnung, $K = \mathbb{Q}$ und $R = \mathbb{Z}$ gezeigt worden. Für p-Gruppen G und Ganzheitsringe R in algebraischen Zahlkörpern K zeigt Morales in [Mor 90], daß der Kokern von δ – genau wie im klassischen Fall $G = \{1\}$ – die Exponent-2-Faktorgruppe der Klassengruppe von K ist. Ist K eine endliche Erweiterung des Körpers $\mathbb{Q}_p$ der p-adischen Zahlen und R der Ring der ganzen Zahlen in K so zeigt Folgerung 4.3.7, daß δ für beliebige Gruppen G surjektiv ist. Dies ist falsch, wenn man RG durch eine beliebige symmetrische Ordnung mit Involution ersetzt (Beispiel 4.3.8).

Die Bestimmung von $GW(RG, \circ)$ kann man als eine Klassifikation der orthogonalen RG-Gitter interpretieren. Diese werden durch die R-Ordnung RG mit der Involution $\circ|_{RG}$ gegeben. In allen von mir betrachteten Beispielen legt der Gruppenring RG die Involution eindeutig fest, falls 2 in R invertierbar ist. Man kann also aus der Kenntnis von RG die Abbildung δ bestimmen und diese dann in einer Witt-Zerlegungsmatrix kodieren (vgl. Abschnitt 5.5, 5.6). Zur Berechnung der Abbildung δ kann man RG durch eine meist wesentlich kleinere Ordnung mit Involution ersetzen, die als Ordnung mit Involution zu RG Morita-äquivalent ist (vgl. Abschnitt 4.3.2).

Also kann man zur Berechnung von δ eine Beschreibung des Gruppenrings benutzen. Ist R der Ring der ganzen Zahlen in einer endlichen Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, so werden in Kapitel 5 Methoden entwickelt, um Gruppenringe RG, für die die Zerlegungszahlen alle 0 oder 1 sind, bis auf Morita-Äquivalenz zu beschreiben. Dazu wird die in [Ple1], [Ple2] entwickelte Sprache zur Bestimmung einer gewissen Oberordnung von RG, der graduierten Hülle Γ, benutzt. Γ ist die direkte Summe der Projektionen von RG in die einfachen Komponenten von KG und klassifiziert die RG-Gitter in den einfachen KG-Moduln. Die grundlegende Idee zur Bestimmung von Γ ist die Führerformel (Satz 5.2.2) die wesentlich benutzt, daß RG ein unimodulares R-Gitter (eine symmetrische Ordnung) in KG ist. Dann gilt nämlich für Oberordnungen Γ von RG, daß das Dual $\Gamma^{\#}$ das größte Γ-Ideal in RG ist.

Eine Hauptbeobachtung zur Beschreibung des Gruppenrings RG selbst ist, daß die Endomorphismenringe der projektiv unzerlegbaren RG-Gitter kommutativ sind. Sind $P_1, \ldots, P_h$ die projektiv unzerlegbaren RG-Gitter, dann ist RG Morita-äquivalent zu Λ:

$$RG \sim \mathrm{End}_{RG}(\oplus_{i=1}^{h} P_i) = \oplus_{i,j=1}^{h} \mathrm{Hom}_{RG}(P_i, P_j) =: \Lambda.$$

Die Gitter $\mathrm{Hom}_{RG}(P_i, P_j)$ kann man alle gleichzeitig in einen kommutativen Ring $E \cong Z(KG)$ einbetten, so daß die Multiplikation in Λ durch die in E modelliert wird. Als Beispiele werden in Abschnitt 5.6 die Basisordnungen einiger Blöcke von Gruppenringen, darunter der Hauptblock von $\mathbb{Z}_3 S_9$, berechnet.

Kennt man den Gruppenring nicht oder nicht genau genug, so kann man hoffen, doch etwas über die Abbildung δ zu erfahren, indem man aus RG in kanonischer Weise sukzessive größere, einfacher zu beschreibende R-Ordnungen Λ_j

$(j = 1, 2, \ldots, N)$ in KG konstruiert, so daß die einfachen Λ_j-Torsionsmoduln halbeinfache RG-Moduln sind (vgl. Lemma 4.1.2, Lemma 4.3.16): $\Lambda_1 = Id(J(RG))$ ist der Idealisator des Jacobson Radikals von RG und $\Lambda_{j+1} = Id(J(\Lambda_j))$. Für symmetrische Ordnungen Λ werden die Ordnungen Λ_1 und Λ_2 in Abschnitt 4.1.3 explizit beschrieben. Hat Λ keine Maximalordnung als direkten Summanden, dann ist $\Lambda_1 = Id(J(\Lambda)) = J(\Lambda)^{\#}$ das Dual des Jacobson Radikals (Satz 4.1.17). Es gilt also eine Art Umkehrung der Führerformel.

Im abschließenden Kapitel 6 werden die Gruppenringe RG, wo p eine Primzahl, $f \in \mathbb{N}$, $G = SL_2(p^f)$ die spezielle lineare Gruppe vom Grad 2 über dem Körper mit p^f Elementen und R der Ring der ganzen Zahlen in der unverzweigten Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ vom Grad f ist, nahezu bis auf Morita-Äquivalenz bestimmt. Die graduierte Hülle von RG wird vollständig beschrieben und die Informationen über den Gruppenring RG genügen zur Berechnung der Witt-Zerlegungsmatrix und damit der Abbildung δ (für $p > 2$). Insbesondere für $p = 2$ hat die graduierte Hülle von RG eine sehr einfache kombinatorische Beschreibung (vgl. Satz 6.1.12).

Schließlich möchte ich mich bei allen bedanken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben, bei Dr. Jürgen Müller und Dr. Thomas Breuer für ihre Hilfe beim Umgang mit GAP, bei Dr. Alexander Zimmermann für wertvolle Literaturhinweise zu Kapitel 6, bei Privatdozent Steffen König für das Korrekturlesen einiger Abschnitte und vor allem bei Prof. W. Plesken, der immer für Diskussionen Zeit fand.

Lehrstuhl B für Mathematik
RWTH Aachen
Templergraben 64
52062 Aachen
gabi@math.rwth-aachen.de

Kapitel 1

Grundlagen.

1.1 Bilineare und quadratische Formen.

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension $n := dim_K(V)$.

Definition 1.1.1 *(i)* $q : V \to K$ *heißt* quadratische Form, *falls* $q(av) = a^2 q(v)$ *für alle* $a \in K$, $v \in V$ *und* $b_q : V \times V \to K$ *definiert durch* $b_q(v, w) = q(v + w) - q(v) - q(w)$ *für alle* $v, w \in V$ *eine (symmetrische)* K*-bilineare Abbildung ist.* b_q *heißt dann die* zu q gehörige Bilinearform. *Das Paar* $\varphi := (V, q)$ *heißt ein* quadratischer Raum. *Die Gruppe* $O(\varphi) := \{g \in GL(V) \mid q(gv) = q(v)$ *für alle* $v \in V\}$ *heißt die* orthogonale Gruppe *von* φ. $O^+(\varphi) := \{g \in O(\varphi) \mid det(g) = 1\}$ *bezeichnet die* spezielle orthogonale Gruppe *von* φ.

(ii) Ein Teilraum $U \leq V$ *heißt* total isotrop, *falls* $q(U) = \{0\}$. V *heißt* isotrop, *falls es* $0 \neq v \in V$ *mit* $q(v) = 0$ *gibt, ansonsten* anisotrop.

(iii) Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* V, *so heißt* $B := (b_q(v_i, v_j))_{i,j=1}^n$ *eine* Gram-Matrix *von* b_q. *Die Determinante von* B *als Element von* $K/(K^*)^2$ *heißt die* Determinante $d(b_q)$ *der Bilinearform* b_q. *Der quadratische Raum* φ *heißt* regulär, *falls* $det(B) \in K^*$.

Definition 1.1.2 *Sei* $char(K) \neq 2$. *Sei* $\varphi = (V, q)$ *ein quadratischer Raum der Dimension* n *über* K.

(i) $B_q := \frac{1}{2} b_q$ *sei die Bilinearform, welche die quadratische Form* q *mit* $q(x) = B_q(x, x)$ *induziert.*

(ii) Die Determinante *von* φ *ist*

$$d(\varphi) := det(\frac{1}{2} b_q) := det(B_q).$$

Die Diskriminante *von* φ *ist*

$$d_\pm(\varphi) := (-1)^{\binom{n}{2}} d(\varphi).$$

(iii) *Das* Tensorprodukt *quadratischer Räume* $\varphi = (V,q)$ *und* $\psi = (W,r)$ *ist definiert über das Tensorprodukt der bilinearen Räume* (V,B_q) *und* (W,B_r) *als* $\varphi \otimes \psi := (V \otimes_K W, q \otimes r)$, *wo* $q \otimes r : V \otimes W \to K$ *definiert ist durch* $q \otimes r(v \otimes w) := q(v)r(w)$ *und* $b_{q\otimes r}(v \otimes w, v' \otimes w') := \frac{1}{2} b_q(v,v') b_r(w,w')$.

(iii) *Sei* $\varphi := (V,q)$ *ein quadratischer Raum. Das* symmetrische Quadrat $\otimes^{[2]}(\varphi)$ *von* φ *ist der quadratische Teilraum von* $\varphi \otimes \varphi$, *der von* $v \otimes w + w \otimes v$ *mit* $v, w \in V$ *erzeugt wird. Die* äußere Potenz $\Lambda^2(\varphi)$ *von* φ *ist der quadratische Teilraum von* $\varphi \otimes \varphi$, *der von* $v \otimes w - w \otimes v$ *mit* $v, w \in V$ *erzeugt wird.*

Übereinkunft. Werden Definitionen für quadratische Formen auf Bilinearformen B angewandt, so sei die quadratische Form $q(x) = B(x,x)$. Dann stimmen die beiden Definitionen der Determinante von B überein.

Bezeichnung. Mit $\perp$ werden orthogonale Summen quadratischer oder bilinearer Räume bezeichnet. Für $a \in K$ bezeichnet $\langle\!\langle a \rangle\!\rangle$ die Isometrieklasse des eindimensionalen quadratischen Raums (V,q) mit $V = \langle v \rangle$ und $q(v) = a$, bzw. ebenso die des eindimensionalen bilinearen Raums (V,B), wo $B(v,v) = a$ ist. Sind $a_1, \ldots, a_n \in K$ so sei $\langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle := \langle\!\langle a_1 \rangle\!\rangle \perp \ldots \perp \langle\!\langle a_n \rangle\!\rangle$.

Sei $\mathbb{H} := \mathbb{H}(K)$ die hyperbolische Ebene über K ($\mathbb{H} \cong (\langle v_1, v_2 \rangle_K, q)$ mit $q(v_1) = q(v_2) = 0$ und $b_q(v_1, v_2) = 1$). Die Determinante von $d(\mathbb{H})$ ist $-\frac{1}{4}(K^*)^2 = -(K^*)^2$ und $d_\pm(\mathbb{H}) = (K^*)^2$. Für $a \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{H}_{2a}(K) :=\perp^a \mathbb{H}$ der hyperbolische Raum der Dimension $2a$ über K.

1.2 Invarianten quadratischer Räume.

1.2.1 Clifford-Algebren.

Grundlagen für die Theorie der Clifford-Algebren findet man z.B. in [Scha, Chapter 9], [Knu, Chapter IV] und [Lam, Chapter 5].

Sei K ein Körper und $\varphi := (V,q)$ ein quadratischer Raum über K mit zugehöriger Bilinearform $b := b_q : V \times V \to K$, $b(v,w) := q(v+w) - q(v) - q(w)$ für alle $v, w \in V$. Sei $n := dim_K(V)$.

Definition 1.2.1 *(i)* *Die* Tensoralgebra *von* V *ist* $T(V) := \oplus_{i=0}^{\infty} \otimes^i V$, *wobei* $T_0 := \otimes^0 V := K \cdot 1$ *und für* $i > 0$ *der* K*-Vektorraum* $T_i := \otimes^i V := V \otimes T_{i-1}$ *gesetzt ist. Addition auf* $T(V)$ *ist komponentenweise definiert und Multiplikation* $T_i \times T_j \to T_{i+j}$ *durch* $(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i) \cdot (w_1 \otimes \ldots \otimes w_j) := v_1 \otimes \ldots \otimes v_i \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_j$ *für alle* $v_k, w_l \in V$.

(ii) *Die* Clifford-Algebra *von* φ *ist definiert als*

$$C(\varphi) := T(V)/I(\varphi),$$

wo $I(\varphi)$ das 2-seitige Ideal von $T(V)$ ist, welches von $v \otimes v - q(v) \cdot 1$ mit $v \in V$ erzeugt wird.

Da $q(v+w) = q(v) + q(w) + b(v,w)$ ist, gilt $vw = -wv + b(v,w) \cdot 1$ in $C(\varphi)$. Daher ist für jede Basis $B := (v_1, \ldots, v_n)$ in V die Menge $\Lambda(B) := \{v_{i_1} \ldots v_{i_s} \mid 0 \leq s \leq n, 1 \leq i_1 < \ldots < i_s \leq n\}$ ein lineares Erzeugendensystem von $C(\varphi)$.

Hierbei darf man V mit dem Bild von V in $C(\varphi)$ identifizieren, wie der folgende Satz von Poincaré-Birkhoff-Witt-Typ zeigt:

Satz 1.2.2 *(vgl. [Knu, IV Theorem (1.5.2)]) Ist B eine Basis für V, so ist $\Lambda(B)$ eine Basis für $C(\varphi)$.*

Die Algebra $C(\varphi)$ läßt sich auch durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren:

Bemerkung 1.2.3 *(vgl. [Scha, Remark 9.2.2]) Ist A eine K-Algebra und $f : V \to A$ ein K-Vektorraumhomomorphismus mit $f(v)^2 = q(v) \cdot 1$, so gibt es genau einen Algebrenhomomorphismus $g : C(\varphi) \to A$ mit $f(v) = g(v)$ für alle $v \in V$.*

Insbesondere hängt der Isomorphietyp von $C(\varphi)$ nur vom Isometrietyp von φ ab. Außerdem läßt sich jede orthogonale Abbildung in $O(\varphi)$ eindeutig zu einem K-Algebrenautomorphismus von $C(\varphi)$ fortsetzen und man erhält einen Gruppenhomomorphismus $O(\varphi) \to Aut(C(\varphi))$.

Definition 1.2.4 *Sei*

$$C_0(\varphi) := \langle v_1 \ldots v_s \mid 0 \leq s \text{ gerade }, v_i \in V (1 \leq i \leq s) \rangle \leq C(\varphi)$$

die gerade Clifford-Algebra. *Sei*

$$C_1(\varphi) := \langle v_1 \ldots v_s \mid s \text{ ungerade }, v_i \in V (1 \leq i \leq s) \rangle \subseteq C(\varphi)$$

der von den Produkten ungerade Länge erzeugte Teilraum von $C(\varphi)$.
Auf $C_0(\varphi) \cup C_1(\varphi)$ ist eine Gradfunktion δ mit Werten in $\mathbb{F}_2$ definiert durch $\delta(C_0(\varphi)) := \{0\}$ und $\delta(C_1(\varphi)) := \{1\}$.

Bemerkung 1.2.5 *$C_0(\varphi)$ ist eine Teilalgebra von $C(\varphi)$ und $C_1(\varphi)$ ein $C_0(\varphi)$-Modul. Da $C_1(\varphi)C_1(\varphi) \subseteq C_0(\varphi)$ gilt, ist $C(\varphi)$ damit eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduierte Algebra. Es gilt $dim(C_0(\varphi)) = 2^{n-1} = dim(C_1(\varphi))$.*

Der folgende Satz ist [Scha, Theorem (9.2.10)] im Fall $char(K) \neq 2$. Analoge Aussagen erhält man auch im Fall $char(K) = 2$ aus [Knu, IV.2 und IV.3].

Satz 1.2.6 *Sei $\varphi = (V, q)$ ein regulärer quadratischer Raum über dem Körper K der Charakteristik $char(K) \neq 2$ mit $n = dim(V)$ und $C := C(\varphi) = C_0 \oplus C_1$, wo $C_i := C_i(\varphi)$ für $i = 0, 1$.*

(i) Ist n gerade, so ist C eine zentral einfache K-Algebra. $Z(C_0)$ ist isomorph zu $K[X]/(X^2 - d_\pm(\varphi))$.

(ii) Ist n ungerade, so ist C_0 eine zentral einfache K-Algebra. $Z(C)$ ist isomorph zu $K[X]/(X^2 - d_\pm(\varphi))$ und $C \cong Z(C) \otimes_K C_0$.

Aus der folgenden Tabelle kann man die möglichen Isomorphietypen von $C(\varphi)$ und $C_0(\varphi)$ für algebraische Zahlkörper K ablesen. Dabei bezeichnet K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}$ und K_1 einen Erweiterungskörper vom Grad 2 von K, D_1 eine nichtzerfallende Quaternionenalgebra mit Zentrum K_1 und D eine nichtzerfallende Quaternionenalgebra mit Zentrum K. Dabei wird angenommen, daß die Dimension von V gerade ist. Im Fall $dim(V)$ ungerade kann man aus der Kenntnis von $C_0(\varphi)$ nichts über $Z(C(\varphi))$ aussagen. Sei also $n := dim(V)$ gerade und $m := 2^{(n-2)/2}$.

$Z(C_0(\varphi))$	$C_0(\varphi)$	$C(\varphi)$
$K \oplus K$	$K^{m\times m} \oplus K^{m\times m}$	$K^{2m\times 2m}$
$K \oplus K$	$D^{\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}} \oplus D^{\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}}$	$D^{m\times m}$
K_1	$K_1^{m\times m}$	$D^{m\times m}$ oder $K^{2m\times 2m}$
K_1	$D_1^{\frac{m}{2}\times\frac{m}{2}}$	$D^{m\times m}$

Dabei gilt: Im Fall 3 liegt K_1 in D. Ist also $\wp$ eine Primstelle von K, die in K_1/K zerlegt ist, so ist $\wp$ nicht verzweigt in D. Im Fall 4 ist die Einschränkung des irreduziblen $C(\varphi)$-Moduls W auf $C_0(\varphi)$ irreduzibel. Also gilt $D_1 = \mathrm{End}_{C_0(\varphi)}(W) \supseteq \mathrm{End}_{C(\varphi)}(W) = D$. Ein Dimensionsvergleich zeigt, daß $D_1 \cong K_1 \otimes_K D$. Also gilt für in K_1/K zerlegtes $\wp$, daß $\wp$ verzweigt ist in D, genau dann wenn die beiden Primstellen über $\wp$ in D_1 verzweigt sind.

Definition 1.2.7 *Die* Clifford-Invariante $[c(\varphi)] \in Br_2(K)$ *des regulären quadratischen Raums φ ist definiert als die Klasse von*

$$c(\varphi) := \begin{cases} C(\varphi) & dim(V) \text{ gerade} \\ C_0(\varphi) & dim(V) \text{ ungerade} \end{cases}$$

in der maximalen Exponent-2-Untergruppe $Br_2(K)$ der Brauer-Gruppe von K.

1.2.2 Die Hasse-Invariante.

In diesem Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $\varphi = (V, q)$ ein regulärer quadratischer Raum über K.

Definition 1.2.8 *(i)* $(\frac{a_1,a_2}{K})$ *bezeichne die Quaternionenalgebra* $\langle 1, i, j, ij \mid ij = -ji, i^2 = a_1, j^2 = a_2\rangle$ *über K.*

(ii) *Seien* $a_1, a_2 \in K^*$. *Das Symbol* $(a_1, a_2) := (a_1, a_2)_K$ *bezeichne die Klasse der Quaternionenalgebra* $(\frac{a_1, a_2}{K})$ *in* $Br_2(K)$.

(iii) *Sei* $\varphi \cong \langle\!\langle a_1, \ldots, a_n \rangle\!\rangle$. *Die* Hasse-Invariante von φ *ist*

$$s(\varphi) := \prod_{i<j} (a_i, a_j)_K \in Br_2(K).$$

Nach [Scha] ist

$$[c(\varphi)] = s(\varphi) \begin{cases} 1 & m \equiv 1, 2 \pmod 8 \\ (-1, -d(\varphi)) & m \equiv 3, 4 \pmod 8 \\ (-1, -1) & m \equiv 5, 6 \pmod 8 \\ (-1, d(\varphi)) & m \equiv 7, 8 \pmod 8 \end{cases}$$

Ist K ein algebraischer Zahlkörper und $\wp$ eine Stelle von K, so sei $K_\wp$ die Vervollständigung von K bei $\wp$ und

$$s_\wp(\varphi) := s((K_\wp \otimes_K V, q)) \in Br_2(K_\wp) \cong \{\pm 1\}.$$

Identifiziert man $Br_2(K_\wp)$ mit $\{\pm 1\}$ so gilt die folgende Produktformel

$$\prod_\wp s_\wp(\varphi) = 1,$$

wo $\wp$ alle Stellen von K durchläuft.

Weitere nützliche Rechenregeln für $(\cdot, \cdot)_K$, insbesondere für $K = \mathbb{Q}_p$, findet man in [Kit, Section 3.3].

1.3 Witt-Gruppen.

Sei R ein Dedekindring mit Quotientenkörper K und A eine endlich dimensionale K-Algebra. Eine Involution $^\circ$ auf A ist eine K-lineare Abbildung $^\circ : A \to A$ mit $(ab)^\circ = b^\circ a^\circ$ und $(a^\circ)^\circ = a$ für alle $a, b \in A$. Sei $^\circ$ eine Involution auf A. Ist A separabel, so sei $\Lambda \subseteq A$ eine R-Ordnung in A, also ein Teilring Λ von A, der ein projektiver endlich erzeugter R-Modul ist, mit $K\Lambda = A$. Es sei weiterhin angenommen, daß $\Lambda^\circ = \Lambda$ gilt.

1.3.1 Witt-Gruppen für Algebren und Ordnungen mit Involution.

Ein Λ-Torsionsmodul ist ein endlich erzeugter R-Torsionsmodul mit R-linearer Λ-Rechtsoperation. Für einen Λ-Torsionsmodul V ist der duale Modul definiert als $V^* := \mathrm{Hom}(V, K/R)$.

Sei $B = A$ und $L = K$ oder $B = \Lambda$ und $L = R$. Sei V ein B-Rechtsmodul der ein projektiver endlich erzeugter L-Modul ist und $\phi : V \times V \to L$ eine symmetrische L-Bilinearform oder $B = \Lambda$, $R \neq K$, V ein Λ-Torsionsmodul und $\phi : V \times V \to K/R$ eine symmetrische R-Bilinearform.

Definition 1.3.1 *(i) ϕ heißt B-*kovariant*, falls $\phi(va, w) = \phi(v, wa^\circ)$ für alle $v, w \in V$, $a \in B$ gilt. (V, ϕ) heißt dann ein* orthogonaler B-Modul.
Die Bilinearform ϕ heißt regulär*, falls der Homomorphismus $V \to V^* : v \mapsto (w \mapsto \phi(v, w))$ ein Isomorphismus ist.*

(ii) Sei (M, ϕ) ein regulärer orthogonaler B-Modul. (M, ϕ) heißt metabolisch*, falls es einen B-Teilmodul $N \leq M$ gibt, der gleich seinem Orthogonalraum $N^\perp := \{m \in M \mid \phi(m, n) = 0 \text{ für alle } n \in N\}$ ist.*

(iii) Zwei reguläre orthogonale B-Moduln $(V_1, \phi_1), (V_2, \phi_2)$ heißen äquivalent*, falls metabolische B-Moduln (M_1, ψ_1) und (M_2, ψ_2) existieren mit $(V_1, \phi_1) \perp (M_1, \psi_1) \cong (V_2, \phi_2) \perp (M_2, \psi_2)$ als orthogonale B-Moduln.*

Bemerkung 1.3.2 *Da $(V, \phi) \perp (V, -\phi) \sim 0$ wird die Menge der Äquivalenzklassen L-projektiver regulärer orthogonaler B-Moduln (bzw. Λ-Torsionsmoduln) zu einer Gruppe vermöge orthogonaler Summen, die* Grothendieck-Witt-Gruppe *$GW(B, \circ)$ (bzw. $GW^t(\Lambda, \circ)$) der regulären orthogonalen B-Moduln (bzw. Λ-Torsionsmoduln).*

In vielen der in dieser Arbeit betrachteten Fälle hat B eine Hopfstruktur, die mit $\circ$ verträglich ist. $\circ$ induziert auf $B \otimes B$ eine Involution definiert durch $(a_1 \otimes a_2)^\circ = a_1^\circ \otimes a_2^\circ$ für alle $a_1, a_2 \in B$. Sei B eine Hopfalgebra mit Komultiplikation $\Delta : B \to B \otimes B$, so daß $(\Delta(a))^\circ = \Delta(a^\circ)$. Dann ist das Tensorprodukt zweier orthogonaler B-Moduln wieder ein orthogonaler B-Modul, und $GW(B, \circ)$ wird zu einem Ring, der Grothendieck-Witt-Ring der regulären orthogonalen B-Moduln.

Beispiel 1.3.3 *Ist $A = K$, so erhält man den klassischen Witt-Ring $W(K)$.*
Ist G eine endliche Gruppe, $A = KG$ und $\Lambda = RG$ und $\circ : A \to A : \sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g g^{-1}$ die übliche Involution auf A, so erhält man den Grothendieck-Witt-Ring $GW(G, L)$ aus [Dress].
Ist A/K eine separable Körpererweiterung vom Grad 2 und $\circ$ nichttrivial, so erhält man den Witt-Ring der Hermiteschen Formen auf A.

Bemerkung 1.3.4 *Ist $A \cong A_1 \oplus A_1^\circ$ mit einem A-Ideal A_1, so ist $GW(A, \circ) = \{0\}$.*

Beweis. Sei ϵ das zentrale Idempotent in A mit $A_1 = A\epsilon$. Dann ist $\epsilon^\circ = (1 - \epsilon)$ das zentrale Idempotent von A mit $A_1^\circ = A(1 - \epsilon)$. Sei (V, ϕ) ein regulärer orthogonaler A-Modul. Dann ist $V = V\epsilon \oplus V(1-\epsilon)$ und $\phi(V\epsilon, V\epsilon) = \phi(V, V\epsilon\epsilon^\circ) = \phi(V, 0) = \{0\}$. Ebenso ist $V(1 - \epsilon)$ ein total isotroper Teilraum von V. Also ist V metabolisch. □

Definition 1.3.5 *Ein orthogonaler B-Modul (M, ϕ) heißt* total isotrop, *falls $M \neq 0$ und $\phi(m, m) = 0$ für alle $m \in M$.*
*Ein orthogonaler B-Modul (M, ϕ) heißt B-*anisotrop, *falls M keinen total isotropen B-invarianten Teilmodul besitzt.*

Es gilt das folgende

Lemma 1.3.6 *Sei (V, ϕ) ein regulärer orthogonaler A-Modul.*

(i) Die Klasse von (V, ϕ) hat bis auf A-Isometrie genau einen A-anisotropen Vertreter in $GW(A, \circ)$.

(ii) Ist (V, ϕ) A-anisotrop, so ist (V, ϕ) orthogonale Summe einfacher regulärer orthogonaler A-Moduln.

(iii) Die A-Moduln (V, ϕ) welche in $GW(A, \circ)$ gleich Null sind, sind metabolisch.

Beweis. (i) Seien (V, b) und (W, c) zwei A-anisotrope orthogonale A-Moduln die in $GW(A, \circ)$ gleich sind. Dann ist $(V, b) - (W, c) = (V, b) + (W, -c) - ((W, c) + (W, -c)) = (V \perp W, b \perp (-c))$ metabolisch. Sei $N = N^{\perp} \leq V \perp W$ ein A-invarianter selbstorthogonaler Teilmodul. Dann sind $N \cap V$ und $N \cap W$ isotrope A-invariante Teilmoduln von V bzw. W. Da V und W jedoch A-anisotrop sind, ist $N \cap V = N \cap W = 0$. Wegen $dim(N) + dim(N^{\perp}) = dim(V) + dim(W)$ ist N ein volles subdirektes Produkt, $N = \{(x, \varphi(x)) \in V \perp W\}$ für einen A-Isomorphismus $\varphi : V \to W$. Da N total isotrop ist, ist φ eine Isometrie zwischen (V, b) und (W, c).
(ii) ([Dress, 4.2(9)]) Sei $N \leq V$ ein A-Teilmodul von V. Da $N^{\perp}$ ebenfalls A-invariant ist, ist $N \cap N^{\perp}$ ein total isotroper A-invarianter Teilmodul von V also $N \cap N^{\perp} = 0$ und $V = N \perp N^{\perp}$.
(iii) ([Dress, 4.2(8)]) Sei (V', ϕ') ein metabolischer A-Modul mit $(V, \phi) \perp (V', \phi')$ metabolisch und sei $N' = (N')^{\perp}$ ein maximal total isotroper A-Teilmodul von (V', ϕ') und N ein maximaler total isotroper A-Teilmodul von (V, ϕ). Dann ist $\tilde{N} := N \perp N'$ ein maximal total isotroper Teilmodul des metabolischen Moduls $(V, \phi) \perp (V', \phi')$. Deshalb ist $\tilde{N}^{\perp} = \tilde{N}$, also auch $N^{\perp} = N$ in (V, ϕ). □

Dieses Lemma legt die folgende Beschreibung von $GW(A, \circ)$ nahe:

Sei $V_1, \ldots, V_s$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln, die symmetrische A-kovariante Bilinearformen $\phi_i \neq 0$ tragen. Für $1 \leq i \leq s$ sei

$$D_i := \mathrm{End}_A(V_i) := \{x \in \mathrm{End}_K(V_i) \mid vax = vxa \text{ für alle } a \in A, v \in V_i\}$$

der Endomorphismenring von V_i. Dann induziert ϕ_i eine Involution $\bar{}$ auf D_i durch $\phi_i(dv, w) = \phi_i(v, \bar{d}w)$ für alle $v, w \in V_i$, $d \in D_i$.

Die Fixpunkte $Fix(\bar{}) := \{d \in D_i \mid \bar{d} = d\}$ entsprechen gerade den symmetrischen A-kovarianten Bilinearformen auf V. Beachte: Ist $Fix(\bar{})$ nicht im Zentrum von D_i enthalten, so ist $\bar{}$ nicht eindeutig durch V_i (wohl aber durch (V_i, ϕ_i)) bestimmt.

Lemma 1.3.7 *Sei D eine K-Divisionsalgebra mit K-linearer Involution $\bar{}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, $\varphi : D \to K^{n\times n}$ eine Einbettung und $F^{tr} = F \in K^{n\times n}_{sym}$ eine invertierbare symmetrische Matrix, mit*

$$\varphi(\bar{d}) = F\varphi(d)^{tr}F^{-1} \text{ für alle } d \in D.$$

Ist $\overline{B}^{tr} = B \in D^{m\times m}$ eine hermitesche Matrix und $T \in GL_m(D)$, so gilt

$$\varphi(TB\overline{T}^{tr}) \otimes F = \varphi(T)(\varphi(B) \otimes F)\varphi(T)^{tr} \in K^{n^2m\times n^2m},$$

wobei φ auf $D^{m\times m}$ eintragsweise fortgesetzt wird.

Beweis. Auf der linken Seite steht eine Blockmatrix mit i,l-Block

$$\sum_{j,k=1}^{m} \varphi(t_{ij}b_{jk}\overline{t_{lk}})F.$$

Der i,l-Block auf der rechten Seite ist

$$\sum_{j,k=1}^{m} \varphi(t_{ij})\varphi(b_{jk})F\varphi(t_{lk})^{tr} = \sum_{j,k=1}^{m} \varphi(t_{ij})\varphi(b_{jk})\varphi(\overline{t_{lk}})F. \qquad \square$$

Satz 1.3.8 *Sei $V_1, \ldots, V_s$ ein Vertretersystem der Isomorphieklassen der einfachen A-Moduln, die symmetrische A-kovariante Bilinearformen $\phi_i \neq 0$ tragen. Für $1 \leq i \leq s$ sei $D_i := \mathrm{End}_A(V_i)$ der Endomorphismenring von V_i zusammen mit der von ϕ_i induzierten Involution $\bar{}$. Dann gilt für die Grothendieck-Witt-Gruppen*

$$GW(A, {}^\circ) \cong \oplus_{i=1}^{s} GW(D_i, \bar{}).$$

Beweis. Sei (V,ϕ) ein regulärer orthogonaler A-Modul. Nach Lemma 1.3.6 (i) hat (V,ϕ) einen eindeutigen A-anisotropen Vertreter (V',ϕ') in $GW(A, {}^\circ)$. Dieser ist nach Lemma 1.3.6 (ii) eine orthogonale Summe einfacher A-Moduln mit A-kovarianter symmetrischer Bilinearform. Für $1 \leq i \leq s$ sei $W_i \cong V_i^{n_i}$ die zu V_i gehörige homogene Komponente von V'. Bezüglich einer geeigneten Basis hat $\phi'_{|W_i}$ eine Gram-Matrix von der Form $B^{(i)} \otimes F_i$ mit $B^{(i)} \in D_i^{n_i\times n_i}$, wo F_i eine gewählte Gram-Matrix von ϕ_i ist. $\phi'_{|W_i}$ ist symmetrisch, genau dann wenn $B^{(i)}$ hermitesch ist. Man erhält so einen Gruppenhomomorphismus $\oplus_{i=1}^{s} W(D_i, \bar{}) \to GW(A, {}^\circ)$ auf der Ebene der Gram-Matrizen definiert durch $B^{(i)} \mapsto B^{(i)} \otimes F_i$. Er ist wohldefiniert, da er isometrische Moduln auf isometrische abbildet: Ist $T \in GL_{n_i}(D_i)$ aus der Einheitengruppe des Endomorphismenringes von W_i, so ist nach Lemma 1.3.7

$$(TB^{(i)}\bar{T}^{tr}) \otimes F_i = T(B^{(i)} \otimes F_i)T^{tr}.$$

Außerdem werden metabolische Moduln auf metabolische abgebildet. Die Surjektivität folgt aus obiger Konstruktion. Die Abbildung ist auch injektiv, denn sei $(D_i^{n_i}, B^{(i)})$ im Kern. Dann ist $(W_i, B^{(i)} \otimes F_i)$ metabolisch, d.h. es gibt einen G-Teilmodul $N \leq W_i$ mit $N = N^{\perp}$. Dann ist N als G-Modul isomorph zu $V_i^{n_i/2}$. Es gibt also eine Matrix $T \in \mathrm{End}_G(W_i)^* = GL_{n_i}(D_i)$ mit $T(B^{(i)} \otimes F_i)T^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}$. Dann ist aber $TB^{(i)}\bar{T}^{tr} = \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & \star \end{pmatrix}$ also $(D_i^{n_i}, B^{(i)})$ ein metabolischer hermitescher D_i-Modul. □

1.3.2 Die Sequenz $GW(\Lambda) \to GW(A) \to GW^t(\Lambda)$.

Sei $\Lambda = \Lambda^\circ \subset A$ eine involutionsinvariante R-Ordnung in der separablen K-Algebra A.

Wie in [Dress, Theorem 5] ($\Lambda = RG$ für eine endliche Gruppe G) hat man in dieser Situation die folgende exakte Sequenz

$$(\star) \quad 0 \to GW(\Lambda, \circ) \xrightarrow{\iota} GW(A, \circ) \xrightarrow{\delta} GW^t(\Lambda, \circ).$$

Sei (V, ϕ) ein regulärer orthogonaler A-Modul. Ein R-Gitter L in V ist ein projektiver endlich erzeugter R-Teilmodul L von V mit $KL = V$.

Ist L ein R-Gitter in V so ist das duale Gitter $L^{\#} := \{v \in V \mid \phi(v, L) \subseteq R\}$ wieder ein volles Gitter in V. L heißt ganz, falls $\phi(L, L) \subset R$ also $L \subset L^{\#}$ gilt. Ist L ganz und Λ-invariant, so ist $L^{\#}/L$ ein Λ-Torsionsmodul.

Die Abbildung ι.

Definiere $\iota : GW(\Lambda, \circ) \to GW(A, \circ)$ durch $\iota([(M, \phi)]) := [(KM, \phi)]$. Dann liefert ι einen Gruppenhomomorphismus (falls Λ eine Hopfordnung ist, und $\circ$ verträglich mit der Hopfstruktur, einen Ringhomomorphismus) $\iota : GW(\Lambda, \circ) \to GW(A, \circ)$.

Lemma 1.3.9 *([Dress, Lemma 4.1]) Die Abbildung $\iota : GW(\Lambda, \circ) \to GW(A, \circ)$ ist injektiv.*

Beweis. Sei (M, ϕ) ein regulärer orthogonaler B-Modul so, daß $\iota([(M, \phi)]) = [(KM, \phi)]$ metabolisch ist (siehe Lemma 1.3.6 (iii)). Ist V ein maximal total isotroper A-Teilmodul von (KM, ϕ), so gilt $V = K(V \cap M)$ und $V \cap M$ ist ein maximal isotroper Λ-Teilmodul von M. Deshalb ist auch (M, ϕ) metabolisch. □

Die Abbildung δ.

Sei (V, ϕ) ein A-Modul und L ein ganzes Λ-Gitter in V. Dann induziert ϕ auf $L^{\#}/L$ eine Λ-kovariante Bilinearform

$$\overline{\phi} : L^{\#}/L \times L^{\#}/L \to K/R, \ (l + L, l' + L) \mapsto \phi(l, l') + R.$$

Damit wird $L^\#/L$ zu einem regulären orthogonalen Λ-Torsionsmodul.

Definition 1.3.10 *Sei $\delta : GW(A, \circ) \to GW^t(\Lambda, \circ)$ definiert durch $\delta([V,\phi]) := [(L^\#/L, \overline{\phi})]$, wo L ein ganzes Λ-Gitter in dem regulären orthogonalen A-Modul (V,ϕ) ist.*

Die Unabhängigkeit der Abbildung δ von der Wahl des ganzen Λ-Gitters L zeigt man wie in [Scha, Chapter 5], [Dress, Chapter 4], [Tho].

Lemma 1.3.11 *(vgl. [Scha, Lemma 5.1.3]) Sei (M,ϕ) ein regulärer orthogonaler Λ-Torsionsmodul und $N \leq M$ ein Λ-Teilmodul mit $N \subset N^\perp$. Dann induziert ϕ eine reguläre Λ-kovariante Form ϕ' auf $N^\perp/N$ und $(M,\phi) \perp (N^\perp/N, -\phi')$ ist metabolisch.*

Beweis. Sei $X := \{(x, x+N) \mid x \in N^\perp\} \subset M \oplus N^\perp/N$. Dann ist $X = X^\perp$, denn $X \subset X^\perp$ und für $y \in M, z \in N^\perp$ mit $\phi(x,y) = \phi(x,z)$ für alle $x \in N^\perp$ folgt, daß $y - z \in (N^\perp)^\perp = N$ ist. □

Lemma 1.3.12 *Die Abbildung $\delta : GW(A, \circ) \to GW^t(\Lambda, \circ)$ ist wohldefiniert.*

Beweis. Seien L_1, L_2 maximal ganze Λ-Gitter in dem regulären orthogonalen A-Modul (V,ϕ). Dann definiert ϕ nicht ausgeartete Bilinearformen

$$\overline{\phi}_i : L_i^\#/L_i \times L_i^\#/L_i \to K/R,\ \overline{\phi}_i(a+L_i, b+L_i) := \phi(a,b) + R\ (i = 1,2).$$

Sei $M := L_1 \cap L_2$. Dann ist M ein ganzes Λ-Gitter in V und $M^\# = L_1^\# + L_2^\#$. Weiter sind L_1/M und L_2/M total isotrope Λ-Teilmoduln von $(M^\#/M, \overline{\phi})$ mit $(L_i/M)^\perp = L_i^\#/M$ $(i = 1,2)$. Also gilt nach Lemma 1.3.11 in $GW^t(\Lambda, \circ)$

$$[(L_1^\#/L_1, \overline{\phi}_1)] = [(M^\#/M, \overline{\phi})] = [(L_2^\#/L_2, \overline{\phi}_2)]. \qquad \square$$

Bemerkung 1.3.13 *Teil (ii) und (iii) von Lemma 1.3.6 gelten (mit analogen Beweisen) auch für Λ-Torsionsmoduln.*

Lemma 1.3.14 $\iota(GW(\Lambda, \circ)) = Ker(\delta)$.

Beweis. Trivialerweise ist $\iota(GW(\Lambda, \circ)) \subseteq Ker(\delta)$. Sei umgekehrt (V,ϕ) ein regulärer orthogonaler A-Modul mit $\delta([(V,\phi)]) = 0$. Sei L ein maximal ganzes Λ-Gitter in (V,ϕ). Dann ist $(L^\#/L, \overline{\phi})$ ein anisotroper Λ-Torsionsmodul, der in $GW^t(\Lambda, \circ)$ gleich Null ist. Also ist nach obiger Bemerkung $(L^\#/L, \overline{\phi})$ metabolisch, und damit $L^\# = L$. Also ist $(L, \phi_{|L})$ ein regulärer orthogonaler Λ-Modul und deshalb (V,ϕ) im Bild von ι. □

1.3.3 Eine Anwendung auf rationale quadratische Formen.

In diesem Abschnitt werden die in [Scha, Chapter 5] vorgestellten beschreibenden Invarianten von Isometrieklassen regulärer quadratischer Räume über $\mathbb{Q}$ referiert und mit der Hasse-Invariante in Bezug gebracht.

Sei (V, B) ein regulärer symmetrischer bilinearer Raum über $\mathbb{Q}$ der Dimension $n < \infty$. Ist L ein maximal ganzes Gitter in (V, B), so ist $(L^{\#}/L, \overline{B})$ anisotrop und der Exponent von $L^{\#}/L$ quadratfrei. Die Zerlegung von $L^{\#}/L$ in seine Sylow-Untergruppen liefert, da die verschiedenen Sylow-Untergruppen senkrecht bzgl. $\overline{B}$ aufeinander stehen, einen Isomorphismus $W^t(\mathbb{Z}) \to \oplus_p W(\mathbb{F}_p)$ zwischen der Witt-Gruppe der endlichen abelschen Gruppen $W^t(\mathbb{Z})$ und der direkten Summe über alle Primzahlen p der Witt-Gruppen regulärer bilinearer Räume über $\mathbb{F}_p \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \frac{1}{p}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$.

Man beweist nun den folgenden

Satz 1.3.15 *([Scha, Theorem 5.3.4]) Vermöge des oben beschriebenen Gruppen-Homomorphismus und der Signatur wird*

$$W(\mathbb{Q}) \cong W(\mathbb{R}) \oplus \oplus_p W(\mathbb{F}_p).$$

Die Abbildung $W(\mathbb{Q}) \to W(\mathbb{F}_p)$ werde mit δ_p bezeichnet.

Es gilt für $a \in \mathbb{Q}^*$:

$$\delta_p(\langle a \rangle) = \begin{cases} 0 & \nu_p(a) \text{ gerade} \\ \langle a p^{-\nu_p(a)} \rangle & \nu_p(a) \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Da die Dimension und das durch (V, B) bestimmte Element von $W(\mathbb{Q})$ die Isometrieklasse von (V, B) festlegen, gilt

Folgerung 1.3.16 *([Scha, Corollary 5.3.6]) Zwei reguläre rationale symmetrische bilineare Räume φ, ψ sind genau dann isometrisch, wenn $dim(\varphi) = dim(\psi)$, $sign(\varphi) = sign(\psi)$ und $\delta_p(\varphi) = \delta_p(\psi)$ für alle Primzahlen p.*

Zur Bestimmung der Isometrieklasse eines regulären bilinearen symmetrischen Raums über einem endlichen Körper der Charakteristik $\neq 2$ genügen seine Dimension und seine Determinante. Für ungerades p bezeichne $p^{\epsilon n}$ $(\epsilon = \pm)$ den regulären Raum der Dimension n über $\mathbb{F}_p$ mit Determinante 1 falls $\epsilon = +$ bzw. mit Determinante $\notin (\mathbb{F}_p^*)^2$, falls $\epsilon = -$. Aus obiger Beschreibung von $W(\mathbb{Q})$ erhält man mit diesen Bezeichnungen das folgende Symbol für die Isometrieklasse eines regulären bilinearen symmetrischen Raums $\varphi = (V, B)$ über $\mathbb{Q}$:

$$sym(\varphi) := (dim(V), d(\varphi), sign(\varphi), \delta_{p_1}(\varphi), \ldots, \delta_{p_s}(\varphi)),$$

wo $p_1, \ldots, p_s$ die ungeraden Primzahlen p sind, für die $\delta_p(\varphi) \neq 0$.

Satz 1.3.17 *Die Abbildung δ_p faktorisiert über den natürlichen Homomorphismus $W(\mathbb{Q}) \to W(\mathbb{Q}_p)$:*

$$\delta_p : W(\mathbb{Q}) \to W(\mathbb{Q}_p) \to W(\mathbb{F}_p).$$

Die induzierte Abbildung $W(\mathbb{Q}_p) \to W(\mathbb{F}_p)$ werde wieder mit δ_p bezeichnet.

$\delta_p(\varphi)$ hängt nur von der p-adischen Isometrieklasse von φ ab. Entsprechend kann man aus $d(\varphi)$ und $\delta_p(\varphi)$ die p-adische Hasse-Invariante $s_p(\varphi)$ berechnen.

Lemma 1.3.18 *Sei p eine ungerade Primzahl und $\varphi = (V, q)$ ein regulärer quadratischer Raum über $\mathbb{Q}$ mit $d(\varphi) = up^{n_p}(\mathbb{Q}^*)^2$ mit $u \in \mathbb{Z}$, $ggT(p, u) = 1$ und $\delta_p((V, B_q)) = p^{\epsilon n_p}$. Identifiziert man $Br_2(\mathbb{Q}_p)$ mit ± 1, so ist*

$$s_p(\varphi) = \epsilon(u, p)^{n_p}(-1, p)^{\binom{n_p}{2}}.$$

Beweis. Sei $B := B_q$ die Bilinearform mit $q(x) = B(x, x)$ für alle $x \in V$. Sei L ein $\mathbb{Z}_p$-Gitter in $\mathbb{Q}_p \otimes V$ mit $L^\# / L \cong (\mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p)^{n_p}$. Dann kann man L bis auf Isometrie eindeutig schreiben als $L = L_u \perp L_p$, wo B auf L_u und $\frac{1}{p}B$ auf L_p reguläre Bilinearformen induzieren. Sei $V_u = \mathbb{Q}_p L_u$ und $V_p = \mathbb{Q}_p L_p$. Dann ist $(\mathbb{Q}_p \otimes V, B) = (V_u, B_u) \perp (V_p, pB_p)$ mit $d(B_u)d(B_p) = u$ und die p-adische Hasse-Invariante von φ ist

$$s_p(\varphi) = s(V_u, B_u)s(V_p, pB_p)(d(B_u), d(pB_p)) = (p, p)^{\binom{n_p}{2}}(p, d(B_p))^{n_p+1}(d(B_u), p)^{n_p}$$

$$= (p, p)^{\binom{n_p}{2}}(p, d(B_p))(u, p)^{n_p} = \epsilon(p, p)^{\binom{n_p}{2}}(u, p)^{n_p}. \qquad \square$$

Satz 1.3.19 *Zwei reguläre bilineare symmetrische Räume $\varphi = (V, B)$ und $\psi = (W, B')$ über $\mathbb{Q}$ sind isometrisch, genau dann wenn $sym(\varphi) = sym(\psi)$ gilt.*

Beweis. Da die p-adischen Hasse-Invarianten von φ für die ungeraden Primzahlen p mit $\delta_p(\varphi) = 0$ trivial sind, kann man aus $sym(\varphi)$ die p-adischen Hasse-Invarianten für die ungeraden Primzahlen p ausrechnen. Die reelle Hasse-Invariante erhält man aus der Dimension und der Signatur von φ. Also kann man die 2-adische Hasse-Invariante $\in \{\pm 1\}$ aus der Produktformel $\prod_{p \leq \infty} s_p(\varphi) = 1$ (vgl. [Kit, Theorem 4.1.2]) berechnen. Also ergibt sich die Behauptung aus [Kit, Corollary 4.1.3, Theorem 3.5.2]. $\square$

Kapitel 2

Die orthogonale Frobenius-Reziprozität.

2.1 Die orthogonale Frobenius-Reziprozität.

Sei G eine endliche Gruppe mit Untergruppe $H \leq G$. Sei R ein kommutativer Ring, W ein RH-Modul und V ein RG-Modul. Der induzierte Modul W^G ist definiert als $W \otimes_{RH} RG$.

Ist W frei über R mit Basis $(b_1, \ldots, b_m)$ und $G = \dot{\cup}_{i=1}^{s} Hg_i$, so hat W^G eine R-Basis $(b_1 \otimes g_1, \ldots, b_m \otimes g_1, b_1 \otimes g_2, \ldots, b_m \otimes g_s)$. Die Operation von $g \in G$ berechnet sich aus der Permutation der Rechtsrestklassen $H\backslash G$ und der Operation von H auf W: Ist $g_i g = hg_j$ mit $h \in H$ und ist $w \in W$, so ist $(w \otimes g_i)g = wh \otimes g_j$.

Ist $\varphi : W \to V_{|H}$ ein RH-Homomorphismus, so ist $\varphi^G : W^G \to V$ definiert durch $\varphi^G(\sum_{i=1}^{s} w_i \otimes g_i) = \sum_{i=1}^{s} \varphi(w_i)g_i$ ein RG-Homomorphismus. Da φ ein RH-Homomorphismus ist, hängt φ^G nicht von der Wahl der Rechtsnebenklassenvertreter g_i ab. Die Zuordnung $\varphi \mapsto \varphi^G$ definiert einen R-Isomorphismus $\mathrm{Hom}_{RH}(W, V_{|H}) \to \mathrm{Hom}_{RG}(W^G, V)$. Die inverse Abbildung ist die Einschränkung: $\mathrm{Hom}_{RG}(W^G, V) \to \mathrm{Hom}_{RH}(W, V_{|H}); \varphi \mapsto \varphi_{|W}$ (vgl. [CuR, Section 10]).

Sei nun K ein Körper der Charakteristik 0, W ein KH-Modul und V ein KG-Modul. Ist F_W eine reguläre H-invariante symmetrische Bilinearform auf W, so ist F_W^G definiert durch

$$F_W^G(w \otimes g_i, w' \otimes g_j) := \delta_{ij} F_W(w, w') \ (w, w' \in W, 1 \leq i, j \leq s)$$

eine reguläre G-invariante symmetrische Bilinearform auf W^G.

Jede reguläre symmetrische G-invariante Bilinearform F_V auf dem KG-Modul V induziert einen Isomorphismus $\tilde{F}_V : V \to V^*, v \mapsto F_V(\cdot, v)$. Sei F_V^* die Bilinearform auf V^* für die $\tilde{F}_V$ eine Isometrie ist: Sei $f \in V^*$ und $v_f := \tilde{F}_V^{-1}(f) \in V$. Definiere

$$F_V^*(f, g) := F_V(v_f, v_g) \text{ für alle } f, g \in V^*.$$

Satz 2.1.1 *Sei K ein Körper der Charakteristik 0, W ein KH-Modul mit regulärer H-invarianter symmetrischer Bilinearform F_W, V ein uniformer KG-Modul und F_V ein Erzeuger des K-Vektorraums der G-invarianten symmetrischen Bilinearformen auf V.*

Ist $\varphi : (W, F_W) \to (V, F_V)$ eine KH-Isometrie, dann ist die transponierte Abbildung

$$(\varphi^G)^* : (V^*, \frac{dim(W^G)}{dim(V)} F_V^*) \to ((W^*)^G, (F_W^*)^G)$$

eine KG-Isometrie.

Zum Beweis des Satzes ist es manchmal einfacher, K-Basen von V und W zu wählen und mit Matrizen zu arbeiten. Dann werden die Gram-Matrizen von F_V und F_W wieder mit F_V bzw. F_W bezeichnet, g_k ist die Matrix, die die Operation von g_k bzgl. dieser Basis beschreibt, Rechtsmultiplikation mit der Matrix φ die zugehörige Abbildung φ etc..

Lemma 2.1.2 *Seien (W, F_W) bzw. (V, F_V) reguläre orthogonale KH- bzw. KG-Moduln und $\varphi : (W, F_W) \to (V, F_V)$ eine KH-Isometrie. Die Orthogonalprojektion $P_W \in \mathrm{End}_{KH}(V)$ auf $\varphi(W)$ ist durch Rechtsmultiplikation mit der Matrix*

$$P_W := F_V \varphi^{tr} F_W^{-1} \varphi$$

gegeben. Ist V ein uniformer KG-Modul, so ist

$$Tr_{G/H}(P_W) := \sum_{j=1}^{s} g_j^{-1} P_W g_j = \frac{dim(W^G)}{dim(V)} id_V.$$

Beweis. Das Bild von P_W ist $\varphi(W)$. Außerdem ist die Einschränkung von P_W auf $\varphi(W)$ die Identität, da $\varphi F_V \varphi^{tr} = F_W$ ist. Der Kern von P_W ist genau das orthogonale Komplement von $\varphi(W)$. Also ist P_W die Orthogonalprojektion. Weiter ist $P_W F_V$ die Gram-Matrix einer symmetrischen H-invarianten Bilinearform auf V. Nach Konstruktion ist $Tr_{G/H}(P_W) \in \mathrm{End}_{KG}(V)$ ein KG-Endomorphismus von V. Da $gF_V = F_V(g^{tr})^{-1}$ für alle $g \in G$, ist $Tr_{G/H}(P_W)F_V = \sum_{j=1}^{s} g_j^{-1} P_W F_V (g_j^{-1})^{tr}$ die Gram matrix einer G-invarianten symmetrischen Bilinearform auf V. Da V ein uniformer KG-Modul ist, ist $Tr_{G/H}(P_W)$ eine Skalarmatrix. Die Spur von P_W ist $Spur(P_W) =$

$$Spur(F_V \varphi^{tr} F_W^{-1} \varphi) = Spur(\varphi F_V \varphi^{tr} F_W^{-1}) = Spur(F_W F_W^{-1}) = dim(W).$$

Also ist die Spur von $Tr_{G/H}(P_W) = s \cdot dim(W)$ und $Tr_{G/H}(P_W) = \frac{dim(W^G)}{dim(V)} id_V$. □

Beweis von Satz 2.1.1
Sei $(w_a | 1 \le a \le m)$ eine K-Basis von W und $v_a := \varphi(w_a)$ $(1 \le a \le m)$. Da V

ein irreduzibler G-Modul ist, bildet die Menge $\{v_a g_i \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq a \leq m\}$ ein K-Erzeugendensystem von V. Also erzeugen die Funktionen $f_{a,i} = \tilde{F}_V(v_a g_i)$ $(1 \leq a \leq m, 1 \leq i \leq s)$ den K-Vektorraum V^*.

Da F_W^G regulär ist, gibt es eindeutige $w_j^{(a,i)} \in W$ mit $(\varphi^G)^*(f_{a,i}) = \tilde{F}_W^G(\sum_{j=1}^s w_j^{(a,i)} \otimes g_j)$. Für $1 \leq a, b \leq m$ und $1 \leq i, k \leq s$ gilt

$$(\varphi^G)^*(f_{a,i})(w_b \otimes g_k) = f_{a,i}(\varphi^G(w_b \otimes g_k)) = f_{a,i}(vbgk) = F_V(v_b g_k, v_a g_i).$$

Auf der anderen Seite ist

$$(\varphi^G)^*(f_{a,i})(w_b \otimes g_k) = F_W^G(w_b \otimes g_k, \sum_{j=1}^s w_j^{(a,i)} \otimes g_j) = F_W(w_b, w_k^{(a,i)}).$$

Also gilt in Matrizen

$$(1) \quad F_W(w_k^{(a,i)})^{tr} = \varphi g_k F_V g_i^{tr} v_a^{tr} \text{ für alle } 1 \leq a \leq m, 1 \leq i, k \leq s.$$

Das Skalarprodukt zwischen $(\varphi^G)^*(f_{b,k})$ und $(\varphi^G)^*(f_{a,i})$ bzgl. $(F_W^*)^G$ berechnet sich als

$$(2) \quad \sum_{j=1}^s w_j^{(b,k)}(F_W(w_j^{(a,i)})^{tr}) = \sum_{j=1}^s v_b g_k (F_V g_j^{tr} \varphi^{tr} F_W^{-1} \varphi g_j F_V) g_i^{tr} v_a^{tr}.$$

Die rechte Seite von (2) ergibt sich mit Lemma 2.1.2 als $\frac{dim(W^G)}{dim(V)} v_b g_k F_V g_i^{tr} v_a^{tr}$ das Skalarprodukt der Urbilder $f_{b,j}$ und $f_{a,i}$ bzgl. $\frac{dim(W^G)}{dim(V)} F_V^*$. □

Beispiel. Die Konstante aus Satz 2.1.1 läßt sich leicht merken, wenn man den Fall $W = 1_H, V = 1_G$ betrachtet. Dann ist W^G ein transitiver Permutationsmodul mit Orthonormalbasis $\{e_1, \ldots, e_s\} \longrightarrow \{Hg_1, \ldots, Hg_s\}$. Der triviale G-Modul kommt in W^G als $\langle v := e_1 + \ldots + e_s \rangle$ vor. Die Quadratlänge von v ist $s = dim(W^G)$.

Ist $K = \mathbb{Q}$ so sei L das von $e_1, \ldots, e_s$ erzeugte $\mathbb{Z}$-Gitter in W^G. Das Gitter

$$\mathbb{A}_{s-1} := \{l = \sum_{i=1}^s a_i e_i \in L \mid \sum_{i=1}^s a_i = 0\}$$

mit der von der Standardform induzierten Bilinearform ist als orthogonales Komplement von v in L ein G-invariantes Gitter der Determinante s.

Kommen in W^G einfache KG-Moduln mit Vielfachheit größer als 1 vor, so genügt Satz 2.1.1 nicht, um W^G als orthogonalen KG-Modul zu zerlegen.

Satz 2.1.3 *Sei W ein KH-Modul und V ein absolut irreduzibler KG-Modul. Sei $C = C^{tr} \in GL_n(K)$ so, daß $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : (W^n, C \otimes F_W) \to (V, F_V)$ eine KH-Isometrie ist. Dann ist $((\varphi_1^G)^*, \ldots, (\varphi_n^G)^*) : ((V^*)^n, \frac{dim(W^G)}{dim(V)} C \otimes F_V^*) \to ((W^*)^G, (F_W^*)^G)$ eine KG-Isometrie.*

Beweis. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 2.1.1 seien $v_a^{(x)} := \varphi_x(w_a)$ und $f_{a,i}^{(x)} = F_V(\cdot, v_a^{(x)} g_i)$ für $1 \leq a \leq m, 1 \leq x \leq n, 1 \leq i \leq s$.

Wie im Beweis oben berechnet sich das Skalarprodukt zwischen $(\varphi_y^G)^*(f_{b,k}^{(y)})$ und $(\varphi_x^G)^*(f_{a,i}^{(x)})$ bzgl. $(F_W^*)^G$ als

$$(3) \quad \sum_{j=1}^{s} (v_b^{(y)} g_k F_V g_j^{tr} \varphi_y^{tr} F_W^{-1})(\varphi_x g_j F_V g_i^{tr} (v_a^{(x)})^{tr}).$$

Nun hat der Endomorphismus $F_V \varphi_y^{tr} F_W^{-1} \varphi_x \in \mathrm{End}_{KH}(V)$ die Spur $c_{x,y} dim(W)$, wo $c_{x,y}$ der Eintrag an Position x, y von C ist, da $\varphi_x F_V \varphi_y^{tr} = c_{x,y} F_W$.

Also ist

$$\sum_{j=1}^{s} F_V g_j^{tr} \varphi_y^{tr} F_W^{-1} \varphi_x g_j \in \mathrm{End}_{KG}(V)$$

ein Endomorphismus mit Spur $c_{x,y} dim(W^G)$. Da V ein absolut irreduzibler KG-Modul ist, ist dieser Endomorphismus skalar, also ist (3) gleich

$$c_{x,y} \frac{dim(W^G)}{dim(V)} v_b^{(y)} g_k F_V g_i^{tr} (v_a^{(x)})^{tr} = c_{x,y} \frac{dim(W^G)}{dim(V)} F_V^*(f_{b,j}^{(y)}, f_{a,i}^{(x)}).$$

□

Bisher war immer vorausgesetzt, daß V ein uniformer KG-Modul ist. Dies kann man erreichen, indem man zu einem genügend großen Erweiterungskörper von K übergeht. Will man dies nicht, so kann man folgendes Lemma anwenden:

Lemma 2.1.4 *Sei K ein Körper der Charakteristik 0, W ein irreduzibler KH-Modul und V ein irreduzibler KG-Modul. Sei $\mathcal{F}_G(V) = C^+ F_V$ und $\mathcal{F}_H(W) = D^+ F_W$. Sei $\varphi : (W, F_W) \to (V, F_V)$ eine KH-Isometrie, und $\alpha : C^+ \to D^+$ eine K-lineare Abbildung so daß für alle $c \in C^+$ gilt, daß $Spur(c)/dim_K(V) = Spur(\alpha(c))/dim_K(W)$, wo die Spuren auf $C^+ \subseteq \mathrm{End}_K(V)$ bzw. $D^+ \subseteq \mathrm{End}_K(W)$ zu nehmen sind. Ist nun $\varphi : (W, \alpha(c) F_W) \to (V, c F_V)$ eine Isometrie für alle $c \in C^+$, dann ist*

$$(\varphi^G)^* : (V^*, \frac{dim(W^G)}{dim(V)} F_V^*) \to ((W^*)^G, (F_W^*)^G)$$

eine KG-Isometrie.

Beweis. Der Beweis des Lemmas verläuft wie der von Satz 2.1.1. Es genügt dabei zu zeigen, daß die Aussage von Lemma 2.1.2 unter den gemachten Voraussetzungen gilt. Aber die Bedingungen an φ stellen sicher, daß für alle $c \in C^+$ gilt

$$Spur(c F_V g_j^{tr} \varphi^{tr} F_W^{-1} \varphi g_j) = Spur(\varphi c F_V \varphi^{tr} F_W^{-1}) = Spur(\alpha(c)) = Spur(c) \frac{dim(W)}{dim(V)}.$$

Nun ist C^+ der Eigenraum $C^+ = \{x \in \mathrm{End}_{KG}(V) \mid x = F_V x^{tr} F_V^{-1}\}$ zum Eigenwert 1 einer bezüglich der Spurform orthogonalen Abbildung. Also ist die Einschränkung der Spurbilinearform von $\mathrm{End}_{KG}(V)$ auf C^+ regulär und

$$\sum_{j=1}^{s} F_V g_j^{tr} \varphi^{tr} F_W^{-1} \varphi g_j = \frac{dim(W^G)}{dim(V)} id_V. \qquad \square$$

2.2 Die Spechtmoduln $S^{(n-k,k)}$.

In diesem Abschnitt wird für die symmetrische Gruppe S_n eine Rekursionsformel für die rationale Klasse der Spechtmoduln $S^{(n-k,k)}$ aufgestellt (siehe Folgerung 2.2.4). Dazu werden zunächst die relevanten Bezeichnungen eingeführt.

Sei $1 \leq k \leq l \leq \frac{n}{2}$. Sei $S_l \times S_{n-l}$ die Younguntergruppe der S_n, die der Mengenstabilisator der Teilmenge $\{1, \ldots, l\}$ von $\{1, \ldots, n\}$ ist.

Sei $M^{(n-k,k)}$ (bez. $M_{\mathbb{Z}}^{(n-k,k)}$) der S_n-Permutationsmodul mit den k-elementigen Teilmengen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ als orthonormale $\mathbb{Q}$-Basis (bzw. $\mathbb{Z}$-Basis). Dann ist

$$dim_{\mathbb{Q}}(M^{(n-k,k)}) = \binom{n}{k}.$$

Da $S_k \times S_{n-k}$ der Stabilisator einer k-elementigen Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ ist, ist $M^{(n-k,k)} = 1_{S_k \times S_{n-k}}^{S_n}$.

Ist T eine feste Teilmenge von $\{1, \ldots, n\}$ so sei $\sigma_T : M^{(n-k,k)} \to \mathbb{Q}$ die $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung definiert durch $\sigma_T(S) := \begin{cases} 0 & T \not\subseteq S \\ 1 & T \subseteq S \end{cases}$ für alle k-elementigen Teilmengen S von $\{1, \ldots, n\}$.

Der Spechtmodul $S^{(n-k,k)} \subseteq M^{(n-k,k)}$ ist definiert als

$$S^{(n-k,k)} = \bigcap_{T \subseteq \{1,\ldots,n\}, |T|<k} Ker(\sigma_T).$$

(vgl. [Jam, Corollary (17.18)]). Als Teilmodul von $M^{(n-k,k)}$ trägt $S^{(n-k,k)}$ eine natürliche reguläre S_n-invariante quadratische Form. Im folgenden wird $S^{(n-k,k)}$ als orthogonalen S_n-Modul bezüglich dieser quadratischen Form betrachtet. Da die Spechtmoduln absolut irreduzible $\mathbb{Q}S_n$ Moduln sind, sind die anderen S_n-invarianten quadratischen Formen rationale Vielfache von dieser.

Das Spechtgitter $S_{\mathbb{Z}}^{(n-k,k)}$ ist $M_{\mathbb{Z}}^{(n-k,k)} \cap S^{(n-k,k)}$. Dann ist $S_{\mathbb{Z}}^{(n-1,1)}$ isometrisch zu dem Gitter $\mathbb{A}_{n-1}$.

Nach der Regel von Young ist der $\mathbb{Q}S_n$-Modul $M^{(n-l,l)}$ die direkte Summe der Spechtmoduln $S^{(n-k,k)}$ mit $k \leq l$ (vgl. [Jam, (14.4)]). Also sind für $1 \leq k \leq l \leq \frac{n}{2}$ nach der klassischen Frobenius-Reziprozität die Fixräume der Younguntergruppen $S_l \times S_{n-l}$ in $S^{(n-k,k)}$ alle eindimensional. Zum Anwenden von Satz 2.1.1 benötigt man die Quadratlänge eines Erzeugers für diesen Fixraum.

Satz 2.2.1 *Sei* $1 \leq k \leq l \leq \frac{n}{2}$. *Dann gibt es einen Vektor* $v \in S^{(n-k,k)}$ *mit* $vg = v$ *für alle* $g \in S_l \times S_{n-l}$ *der Quadratlänge*

$$a(l,k) := \binom{n+1-k}{k}\binom{n-l}{k}\binom{l}{k}^{-1}$$

Zum Beweis benötigt man die folgenden 2 Lemmata über Rechenregeln für Binomialkoeffizienten:

Lemma 2.2.2

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{l-k+j}{j}\binom{n-l-j}{k-j} = \binom{n+1-k}{k}.$$

Beweis. Die Behauptung wird zunächst in dem Spezialfall $l = k$ gezeigt. Ist $l = k$ so ergibt sich die linke Seite als

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n-k-j}{k-j} = \sum_{j=0}^{k}\binom{n-2k+j}{j} = \binom{n-2k+k+1}{k}.$$

Die Differenz $d(l, l+1)$ der linken Seiten für l und $l+1$ ergibt sich als

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{l-k+j}{j}\binom{n-l-j}{k-j} - \binom{l-k+j+1}{j}\binom{n-l-j-1}{k-j} =$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{n-l-j}{k-j}\left(\binom{l-k+j}{j} - \binom{l-k+j+1}{j}\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{k}\binom{l-k+j+1}{j}\binom{n-l-j-1}{k-j-1}$$

da

$$\binom{n-l-j-1}{k-j} = \binom{n-l-j}{k-j} - \binom{n-l-j-1}{k-j-1}.$$

Die Differenz in der Klammer ist

$$\binom{l-k+j}{j} - \binom{l-k+j+1}{j} = -\binom{l-k+j}{j-1}.$$

Geht man bei der 2.Summe noch zum Summationsindex $i = j+1$ über, so ergibt sich

$$d(l,l+1) = -\sum_{j=0}^{k}\binom{n-l-j}{k-j}\binom{l-k+j}{j-1} + \sum_{i=1}^{k+1}\binom{l-k+i}{i-1}\binom{n-l-i}{k-i} = 0.$$

Also stimmt die Gleichung im Lemma für alle $k \leq l \leq \frac{n}{2}$. □

Lemma 2.2.3 *Sei $k \leq l \leq \frac{n}{2}$ und für $0 \leq i \leq k$ sei*

$$a_i := (-1)^i \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n-l-k+j+1}{l-j}$$

($a_0 = 1$). Dann ist für alle $0 \leq x \leq x+b \leq k$

$$\sum_{i=x}^{x+b} a_i \binom{n-l-k+x+b}{x+b-i} \binom{l-x}{i-x} = 0.$$

Beweis. Sei $A := \prod_{j=1}^{x+b}(n-l-k+j)$ das Produkt des Zählers des 1. Binomialkoeffizienten mit dem Zähler von a_i und $B := \prod_{j=0}^{x-1}(l-j)^{-1}$ der Quotient aus dem Zähler des 2. Binomialkoeffizienten und dem Nenner von a_i. Dann ergibt sich die Summe als

$$BA \sum_{i=x}^{x+b} (-1)^i \frac{1}{(i-x)!(b+x-i)!} = \frac{BA}{b!}(-1)^x \sum_{j=0}^{b} (-1)^j \frac{b!}{j!(b-j)!} = 0.$$

□

Zum Beweis von Satz 2.2.1:
Die Bahnen von $S_l \times S_{n-l} = Stab_{S_n}(\{1,\ldots,l\})$ auf den k-elementigen Teilmengen T von $\{1,\ldots,n\}$ sind parametrisiert durch $|T \cap \{1,\ldots,l\}|$. Für $0 \leq j \leq k$ sei $v_j \in M^{(n-k,k)}$ die Summe aller k-elementigen Teilmengen von $\{1,\ldots,n\}$ die mit $\{1,\ldots,l\}$ einen j-elementigen Durchschnitt haben. Dann ist $(v_0,\ldots,v_k)$ eine Basis des Fixraumes von $S_l \times S_{n-l}$ auf $M^{(n-k,k)}$. Für das Standardskalarprodukt gilt:

$$v_i v_j = \delta_{ij} \binom{n-l}{k-j} \binom{l}{j}.$$

Seien a_i wie im Lemma 2.2.3 definiert. Dann liegt $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ im Spechtmodul $S^{(n-k,k)}$. Denn sei T eine $(k-b)$-elementige Teilmenge von $\{1,\ldots,n\}$ und sei $x := |T \cap \{1,\ldots,l\}|$. Dann gilt nach Lemma 2.2.3

$$\sigma_T(\sum_{i=0}^{k} a_i v_i) = \sum_{i=x}^{x+b} a_i \binom{n-l-k+x+b}{x+b-i} \binom{l-x}{i-x} = 0.$$

Nun ist

$$a_i = (-1)^i \prod_{j=0}^{i-1} \frac{n-l-k+j+1}{l-j} = (-1)^i (n-l-(k-i))!/(n-l-k)! \cdot (l-i)!/l!.$$

Substituiert man $j = k-i$ so berechnet sich die Länge von $\sum_{i=0}^{k} a_i v_i$ als

$$\sum_{j=0}^{k} a_{k-j}^2 \binom{n-l}{j} \binom{l}{k-j} =$$

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{(n-l)!l!((l-k+j)!)^2((n-l-j)!)^2}{j!(n-l-j)!(k-j)!(l-k+j)!(l!)^2((n-l-k)!)^2}$$

$$= \frac{(n-l)!}{l!(n-l-k)!} \sum_{j=0}^{k} \frac{(l-k+j)!(n-l-j)!}{j!(k-j)!(n-l-k)!} =$$

$$\frac{(n-l)!(l-k)!}{l!(n-l-k)!} \sum_{j=0}^{k} \binom{n-l-j}{k-j} \binom{l-k+j}{j}.$$

Mit Lemma 2.2.2 ergibt sich dies als $a(l,k)$. □

Aus Satz 2.2.1 ergibt sich mit der orthogonalen Frobenius-Reziprozität 2.1.1 die folgende Rekursionsformel zur Berechnung der rationalen Klasse von $S^{(n-k,k)} \in W(\mathbb{Q})$.

Folgerung 2.2.4 *In $W(\mathbb{Q})$ gilt für alle $0 \leq l \leq \frac{n}{2}$*

$$\langle 1 \rangle^{\binom{n}{l}} = \sum_{k=0}^{l} [\frac{\binom{n}{l}}{\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}} a(l,k) S^{(n-k,k)}] = \sum_{k=0}^{l} [\binom{n-2k}{l-k} S^{(n-k,k)}]$$

wobei die $a(l,k)$ wie in Satz 2.2.1 definiert sind.

Beispiel. In $W(\mathbb{Q})$ gilt:
$[S^{(n,0)}] = 1$, $[S^{(n-1,1)}] = \langle 1 \rangle^n - \langle n \rangle$
$[S^{(n-2,2)}] = \langle 1 \rangle^{\binom{n}{2}} - \langle \binom{n}{2} \rangle + \langle n(n-2) \rangle - \langle (n-2) \rangle^n$
$[S^{(n-3,3)}] = \langle 1 \rangle^{\binom{n}{3}} - \langle \binom{n}{3} \rangle + \langle \binom{n}{2}(n-4) \rangle - \langle (n-4) \rangle^{\binom{n}{2}} + \langle (n-2)(n-4) \rangle^n - \langle n(n-2)(n-4) \rangle - \langle \binom{n-2}{2} \rangle^n + \langle n \binom{n-2}{2} \rangle$

2.3 Weitere Spechtmoduln.

Nun wird an einem Beispiel demonstriert, daß die im letzten Abschnitt vorgestellte Methode prinzipiell auch auf die anderen Spechtmoduln anwendbar ist. Jedoch wird die notwendige Kombinatorik sehr kompliziert, so daß man keine allgemeine Rekursionsformel herleiten kann. Eine wesentliche Änderung ist, daß i.a. die Fixräume der Younguntergruppen nicht mehr eindimensional sind.

Zunächst werden die relevanten Begriffe in der Darstellungstheorie der symmetrischen Gruppen wiederholt. Der Leser findet ausführlichere Definitionen in [Jam].

Sei $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$ eine Partition von n, d.h. $\mu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ mit $\mu_1 + \ldots + \mu_s = n$ und $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_s \geq 1$. Das Diagramm $[\mu]$ vom Typ μ ist die n-elementige Teilmenge von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch $[\mu] := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq \mu_i\}$.

Sei $\lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ eine weitere Partition von n. Ein μ-Tableau vom Typ λ ist eine surjektive Abbildung $T_{\mu,\lambda} : [\mu] \to \{1, \ldots, t\}$ mit $|T_{\mu,\lambda}^{-1}(i)| = \lambda_i$ für alle $1 \leq i \leq t$. Ist $\lambda = (1, \ldots, 1)$, so heißt $T_{\mu,\lambda}$ auch einfach μ-Tableau. Ein μ-Tableau T heißt Standard-μ-Tableau, falls für alle $(i+1, j) \in [\mu], (l, k+1) \in [\mu]$ gilt $T(i,j) \leq T(i+1,j)$ und $T(l,k) \leq T(l,k+1)$. Zwei μ-Tableaux $T_{\mu,\lambda}$ und $T'_{\mu,\lambda}$ vom Typ λ heißen äquivalent, falls es Zeilenpermutationen $\pi_i \in S_{\mu_i}$ $1 \leq i \leq s$ gibt mit $T_{\mu,\lambda}((i, \pi_i(j)) = T'_{\mu,\lambda}((i,j))$ für alle $(i,j) \in [\mu]$. Die Äquivalenzklassen heißen μ-Tabloide vom Typ λ. Ein Standard-μ-Tabloid T ist ein μ-Tabloid welches ein Standard-μ-Tableau enthält.

Visualisiert werden die μ-Tableaux, indem man die Bilder von (i,j) an die Position (i,j) einer Matrix schreibt. Tabloide werden durch einen ihrer Vertreter dargestellt.

Die symmetrische Gruppe S_n operiert regulär durch Permutation der Bilder auf der Menge der μ-Tableaux. Die Operation ist verträglich mit der Äquivalenzrelation. Also erhält man eine Operation von S_n auf der Menge der μ-Tabloide (vom Typ $(1, \ldots, 1)$).

Der zugehörige Permutationsmodul wird mit M^μ bezeichnet. Der Stabilisator eines μ-Tabloids ist isomorph zu der Younguntergruppe $S_\mu := S_{\mu_1} \times \ldots \times S_{\mu_s}$. Also ist

$$M^\mu \cong 1_{S_\mu}^{S_n}.$$

Sei $1 \leq i \leq s$, $\mu_{i+1} \geq v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und

$$\lambda := (\mu_1, \ldots, \mu_i + \mu_{i+1} - v, v, \mu_{i+2}, \ldots, \mu_s).$$

Die lineare Abbildung $\psi_{i,v} \in \mathrm{Hom}(M^\mu, M^\lambda)$ ist definiert durch
$t\psi_{i,v} := \sum\{t' \ \lambda\text{-Tableau} \mid t'((j,k)) = t((j,k))$ für alle $j \neq i, i+1$ und
$\{t'((i+1,k)) \mid 1 \leq k \leq v\} \subseteq \{t((i+1,k)) \mid 1 \leq k \leq \mu_{i+1}\}\}$
für alle μ-Tableaux t.

Ist μ eine Partition von n, so ist nach [Jam, Corollary 17.18] der Spechtmodul $S^\mu \leq M^\mu$ definiert als

$$(1) \quad S^\mu := \cap_{i=2}^{s} \cap_{v=0}^{\mu_i - 1} ker(\psi_{i-1,v}).$$

Die obigen Definitionen machen Sinn für jeden beliebigen Körper. Zum Anwenden der orthogonalen Frobenius-Reziprozität, muß man jedoch durch die Dimension der jeweiligen Moduln teilen. Deshalb seien im folgenden die Moduln M^μ und S^μ über $\mathbb{Q}$ betrachtet, als $\mathbb{Q}S_n$-Moduln. Dann sind die Moduln S^μ, wobei μ die Partitionen von n durchläuft, ein Vertretersystem der irreduziblen $\mathbb{Q}S_n$ Moduln. S^μ wird durch die Einschränkung des natürlichen S_n-invarianten Skalarprodukts $\langle 1 \rangle^{S_n}$ ein orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Modul.

Es gibt eine partielle Ordnung auf der Menge der Partitionen von n. Die Kompositionsfaktoren von M^μ sind S^μ (mit Vielfachheit 1) und Spechtmoduln S^λ wobei λ in der partiellen Ordnung echt kleiner ist als μ.

Zur Bestimmung der rationalen Klasse von S^μ, kann man also wie im vorhergegangenen Kapitel rekursiv vorgehen und annehmen, daß die Klassen von S^λ für $\lambda < \mu$ schon bekannt sind. Dann erhält man mit Hilfe der Frobenius-Reziprozität eine Formel für die rationale Klasse von S^μ aus den Fixräumen der Younguntergruppe S_μ auf den Moduln S^λ ($\lambda < \mu$ oder $\lambda = \mu$).

Es gilt also, die Fixpunkte der Younguntergruppe S_μ auf den Spechtmoduln S^λ zu bestimmen.

Lemma 2.3.1 *Seien μ und λ Partitionen von n. Die Bahnen von S_μ auf M^λ stehen in Bijektion zu den λ-Tabloiden vom Typ μ.*

Ist t ein λ-Tabloid vom Typ μ so sei

$$v_t := \sum \{z \ \lambda\text{-Tabloid} \mid z(t^{-1}(i)) = \{\mu_{i-1}+1, \ldots, \mu_i\}\} \in M^\lambda$$

wo $\mu_0 := 0$ gesetzt ist, die Summe über alle λ-Tabloide, die man erhält, indem man die Bilder i durch die Elemente der i-ten Zeile des Standard-μ-Tabloids ersetzt.

Die Vektoren v_t bilden eine $\mathbb{Q}$-Basis von $Fix_{S_\mu}(M^\lambda)$.

Eine Basis von $Fix_{S_\mu}(S^\lambda)$ erhält man als $\sum a_t^{(i)} v_t$, wo die $a^{(i)}$ eine Basis des Lösungsraums des Gleichungssystems aus (1) bilden.

Beispiel Die Zerlegung von $M^{(3,2,2)}$ in irreduzible $\mathbb{Q}S_7$-Moduln ist in [Jam, Example 14.2] gegeben:

$$M^{(3,2,2)} = (7) + 2(6,1) + 3(5,2) + 2(4,3) + (5,1,1) + 2(4,2,1) + (3,3,1) + (3,2,2)$$

wobei S^μ kurz durch die Partition μ bezeichnet wird.

Wir wollen diese zu einer Zerlegung für orthogonale S_7-Moduln präzisieren. Dazu sei $H := S_{\{1,2,3\}} \times S_{\{4,5\}} \times S_{\{6,7\}}$ die Younguntergruppe die als Stabilisator des Standard-$(3,2,2)$-Tabloids auftritt. Die Dimension von $M^{(3,2,2)}$ ist 210.

Die Bahnen von H auf $M^{(5,2)}$ sind parametrisiert durch die $(5,2)$-Tabloide vom Typ $(3,2,2)$:

$\begin{matrix}1&1&1&2&2\\3&3\end{matrix}$ (Bahnlänge 1), $\begin{matrix}1&1&1&2&3\\2&3\end{matrix}$ (Bahnlänge 4),

$\begin{matrix}1&1&1&3&3\\2&2\end{matrix}$ (Bahnlänge 1), $\begin{matrix}1&1&2&2&3\\1&3\end{matrix}$ (Bahnlänge 6),

$\begin{matrix}1&1&2&3&3\\1&2\end{matrix}$ (Bahnlänge 6), $\begin{matrix}1&2&2&3&3\\1&1\end{matrix}$ (Bahnlänge 3).

Bezeichnet man Summe der jeweiligen Bahn mit v_{ij}, wo $\{ij\}$ die 2. Zeile des parametrisierenden Tabloids ist, so ergibt sich aus (1) das folgende Gleichungssystem an die Koeffizienten a_{ij} von v_{ij}:

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & & a_{13}+ & a_{12}+ & a_{11} = & 0 \\ & 2a_{23}+ & a_{22}+ & & 3a_{12} & = & 0 \\ a_{33}+ & 2a_{23}+ & & 3a_{13} & & = & 0 \\ a_{33}+ & 4a_{23}+ & a_{22}+ & 6a_{13}+ & 6a_{12}+ & 3a_{11} = & 0 \end{array}$$

Dieses hat einen 3-dimensionalen Lösungsraum. Eine Basis des Fixraumes von H auf $S^{(5,2)}$ ist also $-2v_{33}+v_{23}-2v_{22}$, $-3v_{33}+3v_{22}+v_{13}-v_{12}$, $v_{33}+v_{23}+v_{22}-v_{13}-v_{12}+2v_{11}$ mit Gram-Matrix $\phi\langle 12, 30, 30\rangle$.

Analog erhält man Gram-Matrizen $\phi\langle 1\rangle$, $\phi\langle 1, 21\rangle$, $\phi\langle 3, 30, 30\rangle$, $\phi\langle 2, 10\rangle$, $\phi\langle 42\rangle$, $\phi\langle 1, 8\rangle$, $\phi\langle 5\rangle$, für geeignete Basen von $Fix_H(\mathbb{Q}S^\lambda)$, $\lambda = (7)$, $(6,1)$, $(5,2)$, $(4,3)$, $(5,1,1)$, $(4,2,1)$, bzw. $(3,3,1)$.

Die Dimensionen der entsprechenden Spechtmoduln sind 1, 6, 14, 14, 15, 35 bzw. 21.

Also ergibt sich mit Satz 2.1.3

$$M^{(3,2,2)} \cong \phi\langle 210\rangle \otimes S^{(7)} + \phi\langle 35, 15\rangle \otimes S^{(6,1)} + \phi\langle 5, 2, 2\rangle \otimes S^{(5,2)} + \phi\langle 30, 6\rangle \otimes S^{(4,3)} +$$

$$\phi\langle 3\rangle \otimes S^{(5,1,1)} + \phi\langle 6, 18\rangle \otimes S^{(4,2,1)} + \phi\langle 2\rangle \otimes S^{(3,3,1)} + S^{(3,2,2)}$$

Kapitel 3

Bestimmung rationaler Invarianten.

In diesem Kapitel werden Methoden entwickelt, um für endliche Gruppen G die Isometrieklassen der G-invarianten Formen auf den irreduziblen $\mathbb{Q}G$-Moduln V zu bestimmen.

In Abschnitt 3.1.1 wird dazu ein charaktertheoretischer Ansatz vorgestellt, der es manchmal erlaubt, die Determinante oder die Clifford-Invariante der G-invarianten Formen auf V direkt aus der Charaktertafel einer Überlagerungsgruppe von G abzulesen. Zur systematischen Bestimmung aller irreduziblen orthogonalen $\mathbb{Q}G$-Moduln werden diese als Summanden reduzibler $\mathbb{Q}G$-Moduln geschrieben, die man durch eine einfache Konstruktion (z.B. als Tensorprodukt) aus bekannten orthogonalen $\mathbb{Q}G$-Moduln erhält. Deshalb werden in Abschnitt 3.1.3 und Abschnitt 3.4 Formeln für die Invarianten so konstruierter quadratischer Räume hergeleitet. Als Beispiel werden im letzten Abschnitt die orthogonalen Darstellungen von drei perfekten Gruppen klassifiziert. Zur Überprüfung der Rechnungen kann man die in Abschnitt 3.2.2 entwickelten Produktformeln benutzen.

Mit anderen Methoden, die mehr zahlentheoretischer Natur sind, werden in Abschnitt 3.3 die orthogonalen Darstellungen zyklischer Gruppen klassifiziert.

3.1 Clifford-Algebren.

Wie bereits in Abschnitt 1.2.1 ausgeführt, liefert die Clifford-Algebra eines quadratischen Raums wichtige Invarianten. Theoretische Konzepte für Clifford-Algebren als Moduln einer Untergruppe G der orthogonalen Gruppe sind in [Frö] entwickelt. Hier soll die Operation von G auf der Clifford-Algebra algorithmisch zur Bestimmung der Isometrieklasse des quadratischen Raums ausgenutzt werden. Dies wird insbesondere durch die Beispiele am Ende von Abschnitt 3.1.1 illustriert.

3.1.1 Clifford-Algebren als G-Algebren.

Sei K ein Körper und $\varphi := (V, q)$ ein regulärer quadratischer Raum über K mit zugehöriger Bilinearform $b := b_q : V \times V \to K$, $b(v, w) := q(v + w) - q(v) - q(w)$ für alle $v, w \in V$.

Ist G eine Gruppe, so ist eine KG-Algebra eine K-Algebra auf der G durch K-Algebrenautomorphismen operiert. Ist $G \leq O(\varphi)$ so wird die Clifford-Algebra zu einer KG-Algebra. Dies kann man ausnutzen, um mit Hilfe der Charaktertafel einer Überlagerungsgruppe von G etwas über φ auszusagen.

Satz 3.1.1 *(vgl. [Frö, Theorem 5.5(i)]) Sei $a \in K^*$. Dann ist $O(\varphi) = O(a\varphi)$ und die $KO(\varphi)$-Algebren $C_0(\varphi)$ und $C_0(a\varphi)$ sind isomorph.*

Beweis. Sei $L := K[\alpha]$ mit $\alpha := \sqrt{a}$ ein Erweiterungskörper vom Grad ≤ 2 von K. Die Abbildung $f : v \mapsto \alpha v$ ist eine Isometrie von $a\varphi_L := (L \otimes_K V, aq)$ auf $\varphi_L := (K \otimes_K V, q)$, die mit der Operation von $O(\varphi)$ vertauscht. Also induziert f einen $O(\varphi)$-Algebrenisomorphismus $f : C(a\varphi_L) \to C(\varphi_L)$. Die Algebra $C_0(a\varphi)$ ist eine K-Teilalgebra von $C(a\varphi_L)$, die durch f auf $C_0(\varphi)$ abgebildet wird. (Beachte, daß $\alpha v \alpha w = avw$ für $v, w \in V$.) Also ist $f_{|C_0(a\varphi)}$ ein $KO(\varphi)$-Algebrenisomorphismus zwischen $C_0(a\varphi)$ und $C_0(\varphi)$. □

Dieser Satz zeigt, daß i.a. nur $C_0(\varphi)$ (also die Determinante von φ, falls $dim(\varphi)$ gerade ist und die Clifford-Invariante, falls $dim(\varphi)$ ungerade ist) durch $O(\varphi)$ bzw. genügend große Untergruppen von $O(\varphi)$ bestimmt werden.

Sei nun $G \leq O(\varphi)$ eine endliche Untergruppe der orthogonalen Gruppe von φ und χ der Charakter des KG-Moduls V. Sei $n := dim_K(V) = \chi(1)$.

Die folgenden drei Bemerkungen geben die grundlegende Idee zur Bestimmung von Invarianten von φ mit Hilfe der Charaktertafel von G wieder.

Bemerkung 3.1.2 *$C(\varphi)$ und $C_0(\varphi)$ sind KG-Algebren. Sei $\tilde{\chi}$ der Charakter des KG-Moduls $C(\varphi)$. Dann gilt*

$$\tilde{\chi} = \sum_{i=0}^{n} \Lambda^i(\chi),$$

wobei $\Lambda^i(\chi)$ die i-te antisymmetrische Potenz von χ ist.
$C_0(\varphi)$ und $C_1(\varphi)$ sind beides G-Teilmoduln der KG-Algebra $C(\varphi)$ mit zugehörigen Charakteren

$$\tilde{\chi}_0 = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ gerade}}}^{n} \Lambda^i(\chi) \text{ und } \tilde{\chi}_1 = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ ungerade}}}^{n} \Lambda^i(\chi).$$

Man beachte, daß für $g \in \tilde{G}$ der Wert $\tilde{\chi}(g) = (-1)^{dim(\varphi)} p_g(-1)$ ist, wo p_g das charakteristische Polynom der Operation von g auf V ist. Damit läßt sich $\tilde{\chi}$ auch für größere Dimensionen mit GAP ([GAP]) berechnen. Ist $det(G) = \{1\}$ also $G \leq O^+(\varphi)$, K ein total reeller Zahlkörper und $dim(\varphi)$ ungerade, so ist $\tilde{\chi}_0 = \frac{1}{2}\tilde{\chi}$, da $\Lambda^i(V) \cong \Lambda^{n-i}(V) \otimes \Lambda^n(V)$ ist.

Bemerkung 3.1.3 *Sei $c(\varphi)$ wie in Definition 1.2.7.*
(i) Sei W der einfache $c(\varphi)$-Rechtsmodul und $D := \mathrm{End}_{c(\varphi)}(W)$. Dann ist $c(\varphi) \cong W^* \otimes_D W$ als $c(\varphi)$-Bimodul, wo $W^* = \mathrm{Hom}_D(W, D)$ der einfache $c(\varphi)$-Linksmodul ist.
(ii) Wegen der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebra gibt es genau einen Antiautomorphismus $\bar{}$ auf $C(\varphi)$ dessen Einschränkung auf V die Identität ist. $\bar{}$ heißt die kanonische Involution *auf $C(\varphi)$. Es gilt $\overline{v_1 \dots v_s} = v_s \dots v_1$ für alle $v_i \in V$. Also induziert $\bar{}$ eine Involution auf der zentral einfachen K-Algebra $c(\varphi)$ und macht W^* zu einem zu W isomorphen $c(\varphi)$-Rechtsmodul.*
(iii) Die Einheitengruppe $c(\varphi)^*$ operiert auf $c(\varphi)$ durch Konjugation. Dabei gilt

$$c(\varphi) \cong W \otimes_D W$$

als $c(\varphi)^*$-Modul.

Bemerkung 3.1.4 *$c(\varphi)$ ist eine zentral einfache KG-Algebra. Also gibt es nach dem Satz von Skolem und Noether für jedes Element $g \in G$ ein bis auf Elemente von $K^* = Z(c(\varphi))^*$ eindeutig bestimmtes $P_1(g) \in c(\varphi)$ mit $x \cdot g = P_1(g)^{-1} x P_1(g)$ für alle $x \in c(\varphi)$. Die Abbildung*

$$P_1 : G \to c(\varphi)^* : \ g \mapsto P_1(g)$$

ist eine projektive Darstellung P_1 von G, die den einfachen $c(\varphi)$-Modul W zu einem projektiven G-Modul macht.

Sei G endlich und $\tilde{G}$ eine Überlagerungsgruppe von G. Sei χ_W der Charakter von $\tilde{G}$ eines über dem algebraischen Abschluß von K zu W äquivalenten $\tilde{G}$-Moduls und χ als Charakter von $\tilde{G}$ aufgefaßt. Dann gilt

$$\chi_W \otimes \chi_W = \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} \Lambda^i(\chi) & dim(V) \text{ gerade} \\ \sum_{i=0, i \text{ gerade}}^{n} \Lambda^i(\chi) & dim(V) \text{ ungerade} . \end{cases}$$

Eine zweite Möglichkeit, eine projektive Darstellung $P : O(\varphi) \to C(\varphi)^*$ zu erhalten, liefert das folgende Konzept.

Definition 3.1.5 *Die* Clifford-Gruppe *ist*

$$\Gamma(\varphi) := \{s \in C_0(\varphi)^* \cup C_1(\varphi)^* \mid sVs^{-1} = V\},$$

wo $C_1(\varphi)^* := C(\varphi)^* \cap C_1(\varphi)$. Für $s \in \Gamma(\varphi)$ sei

$$\delta(s) := \begin{cases} 0 & s \in C_0(\varphi) \\ 1 & s \in C_1(\varphi). \end{cases}$$

Man erhält eine Abbildung

$$\alpha : \Gamma(\varphi) \to O(\varphi) : \quad s \mapsto \alpha(s) : (V \to V : v \mapsto (-1)^{\delta(s)} svs^{-1}),$$

die Vektordarstellung *von $\Gamma(\varphi)$.*

Ist $s \in V$ mit $q(s) \neq 0$, so ist $s \in \Gamma$ und $\alpha(s)$ ist genau die Spiegelung entlang s. Da die Spiegelungen entlang anisotroper Vektoren im Fall $char(K) \neq 2$ die orthogonale Gruppe erzeugen, ist $\alpha(\Gamma(\varphi)) = O(\varphi)$. Diese Surjektivität erhält man auch im Fall $char(K) = 2$ ([Knu, S. 228]). Der Kern von α ist gerade K^*. Also ist die folgende Sequenz exakt:

$$1 \to K^* \to \Gamma(\varphi) \to O(\varphi) \to 1$$

Wir erhalten so eine projektive Darstellung $P : O(\varphi) \to \Gamma(\varphi)$, die die Spiegelung entlang des anisotropen Vektors $s \in V$ auf $s \in \Gamma(\varphi)$ abbildet.

Bemerkung 3.1.6 *Sei $char(K) \neq 2$. Ist $g \in O^+(\varphi)$ so gibt es $s \in C_0(\varphi)^*$ so daß die Einschränkung der Konjugation mit s auf $V \leq C(\varphi)$ die lineare Abbildung g induziert. Also gilt $P_{|O^+(\varphi)} = (P_1)_{|O^+(\varphi)}$.*

Beweis. Da $g \in O^+(\varphi)$ ein Element der Determinante 1 ist, ist g also ein Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen. Also existiert $s \in C_0(\varphi) \cap \Gamma(\varphi)$ (nämlich das zugehörige Produkt der Spiegelungsvektoren) mit $\alpha(s) = g$. Da $s \in C_0(\varphi)$ ist der Grad $\delta(s) = 0$. Also ist $\alpha(s)(x) = sxs^{-1}$ für alle $x \in V$. □

Bemerkung 3.1.7 *Sei $char(K) \neq 2$ und $x \in O(\varphi)$. Es gelten $P(x) \in C_0(\varphi) \Leftrightarrow det(x) = 1$ und $P(x) \in C_1(\varphi) \Leftrightarrow det(x) = -1$.*
Mit den Bezeichnungen aus Bemerkung 3.1.2 gilt: Die Darstellung $P_1 : \tilde{G} \to c(\varphi)^*$ ist genau $P_1 \sim (P \otimes det)_{|c(\varphi)}$, wo $det : \tilde{G} \to \{\pm 1\}$ die Determinante auf V ist.

Satz 3.1.8 *Sei $char(K) = 0$ und G eine endliche perfekte Gruppe mit universeller Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$ und φ ein orthogonaler G-Modul. Sei W der einfache $c(\varphi)$-Modul und χ_W der Charakter von $W_{|\tilde{G}}$. Sei ψ ein irreduzibler Charakter von $\tilde{G}$, der in χ_W mit ungerader Vielfachheit vorkommt.*

(a) Sei $dim(\varphi)$ gerade und $L := Z(C_0(\varphi))$. Ist L ein Körper, so ist $L \leq K(\psi)$.

(b) Sei $dim(\varphi)$ ungerade, $D := \mathrm{End}_{c(\varphi)}(W)$ und U der $K(\psi)\tilde{G}$-Modul mit Charakter 2ψ. Dann ist $D \subset \mathrm{End}_{K(\psi)\tilde{G}}(U)$.

Beweis. Da G perfekt ist, liegt $P_1(G)$ schon in $C_0(\varphi)$. Also ist $\mathrm{End}_{C_0(\varphi)}(W) \leq \mathrm{End}_{\tilde{G}}(W)$. Ist $\mathrm{End}_{C_0(\varphi)}(W)$ nullteilerfrei, so sind die Projektionen auf die einzelnen einfachen Komponenten von $\mathrm{End}_{\tilde{G}}(W)$ injektiv. Daraus ergeben sich die Behauptungen in (a) und (b). □

Bemerkung 3.1.9 *Anstelle der Perfektheit von G genügt es anzunehmen, daß die Ordnung der Kommutatorfaktorgruppe G/G' ungerade ist bzw. G durch $G'G^2$ zu ersetzen.*

Das für die Anwendungen zentral Ergebnis ist in der nächsten Folgerung herausgestellt, die es ermöglicht, in manchen Fällen wichtige Invarianten von φ aus der Charaktertafel von $\tilde{G}$ abzulesen.

Folgerung 3.1.10 *Zusätzlich zu den Voraussetzungen des Satzes sei angenommen, daß K ein total reeller Zahlkörper ist.*

(a) Ist $dim(\varphi)$ gerade, so gilt:
Ist $[K(\psi) : K]$ ungerade oder $dim(\varphi) \equiv 0 \pmod 4$ und sind alle Zwischenkörper $K(\psi) \supset L \supset K$ vom Grad $[L : K] = 2$ total komplex, so ist die Diskriminante $d_\pm(\varphi) = 1$.
Ist $dim(\varphi) \equiv 2 \pmod 4$, so hat hat $K(\psi)/K$ einen total komplexen Zwischenkörper L vom Grad $[L : K] = 2$. Ist L eindeutig, so ist $L \cong K[\sqrt{d}]$ mit $d_\pm(\varphi) =: d$.

(b) Ist $dim(\varphi)$ ungerade so gilt:
Hat ψ Schur-Index 1, so ist die Clifford-Invariante $[c(\varphi) \otimes_K K(\psi)] = [K(\psi)] \in Br_2(K(\psi))$.
Hat ψ Schur-Index 2 so ist $[K(\psi) \otimes_K c(\varphi)] = [\mathrm{End}_{K(\psi)\tilde{G}}(U)] \in Br_2(K(\psi))$ für den irreduziblen $K(\psi)G$-Modul U mit Charakter 2ψ.

Der Charakter χ_W aus Bemerkung 3.1.4 ist i.a. nicht eindeutig bestimmt. Zur Bestimmung von χ_W ist es hilfreich, den Kern der Darstellung $\tilde{G} \to GL(W)$ zu kennen.

Lemma 3.1.11 *[Frö, Theorem 5.9] Ist η der Kozykel zu P_1, so ist $\eta^2 = 1$ in $H^2(G, K^*)$.*

Lemma 3.1.12 *Sei $\varphi = (V, q)$ ein positiv definiter quadratischer Raum über $\mathbb{R}$. Ist $g \in O^+(\varphi)$ mit $g^2 = 1$, so gilt $P(g)^2 = (-1)^{\binom{e}{2}} a^2 id$ für ein $a \in \mathbb{R}^*$, wo e die Anzahl der negativen Eigenwerte von $g \in O^+(\varphi)$ ist.*

Beweis. Sei $(v_1, \ldots, v_e)$ eine Orthonormalbasis des Eigenraums E_{-1} von g zum Eigenwert -1. Da $det(g) = 1$ ist, ist e gerade. Auf $C(\varphi)$ operiert $P(g)$ wie die Konjugation mit $v_1 \ldots v_e \in C_0(\varphi)^*$. Da $C_0(\varphi) \cap Z(C(\varphi)) = \mathbb{R}$ ist, ist $P(g) = av_1 \ldots v_e$ für ein $a \in \mathbb{R}^*$. Also ist $P(g)^2 = a^2(v_1 \ldots v_e)^2 = a^2(-1)^{\binom{e}{2}}$. □

Lemma 3.1.13 *Sei G eine endliche perfekte Gruppe und $T := Tors(K^*)$ die Gruppe der Einheitswurzeln in K^*. Dann gilt $H^2(G, K^*) \cong H^2(G, T)$.*

Beweis. Sei $u : \tilde{G} \to G$ eine universelle Überlagerungsgruppe von G. Dann ist $\tilde{G}$ endlich und für jede Erweiterung

$$(E) \quad 1 \to K^* \to E \xrightarrow{f} G \to 1$$

gibt es einen Homomorphismus $f' : \tilde{G} \to E$ mit $f \circ f' = u$. Das Bild von f' ist also eine endliche Untergruppe von E, die surjektiv auf G abbildet. Also ist der Kozykel, der die Erweiterung (E) beschreibt, äquivalent zu einem Kozykel mit Werten in T. □

Nützlich zur Bestimmung der Kerns von $\tilde{G} \to GL(W)$ ist

Folgerung 3.1.14 *Sei K ein total reeller Zahlkörper, $\varphi = (V, q)$ ein total positiv definiter quadratischer Raum. Sei $G \leq O(\varphi)$ eine endliche perfekte Gruppe mit Darstellungsgruppe $\tilde{G}$ und $g \in G$ mit $g^2 = 1$. Sei $U := \{v \in V \mid vg = -v\}$ der Eigenraum von g zum Eigenwert -1 und $e := dim_K(U)$. Dann ist die projektive Darstellung $P : G \to \Gamma(\varphi)$ über K zu einer linearen Darstellung $\tilde{P} : \tilde{G} \to \Gamma(\varphi)$ äquivalent mit $(\tilde{P}(g))^2 = (-1)^{\binom{e}{2}}$.*

Beweis. Sei $E := \alpha^{-1}(G) \leq \Gamma$ das volle Urbild der Vektordarstellung der Clifford-Gruppe $\alpha : \Gamma \to O(\varphi)$ von G. Dann ist E eine Erweiterung von K^* mit G. Da G perfekt ist, gibt es eine endliche Untergruppe E' von E, mit $\alpha(E') = G$. Die projektive Darstellung $P : G \to \Gamma$ ist also äquivalent zu einer projektiven Darstellung $P' : G \to E'$. Da K reell ist, ist $Tors(K^*) = \{\pm 1\}$. Sei $(v_1, \ldots, v_e)$ eine Orthogonalbasis von U. Dann ist $g = \sigma_{v_1} \ldots \sigma_{v_e} \in O(\varphi)$. Da G perfekt ist, ist e gerade. Also gilt $P'(g) = v_1 \ldots v_e a$ für ein $a \in K^*$. Daher ist $P'(g)^2 = a^2(-1)^{\binom{e}{2}} q(v_1) \ldots q(v_e) \in Tors(K^*)$. Deshalb ist $a^2 q(v_1) \ldots q(v_e) = \pm 1$. Da φ total positiv definit ist, gilt $a^2 q(v_1) \ldots q(v_e) = 1$ und $P'(g)^2 = (-1)^{\binom{e}{2}}$. □

Als nette Beobachtung findet man daraus:

Folgerung 3.1.15 *Sei G eine endliche perfekte Gruppe und $g \in G$ ein Element der Ordnung 2, für welches alle Elemente in der universellen Überlagerungsgruppe $\tilde{G}$, die auf g abbilden, Ordnung 2 haben. Dann gilt $\chi(1) \equiv \chi(g) \pmod 8$ für alle orthogonalen reellen Charaktere von G.*

Es folgen einige Beispiele, die die Anwendung von Folgerung 3.1.10 illustrieren.

Beispiel 3.1.16 *Sei $G \cong 2.O_8^+(2)$ und V der treue 8-dimensionale $\mathbb{Q}G$-Modul mit Charakter χ und G-invarianter quadratischer Form q, $\varphi := (V, q)$. Die Gruppe G ist perfekt, hat also eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Überlagerungsgruppe $\tilde{G} \cong 2^2.O_8^+(2)$. Dann ist $dim(C(\varphi)) = 2^8$ und $\tilde{\chi} = \chi_W \otimes \chi_W$ für einen 16-dimensionalen $\tilde{G}$-Modul W. Man findet, daß $\chi_W = \chi_{8_2} + \chi_{8_3}$ die Summe der beiden irreduziblen Charaktere $\neq \chi$ vom Grad 8 von $\tilde{G}$ ist. Also ist $d(\varphi) = 1$ und auch die Clifford-Invariante von φ ist trivial.*

Beispiel 3.1.17 *Sei $G = M^cL$ und V der irreduzible 22-dimensionale $\mathbb{Q}G$-Modul mit G-invarianter quadratischer Form q, Charakter χ und $\varphi := (V, q)$. Die universelle Überlagerungsgruppe von G ist $3.G$. Also ist $P : G \to C_0(\varphi)^*$ sogar eine*

gewöhnliche Darstellung. Der Charakter χ_W von G mit $\chi_W \otimes \chi_W = \tilde{\chi}$ ist eindeutig. Mit den Bezeichnungen aus [CCNPW] gilt $\chi_W = 2\chi_1 + 2\chi_2 + 2\chi_3 + \chi_5 + \chi_6$. Wegen $\mathbb{Q}(\chi_5) = \mathbb{Q}[\sqrt{-15}]$ folgt mit Folgerung 3.1.10, daß die Determinante von φ gleich $15(\mathbb{Q}^*)^2$ ist.

Beispiel 3.1.18 *Sei $G := S_6(3)$ und χ der Charakter vom Grad 78 mit orthogonalem G-Modul $\varphi = (V, q)$. Die Überlagerungsgruppe von G ist $\tilde{G} = 2.S_6(3)$. Sei χ_W der Charakter von $\tilde{G}$ auf dem einfachen Modul von $C(\varphi)$. Die Elemente aus der Klasse $2B$ von G haben einen $\frac{78+6}{2} = 42$-dimensionalen Eigenraum zum Eigenwert -1. Also ist χ_W ein treuer Charakter von $\tilde{G}$. Mit GAP findet man, daß damit χ_W eindeutig durch $\chi_w \otimes \chi_w = \tilde{\chi}$ bestimmt ist. Der irreduzible Charakter ψ vom Grad 14 von $\tilde{G}$ kommt in χ_W mit Vielfachheit 1683 vor. Da $\mathbb{Q}(\psi) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$ ist und $dim(V) \equiv 2 \pmod 4$, folgt mit Folgerung 3.1.10, daß $d(\varphi) = 3(\mathbb{Q}^*)^2$ ist.*

Beispiel 3.1.19 *Die Anwendungen dieser Idee beschränken sich nicht auf Charakteristik 0: Sei z.B. V der einfache 4-dimensionale $\mathbb{F}_2 A_6$ Modul. Angenommen V hat eine A_6-invariante reguläre quadratische Form q. Dann sei $\varphi := (V, q)$. Es ist $A_6 \to C_0(\varphi)^*$ eine projektive Darstellung von A_6. Also muß es einen nichttrivialen $\overline{\mathbb{F}_2} A_6$-Modul der Dimension 2 geben. Dies ist nicht der Fall. Deshalb gibt es keine A_6-invariante reguläre quadratische Form auf V.*
Sei nun V der einfache 4-dimensionale $\mathbb{F}_3 A_5$-Modul, q eine reguläre A_5-invariante quadratische Form auf V und $\varphi = (V, q)$. Die Dimension des absolut irreduziblen $\bar{\mathbb{F}}_3 C_0(\varphi)$-Moduls W ist 2. Da die Einschränkung von W auf $2.A_5$ nicht trivial sein kann, ist der Charakter der Operation von $2.A_5$ auf W einer der beiden irreduziblen treuen Brauer-Charaktere von $2.A_5$ vom Grad 2. Da die Charakterwerte dieser Charaktere aber die Erweiterung vom Grad 2 von $\mathbb{F}_3$ erzeugen, folgt, daß das Zentrum von $C_0(\varphi)$ isomorph zu $\mathbb{F}_9$ ist. Deshalb ist die Determinante von φ ein Nichtquadrat.

Beispiel 3.1.20 *Sei $G = U_3(5)$ und V der irreduzible 21-dimensionale $\mathbb{Q}G$-Modul mit G-invarianter quadratischer Form q und $\varphi := (V, q)$. Die Überlagerungsgruppe von G ist $3.G$. Also ist $P : G \to C_0(\varphi)^*$ sogar eine gewöhnliche Darstellung. Sei W der irreduzible $C_0(\varphi)$-Modul. Über dem algebraischen Abschluß von $\mathbb{Q}$ ist $dim(W) = 2^{10}$. Sei χ_W der Charakter des G-Moduls $W_{|G}$ und $\tilde{\chi}$ der Charakter von G auf $C_0(\varphi)$. Dann ist χ_W rational, da $Z(C_0(\varphi)) = \mathbb{Q}$ und $\tilde{\chi} = \chi_W \otimes \chi_W$. Mit Hilfe von GAP findet man in der Notation von [CCNPW] $\chi_W = 2\chi_1 + \chi_2 + 2\chi_3 + 2\chi_7 + 2\chi_{10} + \chi_{11} + \chi_{12} + \chi_{13} + \chi_{14}$. Der Charakter χ_2 hat Charakterkörper $\mathbb{Q}$ und rationalen Schur-Index 2, der nur an der reellen und 5-adischen Stelle $\neq 1$ ist. Da χ_2 mit Vielfachheit 1 in χ_W vorkommt und Charakterkörper $\mathbb{Q}$ hat, ist $[C_0(\varphi)] = [(-2, -5)_{\mathbb{Q}}]$ in $Br_2(\mathbb{Q})$ die Klasse der bei Unendlich und 5 verzweigten Quaternionenalgebra.*

3.1.2 Die Spinor Norm.

Eine weitere Möglichkeit, um die Diskriminante (eines Teilraums) eines quadratischen Raums auszurechnen, bietet die Spinor Norm.

Sei $(V,q) =: \varphi$ ein requlärer quadratischer Raum über dem Körper K mit $char(K) \neq 2$. Sei $x \mapsto \overline{x}$ die kanonische Involution auf der Clifford-Algebra $C(\varphi)$ (vgl. Bemerkung 3.1.3). Dann gilt $\overline{v_1 \dots v_s} = v_s \dots v_1$ für alle $v_i \in V$. Die Abbildung $N : C(\varphi) \to C(\varphi) : x \mapsto \overline{x}x$, heißt die Norm auf $C(\varphi)$.

Für $v \in V$ ist $N(v) = q(v)$, aber i.a. gilt nicht $N(x) \in K$ für $x \in C(\varphi)$. Dies gilt jedoch für die Elemente der Clifford-Gruppe:

Lemma 3.1.21 *([Knu, IV. Lemma (6.1.1)]) Die Norm induziert einen Gruppenhomomorphismus $N : \Gamma(\varphi) \to K^*$.*

Folgerung 3.1.22 *Sei G eine Untergruppe von $O(\varphi)$ und $P : G \to \Gamma(\varphi)$ die projektive Darstellung aus Abschnitt 3.1.1. Dann gibt es für alle $g \in G$ ein $a_g \in K^*$ mit $\overline{P(g)} = a_g P(g^{-1})$.*

Insbesondere ist die von $P(G)$ erzeugte Teilalgebra wieder eine Algebra mit Involution und die kanonische Involution der Clifford-Algebra überführt auch die kommutierende Algebra in sich.

Definition 3.1.23 *Die* Spinor Norm *$\theta_\varphi : O(\varphi) \to K^*/(K^*)^2$ ist definiert durch $\theta_\varphi(\alpha(s)) := N(s)$ für $s \in \Gamma(\varphi)$ mit der Vektordarstellung α aus Definition 3.1.5.*

Die Spinor Norm ist ein Gruppenhomomorphismus $\theta_\varphi : O(\varphi) \to K^*/(K^*)^2$ in eine abelsche Gruppe vom Exponenten 2. Aus dieser Beobachtung erhält man die beiden folgenden trivialen Bemerkungen.

Bemerkung 3.1.24 *Ist $G \leq O(\varphi)$ mit $|G/G'|$ ungerade, so ist $\theta_\varphi(G) = \{1\}$.*

Bemerkung 3.1.25 *Ist $g \in O(\varphi)$, so ist $\theta_\varphi(g^2) = 1$.*

Multipliziert man die quadratische Form mit $a \in K^*$, so werden alle Spinor Normen von Elementen der Determinante -1 in $O(\varphi)$ mit a multipliziert:

$$\theta_{a\varphi}(g) = \begin{cases} \theta_\varphi(g) & g \in O^+(\varphi) \\ a\theta_\varphi(g) & g \in O(\varphi) - O^+(\varphi) \end{cases}.$$

Also ist nur die Einschränkung der Spinor Norm θ_φ auf die spezielle orthogonale Gruppe unabhängig von der Skalierung von φ.

Satz 3.1.26 *Sei K ein total reeller Zahlkörper und $g \in O^+(\varphi)$.*

(i) Ist die Ordnung von g ungerade, so ist $\theta_\varphi(g) = 1$.

(ii) *Gilt* $g^2 = 1$, *so ist* $\theta_\varphi(g) = det(E_{-1}(g), q_{|E_{-1}(g)})$.

(iii) *(vgl. [Zas]) Sei die Ordnung von* g *gleich* 2^a. *Für* $2 \leq i \leq a$ *sei* $K_i := K[\zeta_{2^i} + \zeta_{2^i}^{-1}]$ *und* $N_i : K_i \to K$ *die Norm. Für* $2 \leq i \leq a$ *bezeichne* c_i *die Anzahl der vorkommenden* K*-irreduziblen Darstellungen von* $\langle g \rangle$, *bei denen* g *wie eine primitive* 2^i*-te Einheitswurzel operiert. Dann ist*

$$\theta_\varphi(g) = \prod_{i=2}^{a} N_i(2 + \zeta_{2^i} + \zeta_{2^i}^{-1})^{c_i} det(E_{-1}(g), q_{|E_{-1}(g)}).$$

Beweis. (i) θ_φ ist ein Homomorphismus auf eine Gruppe vom Exponenten 2. Deshalb ist $1 = \theta_\varphi(1) = \theta_\varphi(g^o) = \theta_\varphi(g)^o = \theta_\varphi(g)$, da die Ordnung o von g ungerade ist.
(ii) Sei $(v_1, \ldots, v_e)$ eine Orthogonalbasis des Eigenraums $E_{-1}(g)$ von g zum Eigenwert -1. Dann ist $g = \sigma_{v_1} \ldots \sigma_{v_e}$ das Produkt der Spiegelungen entlang v_i. Deshalb ist $\theta_\varphi(g) = q(v_1) \ldots q(v_e) = det(E_{-1}(g), q_{|E_{-1}(g)})$.
(iii) Schreibt man V als eine orthogonale Summe irreduzibler $K\langle g \rangle$-Moduln, so berechnet sich die Spinor Norm von g als Produkt der Spinor Normen auf den einzelnen Komponenten. Man kann also annehmen, daß V ein irreduzibler $K\langle g \rangle$-Modul ist, so daß g als primitive 2^i-te Einheitswurzel operiert für ein $2 \leq i \leq a$. Über K_i zerlegt sich $K_i \otimes_K V$ als $K_i\langle g \rangle$-Modul in $[K_i : K]$ verschiedene irreduzible 2-dimensionale konjugierte Moduln. Sei W ein solcher irreduzibler $K_i\langle g \rangle$-Modul und q' die Einschränkung auf W der Fortsetzung von q auf $K_i \otimes_K V$ mit zugehöriger Bilinearform $b'(x, y) = q'(x + y) - q'(x) - q'(y)$. Sei $w \in W$ mit $q'(w) \neq 0$. Ist $X^2 - tX + 1$ das charakteristische Polynom von g auf W, so ergibt sich

$$b'(w, wg) = b'(wg, wg^2) = tb'(wg, wg) - b'(wg, w)$$

also $b'(w, wg) = tq'(w)$ und $q'(w + wg) = (2 + t)q'(w)$. Damit folgt

$$g = \sigma_w \sigma_{w+wg}$$

denn $w\sigma_w\sigma_{w+wg} = -w\sigma_{w+wg} = -w + (b(w, w + wg)/q(w + wg))(w + wg) = -w + (2 + t)/(2 + t)(w + wg) = wg$ und $wg\sigma_w\sigma_{w+wg} = (wg - tw)\sigma_{w+wg} = (wg - tw) - (t+2-2t-t^2)/(2+t)(w+wg) = (wg-tw)+(t-1)(w+wg) = twg-w = wg^2$. Da W ein irreduzibler $K_i\langle g \rangle$-Modul ist, ist (w, wg) eine Basis für W und deshalb $g = \sigma_w \sigma_{w+wg}$ auf ganz W.

Also ist die Spinor Norm von $g \in O^+((W, q'))$ gleich $\theta_{(W,q')}(g) = q'(w)q'(w + wg) = (2 + t)(q'(w))^2 = (2 + t)$ in $K_i^*/(K_i^*)^2$. t ist dabei die Spur von g auf W, also ein zu $\zeta_{2^i} + \zeta_{2^i}^{-1}$ Galois-konjugiertes Element.

Sei $H = \{h_1 = 1, \ldots, h_s\}$ die Galoisgruppe von K_i über K. Die Automorphismen h_j operieren auf $K_i \otimes_K V$ durch $h_j \otimes id$. Sei $w_1 := w$, $v_1 := w + wg$ und für $j = 1, \ldots, s$ sei $w_j := w_1^{h_j}$ und $v_j := v_1^{h_j}$. Da V ein irreduzibler $K\langle g \rangle$-Modul ist, ist $(w_j, v_j \mid 1 \leq j \leq s)$ eine K_i-Basis von $K_i \otimes V$.

Die Abbildung $K_i \otimes_K V \to K_i \otimes C_K(\varphi) : \lambda \otimes v \mapsto \lambda \otimes v$ definiert wegen der universellen Eigenschaft von $C((K_i \otimes_K V, q))$ einen Algebrenisomorphismus $C((K_i \otimes_K V, q)) \to K_i \otimes_K C(\varphi)$. Dieser ist mit der Operation von H und auch mit der kanonischen Involution $x \to x^t$ verträglich. Nun liegt $w_1v_1 \dots w_sv_s$ im Fixraum der Operation von H auf $C((K_i \otimes_K V, q))$. Also liegt das Bild in $Fix_H(K_i \otimes_K C(\varphi)) = C(\varphi)$.

Da $\alpha(w_1v_1 \dots w_sv_s) = g$ ist, ist also die Spinor Norm

$$\theta_\varphi(g) = \prod_{j=1}^{s}(q'(w_1)q'(v_1))^{h_j} = \prod_{j=1}^{s}(q'(w_1)^{h_j})^2(2+t)^{h_j} = N_i(2 + \zeta_{2^i} + \zeta_{2^i}^{-1})$$

als Element von $K^*/(K^*)^2$ □

Folgerung 3.1.27 *Sei $G \leq O(\varphi)$ eine perfekte Untergruppe der orthogonalen Gruppe von φ. Für jedes $x \in G$ mit $x^2 = 1$ ist $d((E_{-1}(x), q_{|E_{-1}(x)}) = 1$. Liegt insbesondere $-id \in G$, so ist $d(\varphi) = 1$.*

Das nächste Ergebnis erhält man auch aus Satz 3.4.2 bzw. [Tur1].

Folgerung 3.1.28 *Gibt es ein $x \in O(\varphi)$ mit $x^2 = -id$, so ist $d(\varphi) = 1$.*

Beispiel
Sei $G := U_3(5)$, V der 21-dimensionale irreduzible $\mathbb{Q}G$-Modul und q eine reguläre G-invariante quadratische Form auf V. Sei $x \in G$ ein Element der Ordnung 8. Aus der Charaktertafel von G erhält man, daß die homogenen Komponenten U_8, U_4, U_2 und U_1 von x auf V auf denen x wie eine primitive 8-te, 4-te, 2-te Einheitswurzel bzw. trivial operiert von der $\mathbb{Q}$-Dimension 8, 6, 4 bzw. 3 sind. Dann gilt da G perfekt ist: $d((U_8, q_{|U_8})) = 1 \cdot (\mathbb{Q}^*)^2$, $d((U_4, q_{|U_4})) = 1 \cdot (\mathbb{Q}^*)^2$ und $d((U_2, q_{|U_2})) = 2 \cdot (\mathbb{Q}^*)^2$.

3.1.3 Der Brauer-Wall-Ring.

In diesem Abschnitt sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und $\varphi = (V, q)$ ein regulärer quadratischer Raum über K. Es werden Rechenregeln für die Invarianten von orthogonalen Summen und Tensorprodukten quadratischer Räume entwickelt, die später in den Beispielen zur Anwendung kommen. Das Verhalten der Invarianten quadratischer Räume unter orthogonalen Summen wird durch die Addition in der Brauer-Wall-Gruppe beschrieben (vgl. [Scha, Seite 81]). Die Formel für die Invarianten von Tensorprodukten definiert eine Multiplikation auf einer Untergruppe dieser Gruppe, die diese zum Brauer-Wall-Ring macht. Für algebraische Zahlkörper K kann man den Witt Ring $W(K)$ in einen nur unwesentlich größeren erweiterten Brauer-Wall-Ring einbetten, in dem man sehr leicht rechnen kann.

Obwohl die Betrachtungen in diesem Abschnitt unabhängig von der Operation von G auf (V,q) sind, wird das erste Ergebnis unter Berücksichtigung einer Gruppe formuliert. Um mit den Rechenregeln für die Clifford-Invarianten von orthogonalen Summen etwas über die Clifford-Algebren als G-Moduln für (endliche) Untergruppen der orthogonalen Gruppe aussagen zu können, benötigt man nicht nur die Klasse der Clifford-Algebra in der Brauer-Gruppe, sondern explizite Isomorphismen. Es gilt der folgende Satz, von dem Teil (i) schon bei [Frö] bewiesen ist.

Satz 3.1.29 *Sei $char(K) \neq 2$. Seien $\varphi = (V,q)$ und $\psi = (W,q')$ reguläre quadratische KG-Moduln der Dimension n bzw. m. Seien D_V und D_W die eindimensionalen KG-Moduln auf denen G durch die Determinante auf V bzw. W operiert. Es bestehen die folgenden Isomorphismen von G-Moduln:*

(i) Sind n und m gerade, so ist $C(\varphi \perp \psi) \cong C(\varphi) \otimes (C(d_\pm(\varphi)\psi) \otimes D_V)$.

(ii) $C_0(\varphi \perp \psi) \cong C_0(\varphi) \otimes (C(-d_\pm(\varphi)\psi) \otimes D_V)$, falls n ungerade und m gerade ist.

(iii) $C(\varphi \perp \psi) \cong C_0(\varphi) \otimes C_0(\psi) \otimes (\frac{d_\pm(\varphi), d_\pm(\psi)}{K})$, falls n und m ungerade sind. Hier operiert G auf $(\frac{d_\pm(\varphi), d_\pm(\psi)}{K}) = \langle 1, a, b, ab \mid a^2 = d_\pm(\varphi), b^2 = d_\pm(\psi), ab = -ba \rangle$ durch $1\gamma := 1$, $a\gamma := det(\gamma_{|V})a$, $b\gamma := det(\gamma_{|W})b$ und $ab\gamma := det(\gamma_V)det(\gamma_W)ab$ für alle $\gamma \in G$.

Beweis. (ii) Es ist $C_0(\varphi \perp \psi) = C_0(\varphi) \otimes C_0(\psi) \oplus C_1(\varphi) \otimes C_1(\psi)$ als Teilalgebra des graduierten Tensorprodukts. Die zentral einfache Algebra $C_0(\varphi)$ ist eingebettet in $C_0(\varphi \perp \psi)$ als $C_0(\varphi) \otimes K$. Der Zentralisator ist $Z := C_{C_0(\varphi \perp \psi)}(C_0(\varphi)) = K \otimes C_0(\psi) \oplus v_1 \dots v_n K \otimes C_1(\psi)$, wo $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von φ ist. Die Abbildung $g : W \to Z; w \mapsto v_1 \dots v_n \otimes w$ von W in die K-Algebra Z erfüllt $g(w)^2 = -d_\pm(\varphi)q'(w)$ für alle $w \in W$. Wegen der universellen Eigenschaft der Clifford-Algebra gibt es einen Homomorphismus $C((W, -d_\pm(\varphi)q')) \to Z$, der die Erzeuger w von $C((W, -d_\pm(\varphi)q'))$ auf Erzeuger $g(w) = v_1 \dots v_n \otimes w$ von Z abbildet. Aus Dimensionsgründen ist dies ein Isomorphismus. Die G-Operation erhält man, da $(v_1 \dots v_n)\gamma = det(\gamma_{|V})v_1 \dots v_n$ für alle $\gamma \in G$ gilt.
(iii) Das Tensorprodukt der zentral einfachen Algebren $C_0(\varphi) \otimes C_0(\psi)$ ist eingebettet in $C(\varphi \perp \psi) \cong C(\varphi)\hat{\otimes}C(\psi)$. Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Orthogonalbasis von φ und $(w_1, \dots, w_m)$ eine Orthogonalbasis von ψ. Sei $z_v := v_1 \dots v_n \in Z(C(\varphi))$ und $z_w := w_1 \dots w_m \in Z(C(\psi))$. Der Zentralisator Z von $C_0(\varphi) \otimes C_0(\psi)$ in $C(\varphi \perp \psi)$ hat eine K-Basis $(1 \otimes 1, z_v \otimes 1, 1 \otimes z_w, z_v \otimes z_w)$. Die Elemente erfüllen genau die Relationen der Quaternionenalgebra $(\frac{d_\pm(\varphi), d_\pm(\psi)}{K})$. Die G-Operation folgt wie in (ii). □

Bemerkung 3.1.30 *Aus dem Satz erhält man durch Induktion, daß die Clifford-Invariante eines regulären quadratischen Raumes (V,q) über $\mathbb{R}$ genau dann nicht*

trivial ist, wenn die Signatur $\equiv 3, 4, 5, 6$ *modulo* 8 *ist.*
Insbesondere bestimmt die Dimension eines total positiv definiten Raumes über einem total reellen Zahlkörper K *die Clifford-Invariante* $\in Br_2(K)$ *an allen reellen Stellen von* K*.*

Die nachstehende Folgerung ergibt sich auch direkt aus der Definition der Hasse-Invariante.

Folgerung 3.1.31 *Die Hasse-Invariante von* $\varphi \perp \psi$ *ist*

$$s(\varphi \perp \psi) = s(\varphi)s(\psi)(d(\varphi), d(\psi)).$$

Eine solch scharfe Aussage wie für die Clifford-Algebren orthogonaler Summen habe ich für Clifford-Algebren von Tensorprodukten nicht gefunden. Mit Hilfe der Hasse-Invariante (vgl. Definition 1.2.8) läßt sich allerdings die Clifford-Invariante des Tensorprodukts als Element der Brauer-Gruppe von K bestimmen.

Lemma 3.1.32 *(vgl. [Kit]) Seien* $char(K) \neq 2$ *und* φ *und* ψ *reguläre bilineare Räume über* K *der Dimension* n *bzw.* m*. Die Hasse-Invariante von* $\varphi \otimes \psi$ *ist*

$$s(\varphi \otimes \psi) = s(\varphi)^m s(\psi)^n (d(\psi), d(\psi))^{\binom{n}{2}} (d(\varphi), d(\varphi))^{\binom{m}{2}} (d(\varphi), d(\psi))^{nm-1}.$$

Beweis. Sei $\varphi \cong \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ und $\psi \cong \langle b_1, \ldots, b_m \rangle$. Dann ist

$$\varphi \otimes \psi \cong \langle a_1 b_1, \ldots a_1 b_m, a_2 b_1, \ldots, a_n b_m \rangle .$$

Die Hasse-Invariante von $\varphi \otimes \psi$ berechnet sich damit als

$$s(\varphi \otimes \psi) = \prod_{j=1}^{n} (\prod_{k=j+1}^{n} \prod_{i=1}^{m} \prod_{l=1}^{m} (a_j b_i, a_k b_l)) \cdot \prod_{i=1}^{m} \prod_{l=i+1}^{m} (a_j b_i, a_j b_l) =$$

$$\prod_{j=1}^{n} (\prod_{k=j+1}^{n} (a_j^m d(\psi), a_k^m d(\psi))) \cdot (a_j, a_j)^{\binom{m}{2}} \cdot \prod_{i=1}^{m} (a_j^{m-i}, b_i) \prod_{l=i+1}^{m} (b_i, b_l)(a_j, b_l) =$$

$$(d(\psi), d(\psi))^{\binom{n}{2}} (d(\varphi), d(\varphi))^{\binom{m}{2}} s(\varphi)^{m^2} s(\psi)^n \cdot P,$$

wo

$$P = \prod_{j=1}^{n} [(a_j, d(\psi))^{n-j} \prod_{k=j+1}^{n} (a_k, d(\psi))]^m \cdot \prod_{i=1}^{m} (a_j, b_i)^{m-i} \prod_{l=i+1}^{m} (a_j, b_l).$$

Da jedes $(a_j, d(\psi))$ im Produkt in der eckigen Klammer genau $n-j+j-1 = n-1$ mal als Faktor vorkommt und analog jedes (a_j, b_i) im 2. Produkt genau $m-1$ mal vorkommt, ergibt sich P als

$$P = \prod_{j=1}^{n} (a_j, d(\psi))^{m(n-1)} \prod_{i=1}^{m} (a_j, b_i)^{m-1} = (d(\varphi), d(\psi))^{m(n-1)+(m-1)}.$$

Daraus folgt die Behauptung, da $m(n-1)+(m-1) = mn-1$. □

Sei $[c(\varphi)]$ die Clifford-Invariante des regulären quadratischen Raums φ und $d_\pm(\varphi) := (-1)^{\binom{n}{2}} d(\varphi)$ die Diskriminante von φ, wobei $n = dim_K(\varphi)$ ist.

Satz 3.1.33 *Sei $char(K) \neq 2$ und φ und ψ reguläre bilineare Räume über K der Dimension n bzw. m. Die Clifford-Invariante von $\varphi \otimes \psi$ ist*

$$[c(\varphi \otimes \psi)] = [c(\varphi)]^m [c(\psi)]^n (d_\pm(\varphi), d_\pm(\psi))^{nm-1}.$$

Beweis. Nach [Scha] ist

$$[c(\varphi)] = s(\varphi) \begin{cases} 1 & m \equiv 1,2 \pmod 8 \\ (-1,-d(\varphi)) & m \equiv 3,4 \pmod 8 \\ (-1,-1) & m \equiv 5,6 \pmod 8 \\ (-1,d(\varphi)) & m \equiv 7,8 \pmod 8. \end{cases}$$

Setzt man in der Formel für die Hasse-Invariante des Tensorprodukts anstelle von s die Clifford-Invariante c ein, so ergibt sich ein Fehler f. Diesen kann man durch Fallunterscheidung gemäß der Kongruenzen von n und m modulo 8 (es genügt n und m modulo 4 zu kennen) ermitteln:

	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	1	$(-1,d(\varphi))$
2	1	1	$(-1,-1)$	$(-1,-1)$
3	1	$(-1,d(\psi))$	$(-1,-1)$	$(-1,d(\varphi)d(\psi))$

Dabei sind in der ersten Zeile die Werte von m modulo 4, in der ersten Spalte n modulo 4 und in den übrigen Positionen der jeweilige Wert von f angegeben.

Ist z.B. $n \equiv 3 \pmod 4$ und $m \equiv 1 \pmod 4$, so ist

$$[c(\varphi \otimes \psi)] = s(\varphi \otimes \psi) \cdot \begin{cases} (-1,-d(\varphi)d(\psi)) & nm \equiv 3 \pmod 8 \\ (-1,d(\varphi)d(\psi)) & nm \equiv 7 \pmod 8. \end{cases}$$

Durch Unterscheidung der 4 Fälle von (n,m) modulo 8 findet man

$$[c(\varphi)]^m [c(\psi)]^n = [c(\varphi)][c(\psi)] = s(\varphi)s(\psi) \cdot \begin{cases} (-1,-d(\varphi)) & nm \equiv 3 \pmod 8 \\ (-1,d(\varphi)) & nm \equiv 7 \pmod 8. \end{cases}$$

Also ergibt sich f in dem Fall als $(-1,d(\psi))$. Analog beweist man die anderen Einträge in der Tabelle.

Also gilt

$$f = (-1,d(\varphi))^{nm\binom{m}{2}} (-1,d(\psi))^{mn\binom{n}{2}} (-1,-1)^{(nm-1)\binom{n}{2}\binom{m}{2}}.$$

Nun gilt

$$(d_\pm(\varphi), d_\pm(\psi)) = (d(\varphi), d(\psi))(-1, d(\psi))^{\binom{n}{2}}(-1, d(\varphi))^{\binom{m}{2}}(-1,-1)^{\binom{n}{2}\binom{m}{2}}.$$

Mit Hilfe der bekannten Rechenregel $(x,x) = (-1,x)$ (vgl. [Scha, Corollary 2.11.13]) erhält man

$$[c(\varphi\otimes\psi)] = [c(\varphi)]^m[c(\psi)]^n(d(\psi),d(\psi))^{\binom{n}{2}}(d(\varphi),d(\varphi))^{\binom{m}{2}}(d(\varphi),d(\psi))^{nm-1}\cdot f =$$

$$[c(\varphi)]^m[c(\psi)]^n(d(\psi),d(\psi))^{(1+nm)\binom{n}{2}}(d(\varphi),d(\varphi))^{(1+nm)\binom{m}{2}}.$$

$$\cdot(d(\varphi),d(\psi))^{nm-1}(-1,-1)^{(nm-1)\binom{n}{2}\binom{m}{2}}.$$

Da man in einer Gruppe vom Exponenten 2 rechnet, ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung 3.1.34 *Ist $n = dim(\varphi) = 1$, also $\varphi \cong \langle\langle a\rangle\rangle$, so erhält man, da dann $c(\varphi) = K$ ist,*

$$[c(a\psi)] = [c(\psi)](a, d_\pm(\psi))^{m+1}.$$

Dies ist gerade die Aussage von [Lam, 5.(3.16)].

Durch die Multiplikation in Satz 3.1.33 kann man auf einer Untergruppe der additiv geschriebenen Brauer-Wall-Gruppe (vgl. [Scha, p. 81]) eine Multiplikation einführen, die diese zu einem Ring macht.

Definition 3.1.35 *Sei K ein Körper. Bezeichne $Br_2(K)$ die maximale Untergruppe vom Exponenten 2 in der Brauer-Gruppe der Äquivalenzklassen zentral einfacher K-Algebren. Der* Brauer-Wall-Ring *$BW(K)$ von K ist definiert als*

$$BW(K) = Br_2(K)\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times K^*/(K^*)^2$$

mit der folgenden Addition

$$(00)\quad (c_1,0,d_1)+(c_2,0,d_2) = (c_1c_2(d_1,d_2),0,d_1d_2)$$

$$(01)\quad (c_1,0,d_1)+(c_2,1,d_2) = (c_1c_2(d_1,-d_2),1,d_1d_2)$$

$$(11)\quad (c_1,1,d_1)+(c_2,1,d_2) = (c_1c_2(d_1,d_2),0,-d_1d_2)$$

und der Multiplikation

$$(M)\quad (c_1,e_1,d_1)(c_2,e_2,d_2) := (c_1^{e_2}c_2^{e_1}(d_1,d_2)^{e_1e_2+1}, e_1e_2, d_1^{e_2}d_2^{e_1})$$

für alle (c_1,e_1,d_1), $(c_2,e_2,d_2)\in BW(K)$.

Satz 3.1.36 *$BW(K)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.*

Beweis. Es ist wohlbekannt, daß die Addition eine kommutative Gruppenstruktur auf $BW(K)$ definiert (vgl. [Scha, Theorem (2.12.9)]). Es bleibt also zu zeigen, daß die Multiplikation kommutativ, assoziativ und distributiv ist. Das Einselement von $BW(K)$ ist $([K], 1, 1)$. Die Kommutativität ist klar, da die Formel (M) symmetrisch in den Indizes 1,2 ist.

Die Assoziativität der Multiplikation zeigt man durch Nachrechnen:

$$((c_1, e_1, d_1)(c_2, e_2, d_2))(c_3, e_3, d_3) = (c_1^{e_2} c_2^{e_1} (d_1, d_2)^{e_1 e_2 + 1}, e_1 e_2, d_1^{e_2} d_2^{e_1})(c_3, e_3, d_3) =$$

$$(c_1^{e_2 e_3} c_2^{e_1 e_3} c_3^{e_1 e_2} (d_1, d_2)^{e_1 e_2 e_3 + e_3} (d_1^{e_2} d_2^{e_1}, d_3)^{e_1 e_2 e_3 + 1}, e_1 e_2 e_3, d_1^{e_2 e_3} d_2^{e_1 e_3} d_3^{e_1 e_2}).$$

Da $e^2 = e$ gilt in dem Ring $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist

$$(d_1, d_2)^{e_1 e_2 e_3 + e_3} (d_1^{e_2} d_2^{e_1}, d_3)^{e_1 e_2 e_3 + 1} = (d_1, d_2)^{e_1 e_2 e_3 + e_3} (d_1, d_3)^{e_1 e_2 e_3 + e_2} (d_2, d_3)^{e_1 e_2 e_3 + e_1}.$$

Also ist das Ergebnis invariant unter allen Permutationen der Indizes 1,2,3. Daraus folgt die Assoziativität wegen der Kommutativität.

Die Distributivität kann man ebenso in den einzelnen Fällen nachrechnen. Multipliziert man z.B. die Gleichung (01) mit (c, e, d) so erhält man auf der rechten Seite

$$(c(c_1 c_2)^e (d_1, -d_2)^e (d, d_1 d_2)^{e+1}, e, (d_1 d_2)^e d).$$

Die distributiv ausmultiplizierte linke Seite ergibt:

$$(c_1^e (d, d_1), 0, d_1^e) + (c(c_2)^e (d, d_2)^{e+1}, e, d d_2^e) =$$

$$\begin{cases} (c(d, d_1 d_2), 0, d) & \text{falls } e = 0 \\ (c c_1 c_2 (d, d_1)(d_1, -d d_2), 1, d_1 d_2 d) & \text{falls } e = 1 \end{cases}.$$

Da $(d, d_1)(d_1, -d d_2) = (d, d_1)(d_1, d)(d_1, -d_2) = (d_1, -d_2)$ gilt, folgt die Distributivität im Fall (01). Die anderen Fälle gehen analog. □

Gemäß [Scha, Theorem 2.12.9] ist für $char(K) \neq 2$ das Tupel (Clifford-Invariante, Dimension modulo 2, Diskriminante) ein Homomorphismus von der Wittgruppe von K in die additive Gruppe von $BW(K)$. Wegen Satz 3.1.33 ist dieser sogar ein Ringhomomorphismus:

Satz 3.1.37 *Sei K ein Körper der Charakteristik $\neq 2$. Das Tupel (Clifford-Invariante, Dimension modulo 2, Diskriminante) definiert einen Ringhomomorphismus*

$$w : W(K) \to BW(K) : (V, q) \mapsto ([c(V, q)], dim(V) + 2\mathbb{Z}, d_{\pm}(V, q)).$$

Beweis. Da $c(V, q)$ ein Produkt von Quaternionenalgebren ist (vgl. [Scha, Theorem 9.2.10]) liegt $[c(V, q)]$ in $Br_2(K)$. Also ist w ein Gruppenhomomorphismus zwischen den additiven Gruppen der Ringe, nach [Scha, Theorem 2.12.9]. Weiter gilt für zwei reguläre quadratische Räume (V_1, q_1) und (V_2, q_2) der Dimension

n_1 bzw. n_2 über K, daß $d_\pm(V_1 \otimes V_2, q_1 \otimes q_2) = (-1)^{\binom{n_1 n_2}{2}} d(V_1 \otimes V_2, q_1 \otimes q_2) = (-1)^{\binom{n_1}{2} n_2} (-1)^{\binom{n_2}{2} n_1} d(V_1, q_1)^{n_2} d(V_2, q_2)^{n_1} = d_\pm(V_1, q_1)^{n_2} d_\pm(V_2, q_2)^{n_1}$, da $n_1 n_2 (n_1 n_2 - 1) \equiv n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 2) \pmod 4$. Also folgt mit Satz 3.1.33, daß w ein Ringhomomorphismus ist. □

Seien nun K ein algebraischer Zahlkörper und $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ die Einbettungen von K in der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Nach [Has] gilt: Zwei quadratische Formen über K sind isometrisch, genau dann wenn sie

- die gleiche Dimension
- die gleiche Determinante
- die gleiche Clifford-Invariante $\in Br_2(K)$
- die gleichen Signaturen für alle σ_i, $1 \leq i \leq s$,

haben.

Nun ist die Signatur eines regulären quadratischen Raums immer kongruent zu seiner Dimension modulo 2. In $W(K)$ ist natürlich nur die Dimension modulo 2 wohldefiniert.

Definition 3.1.38 *Sei K ein algebraischer Zahlkörper mit $s \geq 0$ reellen Einbettungen. Sei $E := \{(x_0, x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^s \mid x_i \equiv x_j \pmod 2$ für alle $0 \leq i, j \leq s\}$. E wird zu einem Ring durch komponentenweise Multiplikation und Addition. Definiere die Abbildung $p : E \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} : (x_0, x_1, \ldots, x_s) \mapsto x_0$.*

Der erweiterte Brauer-Wall-Ring *$B\tilde{W}(K)$ ist definiert als $Br_2(K) \times E \times K^*/(K^*)^2$ mit der folgenden Addition*

$$(c_1, e_1, d_1) + (c_2, e_2, d_2) = \begin{cases} (c_1 c_2 (d_1, d_2), e_1 + e_2, d_1 d_2) & \text{falls } p(e_1) = p(e_2) = 0 \\ (c_1 c_2 (d_1, -d_2), e_1 + e_2, d_1 d_2) & \text{falls } p(e_1) = 0,\ p(e_2) = 1 \\ (c_1 c_2 (d_1, d_2), e_1 + e_2, -d_1 d_2) & \text{falls } p(e_1) = p(e_2) = 1 \end{cases}$$

und der Multiplikation

$$(M) \quad (c_1, e_1, d_1)(c_2, e_2, d_2) := (c_1^{p(e_2)} c_2^{p(e_1)} (d_1, d_2)^{p(e_1)p(e_2)+1}, e_1 e_2, d_1^{p(e_2)} d_2^{p(e_1)})$$

für alle (c_1, e_1, d_1), $(c_2, e_2, d_2) \in B\tilde{W}(K)$.

Satz 3.1.39 *$B\tilde{W}(K)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 3.1.36. □

Satz 3.1.40 *Sei K ein algebraischer Zahlkörper. Das Tupel (Clifford-Invariante, Dimension modulo 2, Signaturen, Diskriminante) definiert einen Ringmonomorphismus $\tilde{w} : W(K) \to B\tilde{W}(K)$:*

$$(V, q) \mapsto ([c(V, q)], (dim(V) + 2\mathbb{Z}, sign(\sigma_i(V, q))), d_\pm(V, q)).$$

Beweis. $\tilde{w}$ ist wohldefiniert, da w nach Satz 3.1.37 wohldefiniert ist und die Signaturen von hyperbolischen Räumen alle 0 sind. Wie im Beweis von Satz 3.1.37 zeigt man, daß $\tilde{w}$ ein Ringhomomorphismus ist. Nach [Has, Satz 1,2,3], sind die Dimension, Determinante, Clifford-Invariante und Signaturen beschreibende Invarianten für die Isometrieklasse einer quadratischen Form über K. In $W(K)$ kann man die Dimension durch Addition und Subtraktion hyperbolischer Ebenen um gerade ganze Zahlen beliebig verändern. Also genügt die Dimension modulo 2, neben den anderen 3 Invarianten zur Beschreibung eines Elements von $W(K)$. Also ist $\tilde{w}$ injektiv. □

Nach [Has, Satz 4] kann man die Invarianten $(c, e, d) \in B\tilde{W}(K)$ nicht ganz beliebig vorschreiben.

Satz 3.1.41 *Das Bild von $\tilde{w}$ besteht aus den Tupeln $(c, e, d) \in B\tilde{W}(K)$, für die an allen reellen Stellen $\nu_i, i = 1, \ldots, s$ von K gilt:*

$$\nu_i(c) = 1 \Leftrightarrow e_i \equiv -1, 0, 1, 2 \pmod 8$$

$$\nu_i(d) > 0 \Leftrightarrow e_i \equiv 0, 1 \pmod 4$$

Bemerkung 3.1.42 *Für den Spezialfall $K = \mathbb{Q}$ findet man in [DHM] eine analoge Beschreibung des Wittrings $W(\mathbb{Q})$.*

3.2 Gruppenalgebren als Algebren mit Involution.

Ist K ein Körper der Charakteristik 0, so ist die Gruppenalgebra KG einer endlichen Gruppe G eine halbeinfache Algebra, auf der das Invertieren der Gruppenelemente eine Involution $^\circ$ induziert. Die orthogonalen KG-Moduln entsprechen gerade den KG-Moduln mit einer $(KG, {}^\circ)$-kovarianten Form (im Sinn von Definition 1.3.1). Den Typ der Involution auf den einfachen involutionsinvarianten Summanden von KG (vgl. Definition 3.2.5) kann man an dem Schur-Index des zugehörigen Charakters von G ablesen (Satz 3.2.10). Dies ermöglicht eine erste grobe Klassifikation der orthogonalen KG-Moduln. Hauptziel dieses Abschnitts ist jedoch die Entwicklung von Produktformeln in Folgerung 3.2.13 und Satz 3.2.19.

3.2.1 Halbeinfache Algebren mit Involution.

Sei K ein Körper und A eine zentral einfache K-Algebra mit einer Involution $^\circ : A \to A$, also einem Ringantiautomorphismus der Ordnung ≤ 2. Dann induziert $^\circ$ einen Körperautomorphismus der Ordnung ≤ 2 von $K = Z(A)$. Sei $K^+ := Fix({}^\circ{}_{|K})$ und $A \cong D^{n\times n}$ für eine K-Divisionsalgebra D. Die Involution auf K

kann nach [Scha, Corollary 8.8.3, Theorem 8.10.1] zu einer Involution $\bar{}$ auf D fortgesetzt werden. Dann ist $x \mapsto \bar{x}^{tr}$ eine Involution auf $D^{n\times n} \cong A$, die $^\circ$ auf dem Zentrum K induziert. Nach dem Satz von Skolem und Noether gibt es also ein $H \in A^*$ mit $a^\circ = H\overline{a}^{tr}H^{-1}$, für alle $a \in A$. Da die Ordnung von $^\circ \leq 2$ ist, gilt $H(\overline{H}^{tr})^{-1} =: z \in K$. Wegen $(H^\circ)^\circ = (zH^{-1})^\circ = z\overline{z}H$ gilt $z\overline{z} = 1$. Also ist z im Fall $K = K^+$ eine 2-te Einheitswurzel $z = \pm 1$. Im Fall $K \neq K^+$, kann man nach Satz Hilbert 90 die Form H durch Multiplikation mit zentralen Elementen so abändern, daß $z = 1$ ist.

Bemerkung 3.2.1 *Ist A eine einfache Algebra mit Involution $^\circ$, so ist für alle $a \in A$ das reguläre und das reduzierte charakteristische Polynom von a gleich dem von a°. Deshalb stimmen die reguläre und reduzierte Norm und Spur von a und a° überein.*

Für explizite Berechnungen ist es hilfreich, hermitesche Formen zu diagonalisieren.

Proposition 3.2.2 *([Knu, I. Proposition (6.2.4)],[Scha, Theorem (7.6.3)]) Sei $\bar{}$ eine Involution auf der Divisionsalgebra D, $\mu = \pm 1$ und $H = \mu\overline{H}^{tr} \in D^{n\times n}$ invertierbar. Ist $\bar{}$ nicht trivial oder $\mu = 1$ und $char(D) \neq 2$, so ist H diagonalisierbar, d.h. es gibt eine invertierbare Matrix $T \in D^{n\times n}$ mit $TH\overline{T}^{tr} = diag(h_1, \ldots, h_n)$.*

Definition 3.2.3 *Sei $\bar{}$ eine Involution auf der Divisionsalgebra D, $\mu = \pm 1$ und $H = \mu\overline{H}^{tr} \in D^{n\times n}$ invertierbar.*

(i) Im Fall $\mu = -1$ und $\bar{} = id$ heißt H symplektisch.

(ii) Sei $K = Z(D)$ das Zentrum von D und $i^2 = dim_K(D)$. Vermöge der regulären Darstellung ρ wird D zu einer Teilalgebra von $K^{i^2n\times i^2n}$. Die reguläre Determinante *$det_{reg} : D^{n\times n} \to K$ ist definiert als $det_{reg}(x) := det(\rho(x))$ für alle $x \in D^{n\times n}$.*

(iii) (vgl. [Rei, Section 9]) Sei L ein Zerfällungskörper von D und $D^{n\times n}$ als K-Teilalgebra von $\delta(D^{n\times n}) \subset L^{in\times in}$ aufgefaßt. Die reduzierte Determinante *$det_{red} : D \to K$ ist definiert als $det_{red}(x) := det(\delta(x))$ für alle $x \in D^{n\times n}$.*

Es gilt $det_{red}(x)^i = det_{reg}(x)$.

Bemerkung 3.2.4 *Sei A eine K-Algebra mit Involution $^\circ$.*

(i) $L(A, ^\circ) := \{x \in A \mid x^\circ = -x\}$ ist mit $[x, y] := xy - yx$ eine K-Liealgebra.

(ii) $F(A, ^\circ) := \{x \in A \mid x^\circ = x\}$ ist mit $x \cdot y := xy + yx$ eine K-Jordanalgebra.

Ist $A \cong D^{n\times n}$ eine einfache Algebra mit Involution über einem p-adischen Körper $K = Z(A)$, so ist D entweder kommutativ oder eine Quaternionenalgebra über K ([Kne, Proposition 4.1.1]). Im ersten Fall ist $\bar{}$ schon durch $^\circ$ festgelegt und im zweiten Fall ist $K = K^+$ und man kann $\bar{}$ als die kanonische Involution auf D wählen. Man erhält also die folgende Einteilung der einfachen Algebren mit Involution über p-adischen Körpern:

Definition 3.2.5 *Mit den obigen Bezeichnungen sei $H = \pm\bar{H}^{tr} \in A^*$ mit $a^\circ = H\bar{a}^{tr}H^{-1}$.*

(i) Ist $D = K = K^+$ und $H = H^{tr}$, so heißt $(A,\ ^\circ)$ orthogonal.

(ii) Ist $D = K = K^+$ und $H = -H^{tr}$, so heißt $(A,\ ^\circ)$ symplektisch.

(iii) Ist $D = K \neq K^+$, so heißt $(A,\ ^\circ)$ unitär.

(iv) Ist $D \neq K = K^+$ und $H = \bar{H}^{tr}$, so heißt $(A,\ ^\circ)$ hermitesch.

(v) Ist $D \neq K = K^+$ und $H = -\bar{H}^{tr}$, so heißt $(A,\ ^\circ)$ schiefhermitesch.

Indem man zu einem Erweiterungskörper von K übergeht und geeignete Standardsituationen betrachtet zeigt man leicht das folgende Lemma.

Lemma 3.2.6 *Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$.*

(i) Ist $(A,\ ^\circ)$ orthogonal, so ist $dim_{K^+}(F(A,\ ^\circ)) = \frac{1}{2}n(n+1)$ und $dim_{K^+}(L(A,\ ^\circ)) = \frac{1}{2}n(n-1)$.

(ii) Ist $(A,\ ^\circ)$ symplektisch, dann ist $dim_{K^+}(F(A,\ ^\circ)) = \frac{1}{2}n(n-1)$ und $dim_{K^+}(L(A,\ ^\circ)) = \frac{1}{2}n(n+1)$.

(iii) Ist $(A,\ ^\circ)$ unitär, dann ist $dim_{K^+}(F(A,\ ^\circ)) = dim_{K^+}(L(A,\ ^\circ)) = n^2$.

(iv) Ist $(A,\ ^\circ)$ hermitesch, so ist $dim_{K^+}(F(A,\ ^\circ)) = 2n^2 - n$ und $dim_{K^+}(L(A,\ ^\circ)) = 2n^2 + n$.

(v) Ist $(A,\ ^\circ)$ schiefhermitesch, so gilt $dim_{K^+}(F(A,\ ^\circ)) = 2n^2 + n$ und $dim_{K^+}(L(A,\ ^\circ)) = 2n^2 - n$.

3.2.2 Gruppenalgebren.

Es werden allgemeine Betrachtungen für Gruppenringe KG endlicher Gruppen über einem Körper der Charakteristik 0 aufgestellt, die im wesentlichen benutzen, daß G eine Orthonormalbasis bezüglich der Bilinearform $T : (a,b) \mapsto \frac{1}{|G|}Sp_{reg}(ab^\circ)$ auf KG ist. Daraus erhält man Produktformeln, die später in den Beispielen zur Überprüfung der Ergebnisse verwendet werden können.

Bezeichnungen 3.2.7 *Für diesen Abschnitt werden die folgenden Bezeichnungen festgelegt. Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und G eine endliche Gruppe. Die Gruppenalgebra KG hat eine natürliche K-lineare Involution $^\circ$ definiert durch*

$$g \mapsto g^\circ := g^{-1} \text{ für alle } g \in G.$$

Die Bilinearform T auf KG ist definiert durch

$$T(a,b) := \frac{1}{|G|} Sp_{reg}(ab^\circ)$$

wo Sp_{reg} die reguläre Spur auf KG bezeichnet. Sei

$$KG \cong \oplus_{i=1}^{s} A_i \cong \oplus_{i=1}^{s} D_i^{n_i \times n_i}$$

für K-Divisionsalgebren D_i mit Zentrum $K_i := Z(D_i)$. Sei

$$t_i := [K_i : K] \text{ und } m_i^2 := dim_{K_i}(D_i).$$

Sei V_i der einfache A_i-Modul.
Sei

$$x_i := n_i m_i$$

der Charaktergrad eines absolut irreduziblen Charakters von G zu V_i.

Sei $A_i^\circ = A_i$ für $1 \leq i \leq r$ und $A_{r+j}^\circ = A_{s-j+1}$ für $1 \leq j \leq \frac{s-r}{2}$. Sei nun $1 \leq i \leq r$. Dann induziert $^\circ$ eine Involution auf A_i. Diese ist gegeben durch eine μ_i-hermitesche Form H_i (bzgl. jeder beliebigen Involution $\bar{}$ auf D_i, die mit $^\circ$ auf K_i übereinstimmt) auf V_i für ein $\mu_i = \pm 1$ (vgl. [LeT, Lemma 1], [Scha, p. 302]). Sei $K_i^+ := Fix(^\circ{}_{|K_i})$. Seien die A_i so geordnet, daß H_i nicht symplektisch ist für $1 \leq i \leq t$ und symplektisch für $t+1 \leq i \leq r$. Für $h, h' \in D_i - \{0\}$ sei $(D_i, S_{h,h'}) := (D_i, S_{h,h'}^{(K)})$ der bilineare K-Vektorraum

$$(D_i, S_{h,h'}) := (D_i, (x,y) \mapsto (Sp_{red})_{D_i/K}(\bar{x}hy\bar{h'}))$$

wo Sp_{red} die reduzierte Spur ist. Seien

$$d_i = d(D_i, S_{1,1}) \text{ und } s_i := s(D_i, S_{1,1})$$

die Determinante und Hasse-Invariante.

Bemerkung 3.2.8 *(i) G ist eine Orthonormalbasis von (KG, T).*

(ii) Die reguläre Spur von A_i ist das x_i-fache der reduzierten Spur.

(iii) Ist $A_i^\circ \neq A_i$, so ist $(A_i + A_i^\circ, T_{|A_i + A_i^\circ})$ hyperbolisch.

(iv) ([LeT, Corollary 1]) Ist $A_i^\circ = A_i$ und H_i symplektisch, so ist $(A_i, T_{|A_i})$ hyperbolisch.

(v) Ist $K = \mathbb{Q}$ oder ein anderer total reeller Zahlkörper, so ist $A_i^\circ = A_i$ für alle i und $^\circ{}_{|K_i}$ die komplexe Konjugation auf K_i. Ist $^\circ{}_{|K_i} = id_{K_i}$ (also K_i total reell), so ist nach dem Satz von Brauer und Speiser D_i entweder eine Quaternionendivisionsalgebra über K_i oder $D_i = K_i$. Dann wähle $\bar{}$ als die kanonische Involution von D_i.

(vi) Ist K ein p-adischer Körper und $A_i^\circ = A_i$, so ist D_i entweder kommutativ oder eine Quaternionenalgebra. Im ersten Fall bestimmt $^\circ$ die Involution $\bar{}$ auf D_i, im zweiten Fall ist $^\circ{}_{|K_i} = id_{K_i}$ und $\bar{}$ sei als die kanonische Involution von D_i gewählt.

Bemerkung 3.2.9 *(i) Ist a die Anzahl der Elemente der Ordnung ≤ 2 in G, so ist $dim_K L(KG, ^\circ) = \frac{1}{2}(|G| - a)$ und $dim_K F(KG, ^\circ) = \frac{1}{2}(|G| + a)$.*

(ii) Sei $K = \mathbb{R}$ und $\nu_i := \begin{cases} 0 & D_i = \mathbb{C} \\ 1 & D_i = \mathbb{R} \\ -1 & D_i = \mathbb{H} \end{cases}$.
Dann ist $dim_{\mathbb{R}}(F(A_i, ^\circ)) = \frac{1}{2}x_i(x_i + \nu_i)$ und $dim_{\mathbb{R}}(L(A_i, ^\circ)) = \frac{1}{2}x_i(x_i - \nu_i)$.

(iii) Aus (i) und (ii) und der Tatsache daß $\sum_{i=1}^{s} x_i^2 = |G|$ ergibt sich die wohlbekannte Formel $\sum_{i=1}^{s} x_i\nu_i = a$.

Vergleicht man die Dimensionen mit denen aus Lemma 3.2.6, so erhält man

Satz 3.2.10 *Sei $K = \mathbb{Q}_p$, $A \cong D^{n\times n}$ ein involutionsinvarianter einfacher Summand von KG und χ ein absolut irreduzibler Charakter von G mit $\chi(A) \neq 0$. Seien s_∞ und s_p der reelle bzw. p-adische Schur-Index von χ, $L = Z(A)$ der Charakterkörper von χ und $L^+ = Fix(^\circ{}_{|L})$.*

(i) $(A, ^\circ)$ ist orthogonal, genau dann wenn $L = L^+$ und $s_\infty = s_p = 1$.

(ii) $(A, ^\circ)$ ist symplektisch, genau dann wenn $L = L^+$, $s_p = 1$ und $s_\infty = 2$.

(iii) $(A, ^\circ)$ ist unitär, genau dann wenn $L \neq L^+$.

(iv) $(A, ^\circ)$ ist hermitesch, genau dann wenn $s_\infty = s_p = 2$.

(v) $(A, ^\circ)$ ist schiefhermitesch, genau dann wenn $s_p = 2$ und $s_\infty = 1$.

Für Gruppenalgebren kann man folgenden Satz ausnutzen, um aus der Tatsache, daß für jeden Körper K der Charakteristik 0 Determinante und Hasse-Invariante der halbeinfachen Algebra (KG, T) trivial sind, Produktformeln zu erhalten.

Satz 3.2.11 *([LeT, Proposition 1]) Sei $A = D^{n\times n}$ eine einfache Algebra über einem Körper K der Charakteristik $\neq 2$, $\bar{}$ eine Involution auf D, $\mu = \pm 1$ und $^\circ : A \to A; a \mapsto H\bar{a}^{tr}H^{-1}$ die durch die μ-hermitesche Form $H = \mu\bar{H}^{tr}$ auf dem einfachen A-Rechtsmodul V induzierte Involution auf A. Der D-Linksmodul V wird durch $\bar{}$ auch ein D-Rechtsmodul. Dann ist $(A, (a,b) \mapsto Sp_{red}(a^\circ b))$ isometrisch zu*

$$(V \otimes_D V, (x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2) \mapsto (Sp_{red})_{D/K}(H(x_1, x_2)\overline{H(y_1, y_2)})).$$

Folgerung 3.2.12 *Mit den Bezeichnungen aus 3.2.7 sei $\alpha := \sum_{j=1}^{\frac{s-r}{2}} t_{r+j}x_{r+j}$ und $\beta := \sum_{i=t+1}^{r} t_i x_i$. Für $1 \leq i \leq t$ sei*

$$\varphi_i := (V_i \otimes_{D_i} V_i, (v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_2) \mapsto \frac{x_i}{|G|}(Sp_{red})_{D_i/K}(H_i(v_1, v_2)\overline{H_i(w_1, w_2)})).$$

Dann ist

$$(KG, T) \cong \perp_{i=1}^{t} \varphi_i \perp \mathbb{H}_{2\alpha+\beta}(K).$$

Da die Determinante von (KG, T) gleich 1 ist, folgt daraus, daß das Produkt der Determinanten der regulären bilinearen rationalen Räume φ_i in $(-1)^{\alpha+\beta/2}(K^*)^2$ ist.

Sei $1 \leq i \leq t$ fest und $(v_1, \ldots, v_{n_i})$ eine D_i-Basis von V_i mit $H_i(v_l, v_j) = h_j\delta_{lj}$ (vgl. Proposition 3.2.2). Dann ist $h_j = \mu_i\overline{h_j}$ und

$$\varphi_i \cong \frac{m_i n_i}{|G|} \perp_{j,l=1}^{n_i} (D_i, S_{h_j,h_l}).$$

Die Determinante von S_{h_j,h_l} ist

$$d(S_{h_j,h_l}) = (N_{reg})_{D_i/K}(h_j\overline{h_l})d_i.$$

Also ist

$$d(\varphi_i) = (N_{reg})_{D_i/K}(\mu_i)^{n_i}(\frac{x_i}{|G|})^{t_i x_i} d_i^{n_i^2}(K^*)^2 = \mu_i^{t_i n_i m_i^2}(\frac{x_i}{|G|})^{t_i x_i} d_i^{n_i^2}(K^*)^2.$$

Folgerung 3.2.13 *Mit den Bezeichnungen von oben ist*

$$\prod_{i=1}^{t}(\frac{x_i}{|G|})^{t_i x_i} d_i^{n_i^2} \mu_i^{t_i n_i m_i^2}(-1)^{\alpha+\frac{\beta}{2}} \in (K^*)^2.$$

Ebenso kann man ausnutzen, daß die Hasse-Invariante von (KG, T) trivial ist.

Lemma 3.2.14 *Sei $\bar{}$ eine Involution auf der Divisionsalgebra D und $h, h' \in D - \{0\}$. Dann ist $(D, S_{h,h'})$ isometrisch zu $(D, S_{h',h})$.*
Ist $h \in Z(D)$, so ist $(D, S_{h,h})$ isometrisch zu $(D, S_{1,1})$.

Beweis. Sind $x, y \in D$, so ist

$$(Sp_{red})_{D/\mathbb{Q}}(\bar{x}hy\bar{h}') = (Sp_{red})_{D/\mathbb{Q}}(h'\bar{y}\bar{h}x) = (Sp_{red})_{D/\mathbb{Q}}(xh'\bar{y}\bar{h}).$$

Also ist die Involution $\bar{}$ eine Isometrie zwischen $S_{h,h'}$ und $S_{h',h}$.
Ist $h \in Z(D)$, so ist die Multiplikation mit h eine Isometrie zwischen $(D, S_{h,h})$ und $(D, S_{1,1})$. □

Im schiefhermiteschen Fall gilt im allgemeinen nicht $S_{h,h} \sim S_{1,1}$:

Lemma 3.2.15 *Sei D eine Quaternionenalgebra mit Zentrum K und kanonischer Involution $\bar{}$. Sei $h \in D$ mit $\overline{h} = -h$, $-a = h\overline{h} \in K^*$. Dann ist die Hasse-Invariante $s(D, S_{h,h}) = [D](-1,-1)_K(a,-1)_K = (a,-1)_K s(D, S_{1,1})$.*

Beweis. Sei $D = \left(\frac{a,b}{K}\right)$, mit Basis $(1, h, j, hj)$, wo $hj = -jh$. Dann ist $S_{1,1} \cong \langle 2, -2a, -2b, 2ab\rangle$ und deshalb

$$s(D, S_{1,1}) = (2,2)_K(-2a,-a)_K(-2b,2ab)_K = (-1,-1)_K(b,a)_K,$$

da $(2,2)_K = (2,-1)_K = (2,1-2)_K = 1$ gilt. Weiter gilt

$$S_{h,h} \cong \langle -2a, 2a^2, -2ab, 2a^2b\rangle \cong \langle 2, -2a, 2b, -2ab\rangle$$

mit Hasse-Invariante

$$s(D, S_{h,h}) = (-2a,-2a)_K(2,-a)_K(-2ab,2b)_K = (-1,-1)_K(b,a)_K(-1,a)_K.$$

□

Folgerung 3.2.16 *Sei im letzten Lemma K ein p-adischer Körper mit Exponentenbewertung ν. Gilt $-1 \in (K^*)^2$ oder $p \neq 2$ und $\nu(h\overline{h}) = 0$, so ist $S_{h,h}$ isometrisch zu $S_{1,1}$.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen ist $(-1, h\overline{h})_K = 1$. Also haben $S_{h,h}$ und $S_{1,1}$ die gleiche Hasse-Invariante. Die Determinante beider quadratischer Formen ist ein Quadrat. Da Dimension, Hasse-Invariante und Determinante charakterisierende Invarianten regulärer quadratischer Formen über K sind, folgt daraus die Isometrie. □

Satz 3.2.17 *Sei K ein Körper der Charakteristik 0, L eine endliche Erweiterung von K vom Grad $n := [L : K]$. Sei D eine Quaternionenalgebra mit Zentrum L und kanonischer Involution $\bar{}$. Sei $h \in D$ mit $\overline{h} = -h$, $-a = h\overline{h} \in L^*$. Dann gilt für die Hasse-Invarianten der regulären quadratischen K-Räume*

$$s(D, S^{(K)}_{h,h}) = (N_{L/K}(a), -1)_K s(D, S^{(K)}_{1,1}).$$

Beweis. Da $S_{1,1}^{(L)} \cong \langle 2, -2a, -2b, 2ab \rangle$ und $S_{h,h}^{(L)} \cong \langle 2, -2a, 2b, -2ab \rangle$ gibt es also n-dimensionale K-quadratische Formen $A_1, \ldots, A_4$ mit $S_{1,1}^{(K)} \cong A_1 \perp A_2 \perp A_3 \perp A_4$ und $S_{h,h}^{(K)} \cong A_1 \perp A_2 \perp -A_3 \perp -A_4$. Es gilt $d(A_3)d(A_4) = N_{L/K}(-a)(K^*)^2$. Nach den Rechenregeln für die Hasse-Invariante orthogonaler Summen (Folgerung 3.1.31) findet man

$$s(S_{h,h}^{(K)}) = s(S_{1,1}^{(K)})(-1,-1)_K^n(-1, N_{L/K}(-a))_K = s(S_{1,1}^{(K)})(-1, N_{L/K}(a))_K. \qquad \square$$

Folgerung 3.2.18 *Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$, $1 \leq i \leq t$ und $\varphi_i = (A_i, (x,y) \mapsto \frac{x_i}{|G|} Sp_{red}(xy^\circ))$.*

(i) Ist H_i nicht schiefhermitesch, so ist die Hasse-Invariante von φ_i gleich

$$S_i := s(\varphi_i) = s_i^{n_i}(det_{reg}(H_i), -1)_K(\frac{x_i}{|G|}, d_i^{n_i})_K^{t_i x_i + 1}(\frac{x_i}{|G|}, -1)_K^{\binom{t_i x_i}{2}}.$$

(ii) Ist H_i schiefhermitesch, so ist die Hasse-Invariante von φ_i gleich

$$S_i := s(\varphi_i) = s_i^{n_i}(det_{red}(H_i), -1)_K(\frac{x_i}{|G|}, d_i^{n_i})_K^{t_i x_i + 1}(\frac{x_i}{|G|}, -1)_K^{\binom{t_i x_i}{2}}.$$

Beweis. Wie eben sei $H_i \sim diag(h_1, \ldots, h_{n_i})$ eine Diagonalisierung von H_i. Dann ist

$$\varphi_i \cong \frac{x_i}{|G|} \perp_{j,l=1}^{n_i} (D_i, S_{h_j,h_l}) \cong \frac{x_i}{|G|}(\perp_{1 \leq j < l \leq n_i} (S_{h_j,h_l} \perp S_{h_l,h_j}) \perp \perp_{j=1}^{n_i} S_{h_j,h_j}).$$

Nun ist nach Lemma 3.2.14 $S_{h_j,h_l} \cong S_{h_l,h_j}$ und deshalb für alle $1 \leq j < l \leq n_i$ $d(S_{h_j,h_l} \perp S_{h_l,h_j}) = 1$ und $s(S_{h_j,h_l} \perp S_{h_l,h_j}) = (-1, N_{reg}(h_j \overline{h_l}) d_i)$. Da

$$\prod_{1 \leq j < l \leq n_i} h_j \overline{h_l} = \prod_{j=1}^{n_i} h_j^{n_i - 1}$$

ist, ergibt sich mit $n := dim(\varphi_i)$ die Hasse-Invariante als

$$s(\varphi_i) = (\frac{x_i}{|G|}, -1)^{\binom{n}{2}}(d_i, -1)^{\binom{n_i}{2}}(\frac{x_i}{|G|}, d_i^{n_i})^{t_i n_i^2 m_i^2 + 1}(det_{reg}(H_i), -1)^{n_i - 1} s(\perp_{j=1}^{n_i} S_{h_j,h_j}).$$

Ist H_i nicht schiefhermitesch, so ist wegen Lemma 3.2.14 $S_{h_j,h_j} \cong S_{1,1}$ und die Hasse-Invariante ergibt sich als

$$s(\perp_{j=1}^{n_i} S_{h_j,h_j}) = s(I_{n_i} \otimes S_{1,1}) = s_i^{n_i}(d_i, -1)^{\binom{n_i}{2}}$$

und die Behauptung folgt.

Ist H_i schiefhermitesch, so erhält man mit Lemma 3.2.15 und den Rechenregeln für die Hasse-Invariante orthogonaler Summen

$$s(\perp_{j=1}^{n_i} S_{h_j,h_j}) = s_i^{n_i}(d_i,-1)^{\binom{n_i}{2}}(det_{red}(H_i),-1).$$

Da $det_{reg}(H_i)$ ein Quadrat ist, folgt auch hier die Behauptung. □

Aus den Betrachtungen erhält man nun eine Produktformel. Die Bezeichnungen aus 3.2.7 mit $K := \mathbb{Q}_p$ werden benutzt. Ist für $1 \leq i \leq s$ die Divisionsalgebra D_i nicht kommutativ, so sei $\bar{}$ als die kanonische Involution auf D_i gewählt.

Sei $\gamma = \alpha + \frac{\beta}{2}$ die halbe Dimension des maximal hyperbolischen Ideals von KG.

Für $1 \leq i \leq t$ sei $N_i := (\frac{x_i}{|G|})^{t_i x_i} d_i^{n_i}$ die Determinante von φ_i.

Satz 3.2.19 *Mit den obigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gilt in $Br_2(K)$, die mit $\{\pm 1\}$ identifiziert wird,*

$$(\prod_{i=1}^{t} S_i \prod_{j=i+1}^{t} (N_i,N_j)_K)(-1,-1)^{\binom{\gamma+1}{2}} = 1.$$

Beweis. Da für $1 \leq i \leq t$ der Fall $\mu_i = -1$ nur dann auftritt, wenn D_i eine Quaternionenalgebra über K_i ist, ist $(N_{reg})_{D_i/K}(\mu_i) = \mu_i^{t_i m_i^2} = 1$ für $1 \leq i \leq t$. Weiter ist $(KG,T) \cong \perp_{i=1}^{t} \varphi_i \perp \mathbb{H}_\gamma(K)$. Also ist

$$1 = s(KG,T) = \prod_{i=1}^{t} s(\varphi_i) \prod_{i=1}^{t} (d\varphi_i, \prod_{j=i+1}^{t} d\varphi_j)_K (-1,-1)^{\binom{\gamma}{2}} (\prod_{i=1}^{t} d\varphi_i, (-1)^\gamma)_K.$$

Da $d\varphi_i = (\frac{x_i}{|G|})^{t_i x_i} d_i^{n_i}$, $s(\varphi_i) = s_i^{n_i}(d_{H_i},-1)^{n_i-1}(\frac{x_i}{|G|}, d_i^{n_i})_K^{t_i x_i+1}(\frac{x_i}{|G|},-1)_K^{\binom{t_i x_i}{2}}$ und $\prod_{i=1}^{t} d\varphi_i = (-1)^\gamma (K^*)^2$ folgt die Behauptung. □

3.3 Zyklische Gruppen.

In diesem Abschnitt sollen die orthogonalen Darstellungen zyklischer Gruppen klassifiziert werden. Die Methoden sind weitgehend unabhängig von den vorhergehenden 2 Abschnitten und benutzen elementare zahlentheoretische Argumente und die Beschreibung rationaler quadratischer Formen aus Abschnitt 1.3.3. Dazu ist es hilfreich, Spurbilinearformen auf endlichen Körpern zu untersuchen.

3.3.1 Spurformen endlicher Körper.

Definition 3.3.1 *Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper und $\varphi = (V,f)$ ein regulärer quadratischer Raum über $\mathbb{F}$. Definiere $\chi(\varphi)$ durch $\chi(\varphi) := 0$, falls $dim(V)$ ungerade ist, und falls $dim(V) = 2m$ gerade ist, so sei*

$$\chi(\varphi) := \begin{cases} -1 & \varphi \text{ hat total isotropen Teilraum der Dimension } m \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Lemma 3.3.2 *([Kit, Lemma 1.3.1]) Sei $\varphi = (V, f)$ eine reguläre quadratische Form über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen. Sei $dim(V) =: n =: 2m$ gerade. Dann ist*

$$|\{v \in V \mid f(v) = 0\}| = q^{n-1} + (q-1)q^{m-1}\chi(\varphi).$$

Da es nur einen anisotropen quadratischen Raum $\neq 0$ über $\mathbb{F}$ gibt, kann man den Isometrietyp von V an seiner Determinante ablesen:

Folgerung 3.3.3 *Ist $char(\mathbb{F}) \neq 2$ und $dim(V) = 2m$ gerade, so ist $\chi(V) = 1$ genau dann wenn $d(\varphi) = (-1)^m\epsilon(\mathbb{F}^*)^2$ wo $\epsilon \in \mathbb{F}^* - (\mathbb{F}^*)^2$ ein Nichtquadrat ist.*

Satz 3.3.4 *Sei q eine Primzahlpotenz und $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ eine Körpererweiterung geraden Grades $n = 2m$. Sei $\mathbb{F}^+$ der Zwischenkörper mit $[\mathbb{F} : \mathbb{F}^+] = 2$ und $\bar{} : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ der Erzeuger der Galoisgruppe $Gal(\mathbb{F}, \mathbb{F}^+)$. Für $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}^+$ sei $N_\alpha : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_q : x \mapsto Spur_{\mathbb{F}^+/\mathbb{F}_q}(\alpha x\bar{x})$. Dann ist $\varphi := (\mathbb{F}, N_\alpha)$ ein regulärer quadratischer Raum über $\mathbb{F}_q$ mit $\chi(\varphi) = 1$.*

Beweis. Die Normform $N : \mathbb{F} \to \mathbb{F}^+ : x \mapsto x\bar{x}$ ist eine multiplikative $\mathbb{F}^+$-quadratische Form. Nach Hilbert Satz 90 gilt $N(\mathbb{F}^*) = (\mathbb{F}^+)^*$. Für $b \in \mathbb{F}^+$ sei $x_b \in \mathbb{F}$ mit $N(x_b) = b$ fest gewählt. Dann ist $x_0 = 0$ und die Elemente $x \in \mathbb{F}$ mit $N(x) = b \in \mathbb{F}^+$ sind $x = 0$, falls $b = 0$ und $x = x_b y$ mit $N(y) = 1$. Also gibt es für $0 \neq b \in \mathbb{F}^+$ genau $q^m + 1 = (q^n - 1)/(q^m - 1)$ Elemente $x \in \mathbb{F}$ mit $N(x) = b$. Die Abbildung $Sp_\alpha : \mathbb{F}^+ \to \mathbb{F}_q : b \mapsto Spur_{\mathbb{F}^+/\mathbb{F}_q}(b\alpha)$ ist eine surjektive $\mathbb{F}_q$-lineare Abbildung $\mathbb{F}^+ \cong \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q$. Also hat der Kern q^{m-1} Elemente, davon sind $q^{m-1}-1$ Elemente ungleich 0.
Also ergibt sich die Anzahl der $x \in \mathbb{F}$ mit $N_\alpha(x) = 0$ als $(q^{m-1} - 1)(q^m + 1) + 1 = q^{n-1} - (q-1)q^{m-1}$.
Nach Lemma 3.3.2 folgt daraus $\chi(\varphi) = 1$. □

Folgerung 3.3.5 *Sei q eine Potenz einer ungeraden Primzahl und $\mathbb{F}/\mathbb{F}_q$ eine Körpererweiterung geraden Grades. Die Determinante der Spurbilinearform $S : \mathbb{F} \times \mathbb{F} \to \mathbb{F}_q : (x, y) \mapsto Spur_{\mathbb{F}/\mathbb{F}_q}(xy)$ ist ein Nichtquadrat.*

Beweis. Sei $A : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ die $\mathbb{F}_q$-lineare Abbildung $x \mapsto \bar{x}$ aus Satz 3.3.4. Wählt man $b \in \mathbb{F} - \mathbb{F}^+$ mit $\bar{b} = -b$ und $(a_1, \ldots, a_m)$ als $\mathbb{F}_q$-Basis von $\mathbb{F}^+$ so ist $(a_1, \ldots, a_m, ba_1, \ldots, ba_m)$ eine $\mathbb{F}_q$-Basis von $\mathbb{F}$ bezüglich der A die Matrix $diag(1^m, (-1)^m)$ hat. Also ist $det(A) = (-1)^m$ und

$$d(S) = det(A)d(N_1) = (-1)^m(-1)^m\epsilon(\mathbb{F}_q^*)^2 = \epsilon(\mathbb{F}_q^*)^2$$

ein Nichtquadrat. □

3.3.2 Die Formenräume irreduzibler zyklischer Gruppen.

Sei nun $G \cong C_k$, die zyklische Gruppe der Ordnung k. Für die Beschreibung der G-invarianten quadratischen Formen auf einem treuen irreduziblen $\mathbb{Q}G$-Modul kann man Œ annehmen, daß k entweder ungerade oder durch 4 teilbar ist.

Die Gruppe $G = \langle g \rangle$ operiert auf $K := \mathbb{Q}[\zeta_k]$ dem k-ten Kreisteilungskörper durch $\alpha g := \alpha\zeta_k$ für alle $\alpha \in K$. Man erhält so eine treue rational irreduzible Darstellung $G \to GL(K)$, wo K als $\mathbb{Q}$-Vektorraum der Dimension $dim_{\mathbb{Q}}(K) = n := \varphi(k)$ aufgefaßt wird und φ die Euler'sche φ-Funktion ist. Sei $^- \in Gal(K/\mathbb{Q})$ definiert durch $\zeta_k \mapsto \zeta_k^{-1}$ die komplexe Konjugation auf K und $K^+ := \mathbb{Q}[\zeta_k + \zeta_k^{-1}] = Fix(^-)$ der maximal total reelle Teilkörper von K. Die G-invarianten symmetrischen Bilinearformen auf K sind gerade die

$$\phi_\alpha^{(K)} =: \phi_\alpha : (v, w) \mapsto Spur_{K/\mathbb{Q}}(\alpha v\bar{w}) \text{ mit } \alpha \in K^+.$$

Sei $\varphi_\alpha^{(K)} = \varphi_\alpha = (K, \phi_\alpha)$.

Zunächst werden die Invarianten von φ_1 bestimmt.

Lemma 3.3.6 *Sei $k = p^t k'$ mit $t \geq 1$, $ggT(p, k') = 1$ und $k' > 2$. Dann ist $K = \mathbb{Q}[\zeta_{p^t}]\mathbb{Q}[\zeta_{k'}] =: K_pK'$ und*

$$\varphi_1^{(K)} \cong \varphi_1^{(K_p)} \otimes \varphi_1^{(K')}.$$

Beweis. Klar ist $K = K_pK'$. Dem entsprechend ist $Gal(K/\mathbb{Q}) = H_1H_2$ mit $Gal(K_p/\mathbb{Q}) \cong H_1 = \{\sigma \in Gal(K/\mathbb{Q}) \mid \sigma_{|K'} = id_{|K'}\}$ und $H_2 \cong Gal(K'/\mathbb{Q})$ analog. Die Einschränkung von $^-$ auf K_p bzw. K' ist die komplexe Konjugation auf den Teilkörpern. Ist nun $a \in K_p$ und $b \in K'$ so gilt $Spur_{K/\mathbb{Q}}(ab) = \sum_{h_1 \in H_1} \sum_{h_2 \in H_2} (ab)^{h_1h_2} = Spur_{K_p/\mathbb{Q}}(a) Spur_{K'/\mathbb{Q}}(b)$. Also gilt für $a, a' \in K_p$ und $b, b' \in K'$ daß $\phi_1(ab, a'b') = Spur_{K/\mathbb{Q}}(a\overline{a'}b\overline{b'}) = \phi_1^{(K_p)}(a, a')\phi_1^{(K')}(b, b')$. □

Bemerkung 3.3.7 *Sei p eine ungerade Primzahl.*

(a) Das Gitter $(\mathbb{Z}[\zeta_p], \phi_1)$ ist isometrisch zu $^{(p)}\mathbb{A}_{p-1}^{\#}$. Da $\mathbb{Q}\mathbb{A}_{p-1} \perp \langle p \rangle$ rational äquivalent zu $\perp_{i=1}^{p} \langle 1 \rangle$ ist, gilt $s((\mathbb{Q}[\zeta_p], \phi_1)) = s(\mathbb{Q}\ ^{(p)}\mathbb{A}_{p-1}) = (p, p)$.

(b) Sei $k = p^t > 1$, $\zeta := \zeta_k$ eine primitive k-te Einheitswurzel und $K := \mathbb{Q}[\zeta_k]$. Dann ist $Spur_{K/\mathbb{Q}}(\zeta^a) \neq 0$ genau dann wenn p^{t-1} den Exponenten a teilt. Sei B das $(p-1)$-Tupel $B := (1, \zeta^{p^{t-1}}, \ldots, \zeta^{(p-2)p^{t-1}})$. Dann ist $(\langle B \rangle, 1/(p^{t-1})\phi_1) \cong \mathbb{Q}\ ^{(p)}\mathbb{A}_{p-1}^{\#}$ und K ist bezüglich ϕ_1 eine orthogonale Summe der Teilräume $\langle \zeta^i B \rangle$ $(0 \leq i \leq p^{t-1} - 1)$. Also gilt $(K, 1/p^t\phi_1) \cong \perp^{p^{t-1}} \mathbb{Q}\mathbb{A}_{p-1}^{\#}$ und die Hasse-Invariante ergibt sich als

$$s(\varphi_1) = (-1, p)^{t+(t-1)\frac{p-1}{2}+\binom{p^{t-1}}{2}} = (-1, p)^t.$$

Satz 3.3.8 *(a) Die Determinante von φ_1 ist $p(\mathbb{Q}^*)^2$, falls $k = p^t > 1$ eine Potenz einer ungeraden Primzahl p ist, und $(\mathbb{Q}^*)^2$ sonst.*

(b) Die Signatur von φ_1 ist n.

(c) Ist p eine ungerade Primzahl, die k nicht teilt, so ist $s_p(\varphi_1) = 1$.

(d) Ist $k = p^t$ eine Potenz einer ungeraden Primzahl, so ist $s_p(\varphi_1) = (-1, p)^t$.

(e) Ist $k = p^t k'$ mit $t \geq 1$, $ggT(p, k') = 1$ und $k' > 2$, so sei $m := \varphi(k') = [\mathbb{Q}[\zeta_{k'}] : \mathbb{Q}] = n/((p-1)p^{t-1})$ und $d := q$, falls $k' = q^{t'}$ eine Potenz einer ungeraden Primzahl ist bzw. $d := 1$ sonst. Dann ist

$$s_p(\varphi_1) = (-1, p)^{\binom{m}{2}}(p, d).$$

Beweis. Die Punkte (a)-(d) folgen aus Bemerkung 3.3.7. Zum Beweis von (e): Der Körper $K = \mathbb{Q}[\zeta_k]$ ist das Kompositum von $K_p := \mathbb{Q}[\zeta_{p^t}]$ und $K' := \mathbb{Q}[\zeta_{k'}]$. Also folgt mit Lemma 3.3.6, daß $(K, \phi_1) \cong (K_p, \phi_1^{(K_p)}) \otimes (K', \phi_1^{(K')})$ ist. Die Dimensionen von K_p und K' sind beide gerade. Nach (a) ist $d = d((\varphi_1^{(K')}) \in \mathbb{Z}_p^*$ die Determinante von K'. Nach Lemma 3.1.32 findet man somit $s_p(\varphi_1) = (p, p)^{\binom{m}{2}}(p, d)$. □

Bemerkung 3.3.9 *Sei $k = p^t k'$ mit $ggT(p, k') = 1$ und $t \geq 0$. Sei $x := p^{t-1}(pt - t - 1)$ falls $t > 0$ und $x := 0$ falls $t = 0$, die p-adische Bewertung der Diskriminante von $\mathbb{Q}[\zeta_{p^t}]/\mathbb{Q}$ (cf. [Was, Proposition 2.1]). Bezeichnet $R := \mathbb{Z}[\zeta_k]$ den Ring der ganzen Zahlen in K, so ist $(\mathbb{Z}_p \otimes R)^{\#(\phi_1)} = (1 - \zeta_k^{k'})^{-x}(\mathbb{Z}_p \otimes R)$ und allgemeiner $(\mathbb{Z}_p \otimes R)^{\#(\phi_\alpha)} = \alpha^{-1}(1 - \zeta_k^{k'})^{-x}(\mathbb{Z}_p \otimes R)$.*

Zur Bestimmung des Isometrietyps des regulären quadratischen Raums φ_α für beliebiges $0 \neq \alpha \in K^+$ wird die Beschreibung über $sym(\varphi_\alpha)$ aus Abschnitt 1.3.3 benutzt. Dazu ist es notwendig, die bilinearen Räume $\delta_p(\varphi_\alpha)$ für Primzahlen p zu beschreiben.

Sei $R := \mathbb{Z}[\zeta_k]$ der Ring der ganzen Zahlen in K. Betrachte R als $\mathbb{Z}$-Gitter in dem $\mathbb{Q}$-Vektorraum K. Sei p eine Primzahl und $pR = \wp_1^e \dots \wp_s^e$ die Zerlegung von pR in Potenzen verschiedener Primideale von R. Dann ist $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} K = K_1 \oplus \dots \oplus K_s \cong \mathbb{Q}_p[\zeta_k] \oplus \dots \oplus \mathbb{Q}_p[\zeta_k]$ und $\mathbb{Z}_p \otimes R = L_1 \oplus \dots \oplus L_s$, wo $L_i \cong \mathbb{Z}_p[\zeta_k]$ die $\mathbb{Z}_p$-Maximalordnung in K_i ist. Also sind die L_i lokale Ringe. Sei π_i ein Primelement in L_i.

Der Galoisautomorphismus $\bar{}$ läßt pR fest und permutiert deshalb die Primideale $\wp_1, \dots, \wp_s$. Sei $\sigma \in S_s$ definiert durch $\overline{\wp_i} = \wp_{\sigma(i)}$. Da $\langle \bar{} \rangle$ zentral ist in $Gal(K/\mathbb{Q})$ und $Gal(K/\mathbb{Q})$ transitiv auf den $\wp_1, \dots, \wp_s$ operiert, folgt, daß σ entweder fixpunktfrei ist oder $\sigma = id$.

Bemerkung 3.3.10 *(i) Sei $\sigma(i) = i$ für alle $1 \leq i \leq s$. Dann induziert die Bilinearform ϕ_α auf den K_i symmetrische reguläre $\mathbb{Q}_p$-Bilinearformen und $\phi_\alpha(K_i, K_j) = 0$ für alle $1 \leq i \neq j \leq s$. Also gilt $(\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Q}} K, \phi_\alpha) \cong \perp_{i=1}^{s} (K_i, \phi_\alpha^{(i)})$.*

(ii) Sei $\sigma(i) \neq i$ für alle $1 \leq i \leq s$. Dann ist $\delta_p(K, \phi_\alpha) = 0$ in $W(\mathbb{F}_p)$.

(iii) Die $\mathbb{Z}_p C_k$-Gitter in K_i sind $\pi_i^j L_i$ mit $j \in \mathbb{Z}$ für alle $1 \leq i \leq s$

Die Invariante $\delta_p(\varphi_\alpha)$ läßt sich nach Satz 1.3.17 aus dem Element $(\mathbb{Q}_p \otimes K, \phi_\alpha)$ in $W(\mathbb{Q}_p)$ berechnen. Nach dem Lemma gilt

$$[(\mathbb{Q}_p \otimes K, \phi_\alpha)] = \begin{cases} 0 & \sigma \neq id \\ \perp_{i=1}^{s} (K_i, \phi_\alpha^{(i)}) & \sigma = id \end{cases}$$

Also kann man annehmen, daß $\sigma = id$ gilt, was gleichbedeutend damit ist, daß p in K/K^+ nicht zerlegt ist. Da δ_p additiv ist, genügt es, die $\delta_p((K_i, \phi_\alpha^{(i)}))$ zu bestimmen.

Ist $k = p^t k'$ mit $ggT(p, k') = 1$ so ist $\pi_i^{j-1} L_i / \pi_i^j L_i \cong L_i / \pi_i L_i \cong \mathbb{F}_p[\zeta_{k'}] =: \mathbb{F}$. Die durch die Involution $\bar{}$ auf $\pi_i^{j-1} L_i / \pi_i^j L_i$ induzierte Involution auf $\mathbb{F}$ sei wieder mit $\bar{}$ bezeichnet. Da die k'-ten Enheitswurzeln alle modulo p verschieden sind, sieht man, daß $\overline{\zeta_{k'}} = \zeta_{k'}^{-1}$ gilt und deshalb $\bar{} = id$ ist, genau dann wenn $k' = 1$ also k eine p-Potenz ist. Diesen Fall muß man gesondert betrachten.

Sei $j \in \mathbb{Z}$ minimal, so daß $\pi_i^j L_i$ bezüglich $\phi_\alpha^{(i)}$ ganz ist. Dann gilt $(\pi_i^j L_i)^\# = \pi_i^j L_i$ oder $(\pi_i^j L_i)^\# = \pi_i^{j-1} L_i$. Im ersten Fall ist $\delta_p(\varphi_i) = 0$ im zweiten Fall ist $(\pi_i^j L_i)^\# / \pi_i^j L_i \cong (\mathbb{F}_p[\zeta_{k'}], (x, y) \mapsto Spur(\alpha_i x \bar{y}))$, wo $0 \neq \alpha_i \in Fix(\bar{}) = \mathbb{F}_p[\zeta_{k'} + \zeta_{k'}^{-1}] =: \mathbb{F}^+$ und $Spur$ die Spur von $\mathbb{F} \to \mathbb{F}_p$ ist. Für die Fälle $k \neq p^t$ kann man also zur Berechnung von $\delta_p(\alpha\phi)$ die Ergebnisse aus Abschnitt 3.3.1 verwenden.

Lemma 3.3.11 *Sei p eine Primzahl, $t \in \mathbb{N}$, ζ eine primitive p^t-te Einheitswurzel, $n = \varphi(p^t) = (p-1)p^{t-1}$ und $K' \leq \mathbb{Q}[\zeta] =: K$ ein Teilkörper des p^t-ten Kreisteilungskörpers von Index $m := [K : K']$. Sei $u := \sum_{i=0}^{n} a_i \zeta^i \in K'$ mit $a_i \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$N_{K'/\mathbb{Q}}(u) \equiv (\sum_{i=0}^{n} a_i)^{[K':\mathbb{Q}]} \pmod{p}.$$

Beweis. Sei $\rho : K \to \mathbb{Q}^{n \times n}$ die reguläre Darstellung. Für $a \in K'$ ist dann $N_{K'/\mathbb{Q}}(a)^m = det(\rho(a))$. Nun ist die von ζ erzeugte Untergruppe eine p-Gruppe. Also gibt es eine $\mathbb{Q}$-Basis von K bezüglich der $\rho(\zeta) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ modulo $p\mathbb{Z}^{n \times n}$ kongruent zu einer oberen Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonalen ist. Also ist $det(\rho(u)) \equiv (\sum_{i=0}^{n} a_i)^n \pmod{p}$. Andererseits ist die Einschränkung von ρ auf K' $\rho_{|K'} = \oplus^m \rho'$ direkte Summe von m Kopien der regulären Darstellung ρ' von K'. Also ist $N_{K'/\mathbb{Q}}(u) = det(\rho'(u))$ eine m-te Wurzel von $det(\rho(u))$, $det(\rho'(u)) \equiv \epsilon_u a$ mit $a \equiv (\sum_{i=0}^{n} a_i)^{n/m} \pmod{p}$ für eine m-te Einheitswurzel

$\epsilon_u = \pm 1 \in \mathbb{Z}$. Da die Determinante $\mathbb{R}^{n/m \times n/m} \to \mathbb{R}$ stetig ist, hängt ϵ_u nicht von $\rho'(u) \in \mathbb{R}^{n/m \times n/m}$ ab. Also folgt $\epsilon_u = \epsilon_1 = 1$ und damit die Behauptung. □

Folgerung 3.3.12 *Mit den Bezeichnungen aus dem Lemma gilt für $u \in K' := K^+$ mit $p \not| N_{K^+/\mathbb{Q}}(u)$, daß $\sum_{i=0}^{n} a_i$ ein Quadrat modulo p ist, genau dann wenn $N_{K^+/\mathbb{Q}}(u) \equiv 1 \pmod{p}$.*

Lemma 3.3.13 *Ist $k = p^t$ eine Potenz einer ungeraden Primzahl und $u = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \zeta_k^i \in \mathbb{Z}[\zeta_k + \zeta_k^{-1}]$ mit $p \not| N_{K^+/\mathbb{Q}}(u)$ so gibt es $\epsilon \in \{\pm 1\}$ mit $N_{K^+/\mathbb{Q}}(u) \equiv \epsilon \pmod{p}$. Sei $\delta := (-1)^t$. Dann ist $\delta_p(\varphi_u) = p^{\delta \frac{p-1}{2}\epsilon}$.*

Beweis. Aus Lemma 3.3.11 folgt $N_{K^+/\mathbb{Q}}(u) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$, wo $a := \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

Sei $x := \frac{p^{t-1}-1}{2}(pt-t-1)$. Dann ist $L := \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (1-\zeta_k)^{-x}\mathbb{Z}[\zeta_k]$ ein bezüglich ϕ_1 und ϕ_u ganzes $\mathbb{Z}_p$-Gitter in $\mathbb{Q}_p \otimes K$ mit $L^{\#(\phi_1)} = L^{\#(\phi_u)} =: L^{\#}$ und $|L^{\#}/L| = p$. Die $\mathbb{Z}_p[\zeta_k]$-Gitter in $\mathbb{Q}_p \otimes K$ sind von der Form $L_j := (1-\zeta_k)^j L$ mit $j \in \mathbb{Z}$. Es gilt $L_0 = L^{\#} \supset L =: L_1 \ldots \supset L_n = pL^{\#}$. Bezüglich einer Kettenbasis $B := (b_0, \ldots, b_{n-1})$ von $L^{\#}$ mit $L_j = \langle pb_0, \ldots, pb_{j-1}, b_j, \ldots, b_{n-1}\rangle_{\mathbb{Z}_p}$ $(j = 0, \ldots n)$ hat die Rechtsmultiplikation mit ζ_k eine Matrix $\in \mathbb{Z}_p^{n \times n}$ kongruent zu einer oberen Dreiecksmatrix mit 1 auf der Diagonalen modulo $p\mathbb{Z}_p^{n \times n}$. Da $\delta_p(\phi_1) = p^{(\frac{\delta}{p})}$ ist, ist die Gram-Matrix von ϕ_1 bezüglich B gleich

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{p}\delta & v \\ \hline v^{tr} & A \end{array}\right)$$

mit $A \in \mathbb{Z}_p^{(n-1)\times(n-1)}$ und $v \in \mathbb{Z}_p^{n-1}$.

Auf $L^{\#}/L$ operiert ζ_k wie 1 und deshalb u wie $a := \sum_{i=0}^{n} a_i$. Also hat die Gram-Matrix von ϕ_u bezüglich B eine ähnliche Gestalt wie die von ϕ_1 mit δ ersetzt durch δa. Also ist $\delta_p(\varphi_u) = p^{(\frac{\delta a}{p})} = p^{\delta \frac{p-1}{2}\epsilon}$. □

Der abschließende Satz bestimmt die Invarianten der orthogonalen C_k-Moduln $\varphi_\alpha = (\mathbb{Q}[\zeta_k], ((v,w) \mapsto Spur(\alpha v \overline{w}))$ in Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha \in K^+ = \mathbb{Q}[\zeta_k + \zeta_k^{-1}]$.

Satz 3.3.14 *(i) Die Signatur von (φ_α) ist $2(a-b)$, wo a (bzw. b) die Anzahl der Einbettungen $\iota : K^+ \to \mathbb{R}$ ist, mit $\iota(\alpha) > 0$ (bzw. $\iota(\alpha) < 0$). Es ist $a + b = \frac{n}{2} = [K^+ : \mathbb{Q}]$.*

(ii) $$d(\varphi_\alpha) = d(\varphi_1) = \begin{cases} q(\mathbb{Q}^*)^2 & \text{falls } k \text{ Potenz der ungeraden Primzahl } q \\ (\mathbb{Q}^*)^2 & \text{sonst} \end{cases}.$$

(iii) Ist $k = p^t$, so ist $\alpha = uy\bar{y}$ mit $y \in K$ und $u \in K^+ \cap (\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}[\zeta_k + \zeta_k^{-1}])^*$. Sei $\epsilon \in \{\pm 1\}$ mit $\epsilon N_{K^+/\mathbb{Q}}(u) \equiv (-1)^{(p-1)/2} \pmod{p}$. Dann gilt

$$\delta_p(\varphi_\alpha) = p^{\epsilon p^{t-1}} \text{ und } s_p(\varphi_\alpha) = \epsilon(-1)^{\frac{p^{t-1}-1}{2}}.$$

(iv) Sei $p > 2$ eine Primzahl, so daß $k = p^t k'$ mit $t \geq 0$, $k' > 2$ und $ggT(p, k') = 1$.
Ist p zerlegt in K/K^+, so ist $s_p(\varphi_\alpha) = 1$.
Sonst sei $(p) = \prod_{i=1}^{s} \wp_i^e$ und $x := p^{t-1}(pt - t - 1)$ falls $t > 0$ und $x := 0$ falls $t = 0$ wie in Bemerkung 3.3.9. $(1 - \zeta_k^{k'})^x \alpha(\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}[\zeta_k]) = \prod_{i=1}^{s} \wp_i^{j_i}$. Sei $n_p := \sum_{i=1,\ j_i \text{ ungerade}}^{s} \frac{n}{es}$ und $\epsilon := \prod_{i=1}^{s} (-(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{n}{2es}})^{j_i}$. Dann ist

$$\delta_p(\varphi_\alpha) = p^{\epsilon n_p}.$$

Sei $u := q$, falls $k = q^t$ eine ungerade Primzahlpotenz ist und $u := 1$ sonst. Dann gilt

$$s_p(\varphi_\alpha) = \epsilon(u, p)^{n_p}(-1, p)^{\binom{n_p}{2}} = (u, p)^{n_p} \prod_{i=1}^{s} (-1)^{j_i}.$$

Beweis. (i) Ist klar. (ii) Die Determinante $d(\varphi_\alpha) = N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) d(\varphi_1)$. Da $\alpha \in K^+$ ist, ist $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = (N_{K^+/Q}(\alpha))^2$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}^*$. Also folgt die Behauptung aus Satz 3.3.8.
(iii) Folgt mit Lemma 3.3.13 und Lemma 1.3.18 und Satz 3.3.8.
(iv) Der erste Teil folgt aus Bemerkung 3.3.10. Sei also p nicht zerlegt in K/K^+. Sei wie oben L_i der zu dem Primideal $\wp_i$ über p korrespondierende orthogonale Summand von $(\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}[\zeta_k], \phi_\alpha)$ und $L = \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}[\zeta_k] = \perp_{i=1}^{s} L_i$. Sei $a_i := \lfloor \frac{j_i}{2} \rfloor$ und π_i ein Primelement in dem lokalen Ring $L_i \cong \mathbb{Z}_p[\zeta_k]$. Dann ist $L_a := \perp_{i=1}^{s} \pi^{-a_i} L_i$ ein bezüglich ϕ_α ganzes Gitter in $\mathbb{Q}_p \otimes K$ mit $L_a^{\#,(\phi_\alpha)}/L_a = \cong \perp_{i=1,j_i \text{ ungerade}}^{s} (\mathbb{F}_p[\zeta_{k'}], (x, y) \mapsto Spur_{\mathbb{F}_p[\zeta_{k'}]/\mathbb{F}_p}(\alpha_i x \bar{y}))$ für geeignetes $\alpha_i \in \mathbb{F}_p[\zeta_{k'} + \zeta_{k'}^{-1}]$. Also ist nach Satz 3.3.4 $\delta_p(\varphi_\alpha) = \sum_{i=1,j_i \text{ ungerade}}^{s} p^{-n/(es)} = p^{\epsilon n_p}$. Die Zahl u aus dem Satz ist nach (ii) die Determinante von φ_α. Also findet man mit Lemma 1.3.18 die letzte Behauptung von (iv). □

3.4 Einfache Konstruktionsprinzipien.

Sei G eine endliche Gruppe und $\varphi := (V, q)$ ein irreduzibler orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Modul. Betrachtet man V als Modul für seinen Endomorphismenring $D := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}G}(V)$, so erhält man eine zusätzliche algebraische Struktur auf V, die es erlaubt, q als Spurform einer Hermiteschen Form auf dem D-Modul V aufzufassen. Daraus erhält man im Fall $D \neq \mathbb{Q}$ zusätzliche Informationen über die rationalen Invarianten von φ, wie im nächsten Abschnitt demonstriert wird.

Eine zweite Möglichkeit, die rationalen Invarianten von φ zu bestimmen, bieten Konstruktionen von V als Summand reduzibler, bekannter orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Moduln. Diese werden in Abschnitt 3.4.2 für Tensorprodukte (vgl. auch Abschnitt 2.1 für induzierte Moduln) untersucht.

Die hergeleiteten Formeln sind wesentliche Hilfsmittel für die Beispielrechnungen in Abschnitt 3.5.

3.4.1 Spurformen.

In Kapitel 10 von [Scha] werden Invarianten von Spurformen hermitescher Formen über quadratischen Zahlkörpern und Quaternionenalgebren untersucht. Vom algebrentheoretischen Standpunkt ist die Berechnung dieser Invarianten recht einfach, gruppentheoretisch ist das Ergebnis nicht so naheliegend (vgl. [Tur2], [Tur1]).

Definition 3.4.1 *Sei L/K eine separable Erweiterung vom Grad 2 und σ der Erzeuger der Galoisgruppe. Sei V ein L Vektorraum. Eine biadditive Abbildung $h : V \times V \to L$ heißt* hermitesche Form *falls h linear im ersten Argument ist und $h(v,w) = \sigma(h(w,v))$ für alle $v, w \in V$ gilt. Die* Spurform *von h ist die K-quadratische Form*

$$q_h : x \mapsto h(x,x) \in Fix(\sigma) = K.$$

Die Determinante *$d(h)$ von h ist die Determinante einer Gram-Matrix von h modulo $N_{L/K}(L^*)$. Die* Diskriminante *von h ist $d_\pm(h) = (-1)^{\binom{dim(V)}{2}} d(h)$.*

Satz 3.4.2 *Seien V, V' zwei L-Vektorräume der Dimension n bzw. m und $h : V \times V \to L$ bzw. $h' : V' \times V' \to L$ hermitesche Formen.*

(i) h ist isometrisch zu h', genau dann, wenn q_h isometrisch zu $q_{h'}$ ist.

(ii) Ist $char(K) \neq 2$ und $L = K[\sqrt{\delta}]$, so gilt

$$dim(q_h) = 2n,\ d_\pm(q_h) = \delta^n,\ [c(q_h)] = (\delta, d_\pm(h))_K$$

(iii) Ist $char(K) \neq 2$ und $L = K[\sqrt{\delta}]$, so gilt

$$dim(q_{h\otimes h'}) = 2nm,\ d_\pm(q_{h\otimes h'}) = \delta^{nm},\ [c(q_{h\otimes h'})] = (\delta, (-1)^{\binom{nm}{2}} d(h)^m d(h')^n)_K$$

Für $\delta = -1$ findet man die Aussage in [Tur1].

Beweis. (i) Siehe [Scha, Theorem (10.1.1)(ii)].

(ii) Siehe [Scha, 10.1.4], jedoch ist dort in der Clifford-Invariante ein Druckfehler. Sei $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ mit $a_i \in K^*$ eine Diagonalisierung von h mit $n = dim(h)$. Dann gilt $q_h = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \perp (-\delta)\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \varphi \perp (-\delta)\varphi$. Also folgen die ersten beiden Aussagen direkt. Ist n gerade, so ist $[c(q_h)] = [c(\varphi \perp -\delta\varphi)] = [c(\varphi)][c(-\delta d_\pm(\varphi)\varphi)] = (-\delta d_\pm(\varphi), d_\pm(\varphi)) = (\delta, d_\pm(\varphi))$. Ist n ungerade, so findet man $[c(q_h)] = (d_\pm(\varphi), (-\delta)^n d_\pm(\varphi)) = (\delta, d_\pm(\varphi))$, da dann $[c(-\delta\varphi)] = [c(\varphi)]$.

(iii) Sei $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ mit $a_i \in K^*$ eine Diagonalisierung von h und $\langle b_1, \ldots, b_m \rangle$ mit $b_i \in K^*$ eine Diagonalisierung von h'. Dann gilt $q_{h\otimes h'} = \perp_{i=1}^n \perp_{j=1}^m \langle a_i b_j \rangle \perp \perp_{i=1}^n \perp_{j=1}^m \langle (-\delta) a_i b_j \rangle = \varphi \perp (-\delta)\varphi$. Also folgen die ersten beiden Aussagen direkt. Wie in (ii) findet man $[c(q_{h\otimes h'})] = (\delta, d_\pm(\varphi))$. □

Definition 3.4.3 *Sei $char(K) \neq 2$, D eine Quaternionenalgebra über K und $\sigma : D \to D$ die kanonische Involution. Sei V ein D Vektorraum. Eine biadditive Abbildung $h : V \times V \to D$ heißt* hermitesche Form *falls h linear im ersten Argument ist und $h(v,w) = \sigma(h(w,v))$ für alle $v, w \in V$ gilt. Die* Spurform *von h ist die K-quadratische Form $q_h : x \mapsto h(x,x) \in Fix(\sigma) = K$.*

Satz 3.4.4 *(i) Zwei hermitesche Formen sind isometrisch, genau dann, wenn ihre Spurformen isometrisch sind.*

(ii) Ist K ein algebraischer Zahlkörper, so ist

$$dim(q_h) = 4dim(h),\ d(q_h) = d_{\pm}(q_h) = 1,\ s(q_h) = ((-1,-1)_K[D])^{dim(h)}$$

Ist K total reell und D positiv definit, so ist dies die Aussage von [Tur2].

Beweis. (i) [Scha, Theorem 10.1.7].
(ii) Sei $D = (\frac{a,b}{K})$. Sei zunächst $dim(h) = 1$. Bezüglich der kanonischen K-Basis $(1, i, j, ij)$ von D ist dann $q_h \cong \langle\!\langle \alpha, -\alpha a, -\alpha b, \alpha ab \rangle\!\rangle$ für ein $\alpha \in K^*$. Also ist $d(q_h) = 1$ und

$$s(q_h) = (\alpha, \alpha)(-\alpha a, -a)(-\alpha b, \alpha ab) = (a,b)(-1,-1).$$

Ist $dim(h)$ beliebig, so diagonalisiert man h über D und erhält aus der Additionsformel für die Hasse-Invariante (3.1.31) die Behauptung. □

3.4.2 Tensorprodukte.

Bei der Konstruktion von Darstellungen benutzt man häufig Tensorprodukte. Nun zerlegt sich $V \otimes V$ für $char(K) \neq 2$ in den Teilraum $\Lambda^2(V)$ der schiefsymmetrischen Tensoren und den Teilraum $\otimes^{[2]}(V)$, der symmetrischen Tensoren. Dies gilt auch für quadratische Räume

$$\varphi \otimes \varphi = \Lambda^2(\varphi) \perp \otimes^{[2]}(\varphi).$$

Es ist also hilfreich, die Hasse-Invariante von $\Lambda^2(\varphi)$ (und $\otimes^{[2]}(\varphi)$) aus der von φ berechnen zu können.

Satz 3.4.5 *Sei $char(K) \neq 2$ und φ ein regulärer quadratischer Raum über K der Dimension n. Es gilt*

$$dim(\Lambda^2(\varphi)) = \binom{n}{2},\ \ s(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi)) = (d(\varphi), d(\varphi))^{\binom{n-1}{2}} s(\varphi)^n,\ \ d(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi)) = d(\varphi)^{n-1}.$$

Beweis. Für $n = 2$ ist $\Lambda^2(\varphi)$ eindimensional, also ist die Hasse-Invariante trivial. Sei $\varphi = (V, q)$ mit $V = \langle v, w \rangle_K$. Dann ist $\Lambda^2(V) = \langle v \otimes w - w \otimes v \rangle_K$ mit

$$q \otimes q((v \otimes w - w \otimes v)) = 2(B_q(v,v)B_q(w,w) - B_q(v,w)^2).$$

Also ist $d(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi)) = d(\varphi)$. Sei also $n \geq 2$ und $a \in K^*$. Dann ist

$$\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi \perp \langle a \rangle) \cong \frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi) \perp \varphi \otimes \langle a \rangle)$$

Mit Induktion findet man also $d(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi \perp \langle a \rangle)) = d(\varphi)^{n-1}d(\varphi)a^n = d(\varphi \perp \langle a \rangle)^n$ und

$$s(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi \perp \langle a \rangle) = s(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi))s(a\varphi)(d(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi)), d(a\varphi))$$

$$= s(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi))s(\varphi)(a,a)^{\binom{n}{2}}(d(\varphi), a)^{n+1}(d(\varphi)^{n-1}, d(\varphi)a^n)$$

$$= (d(\varphi), d(\varphi))^{\binom{n}{2}}(a,a)^{\binom{n}{2}}s(\varphi)^{n+1}(a, d(\varphi))^{n+1} =: (*).$$

Nun ist $s(\varphi \perp \langle a \rangle) = s(\varphi)(d(\varphi), a)$ und deshalb ist

$$(*) = s(\varphi \perp \langle a \rangle)^{n+1}(ad(\varphi), ad(\varphi))^{\binom{n}{2}}. \qquad \square$$

Da $d(\varphi \otimes \varphi) = 1$ und nach Lemma 3.1.32 die Hasse-Invariante $s(\frac{1}{2}\varphi \otimes \varphi) = (d(\varphi), d(\varphi))^{n^2-1}$ ist, liefert Folgerung 3.1.31 nun die Hasse-Invariante von $\otimes^{[2]}(\varphi)$.

Folgerung 3.4.6 *$dim(\otimes^{[2]}(\varphi)) = \binom{n+1}{2}$,*

$$d(\frac{1}{2} \otimes^{[2]} (\varphi)) = d(\varphi)^{n+1}2^{n^2},\ s(\frac{1}{2} \otimes^{[2]} (\varphi)) = (d(\varphi), d(\varphi))^{\binom{n-1}{2}}s(\varphi)^n.$$

Lemma 3.4.7 *Sei K ein total reeller Zahlkörper und $\varphi = (V, q)$ ein absolut irreduzibler orthogonaler KG-Modul mit $n := dim_K(V)$.*

(i) B_q induziert auf $K^{n\times n} = \mathrm{End}_K(V)$ eine Involution $\bar{}$ und es gilt $\varphi \otimes \varphi \cong (K^{n\times n}, (x \mapsto Spur(x\overline{x}))$.

(ii) $\varphi \otimes \varphi \cong \Lambda^2(\varphi) \perp \otimes^{[2]}(\varphi)$

(iii) Der triviale Modul 1 kommt in $\otimes^{[2]}(\varphi)$ mit Vielfachheit 1 vor und es gilt $\otimes^{[2]}(\varphi) \cong \langle n \rangle \perp \varphi_1$.

Beweis. (i) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $B := (B_q(v_i, v_j))_{i,j}$ die zugehörige Gram-Matrix. Bezüglich dieser Basis wird $\mathrm{End}_K(V)$ mit $K^{n\times n}$ identifiziert. Dann ist $x \mapsto Bx^{tr}B^{-1}$ eine Involution $\bar{}: K^{n\times n} \to K^{n\times n}$. Sind e_{ij} die Matrixeinheiten, so gilt

$$Spur(e_{ij}\overline{e_{kl}}) = Spur(e_{ij}Be_{lk}B^{-1}) = B_q(v_j, v_l)B_q(v_k^*, v_i^*) = B_q \otimes B_q(v_j \otimes v_i^*, v_l \otimes v_k^*)$$

wo $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die bezüglich B_q zu $(v_1, \ldots, v_n)$ duale Basis von V (mit Gram-Matrix $B^{-1} = (B_q(v_i^*, v_j^*))_{i,j}$) bezeichnet. Also ist $v_i \otimes v_j^* \mapsto e_{ji}$ eine Isometrie zwischen $\varphi \otimes \varphi \cong (K^{n\times n}, (x \mapsto Spur(x\overline{x}))$.

(ii) Ist klar.
(iii) Unter der Identifikation $V \otimes V \cong \mathrm{End}_K(V)$ geht die isotypische Komponente des trivialen G-Moduls in $V \otimes V$ auf die kommutierende Algebra $\mathrm{End}_{KG}(V)$ von G in $\mathrm{End}_K(V)$. Da V absolut irreduzibel ist, wird dieser K-Teilraum von $\mathrm{End}_K(V)$ von der Identität erzeugt. Also ist er eindimensional. Weiter gilt $\overline{id} = id$ und $Spur(id\ \overline{id}) = n$. □

Satz 3.4.8 *Seien G eine endliche Gruppe, χ, ψ absolut irreduzible Charaktere von G mit reellem Schur-Index 2 und $K := \mathbb{Q}[\chi, \psi]$ der Charakterkörper. Dann ist K total reell. Seien V_χ bzw. V_ψ die zugehörigen irreduziblen KG-Moduln. Hat $\chi \otimes \psi$ rationalen Schur-Index 1, so ist die Quaternionenalgebra $D := \mathrm{End}_{KG}(V_\chi)$ isomorph zu $\mathrm{End}_{KG}(V_\psi)$ und zu $\chi \otimes \psi$ gehört ein orthogonaler KG-Modul $\varphi := (V, q)$ mit*

$$dim(V) = \chi(1)\psi(1),\ d(\varphi) = 1,\ s(\varphi) = ((-1,-1)_K[D])^{dim_K(V)/4}.$$

Beweis. Mit Hilfe der kanonischen Involution $\bar{}$ von D betrachte man V_χ als D-Rechtsmodul vermöge $v \cdot \lambda := \bar{\lambda} v$ für alle $v \in V_\chi$, $\lambda \in D$ und V_ψ als D-Linksmodul. Sei V der K-Modul $V := V_\chi \otimes_D V_\psi$.

Sind h, h' jeweils G-invariante hermitesche Formen auf V_χ bzw. V_ψ so ist die K-Bilinearform $f : V \times V \to K$ definiert durch

$$f(v \otimes v', w \otimes w') := Spur(h(v,w)\overline{h'(v',w')}) \text{ für alle } v, w \in V_\chi, v', w' \in V_\psi$$

G-invariant, wo *Spur* die reguläre Spur $D \to K$ bezeichnet.

Ist $V_\chi = Dv_1 \oplus \ldots \oplus Dv_n$ mit $h(v_s, v_t) = \delta_{st} h_s$ $(h_s \in K^*,\ 1 \le s, t \le n)$ und $V_\psi = Dv_1' \oplus \ldots \oplus Dv_m'$ mit $h'(v_s', v_t') = \delta_{st} h_s'$ $(h_s' \in K^*, 1 \le s, t \le m)$ und $(1, i, j, ij)$ die Standardbasis von $D = (\frac{a,b}{K})$, so hat V eine K-Basis $(v_1 \otimes v_1', iv_1 \otimes v_1', jv_1 \otimes v_1', ijv_1 \otimes v_1', v_2 \otimes v_1', \ldots, ijv_n \otimes v_m')$.

Bezüglich dieser Basis ist $(V, f) \cong \perp_{s=1}^n \perp_{t=1}^m N_{st}$ mit

$$N_{st} = \langle 4h_s h_t', -4ah_s h_t' - 4bh_s h_t', 4abh_s h_t' \rangle .$$

Wie im Beweis von Satz 3.4.4 findet man $d(N_{tl}) = 1$ und $s(N_{tl}) = (-1,-1)(a,b)$. Also ist $d(\varphi) = 1$. Die Additionsformel liefert $s(\varphi) = ((-1,-1)(a,b))^{nm}$. □

Ist speziell $\psi = \chi (= \overline{\chi})$, so ist $V_\psi \cong V_\chi^*$, der zu V_χ duale Modul mit $(fg)(v) := f(vg^{-1})$ für alle $v \in V_\chi$, $f \in V_\chi^*$, $g \in G$. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ eine D-Basis von V_χ und $(v_1^*, \ldots, v_n^*)$ die duale Basis von V_χ^*, so ist $c := \sum_{j=1}^n v_j \otimes v_j^*$ fix unter allen Gruppenelementen. Denn für $g \in G$ und $w_i := v_i g = \sum_{j=1}^n v_j \alpha_{ij}$ mit geeigneten $\alpha_{ij} \in D$ ist $v_i^* g = w_i^*$ und $v_j^* = \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_{ij}} w_i^*$. Somit ist

$$\sum_{j=1}^n v_j \otimes v_j^* = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n v_j \otimes \overline{\alpha_{ij}} w_i^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_j \alpha_{ij} \otimes w_i^* = \sum_{i=1}^n w_i \otimes w_i^*.$$

Ist h eine G-invariante hermitesche Form auf V_χ und sind die v_i so gewählt, daß $h(v_i, v_j) = \delta_{ij} h_j$ $(h_j \in K^*, 1 \leq i, j \leq n)$ so ist h' definiert durch $h'(v_i^*, v_j^*) := \delta_{ij} h_j^{-1}$ eine G-invariante hermitesche Form auf V_χ^*. Die Quadratlänge von c ergibt sich als $\sum_{j=1}^{n} Spur(h_j h_j^{-1}) = 4n$. Also erhält man folgenden

Satz 3.4.9 *Ist in Satz 3.4.8 $\chi = \psi$, so hat φ einen trivialen orthogonalen Teilmodul*

$$(V, q) \cong (K, \langle 2\chi(1) \rangle) \perp (V', q').$$

3.5 Beispiele.

Nun werden die rationalen orthogonalen Darstellungen der drei perfekten Gruppen $G = SL_2(5)$, M_{11} und $Sp_4(3)$ klassifiziert. Da jeder reguläre orthogonale $\mathbb{Q}G$-Modul orthogonale Summe irreduzibler orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Moduln ist, genügt es, die rationalen Invarianten dieser Moduln (V, q) zu bestimmen. Dazu betrachtet man V als Modul über einem minimalen reellen Zerfällungskörper $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{R}$, so daß die irreduziblen direkten Summanden $(W, \tilde{q})$ von $K \otimes_{\mathbb{Q}} V$ uniforme orthogonale KG-Moduln sind. Dann sind die regulären G-invarianten quadratischen Formen auf W von der Form $a\tilde{q}$ und durch die Elemente $a \in K^*$ parametrisiert. Die rationalen G-invarianten regulären quadratischen Formen auf V erhält man als Spurformen $Tr_{K/\mathbb{Q}}(a\tilde{q})$.

Beispiel 3.5.1 *Die einfachen orthogonalen $SL_2(5)$-Moduln.*

χ	$\mathbb{Q}[\chi]$	$d(\varphi)$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$
1	$\mathbb{Q}$	a	1	1
$3a$	$\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$	a	$(-1, a)_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$	1
$3b$	$\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$	a	$(-1, a)_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$	1
4	$\mathbb{Q}$	5	$(5, a)_{\mathbb{Q}}$	$(-1, -1)_{\mathbb{Q}}(5, a)_{\mathbb{Q}}$
5	$\mathbb{Q}$	$6a$	$(-1, 3)_{\mathbb{Q}}$	$(-1, -3)_{\mathbb{Q}}$
$2 \cdot 2a$	$\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$	1	1	1
$2 \cdot 2b$	$\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$	1	1	1
$2 \cdot 4$	$\mathbb{Q}$	1	1	1
$2 \cdot 6$	$\mathbb{Q}$	1	1	1

Hier ist $0 \neq a \in \mathbb{Q}[\chi]$

Beweis. Die Hasse-Invarianten und die Determinanten der treuen einfachen $SL_2(5)$-Moduln sind trivial, da $Q_8 \leq SL_2(5)$ und alle treuen orthogonalen Q_8-Moduln triviale Hasse-Invariante haben.

Bleiben also die Moduln der A_5 zu betrachten. Der Charakter vom Grad 4 setzt sich rational auf die S_5 fort. Die Gruppe S_5 enthält eine Untergruppe $C_5 : C_4$,

die auf dem 4-dimensionalen S_5-Modul absolut irreduzibel operiert. Also ist der orthogonale S_5-Modul rational isometrisch zu $\langle a \rangle \otimes (\mathbb{Q}A_4)$ für ein $a \in \mathbb{Q}^*$ mit Determinante 5 und Hasse-Invariante $(5, 5a) = (5, a)$ (vgl. Bemerkung 3.3.7).

Die Clifford-Invariante des irreduziblen orthogonalen A_5-Moduls φ der Dimension 5 kann man z.B. mit Satz 3.1.8 bestimmen. $C_0(\varphi)$ ist eine zentral einfache $\mathbb{Q}$-Algebra der Dimension 16. Nach Folgerung 3.1.14 ist die Darstellung $\tilde{P} : SL_2(5) \to C_0(\varphi)^*$ treu. Mit GAP findet man, daß der Charakter zu $\tilde{P}$ der treue absolut irreduzible Charakter vom Grad 4 ist mit Schur-Index 2 genau bei ∞ und 3. Also ist $c(\varphi) = c(a\varphi) = (-1, -3)$ für alle $a \in \mathbb{Q}^*$. Die Hasse-Invariante ergibt sich somit als $(-1, -1)(-1, -3) = (-1, 3)$.

Das Tensorprodukt des treuen Charakters $2a$ mit sich selbst ist $1 + 3a$. Also erhält man mit Satz 3.4.8 und Satz 3.4.9, daß zu der Darstellung $3a$ ein orthogonaler $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]A_5$-Modul φ gehört mit $d(\varphi) = (\mathbb{Q}[\sqrt{5}]^*)^2$ und $s(\varphi) = 1$. Also ist $c(\varphi) = (-1, -1)_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$. Die anderen orthogonalen A_5-Moduln zum Charakter $3a$ sind $\langle a \rangle \otimes \varphi$ mit $d(\langle a \rangle \otimes \varphi) = a(\mathbb{Q}[\sqrt{5}]^*)^2$ und $s(\langle a \rangle \otimes \varphi) = (-1, a)_{\mathbb{Q}[\sqrt{5}]}$. □

Beispiel 3.5.2 *Die orthogonalen M_{11}-Moduln.*

χ	$\mathbb{Q}[\chi]$	$d(\varphi)$	$s(\varphi)$	$c(\varphi)$
1	$\mathbb{Q}$	a	1	1
10	$\mathbb{Q}$	11	$(11, 11)_{\mathbb{Q}}(-11, a)_{\mathbb{Q}}$	$(11, 11)_{\mathbb{Q}}(-11, a)_{\mathbb{Q}}$
$10ab$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]$	1	1	$(-1, -1)_{\mathbb{Q}}$
11	$\mathbb{Q}$	$3a$	$(-1, 3a)_{\mathbb{Q}}$	$(-1, -1)_{\mathbb{Q}}$
$16ab$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]$	1	1	1
44	$\mathbb{Q}$	5	$(5, a)_{\mathbb{Q}}$	$(-1, -1)_{\mathbb{Q}}(5, a)_{\mathbb{Q}}$
45	$\mathbb{Q}$	$11a$	1	$(-1, -1)_{\mathbb{Q}}$
55	$\mathbb{Q}$	a	$(-1, a)_{\mathbb{Q}}$	1

Hier ist $0 \neq a \in \mathbb{Q}$.

Beweis. Die Gruppe M_{11} enthält eine Untergruppe $\cong C_{11} : C_5$ auf welche sich die Charaktere $10, 10a$ und $10b$ als die Summe der beiden Charaktere vom Grad 5 mit Charakterkörper $\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]$ einschränken. Also sind die orthogonalen M_{11}-Modul mit Charakter 10 isometrisch zu $\langle a \rangle \otimes \mathbb{Q}\mathbb{A}_{10}$ mit Determinante $11(\mathbb{Q}^*)^2$ und Hasse-Invariante $(11, 11)_{\mathbb{Q}}(a, a)_{\mathbb{Q}}(a, 11)_{\mathbb{Q}}$. Ebenso sind die hermiteschen M_{11}-Moduln mit Charakter $10a$ oder $10b$ isometrisch zu $\langle a \rangle \otimes \mathbb{Q}[\sqrt{-2}]\mathbb{A}_{10}$ für $a \in \mathbb{Q}^*$. Da 11 eine Norm ist in $\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]/\mathbb{Q}$ haben diese hermiteschen Moduln also die Determinante $N_{\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\sqrt{-2}]^*)$. Nach Satz 3.4.2 ergibt sich für jeden orthogonalen M_{11}-Modul φ mit Charakter $10ab$, daß $d(\varphi) = d_{\pm}(\varphi) = (-2)^{10} = 1$ und $c(\varphi) = (-2, -1)_{\mathbb{Q}}$, also ist $s(\varphi) = (-2, -1)_{\mathbb{Q}}(-1, -1)_{\mathbb{Q}} = 1$.

Der Charakter $1+11$ ist der Charakter einer Permutationsdarstellung von M_{11}. Also gibt es einen orthogonalen M_{11}-Modul φ zum Charakter 11 mit $\perp^{12} \langle 1 \rangle \cong$

$\phi\langle 12\rangle \perp \varphi$. Also ist $s(\varphi) = (12, 12)$ und $d(\varphi) = 3(\mathbb{Q}^*)^2$, woraus man die 4. Zeile schließt.

Da der irreduzible Charakter vom Grad 45 das äußere Quadrat des Charakters vom Grad 10 ist und der vom Grad 55 das äußere Quadrat des Charakters vom Grad 11 ist, findet man die letzten beiden Zeilen mit Satz 3.4.5.

Sei d die Determinante einer M_{11}-invarianten hermiteschen Form auf dem $\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]M_{11}$-Modul mit Charakter $16a$. Da der Charakter $16a$ modular irreduzibel ist für alle Primzahlen $\neq 3$ und $3 \in N_{\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]^*)$ eine Norm ist, gilt $d \in N_{\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]/\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\sqrt{-11}]^*)$. Mit Satz 3.4.2 findet man dann, daß für jeden orthogonalen $\mathbb{Q}M_{11}$-Modul φ mit Charakter $16ab$ die Determinante $d(\varphi) = 1$ und die Hasse-Invariante $s(\varphi) = c(\varphi) = 1$.

M_{11} permutiert die 55 Paare $\pm v$ der Vektoren v der Länge 2 in dem M_{11}-invarianten Gitter $\mathbb{A}_{10}$. Mit GAP findet man, daß die Kandidaten für transitive Permutationscharaktere von M_{11} vom Grad ≤ 55 vom Grad $1, 11, 12, 22$ und 55 sind. Der Permutationscharakter vom Grad 11 ist $1 + 10 = 1_U^{M_{11}}$. Mit Lemma 2.1.1 findet man, daß Fixvektoren von U in $\mathbb{Q}\mathbb{A}_{10}$ die Länge $10/11a^2$ mit $a \in \mathbb{Q}$ haben. Also stabilisiert U keinen Vektor der Länge 2. Deshalb muß die transitive Permutationsdarstellung $1 + 10 + 44$ vom Grad 55 die Permutationsdarstellung auf den Vektoren der Länge 2 in $\mathbb{A}_{10}$ sein. Mit Lemma 2.1.1 findet man $\perp^{55} \phi\langle 1\rangle = \phi\langle 55\rangle \perp (\phi\langle 11\rangle_\flat \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_{10}) \perp \varphi$ für einen orthogonalen $\mathbb{Q}M_{11}$-Modul φ mit Charakter 44. Also gilt $d(\varphi) = 5(\mathbb{Q}^*)^2$ und $s(\varphi) = (11, 11)_{\mathbb{Q}}(55, 55)_{\mathbb{Q}}(11, 5)_{\mathbb{Q}} = 1$ und man erhält $s(a\varphi) = (5, a)_{\mathbb{Q}}$. □

Beispiel 3.5.3 *Die orthogonalen $G := 2.U_4(2) \cong Sp_4(3)$-Moduln.*

χ	$\mathbb{Q}[\chi]$	$d(\varphi)$	$s(\varphi)$	$[c(\varphi)]$
1	$\mathbb{Q}$	a	1	1
$5ab$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$	3	$(-3, a)_{\mathbb{Q}}$	$(-3, a)_{\mathbb{Q}}$
6	$\mathbb{Q}$	3	$(-3, -a)_{\mathbb{Q}}(-1, -1)_{\mathbb{Q}}$	$(-3, -a)_{\mathbb{Q}}$
$10ab$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$	1	$(-1, 3)_{\mathbb{Q}}$	$(-1, -3)_{\mathbb{Q}}$
15	$\mathbb{Q}$	$3a$	$(-1, a)_{\mathbb{Q}}$	$(-1, 3)_{\mathbb{Q}}$
$15'$	$\mathbb{Q}$	a	$(-1, a)_{\mathbb{Q}}$	1
20	$\mathbb{Q}$	1	1	$(-1, -1)_{\mathbb{Q}}$
24	$\mathbb{Q}$	5	$(5, a)_{\mathbb{Q}}$	$(5, -a)_{\mathbb{Q}}$
30	$\mathbb{Q}$	3	$(-3, a)_{\mathbb{Q}}$	$(-3, a)_{\mathbb{Q}}(-1, -1)_{\mathbb{Q}}$
$30ab$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$	1	$(-1, 3)_{\mathbb{Q}}$	$(-1, -3)_{\mathbb{Q}}$
$40ab$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$	1	1	1
$45ab$	$\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]$	3	$(-3, a)_{\mathbb{Q}}$	$(-3, a)_{\mathbb{Q}}$
60	$\mathbb{Q}$	1	1	$(-1, -1)_{\mathbb{Q}}$
64	$\mathbb{Q}$	1	$(3, 5)_{\mathbb{Q}}$	$(3, 5)_{\mathbb{Q}}$
81	$\mathbb{Q}$	a	$(3, -5)_{\mathbb{Q}}$	$(3, -5)_{\mathbb{Q}}$

Hier ist $0 \neq a \in \mathbb{Q}$.
Wie bei $G = SL_2(5)$ schließt man aus der Tatsache, daß $Sp_4(3)$ eine Untergruppe $\cong Q_8$ enthält, daß die Hasse-Invarianten und Determinanten der treuen irreduziblen orthogonalen $\mathbb{Q}G$-Moduln trivial sind.
Beweis. Sei φ ein orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Modul mit Charakter 6. Die Clifford-Algebra $C(\varphi)$ ist eine 64-dimensionale einfache $\mathbb{Q}$-Algebra. Sei V der einfache $C(\varphi)$-Modul. Dann ist V ein projektiver G-Modul mit Charakter $4ab$. Also ist $C_0(\varphi) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{-3}]^{4\times 4}$ und deshalb $d(\varphi) = 3$.

Der orthogonale Modul $\Lambda^2(\varphi)$ hat Charakter 15. Wegen $s(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi)) = 1$ und $d(\frac{1}{2}\Lambda^2(\varphi)) = 3$ findet man Zeile 5 der Tabelle. Der orthogonale Modul $\otimes^{[2]}(\varphi)$ hat Charakter $1 + 20$. Wegen Lemma 3.4.7 ist $\frac{1}{2} \otimes^{[2]} (\varphi) \cong \langle 3 \rangle \perp \psi$ für einen orthogonalen G-Modul mit Charakter 20. Also ist $d(\psi) = 1$ und wegen Folgerung 3.4.6 ist auch $s(\psi) = 1$.

Die Determinanten der G-invarianten quadratischen Formen auf den irreduziblen $\mathbb{Q}G$-Moduln mit Charakter $5ab$, $10ab$, $30ab$, $40ab$ und $45ab$ erhält man aus Satz 3.4.2. Mit demselben Satz findet man die Hasse-Invarianten der quadratischen Formen zum Charakter $5ab$ und $45ab$.

Sei $\Phi = (W, \phi)$, wo ϕ eine hermitesche G-invariante Form auf dem einfachen $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]G$-Modul W mit Charakter $10a$ ist. Wegen $4a \otimes 4a = 6 + 10a$ ist $det(\Phi) = 3$ eine Norm in $\mathbb{Q}[\sqrt{-3}]/\mathbb{Q}$. Also gilt für die Spurform $\varphi := (W_{|\mathbb{Q}}, \phi + \bar{\phi})$ daß $[c(\varphi)] = (-3, (-1)^{\binom{10}{2}}) = (-3, -1)$. Deshalb ergibt sich $s(\varphi) = (-1, -1)(-1, -3) = (-1, 3)$. Ebenso ergeben sich die Hasse-Invarianten von $30ab$ und $40ab$ aus den Determinanten der hermiteschen Formen, welche man aus den Gleichungen $30b = 6 \otimes 5a$ und $10a + 30a + 40b = 4a \otimes 20a$ erhält.

Sei φ (bzw. φ') ein regulärer orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Modul mit Charakter 24 (bzw. Charakter $15'$). Da $1 + 20 + 24$ und $1 + 20 + 15'$ Permutationsdarstellungen sind, gilt $d(\varphi) = 5$ und $s(\varphi) = (a, 5)_{\mathbb{Q}}$ bzw. $d(\varphi') = a'$ und $s(\varphi') = (-1, a')_{\mathbb{Q}}$ für geeignetes $a, a' \in \mathbb{Q}^*$

Sei φ ein regulärer orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Modul mit Charakter 64. Da $6 \otimes 24 = 40ab + 64$ gilt, ist $d(\varphi) = 1$ und $s(\varphi) = (5, 5)_{\mathbb{Q}}(3, 5)_{\mathbb{Q}} = (3, 5)_{\mathbb{Q}}$.

Sei φ ein regulärer orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Modul mit Charakter 30. Da $6 + 30 = sign_{S_6}^{U_4(2)}$ gilt, ist $d(\varphi) = 3$ und $s(\varphi) = (3, 3)_{\mathbb{Q}}(-3, a)_{\mathbb{Q}}(-1, -1)_{\mathbb{Q}} = (-3, a)_{\mathbb{Q}}$ für ein $a \in \mathbb{Q}^*$.

Es ist $6 \otimes 30 = 15' + 20 + 64 + 81$. Sei also $\varphi_{15'}$ und φ_{81} orthogonale Summanden des Tensorprodukts von orthogonalen G-Moduln mit Charakter 6 und 30 zum Charakter $15'$ bzw. 81. Dann ist $d(\varphi_{15'}) = d(\varphi_{81}) =: a(\mathbb{Q}^*)^2$ und $(3, 3)_{\mathbb{Q}} = (-1, a)_{\mathbb{Q}} 1 (3, 5)_{\mathbb{Q}} s(\varphi_{81})(a, a)_{\mathbb{Q}}$. Also ist $s(\varphi_{81}) = (3, 3)_{\mathbb{Q}}(3, 5)_{\mathbb{Q}} = (3, -5)_{\mathbb{Q}}$.

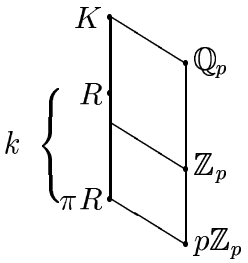
Sei φ ein regulärer orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Modul mit Charakter 60. Da $6 \otimes 15' = 30 + 60$ ist, gilt $d(\varphi) = 1$. Da $\binom{60}{2}$ gerade ist, ist $s(\varphi) = s(a\varphi)$ für alle $a \in \mathbb{Q}^*$ durch den Charakter 60 eindeutig bestimmt. Nun ist $20 \otimes 15' = 15' + 20 + 30ab + 60 + 64 + 81$. Da die Determinante des Tensorprodukts zweier orthogonaler $\mathbb{Q}G$-Moduln mit Charakter 20 bzw. $15'$ gleich 1 ist, folgt für orthogo-

nale Summanden $\varphi_{15'}$ und φ_{81} dieses Tensorprodukts zum Charakter $15'$ bzw. 81, daß $d(\varphi_{15'}) = d(\varphi_{81}) =: a(\mathbb{Q}^*)^2$ ist. Für die Hasse-Invarianten gilt somit $1 = (-1,a)_{\mathbb{Q}} 1 (-1,3)_{\mathbb{Q}} s(\varphi) (3,5)_{\mathbb{Q}} (3,-5)_{\mathbb{Q}} (a,a)_{\mathbb{Q}}$. Also ist $s(\varphi) = 1$. □

Kapitel 4

Ordnungen mit Involution.

Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$
mit Ring der ganzen Zahlen R,
maximalem Ideal $\wp = \pi R$ und
Restklassenkörper $k := R/\pi R$.



Ab jetzt steht nicht mehr der rationale Gruppenring $\mathbb{Q}G$ einer endlichen Gruppe G als Algebra mit Involution im Mittelpunkt der Untersuchungen, sondern der p-adisch ganzzahlige Gruppenring RG. Dieser ist eine symmetrische (vgl. Definition 4.1.11) R-Ordnung mit Involution in einer halbeinfachen K-Algebra. Bevor im nächsten Kapitel auf konkrete Beschreibungen von Gruppenringen eingegangen wird, werden hier noch einige allgemeine Betrachtungen über (symmetrische) Ordnungen mit Involution angestellt. Relevant für die Beispiele in den nächsten beiden Kapiteln sind im wesentlichen der Begriff der graduierten Ordnung und die Gestalt von Involutionen auf graduierten Ordnungen (Abschnitt 4.2.2), das Liften von Idempotenten unter Berücksichtigung der Involution (Abschnitt 4.2.1), der Begriff der Morita-Äquivalenz von Ordnungen mit Involution (Abschnitt 4.3.2) und die Definition der Witt-Zerlegungsabbildung (Defintion 4.3.2).

Hauptergebnisse dieses Kapitels sind die Beschreibung der ersten zwei Ordnungen in der Radikalidealisatorkette einer symmetrischen Ordnung in Abschnitt 4.1.3, die Beschreibung der Kopfordnung für gewisse R-Ordnungen (Folgerung 4.3.19, Satz 4.3.20) und die Surjektivität der Witt-Zerlegungsabbildung für RG in Abschnitt 4.3.1.

Sei A eine endlich dimensionale halbeinfache K-Algebra mit zentral primitiven Idempotenten $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ und Λ eine R-Ordnung in A.

Das (Jacobson)-Radikal $J(\Lambda)$ von Λ ist definiert als der Schnitt aller maximalen Λ-Linksideale in Λ (vgl. [Rei, Paragraph 6]). $J(\Lambda)$ ist ein zweiseitiges Ideal von Λ, der Schnitt aller maximalen zweiseitigen Ideale von Λ und $\Lambda/J(\Lambda)$ ist die größte halbeinfache k-Faktoralgebra von Λ. [Jac, Lemma 8.5] liefert eine wichtige

Charakterisierung von $J(\Lambda)$ als das größte pro-nilpotente Ideal von Λ, genauer gilt für jedes Rechtsideal I von Λ, daß $I \subseteq J(\Lambda)$ genau dann wenn es ein $t \in \mathbb{N}$ gibt mit $I^t \subseteq \pi\Lambda$.

Die einfachen Λ-Moduln sind also die einfachen $\Lambda/J(\Lambda)$-Moduln und ihre Isomorphieklassen stehen in Bijektion zu den zentral primitiven Idempotenten

$$\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_h} \in \Lambda/J(\Lambda).$$

Nach [Rei, Section 6] gibt es Lifte $e_1, \ldots, e_h \in \Lambda$ der zentral primitiven Idempotente $\overline{e_i} \in \Lambda/J(\Lambda)$ mit $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ $(1 \leq i, j \leq h)$ und $1 = \sum_{i=1}^{h} e_i$. Dann ist

$$\Lambda = \oplus_{i=1}^{h} (e_i \Lambda e_i \oplus \oplus_{j=1, j \neq i}^{h} e_i \Lambda e_j).$$

Mit $^\circ$ werde immer eine K-lineare Involution von A bezeichnet.

4.1 Der Radikalidealisatorprozess.

4.1.1 Erbliche Ordnungen.

Eine schöne Einführung in die Natur erblicher Ordnungen ist [Jac]. Die Idealtheorie erblicher Ordnungen ist fast ebensogut verstanden wie die der Maximalordnungen. Leider sind Gruppenringe $\mathbb{Z}_p G$ endlicher Gruppen über p-adischen Zahlen nur dann erblich, wenn p nicht die Gruppenordnung teilt. Dann ist $\mathbb{Z}_p G$ auch schon eine Maximalordnung in $\mathbb{Q}_p G$. Es gibt aber einen kanonischen Prozess, den sogenannten Radikalidealisatorprozess, um aus einer beliebigen R-Ordnung Λ in A eine erbliche Oberordnung zu konstruieren (vgl. Bemerkung 4.1.6).

Definition 4.1.1 *Sei A eine einfache K-Algebra, V der einfache A-Rechtsmodul.*

(i) Eine Gitterkette *E in V ist eine unendliche bezüglich Inklusion total geordnete Folge voller R-Gitter*

$$E: \quad \ldots \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots \supset L_h \supset \wp L_1 \supset \ldots$$

die mit jedem Gitter L auch alle $\wp^i L$ $(i \in \mathbb{Z})$ enthält. h heißt dann die Kettenlänge *von E.*

(ii) Sei E eine Gitterkette in V. Die Kettenordnung *$S(E)$ ist definiert als*

$$S(E) := \{a \in A \mid La \subseteq L \text{ für alle } L \in E\}.$$

(iii) Eine R-Ordnung Λ in A heißt erblich, *falls es eine Gitterkette E in V gibt, so daß $\Lambda = S(E)$ ist.*

(iv) Eine R-Ordnung Γ in einer halbeinfachen K-Algebra heißt erblich, *falls sie direkte Summe erblicher Ordnungen in den einfachen Summanden ist.*

(v) Sind Λ und Λ' zwei R-Ordnungen in einer separablen K-Algebra, so sagt man, daß Λ die Ordnung Λ' deckt, *falls $\Lambda \supseteq \Lambda'$ und $J(\Lambda) \supseteq J(\Lambda')$, in Zeichen $\Lambda \succ \Lambda'$. Bezüglich $\succ$ maximale Ordnungen heißen* extremal.

Lemma 4.1.2 *Sei $\Gamma \succ \Lambda$ eine Λ deckende R-Ordnung in A. Dann gilt $J(\Lambda) = J(\Gamma) \cap \Lambda$ und $\Lambda/J(\Lambda)$ ist isomorph zu einer Teilalgebra von $\Gamma/J(\Gamma)$. Insbesondere sind die einfachen Γ-Moduln halbeinfach als Λ-Moduln.*

Beweis. $J(\Lambda) \supseteq \Lambda \cap J(\Gamma)$, da $\Lambda \cap J(\Gamma)$ ein pro-nilpotentes Ideal von Λ ist und $J(\Lambda) \subseteq J(\Gamma)$, da $\Gamma \succ \Lambda$. Also ist $\Lambda/J(\Lambda) \cong \Lambda + J(\Gamma)/J(\Gamma)$ eingebettet in $\Gamma/J(\Gamma)$. Ist M ein einfacher Γ-Modul, so ist $MJ(\Lambda) \subset MJ(\Gamma) = 0$, also ist $M_{|\Lambda}$ halbeinfach. □

Ist Λ eine echte Oberordnung einer erblichen Ordnung Λ', so ist Λ auch erblich und $J(\Lambda)$ echt enthalten in $J(\Lambda')$. Es gilt der folgende wohlbekannte Satz.

Satz 4.1.3 *([Jac, Satz 8.12], [Rei, Theorem 39.14]) Die erblichen R-Ordnungen in A sind genau die extremalen R-Ordnungen.*

Definition 4.1.4 *Sei I ein zweiseitiges Λ-Ideal in A. $O_l(I) := \{a \in A \mid aI \subseteq I\}$ heißt die* Linksordnung *von I und $O_r(I) := \{a \in A \mid Ia \subseteq I\}$ heißt die* Rechtsordnung *von I. $Id(I) := O_l(I) \cap O_r(I)$ heißt der* Idealisator *von I.*

$O_l(I)$, $O_r(I)$ und $Id(I)$ sind R-Ordnungen in A, die Λ umfassen. Ist $^\circ$ eine Involution auf A und $\Lambda^\circ = \Lambda$, so gilt $J(\Lambda)^\circ = J(\Lambda)$. Für jedes involutionsinvariante Ideal $I = I^\circ$ von Λ gilt dann $O_l(I) = O_r(I)^\circ$. Deshalb ist $Id(I)^\circ = Id(I)$.

Der folgende Satz ist in [Rei, Theorem 39.11] für $O_l(J(\Lambda))$ gezeigt. Mit einem analogen Beweis zeigt man

Satz 4.1.5 *Sei Λ eine R-Ordnung in A. Genau dann ist $\Lambda = Id(J(\Lambda))$, wenn Λ eine erbliche Ordnung ist.*

Beweis. Die Richtung $\Leftarrow$ folgt aus [Rei, Theorem 39.11], da $\Lambda \subseteq Id(J(\Lambda)) \subseteq O_l(J(\Lambda))$. Sei also $\Lambda = Id(J(\Lambda))$. Es ist zu zeigen, daß dann Λ extremal ist. Sei dazu $\Gamma \succ \Lambda$ eine Λ deckende Ordnung. Dann sind $J(\Gamma) \supseteq J(\Lambda)$ volle R-Gitter in A. Also existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\wp^n J(\Gamma) \subseteq J(\Lambda)$. Da $J(\Gamma)^t \subseteq \wp J(\Gamma)$ für genügend großes $t \in \mathbb{N}$ (vgl. [Jac, Lemma 8.5]), gibt es also ein minimales $m \in \mathbb{N}$ mit $J(\Gamma)^m \subseteq J(\Lambda)$. Dann sind $J(\Lambda)J(\Gamma)^{m-1}$ und $J(\Gamma)^{m-1}J(\Lambda)$ in $J(\Gamma)^m$ und damit in $J(\Lambda)$ enthalten. Deshalb ist $J(\Gamma)^{m-1} \subseteq Id(J(\Lambda)) = \Lambda$. Ist also $m > 1$, so ist $J(\Gamma)^{m-1}$ als pro-nilpotentes Ideal in Λ schon in $J(\Lambda)$ enthalten, was der Minimalität von m widerspricht. Also ist $m = 1$, $J(\Gamma) = J(\Lambda)$ und $\Gamma \subseteq Id(J(\Lambda)) = \Lambda$. □

Bemerkung 4.1.6 *Die Folge* $\Lambda_0 := \Lambda$ *und* $\Lambda_{n+1} := Id(J(\Lambda_n))$ *für alle* $n \geq 0$ *definiert eine endlich aufsteigende Kette von R-Ordnungen, die* Radikalidealisatorkette*,*

$$\Lambda_0 \subseteq \Lambda_1 \subset \ldots \subset \Lambda_N = \Lambda_{N+1}$$

in A. Da Ordnungen immer ganze Gitter bezüglich der Spurbilinearform sind, bricht dieser Prozess nach endlich vielen Schritten ab. Die Ordnung Λ_N *ist wegen Satz 4.1.5 erblich und heißt die* Kopfordnung *von* Λ*. Das sukzessive Bilden des Radikalidealisators nennt man den* Radikalidealisatorprozess*. Gilt* $\Lambda = \Lambda^\circ$*, so ist* $\Lambda_n = \Lambda_n^\circ$ *für alle n. Insbesondere ist* $^\circ$ *eine Involution auf der erblichen Ordnung* Λ_N*.*

Aus der folgenden trivialen Bemerkung erhält man eine untere Schranke für die Länge der Radikalidealisatorkette. Sie ist auch für die rechnerische Bestimmung des Radikalidealisators von Nutzen, da man nur modulo dem maximalem Ideal πR von R rechnen muß.

Bemerkung 4.1.7 *Sei* Λ *eine R-Ordnung und* $\Gamma := Id(J(\Lambda))$*. Dann gilt* $\pi\Gamma \subseteq \Lambda$*.*

Beweis. Da $\pi\Lambda \subseteq J(\Lambda) \subseteq \Lambda$ gilt, folgt $\pi\Gamma = \pi\Lambda\Gamma \subseteq J(\Lambda)\Gamma = J(\Lambda) \subseteq \Lambda$. □

4.1.2 Symmetrische Ordnungen.

Eine symmetrische K-Bilinearform $\phi : A \times A \to K$ heißt assoziativ, falls $\phi(ab, c) = \phi(a, bc)$ für alle $a, b, c \in A$ gilt. Es ist leicht zu sehen, daß jede assoziative reguläre symmetrische Bilinearform auf einer separablen K-Algebra A von der Form $Tr_z : A \times A \to K, (a, b) \mapsto Sp_{red}(zab)$ für ein $z \in Z(A)^*$ ist.

Sei also ϕ eine reguläre symmetrische Bilinearform auf A. Für jedes volle R-Gitter L in A sei $L^\# = \{a \in A \mid \phi(L, a) \subseteq R\}$ das duale Gitter. $L^\#$ ist ein volles R-Gitter in A und $(L^\#)^\# = L$.

Lemma 4.1.8 *Sei* Γ *eine R-Ordnung in A. Dann ist* $\Gamma^\#$ *ein zweiseitiges* Γ*-Ideal mit* $\Gamma = O_l(\Gamma^\#) = O_r(\Gamma^\#)$*.*

Beweis. Seien $x, \gamma \in \Gamma$ und $y \in \Gamma^\#$. Dann sind $\phi(x, \gamma y) = \phi(x\gamma, y)$ und $\phi(y\gamma, x) = \phi(y, \gamma x)$ in R, und deshalb γy und $y\gamma \in \Gamma^\#$. Also ist $\Gamma^\#$ ein zweiseitiges Γ-Ideal.

Umgekehrt sei $\lambda \in O_l(\Gamma^\#)$. Dann gilt für alle $x \in (\Gamma^\#)^\# = \Gamma$ (insbesondere für $x = 1$), $y \in \Gamma^\#$ daß $R \ni \phi(x, \lambda y) = \phi(x\lambda, y)$. Also ist $\Gamma\lambda \subseteq \Gamma$ und daher $\lambda \in \Gamma$. Analog zeigt man $O_r(\Gamma^\#) = \Gamma$. □

Satz 4.1.9 *Sei* Λ *eine R-Ordnung in A und* ϕ *eine reguläre, symmetrische, assoziative Bilinearform auf A. Dann ist*

$$Id(J(\Lambda)) = (J(\Lambda)J(\Lambda)^\#)^\# \cap (J(\Lambda)^\# J(\Lambda))^\#.$$

Beweis. $\subseteq$: Sei $\gamma \in Id(J(\Lambda))$. Dann sind für alle $x \in J(\Lambda)$, $y \in J(\Lambda)^\#$ beide Werte $\phi(\gamma, xy) = \phi(\gamma x, y) \in R$ und $\phi(yx, \gamma) = \phi(y, x\gamma) \in R$ ganz.
$\supseteq$: Sei $\gamma \in A$ so, daß $\phi(\gamma, xy) \in R$ für alle $x \in J(\Lambda)$, $y \in J(\Lambda)^\#$. Dann gilt $\gamma J(\Lambda) \subseteq (J(\Lambda)^\#)^\# = J(\Lambda)$. Also ist $\gamma \in O_l(J(\Lambda))$. Analog folgt aus $\phi(\gamma, yx) \in R$, daß $\gamma \in O_r(J(\Lambda))$. □

Folgerung 4.1.10 *Sei Λ eine Ordnung in A. Der Radikalidealisator $Id(J(\Lambda))$ ist das größte 2-seitige Λ-Ideal I in $\frac{1}{\pi}\Lambda$, für das $I/J(\Lambda)$ ein halbeinfacher Λ-Λ-Bimodul ist.*

Beweis. Durch Dualisieren: Das Λ-Ideal $Id(J(\Lambda))^\# = (J(\Lambda)J(\Lambda)^\#)+(J(\Lambda)^\#J(\Lambda))$ ist das kleinste Λ-Ideal I in $J(\Lambda)^\#$, für das $J(\Lambda)^\#/I$ ein halbeinfacher Λ-Λ-Bimodul ist. Also ist $Id(J(\Lambda))/J(\Lambda)$ der größte halbeinfache Λ-Λ-Bimodul in $\frac{1}{\pi}\Lambda/J(\Lambda)$. □

Gruppenringe haben eine ausgezeichnete Eigenschaft, sie sind symmetrische Ordnungen im Sinn der folgenden Definition.

Definition 4.1.11 *Eine R-Ordnung Λ in der separablen K-Algebra A heißt* symmetrisch, *falls es eine reguläre, assoziative, symmetrische Bilinearform $\phi : A \times A \to K$ gibt, so daß $\Lambda = \Lambda^\#$.*

Lemma 4.1.12 *([Thé, Proposition (1.6.2)]) Sind e und f Idempotente in der bzgl. ϕ symmetrischen R-Ordnung Λ, so ist $\phi_{|(e\Lambda f)\times(f\Lambda e)}$ eine reguläre R-bilineare Paarung. Insbesondere ist $e\Lambda e$ eine symmetrische R-Ordnung bezüglich der Einschränkung von ϕ auf $eAe \times eAe$.*

Definition 4.1.13 *Sind Γ und Λ zwei R-Ordnungen in A, so ist der* Führer *von Γ in Λ das größte zweiseitige Γ-Ideal $F_\Gamma(\Lambda)$, welches in Λ enthalten ist. Analog definiert man den* Linksführer $F_\Gamma^{(l)}(\Lambda)$ *und den* Rechtsführer $F_\Gamma^{(r)}(\Lambda)$.

Für symmetrische Ordnungen kann man den Führer von Oberordnungen leicht berechnen:

Satz 4.1.14 *([Jac, Satz 10.6]) Sei Λ eine symmetrische R-Ordnung in A und $\Gamma \supseteq \Lambda$ eine Oberordnung. Dann ist*

$$F_\Gamma(\Lambda) = F_\Gamma^{(l)}(\Lambda) = F_\Gamma^{(r)}(\Lambda) = \Gamma^\#.$$

Beweis. $\Gamma^\# \subseteq \Lambda \Rightarrow \Gamma^\# \subseteq F_\Gamma(\Lambda)$ mit Lemma 4.1.8. Andererseits ist für alle $x \in F_\Gamma(\Lambda)$ und $\gamma \in \Gamma$ der Wert $\phi(x, \gamma) = \phi(x\gamma, 1) \in R$ ganz, da $x\gamma \in \Lambda = \Lambda^\#$. □

Definition 4.1.15 *Eine R-Ordnung Λ in A heißt* unzerlegbar, *falls 1 ein zentral primitives Idempotent in Λ ist. Sind $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_l$ die zentral primitiven Idempotente in Λ, so ist $\Lambda = \oplus_{i=1}^l \epsilon_i \Lambda$ eine direkte Summe unzerlegbarer Ordnungen $\epsilon_i\Lambda \subseteq \epsilon_i A$ $(1 \leq i \leq l)$. Die unzerlegbaren direkten Summanden $\epsilon_i\Lambda$ heißen* Blöcke *von Λ.*

Lemma 4.1.16 *Sei Λ eine symmetrische unzerlegbare R-Ordnung in A. Sei $e^2 = e \in \Lambda$ ein Idempotent so, daß $e\Lambda e$ eine erbliche Ordnung ist. Dann ist Λ eine Maximalordnung.*

Beweis. Seien $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ die zentral primitiven Idempotente von A. Da $e\Lambda e$ erblich ist, gilt für alle $1 \leq i \leq s$, daß $\epsilon_i e\Lambda e =: \Lambda_i$ entweder $\{0\}$ oder eine symmetrische erbliche Ordnung in $\epsilon_i eAe$ ist.

Sei $\Lambda = \Lambda^\#$ bezüglich der Form $Tr_z : (a,b) \mapsto Sp_{red}(zab)$, wo $z = z_1 + \ldots + z_s \in Z(A)$, $z_i = \epsilon_i z \in Z(\epsilon_i A) = K_i$ $(1 \leq i \leq s)$. Sei R_i die Maximalordnung in K_i mit maximalem Ideal $\wp_i$ und $n_i \in \mathbb{Z}$ so, daß $z_i R_i = \wp_i^{n_i}$ $(1 \leq i \leq s)$. Sei i fest, so daß $\Lambda_i \neq 0$. Dann ist nach der Führerformel ([Jac, Satz 10.7, Bemerkung 10.9], [Ple2, Theorem III.8]) $\Lambda_i = \wp_i^{-1-n_i} d_i^{-1} J(\Lambda_i)$ wo d_i die Differente von R_i bzgl. R ist. Also ist Λ_i isomorph zu $J(\Lambda_i)$ als Λ_i-Λ_i-Bimodul. Deshalb ist Λ_i eine Maximalordnung in $\epsilon_i eAe$ und $\wp_i^{n_i} = d_i^{-1}$. Dann ist aber der Führer jeder maximalen Oberordnung Γ von Λ in Λ von der Form $\Gamma' \oplus \epsilon_i \Gamma$ für ein geeignetes Γ'. Insbesondere ist $\epsilon_i \in \Lambda$. Da Λ unzerlegbar ist, gilt also $\Lambda = \epsilon_i \Lambda = \epsilon_i \Gamma$ und Λ ist eine Maximalordnung in der einfachen K-Algebra A. □

4.1.3 Der Radikalidealisatorprozess für symmetrische Ordnungen.

Nun werden erste explizite Untersuchungen der Radikalidealisatorkette symmetrischer Ordnungen angestellt. Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind allgemeiner Natur und werden später in dieser Arbeit nicht wieder verwendet.

Satz 4.1.17 *Sei Λ eine nicht erbliche, unzerlegbare, symmetrische R-Ordnung. Sei $\Gamma := Id(J(\Lambda))$ der Radikalidealisator von Λ. Dann ist $\Gamma = J(\Lambda)^\#$.*

Beweis. Nach Satz 4.1.14 ist das Dual $\Gamma^\#$ das größte Γ-Ideal in Λ. Per Definition ist $J(\Lambda)$ ein Γ-Ideal in Λ also gilt $J(\Lambda) \subseteq \Gamma^\#$ und damit $\Gamma \subseteq J(\Lambda)^\#$.

Seien $e_1, \ldots, e_h$ orthogonale Idempotente von Λ, die auf die zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ abbilden, mit $1 = e_1 + \ldots + e_h$. Dann ist $\Lambda = \bigoplus_{i,j=1}^h e_i \Lambda e_j$ und $(e_i \Lambda e_j)^\# = e_j \Lambda e_i$ und $e_i \Lambda e_i$ ist eine symmetrische R-Ordnung in $e_i A e_i$, die nach Lemma 4.1.16 nicht erblich ist. Weiter ist

$$J(\Lambda) = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^h e_i \Lambda e_j \oplus \bigoplus_{i=1}^h J(e_i \Lambda e_i)$$

(da die rechte Seite alle einfachen Λ-Moduln annihiliert und der Quotient eine halbeinfache Algebra $\cong \bigoplus_{i=1}^h e_i \Lambda e_i / J(e_i \Lambda e_i)$ ist) und

$$J(\Lambda)^\# = \bigoplus_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^h e_i \Lambda e_j \oplus \bigoplus_{i=1}^h J(e_i \Lambda e_i)^\#.$$

Sei zunächst $h = 1$ also $\Lambda/J(\Lambda)$ einfach. Dann ist $J(\Lambda)$ ein maximales 2-seitiges Ideal in Λ. Also ist $\Gamma^{\#}$ entweder Λ oder $J(\Lambda)$. Im ersten Fall ist auch $\Gamma = (\Gamma^{\#})^{\#} = \Lambda^{\#} = \Lambda$ und deshalb Λ eine erbliche Ordnung. Der zweite Fall ist die Behauptung.

Sei nun h beliebig. Sei $\Gamma_j := J(e_j\Lambda e_j)^{\#}$. Nach dem Bewiesenen ist $\Gamma_j = Id(J(e_j\Lambda e_j))$ eine Ordnung. Nun wird gezeigt, daß für $i \neq j$ der Summand $e_i\Lambda e_j$ ein Γ_i-Γ_j-Bimodul ist. Die Inklusion $(e_i\Lambda e_j)\Gamma_j \subseteq e_i\Lambda e_j$ ist aber äquivalent zu

$$e_j\Lambda e_i = (e_i\Lambda e_j)^{\#} \subseteq (e_i\Lambda e_j\Gamma_j)^{\#}.$$

Sei also $e_jae_j \in \Gamma_j$ mit $a \in J(\Lambda)^{\#}$ und $\gamma, \lambda \in \Lambda$. Dann gilt

$$\phi(e_i\lambda e_je_jae_j, e_j\gamma e_i) = \phi(e_j\gamma e_i, e_i\lambda e_jae_j) = \phi(e_j\gamma e_i\lambda e_j, e_jae_j) \in R,$$

da $e_j\gamma e_i\lambda e_j \in J(\Lambda)$ (wegen $i \neq j$) und $a \in J(\Lambda)^{\#}$. Analog zeigt man $\Gamma_i(e_i\Lambda e_j) \subset e_i\Lambda e_j$.

Da $J(e_j\Lambda e_j)$ ein Γ_j-Bimodul ist $(1 \leq j \leq s)$, folgt, daß $J(\Lambda)^{\#}J(\Lambda)J(\Lambda)^{\#} \subseteq J(\Lambda)$ also $J(\Lambda)^{\#} \subseteq \Gamma$. □

Bei dem Radikalidealisatorprozess spielen also die Ordnungen $e_i\Lambda e_i$, wo e_i ein Lift eines zentral primitiven Idempotents von $\Lambda/J(\Lambda)$ ist, eine entscheidende Rolle. Solche Ordnungen $e_i\Lambda e_i$ mit nur einer Isomorphieklasse von einfachen Moduln werden als quasilokal bezeichnet. Eine Ordnung Λ ist also genau dann quasilokal, wenn $\Lambda/J(\Lambda)$ eine einfache Algebra also ein einfacher Λ-Λ-Bimodul ist.

Lemma 4.1.18 *Sei Λ eine nicht erbliche, quasilokale, symmetrische R-Ordnung. Sei $\Gamma = Id(J(\Lambda))$ der Radikalidealisator von Λ. Ist $\Gamma/J(\Gamma) \cong \Lambda/J(\Lambda)$ als Λ-Λ-Bimodul, dann ist $J(\Gamma)^{\#} = J(\Gamma)$. Sonst ist $J(\Gamma) = J(\Lambda)$ und Γ ist eine erbliche Ordnung.*

Beweis. Mit $\Lambda/J(\Lambda)$ ist auch das Dual Γ/Λ ein einfacher Λ-Λ-Bimodul. Nun gilt $\Gamma \supseteq J(\Gamma) + \Lambda \supseteq \Lambda$. Also ist entweder $\Gamma = J(\Gamma) + \Lambda$ und $\Gamma/J(\Gamma) \cong \Lambda/J(\Lambda)$ oder $J(\Gamma) \subseteq \Lambda$ woraus $J(\Gamma) = J(\Lambda)$ folgt. In diesem Fall ist $\Gamma = Id(J(\Gamma))$ erblich. Im ersten Fall ist $J(\Gamma)$ das einzige maximale zweiseitige Γ-Ideal in Γ. Da $J(\Lambda) \subset J(\Gamma) \subset J(\Lambda)^{\#} = \Gamma$ gilt, folgt auch $J(\Lambda) \subset J(\Gamma)^{\#} \subset \Gamma$. Dabei sind alle Inklusionen echt. Also ist $J(\Gamma)^{\#}$ auch ein maximales zweiseitiges Γ-Ideal in Γ und somit $J(\Gamma)^{\#} = J(\Gamma)$. □

Satz 4.1.19 *Sei Λ eine nicht erbliche, unzerlegbare, symmetrische R-Ordnung. Sei $\Gamma = Id(J(\Lambda)) = J(\Lambda)^{\#}$ der Radikalidealisator von Λ. Seien $e_1, \ldots, e_h$ orthogonale Lifte der zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ so angeordnet, daß $e_i\Lambda e_i/J(e_i\Lambda e_i) \cong e_i\Gamma e_i/J(e_i\Gamma e_i)$ für $1 \leq i \leq t \leq h$ und $J(e_i\Gamma e_i) = J(e_i\Lambda e_i)$ für $t < i \leq h$ gilt. Sei $\Delta := Id(J(\Gamma))$, $e := \sum_{i=1}^{t} e_i$ und $f := \sum_{i=t+1}^{h} e_i$. Dann ist*

$$\Delta = (J(e\Gamma e)^2 + e\Gamma f\Gamma e)^{\#} \oplus f\Gamma f \oplus f\Gamma e \oplus e\Gamma f.$$

Beweis. Nach Satz 4.1.9 ist $\Delta = ((J(\Gamma)^{\#}J(\Gamma) + J(\Gamma)J(\Gamma)^{\#})^{\#}$. Nun ist

$$J(\Gamma)^{\#} = (eJ(\Gamma)e)^{\#} \oplus f\Gamma f \oplus e\Gamma f \oplus f\Gamma e.$$

Wegen Lemma 4.1.18 ist $(eJ(\Gamma)e)^{\#} = eJ(\Gamma)e$ und somit

$$J(\Gamma)^{\#}J(\Gamma) = (eJ(\Gamma)e \oplus f\Gamma f \oplus e\Gamma f \oplus f\Gamma e)J(\Gamma) =$$

$$((eJ(\Gamma)e)^2 + e\Gamma f\Gamma e) \oplus (fJ(\Gamma)f + f\Gamma e\Gamma f) \oplus (f\Gamma e) \oplus (eJ(\Gamma)e\Gamma f + e\Gamma fJ(\Gamma)f).$$

Da

$$f\Gamma e\Gamma f = f\Lambda e\Lambda f \subseteq J(f\Lambda f) = J(f\Gamma f)$$

gilt, findet man

$$\Delta^{\#} = ((eJ(\Gamma)e)^2 + e\Lambda f\Lambda e) \oplus fJ(\Lambda)f \oplus f\Lambda e \oplus e\Lambda f$$

und deshalb ist Δ wie behauptet. □

Folgerung 4.1.20 *Mit den Bezeichnungen von Satz 4.1.19 sei Λ_N die Kopfordnung von Λ. Dann gilt*

$$f\Lambda_N f = f\Gamma f,\ e\Lambda_N f = e\Lambda f,\ f\Lambda_N e = f\Lambda e$$

und $e + J(\Lambda_N)$ und $f + J(\Lambda_N)$ sind zentrale Idempotente von $\Lambda_N/J(\Lambda_N)$.

Beweis. Sei $\Lambda_0 := \Lambda$ und für $1 \leq i \leq N$ sei $\Lambda_i := Id(J(\Lambda_{i-1}))$.

Mit vollständiger Induktion wird nun gezeigt, daß für alle $1 \leq i \leq N$ die Gleichheiten $f\Lambda_i f = f\Gamma f,\ e\Lambda_i f = e\Lambda f,\ f\Lambda_i e = f\Lambda e$ gelten und $f + J(\Lambda_i)$ (und damit auch $e + J(\Lambda_i)$) im Zentrum von $\Lambda_i/J(\Lambda_i)$ liegt. Für $i = 1$ ist dies trivial. Sei also $i \geq 1$ und die Behauptung für i bewiesen.

Dann ist $\Lambda_{i+1} = ((J(\Lambda_i)^{\#}J(\Lambda_i) + J(\Lambda_i)J(\Lambda_i)^{\#})^{\#}$. Nun ist $J(\Lambda_i) = J(e\Lambda_i e) \oplus J(f\Lambda f) \oplus e\Lambda f \oplus f\Lambda e$ und damit $J(\Lambda_i)^{\#} = J(e\Lambda_i e)^{\#} \oplus f\Gamma f \oplus e\Lambda f \oplus f\Lambda e$.

Da Λ_i die Ordnung Λ_{i-1} deckt, gilt $J(\Lambda_{i-1}) \subseteq J(\Lambda_i)$. Insbesondere enthält $J(\Lambda_i)$ das Jacobson Radikal von Λ_0. Deshalb ist $J(\Lambda_i)^{\#} \subseteq J(\Lambda_0)^{\#} = \Gamma$. Da die Behauptung für i schon bewiesen ist, ist $e\Lambda f$ ein $e\Lambda_i e$-$f\Lambda_i f$-Bimodul und entsprechend $f\Lambda e$ ein $f\Lambda_i f$-$e\Lambda_i e$-Bimodul. Da $J(f\Lambda f)^{\#} = f\Gamma f = Id(J(f\Lambda f))$ ist und $f\Lambda e\Lambda f \subseteq J(f\Lambda f)$ gilt, ergibt sich $J(\Lambda_i)^{\#}J(\Lambda_i) + J(\Lambda_i)J(\Lambda_i)^{\#}$

$$= (J(e\Lambda_i e)^{\#}J(e\Lambda_i e) + J(e\Lambda_i e)J(e\Lambda_i e)^{\#} + e\Lambda f\Lambda e) \oplus J(f\Lambda f) \oplus e\Lambda f \oplus f\Lambda e.$$

Durch Dualisieren erhält man die gewünschte Form von Λ_{i+1}. Sei $\lambda \in \Lambda_{i+1}$. Dann gilt $f\lambda - \lambda f = f\lambda e - e\lambda f \in e\Lambda_{i+1}f \oplus f\Lambda_{i+1}e = e\Lambda f \oplus f\Lambda e \subseteq J(\Lambda) \subseteq J(\Lambda_{i+1})$. Also ist $f + J(\Lambda_{i+1}) \in Z(\Lambda_{i+1}/J(\Lambda_{i+1}))$ zentral und somit auch $e + J(\Lambda_{i+1})$ da $e + f = 1$. □

Folgerung 4.1.21 *Der Führer von Λ_N in Λ ist*

$$\Lambda_N^{\#} = (e\Lambda_N e)^{\#} \oplus fJ(\Lambda)f \oplus e\Lambda f \oplus f\Lambda e.$$

Satz 4.1.22 *Seien Λ, $\Gamma = Id(J(\Lambda))$, $\Delta = Id(J(\Gamma))$ und f wie in Satz 4.1.19. Dann gilt $f = 0$ oder $f = 1$.*
Ist $f = 1$, so ist $\Gamma = \Delta$ erblich.
Ist $f = 0$, so ist $\Delta = (J(\Gamma)^2)^{\#}$.

Beweis. Sei $\Lambda = \Lambda^{\#}$ bezüglich der Form $Tr_z : (a, b) \mapsto Sp_{red}(zab)$, wo $z = z_1 + \ldots + z_s \in Z(A)$, $z_i = \epsilon_i z \in Z(\epsilon_i A) = K_i$ $(1 \leq i \leq s)$. Sei R_i die Maximalordnung in K_i mit maximalem Ideal $\wp_i$, d_i die Differente von R_i bzgl. R und $n_i \in \mathbb{Z}$ so, daß $z_i R_i = \wp_i^{n_i}$ $(1 \leq i \leq s)$. Dann ist nach der Führerformel ([Jac, Bemerkung 10.9]) $\Lambda_N^{\#} =$

$$(e\Lambda_N e)^{\#} \oplus fJ(\Lambda)f \oplus e\Lambda f \oplus f\Lambda e = \oplus_{i=1}^{s} z_i^{-1} d_i^{-1} \wp_i^{-1} (eJ(\Lambda_N)e \oplus fJ(\Lambda)f \oplus e\Lambda f \oplus f\Lambda e).$$

Also gilt für alle $1 \leq i \leq s$ mit $\epsilon_i f \neq 0$, daß $z_i d_i \wp_i = R_i$ und $J(\Lambda_N)\epsilon_i \subseteq \Lambda$. Da $J(\Lambda_N)\epsilon_i$ ein pro-nilpotentes Λ-Ideal ist, welches $J(\Lambda)\epsilon_i$ enthält, ist $J(\Lambda)\epsilon_i = J(\Lambda_N)\epsilon_i \subseteq J(\Lambda)$. Dann ist aber $\epsilon_i \in \Gamma$ und $\Gamma\epsilon_i = \Lambda_N\epsilon_i$ erblich. Nach Definition von f folgt daraus $f\epsilon_i = \epsilon_i$: Denn sei $1 \leq j \leq t$ mit $e_j\epsilon_i \neq 0$. Da $e_j + J(\Gamma)$ ein zentral primitives Idempotent von $\Gamma/J(\Gamma)$ ist, folgt $e_j\epsilon_i = e_j$. Da $\Gamma\epsilon_i$ erblich ist, gilt also $e_j\Gamma e_j \cong \Omega_i^{x \times x}$ für ein $x \in \mathbb{N}$ (wo $\epsilon_i A \cong D_i^{n_i \times n_i}$ und Ω_i die R-Maximalordnung in D_i mit maximalem Ideal P_i bezeichnet). Weiter ist nach Lemma 4.1.18 das Jacobson-Radikal $P_i^{x \times x} \cong J(e_j\Gamma e_j)$ symmetrisch bzgl. der Einschränkung der Form Tr_z von oben. Für diese gilt aber $d_i \wp_i z_i = R_i$, woraus nach [Rei, Theorem 14.9] folgt, daß $J(e_j\Gamma e_j)^{\#} = \wp_i^{-1} e_j\Gamma e_j$ ist, was ein Widerspruch ist. Also ist $e\epsilon_i = 0$ und deshalb $f\epsilon_i = \epsilon_i$.

Da i beliebig gewählt war, gilt für alle zentral primitiven Idempotente ϵ_i von A, daß $f\epsilon_i$ entweder 0 oder ϵ_i ist. Damit ist $\Lambda = e\Lambda e \oplus f\Lambda f$. Da Λ als unzerlegbar vorausgesetzt ist, folgt $f = 0$ oder $f = 1$. Im letzten Fall ist $J(\Gamma) = J(\Lambda) = J(\Lambda_N)$, und deshalb ist Γ erblich. Ist $f = 0$, so ist $\Delta = (J(\Gamma)^2)^{\#}$ nach Satz 4.1.19. □

Lemma 4.1.23 *Seien Λ, $\Gamma = J(\Lambda)^{\#}$ und f wie in Satz 4.1.19. Sei $\epsilon \neq 1$ ein zentral primitives Idempotent von $K\Lambda$. Gilt $\epsilon J(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$, so ist $f = 1$.*

Beweis. Wegen $\epsilon J(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$, liegt $\epsilon \in Id(J(\Lambda)) = \Gamma$. Da Λ unzerlegbar ist und $\epsilon \neq 1$, gibt es einen Lift $e_o \in \Lambda$ eines zentral primitiven Idempotents von $\Lambda/J(\Lambda)$ mit $0 \neq \epsilon e_o \neq e_o$. Dann ist aber $e_o + J(\Gamma) \in Z(\Gamma/J(\Gamma))$ kein primitives Idempotent mehr. Nach Definition von f folgt damit $f \neq 0$ also $f = 1$. □

Der Fall $f = 1$ in Satz 4.1.19 ist schon in [Jac] behandelt worden. Denn dann ist $\Gamma = Id(J(\Lambda))$ eine erbliche Ordnung. Insbesondere gilt $\epsilon_i J(\Lambda) \subseteq J(\Lambda)$ für alle zentral primitiven Idempotente $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ von $K\Lambda$. Da $\pi\Lambda \subseteq J(\Lambda)$ ist, gilt $\pi\epsilon_i \in \Lambda$

für alle $1 \leq i \leq s$. Ist also $K/\mathbb{Q}_p$ unverzweigt, so ist Λ ist ein Block von Defekt 1 (vgl. [Jac, Satz 11.2]). Nun werden die symmetrischen Ordnungen charakterisiert, für die die Länge der Radikalidealisatorkette 2 ist, also $\Gamma \neq \Delta$ und Δ erblich. Daher sei im folgenden $f = 0$ und $\Delta = (J(\Gamma)^2)^{\#}$ erblich.

Folgerung 4.1.24 *Sei Δ erblich. Dann gilt $\pi^2\epsilon_i \in \Lambda$ für alle $1 \leq i \leq s$.*

Beweis. Sei $1 \leq i \leq s$. Da $\epsilon_i \in \Delta$ liegt, gilt $\epsilon_i J(\Gamma) \subseteq J(\Gamma)$. Da $\pi^2 \in \pi^2\Gamma \subseteq J(\Gamma)^2 \subseteq \Lambda$ gilt, ist also

$$\pi^2\epsilon_i \in \pi^2\epsilon_i\Gamma \subset \epsilon_i J(\Gamma)^2 \subset J(\Gamma)^2 \subset \Lambda.$$

□

Folgerung 4.1.25 *Ist Δ erblich, so ist $\epsilon_i e_l \Lambda e_j \subseteq e_l \Lambda e_j$ für alle $1 \leq i \leq s$ und $1 \leq l \neq j \leq h$.*

Beweis. Sei $1 \leq i \leq s$. Dann ist $\epsilon_i \in \Delta = Id(J(\Gamma))$. Also ist $\epsilon_i J(\Gamma) \subseteq J(\Gamma)$. Da $\Gamma = J(\Lambda)^{\#}$ und $e_1, \ldots, e_h$ Lifte der zentral primitiven Idempotente von $\Gamma/J(\Gamma)$ sind, ist $e_l J(\Gamma) e_j = e_l \Lambda e_j$. Also folgt die Behauptung. □

Nun wird die zusätzliche Voraussetzung gemacht, daß für alle Lifte e_j der zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ ein zentral primitives Idempotent ϵ von $K\Lambda$ existiert mit $0 \neq e_j\epsilon \neq e_j$ $(1 \leq j \leq h)$. Solche unzerlegbaren Ordnungen Λ heißen stark unzerlegbar.

Blöcke Λ positiven Defekts von Gruppenringen sind immer stark unzerlegbar. Denn nach [Ser, Theorem 33] ist die Zerlegungsabbildung von der abelschen Gruppe der verallgemeinerten Charaktere von $K\Lambda$ auf die von $\Lambda/J(\Lambda)$ surjektiv. Sei nun $e_j\epsilon = e_j$ für ein zentral primitives Idempotent ϵ von $K\Lambda$ und V der einfache $K\Lambda$-Modul mit $V\epsilon = V$. Ist L ein Λ-Gitter in V, so kommt wegen der Surjektivität der Zerlegungsabbildung der einfache Λ-Modul S_j zu e_j in $L/\pi L$ nur einmal als Kompositionsfaktor vor. Dann ist aber die zugehörige Cartaninvariante $c_{jj} = 1$, woraus nach [Lan, Proposition 9.1] (schon für beliebige symmetrische Ordnungen) folgt, daß Λ eine Maximalordnung ist.

Es gibt aber symmetrische Ordnungen in einfachen Algebren, welche keine Maximalordnungen sind: Ist z.B. $R = \mathbb{Z}_2$ und

$$\Lambda := \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rangle_R,$$

so ist Λ symmetrisch bezüglich $(x, y) \mapsto Sp(\frac{1}{2}xy)$. Also ist die starke Unzerlegbarkeit eine echte Einschränkung.

Satz 4.1.26 *Sei Λ, Γ, Δ wie in Satz 4.1.19, $f = 0$, Δ erblich und Λ stark unzerlegbar. Dann ist*

$$J(\Gamma) = \oplus_{i=1}^{s} \epsilon_i J(\Lambda)$$

und die Kopfordnung von Λ ist

$$\Delta = \Lambda_N = Id(J(\oplus_{i=1}^{s}\epsilon_i\Lambda)).$$

Beweis. Es ist $J(\Gamma) = \oplus_{j=1}^{h}(e_jJ(\Gamma)e_j \oplus \oplus_{l=1,l\neq j}^{h}e_j\Lambda e_l) = \oplus_{i=1}^{s}\epsilon_iJ(\Gamma)$. Da Λ stark unzerlegbar ist, gibt es zu jedem $1 \leq j \leq h$ ein $1 \leq i \leq s$ mit $0 \neq e_j\epsilon_i \neq e_j$. Da $\epsilon_ie_jJ(\Gamma)e_j \subseteq e_jJ(\Gamma)e_j$ gilt, aber $\epsilon_ie_jJ(\Lambda)e_j \not\subseteq e_jJ(\Lambda)e_j$ (vgl. Lemma 4.1.23) und $e_jJ(\Gamma)e_j/e_jJ(\Lambda)e_j$ ein einfacher Λ-Λ-Bimodul ist, ist $e_jJ(\Gamma)e_j = e_jJ(\Lambda)e_j + \epsilon_i(e_jJ(\Lambda)e_j)$. Damit folgt die Behauptung. □

4.2 Ordnungen mit Involution.

In diesem Abschnitt sei $\Lambda = \Lambda^\circ$ eine involutionsinvariante Ordnung.

4.2.1 Liften von Idempotenten.

Eine Standardtechnik, bis auf Konjugation in Λ^* eindeutige Idempotente in Λ zu konstruieren, ist das Liften von zentral primitiven Idempotenten ϵ des Radikalrestklassenrings. Ist $2 \in R^*$ oder $\epsilon^\circ = \epsilon$, so kann man solche Idempotente auch unter Berücksichtigung der Involution konstruieren.

Bemerkung 4.2.1 *(i) Ist $\epsilon \in \Lambda$ kongruent zu einem Idempotent von $\Lambda/J(\Lambda)$ so liefert die Newton-Hensel-Iteration $e_0 := \epsilon$, $e_{n+1} := e_n + (e_n^2 - e_n)(1 - 2e_n) = 3e_n^2 - 2e_n^3$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ein Idempotent $e = lim(e_n)$ in Λ, mit $e \equiv \epsilon$ $(J(\Lambda))$. (vgl. [Rei, Theorem 6.18])*

(ii) Ist $e_0 = e_0^\circ$, so gilt auch für alle Folgenglieder e_n aus (i) daß $e_n^\circ = e_n$ ist. Insbesondere ist $e^\circ = e$.

(iii) Ist $\epsilon \equiv \epsilon^\circ$ $(J(\Lambda))$ so ist $e_0 := \epsilon\epsilon^\circ$ kongruent zu dem Idempotent ϵ von $\Lambda/J(\Lambda)$ und invariant unter der Involution $^\circ$.

Nach obiger Bemerkung kann man also involutionsinvariante Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ zu involutionsinvarianten Idempotenten von Λ liften. Vertauscht die Involution $^\circ$ zwei verschiedene zentral primitive Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$, so existiert nicht notwendig ein Idempotent e von Λ mit $ee^\circ = 0$, falls $2 \notin R^*$.

Lemma 4.2.2 *Ist $\epsilon \in \Lambda$ kongruent zu einem Idempotent von $\Lambda/J(\Lambda)$ mit $\epsilon\epsilon^\circ$ und $\epsilon^\circ\epsilon \in 2J(\Lambda)$, so gibt es ein Idempotent e in Λ mit $e \equiv \epsilon$ $((J(\Lambda))$ und $ee^\circ = 0$.*

Beweis. Indem man ϵ durch ϵ^{2^n} ersetzt für genügend großes $n \in \mathbb{N}$, kann man Œ annehmen, daß $\epsilon^2 - \epsilon \in 2J(\Lambda)$ gilt. Sei $e_0 := \epsilon + \epsilon^\circ$. Dann ist $e_0^2 = \epsilon^2 + (\epsilon^\circ)^2 + \epsilon\epsilon^\circ + \epsilon^\circ\epsilon \equiv e_0$ $(2J(\Lambda))$. Die Newton-Hensel-Iteration aus Bemerkung 4.2.1 (i)

liefert also ein involutionsinvariantes Idempotent $e_u = e_u^2 \equiv e_0 \ (2J(\Lambda))$. Beachte, daß $e_1 = 3e_0^2 - 2e_0^3 \equiv e_0^2 \ (4J(\Lambda))$ und $e_1^2 - e_1 \equiv 0 \ (4J(\Lambda))$. Also ist $e_u \equiv e_0^2 \ (4(J(\Lambda))$.

Jetzt wird ein $f \in e_u \Lambda e_u$ konstruiert mit $f \equiv \epsilon - \epsilon^\circ \ (2J(e_u \Lambda e_u))$, $f^\circ = -f$ und $f^2 = e_u$. Dann erfüllt $e := \frac{1}{2}(e_u + f)$ die Behauptung des Lemmas. Sei zuerst

$$f_0 := e_u(\epsilon - \epsilon^\circ)e_u.$$

Dann ist $f_0^\circ = -f_0$ und $f_0 \equiv \epsilon - \epsilon^\circ \ (2J(e_u \Lambda e_u))$. Weiter ist $e_0 f_0 \equiv f_0 e_0 \ (4J(\Lambda))$, also $f_0^2 = (e_u(\epsilon - \epsilon^\circ)e_u)^2 \equiv e_u(\epsilon - \epsilon^\circ)^2 e_u = e_u(\epsilon + \epsilon^\circ)^2 e_u - 2e_u \epsilon \epsilon^\circ e_u - 2e_u \epsilon^\circ \epsilon e_u \equiv e_u e_0^2 e_u \equiv e_u \ (4J(e_u \Lambda e_u))$. Für $n \geq 0$ sei $f_{n+1} := f_n - \frac{1}{2}(f_n^2 - e_u)f_n$. Dann ist $f_{n+1}^2 - e_u = \frac{1}{4}(f_n^2 - e_u)^2(f_n^2 - 4e_u)$. Also folgt induktiv, daß $f_n^2 \equiv e_u \ (4J(\Lambda)^{2^n})$ ist. Insbesondere ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy Folge und konvergiert gegen ein $f := lim(f_n) \in e_u \Lambda e_u$ mit $f^\circ = -f$, $f \equiv f_0 \ (4J(\Lambda))$ und $f^2 = e_u$. □

Folgerung 4.2.3 *Seien $e_1', \ldots, e_h' \in \Lambda$ Urbilder der zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ mit $(e_i')^\circ \equiv e_i' \pmod{J(\Lambda)}$ für $1 \leq i \leq n$ und $(e_i')^\circ \equiv e_{h-i+n+1}' \pmod{J(\Lambda)}$ für $n < i \leq \frac{h-n}{2}$. Dann gibt es orthogonale Idempotente $e_1, \ldots, e_h \in \Lambda$ mit $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$, $1 = \sum_{i=1}^h e_i$, $e_i^\circ = e_i$ für $1 \leq i \leq n$ und $e_i + e_{h-i+n+1} = e_i^\circ + e_{h-i+n+1}^\circ$ für $n < i \leq h$. Ist $2 \in R^*$, so kann man zusätzlich $e_i^\circ = e_{h-i+n+1}$ für alle $n < i \leq h$ erreichen.*

Definition 4.2.4 *(i) Ein System von orthogonalen Idempotenten $e_1, \ldots, e_h \in \Lambda$ wie in Folgerung 4.2.3 heißt* involutionsangepaßt.

(ii) Sei $e_1, \ldots, e_h$ ein involutionsangepaßtes System von Idempotenten in Λ. Die Summe

$$e := \sum_{\substack{i=1 \\ e_i = e_i^\circ}}^{h} e_i$$

über Lifte der involutionsinvarianten zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ heißt Stammidempotent *von Λ.*

(iii) Die involutionsinvariante R-Ordnung $\Lambda = \Lambda^\circ$ heißt Stammordnung, *falls alle zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ unter $^\circ$ invariant sind, also 1 ein Stammidempotent ist.*

Für den Galoisabstieg in unverzweigten Erweiterungen ist es nützlich, einen Satz orthogonaler Idempotente in Λ zu finden, der durch die Galoisgruppe permutiert wird. Dazu benötigt man keine involutionsinvariante Ordnung.

Lemma 4.2.5 *Sei $\sigma \in Aut(\Lambda)$ ein Ringautomorphismus von Λ. Seien $e_0, \ldots, e_{f-1} \in \Lambda$ orthogonale Idempotente mit*

$$\sigma^i(e_0) \equiv e_i \pmod{J(\Lambda)} \text{ für alle } 1 \leq i \leq f-1, \ \sigma^f(e_0) \equiv e_0 \pmod{J(\Lambda)}.$$

Dann gibt es orthogonale Idempotente $e_0', \ldots, e_{f-1}' \in \Lambda$ mit $e_i' \equiv e_i \pmod{J(\Lambda)}$ und $\sigma^i(e_0') = e_i'$, $\sigma^f(e_0') = e_0'$ für alle $1 \leq i \leq f-1$.

Beweis. Wegen der Vollständigkeit von Λ genügt es zu zeigen, daß für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

Seien $e_0, \ldots, e_{f-1} \in \Lambda$ mit $e_i e_j = \delta_{ij} e_i$ und $\sigma^i(e_0) = e_i + x_i$ für alle $1 \leq i \leq f-1$ mit $x_i \in J(\Lambda)^{2^n}$, $\sigma^f(e_0) \equiv e_0 \pmod{J(\Lambda)^{2^n}}$. Dann gibt es $e'_0, \ldots, e'_{f-1} \in \Lambda$ mit $e'_i e'_j = \delta_{ij} e'_i$, $e_i \equiv e'_i \pmod{J(\Lambda)^{2^n}}$ so daß $\sigma^i(e'_0) \equiv e'_i \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}$ für alle $1 \leq i \leq f-1$ und $\sigma^f(e'_0) \equiv e'_0 \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}$.

Unter den Voraussetzungen gilt $(e_i + x_i) = (e_i + x_i)^2 = e_i + e_i x_i + x_i e_i + x_i^2$ für alle $1 \leq i \leq f-1$. Also gilt modulo $J(\Lambda)^{2^{n+1}}$:

$$e_j x_i \equiv \begin{cases} e_j x_i e_i & j \neq i \\ e_i x_i e_i + e_i x_i & j = i \end{cases}, \qquad x_i e_j \equiv \begin{cases} e_i x_i e_j & j \neq i \\ e_i x_i e_i + x_i e_i & j = i \end{cases}$$

Setze

$$\tilde{e}_0 := e_0 - \sum_{j=1}^{f-1} e_0 x_j$$

Dann gilt
(*) $\tilde{e}_0 \sigma^i(\tilde{e}_0) \equiv 0 \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}$ für $1 \leq i \leq f-1$ und $\tilde{e}_0^2 \equiv \tilde{e}_0 \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}$.
Denn modulo $J(\Lambda)^{2^{n+1}}$ ist für $i = 1, \ldots, f-1$

$$\tilde{e}_0 \sigma^i(\tilde{e}_0) \equiv (e_0 - \sum_{j=1}^{f-1} e_0 x_j)(e_i + x_i - \sum_{j=1}^{f-1} e_i \sigma^i(x_j)) \equiv e_0 x_i - \sum_{j=1}^{f-1} e_0 x_j e_i.$$

Modulo $J(\Lambda)^{2^{n+1}}$ gilt für $j \neq i$, daß $x_j e_i \equiv e_j x_j e_i$. Da $e_0 x_i \equiv e_0 x_i e_i$ in obiger Gleichung gilt, ist

$$\tilde{e}_0 \sigma^i(\tilde{e}_0) \equiv e_0 x_i e_i - e_0 x_i e_i \equiv 0 \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}.$$

Da für $j = 1, \ldots, f-1$ das Produkt $e_0 x_j e_0 \in J(\Lambda)^{2^{n+1}}$ liegt, findet man

$$\tilde{e}_0^2 = e_0^2 - \sum_{j=1}^{f-1} e_0 x_j - \sum_{j=1}^{f-1} e_0 x_j e_0 + (\sum_{j=1}^{f-1} e_0 x_j)^2 \equiv \tilde{e}_0 \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}.$$

Also folgt **(*)**. Durch Anwenden von σ folgt für alle $1 \leq i, j \leq f-1$

$$\sigma^i(\tilde{e}_0)\sigma^j(\tilde{e}_0) = \sigma^i(\tilde{e}_0 \sigma^{j-i}(\tilde{e}_0))^{\sigma^i} \equiv \delta_{ij} \sigma^i(\tilde{e}_0) \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}.$$

Setze man also $\tilde{e}_i := \sigma^i(\tilde{e}_0)$, so sind $\tilde{e}_0, \ldots, \tilde{e}_{f-1}$ orthogonale Idempotente in $\Lambda / J(\Lambda)^{2^{n+1}}$. Also gibt es einen Satz $(e'_0, \ldots, e'_{f-1})$ orthogonaler Idempotente in Λ mit $e'_i \equiv \tilde{e}_i \pmod{J(\Lambda)^{2^{n+1}}}$. Diese e'_i erfüllen die Behauptung. $\square$

4.2.2 Involutionen auf graduierten Ordnungen.

Eine Verallgemeinerung erblicher Ordnungen ist der Begriff der graduierten Ordnung (vgl. [Ple2]).

Definition 4.2.6 *Eine R-Ordnung Γ in A heißt* graduiert, *falls Idempotente $e_1, \ldots, e_h \in \Gamma$ existieren, so daß $1 = \sum_{i=1}^{h} e_i$ und die Ordnungen $e_i \Gamma e_i$ Maximalordnungen in $e_i A e_i$ sind, für alle $1 \leq i \leq h$.*

Als e_i kann man orthogonale Lifte der zentral primitiven Idempotente von $\Gamma/J(\Gamma)$ wählen. Graduierte Ordnungen Γ in A enthalten die zentral primitiven Idempotente von A sind also von der Form $\Gamma = \oplus_{i=1}^{s} \Gamma\epsilon_i$, wo $\Gamma\epsilon_i$ eine graduierte Ordnung in der einfachen K-Algebra $A\epsilon_i$ ist $(1 \leq i \leq s)$.

Bemerkung und Definition 4.2.7 *Ist Γ eine graduierte Ordnung in der einfachen Algebra $A = D^{n\times n}$ und Ω die Maximalordnung der Divisionsalgebra D mit maximalem Ideal $\mathcal{P}$, so gibt es $t \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_t \in \mathbb{N}$ $(n = n_1 + \ldots + n_t)$ und $M = (m_{ij}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{t\times t}$ so, daß Γ konjugiert ist zu*
$\Lambda(\Omega, n_1, \ldots, n_t, M) =$

$$\{X = (x_{ij})_{i,j=1,\ldots,t} \in D^{n\times n} \mid x_{ij} \in (\mathcal{P}^{m_{ij}})^{n_i \times n_j} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq t\}.$$

Ist $\Gamma/J(\Gamma) \cong \oplus_{i=1}^{t} (\Omega/\mathcal{P})^{n_i \times n_i}$ so gilt $m_{ii} = 0$, $m_{ij} + m_{ji} > 0$ und $m_{ij} + m_{jl} \geq m_{il}$ für alle $1 \leq l, i \neq j \leq t$. Dann heißt die Matrix M eine Exponentenmatrix *von Γ. Sind alle $n_1, \ldots, n_t = 1$, so wird $\Lambda(\Omega, n_1, \ldots, n_t, M)$ auch mit $\Lambda(\Omega, M)$ bezeichnet. Ist $\Omega = R$, so wird Ω häufig weggelassen.*

Ist Γ eine erbliche Ordnung in einer einfachen Algebra A, so ist

$$H_t := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^{t\times t},$$

wo t die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher Γ-Moduln ist, eine Exponentenmatrix von Γ (vgl. [Rei, Kapitel 9]).

Die invarianten Gitter einer graduierten Ordnung Γ in dem einfachen A-Modul lassen sich leicht mit Hilfe der Exponentenmatrix M beschreiben (vgl. [Ple2, Remark (II.4)]). Indem man eine Gitterbasis des projektiven Gitters zum ersten Konstituenten zugrundelegt. erhält man eine Exponentenmatrix, welche $m_{1j} = 0$ (oder auch $m_{j1} = 0$, wenn man mit Linksgittern arbeitet) für alle $1 \leq j \leq t$ erfüllt.

Bemerkung 4.2.8 *Sei $\Gamma = \Gamma^\circ$ eine involutionsinvariante graduierte Ordnung in der einfachen K-Algebra $A = D^{n\times n}$. Sei die durch $^\circ$ gegebene Permutation*

der zentral primitiven Idempotente von $\Gamma/J(\Gamma)$ *trivial und* $e_1, \ldots, e_t \in \Gamma$ *ein involutionsangepaßtes System orthogonaler Idempotente von* Γ.

Ist V *der einfache* A*-Modul und* ϕ *eine* A*-kovariante Form auf* V*, so ist* $\phi(Ve_i, Ve_j) = 0$ *für* $1 \leq i \neq j \leq t$.

Sei L *ein bezüglich* ϕ *ganzes projektives* Γ*-Gitter in* V *mit* $Le_1 = L$ *und* $B = (B_1, \ldots, B_t)$ *eine* R*-Basis von* L*, so daß* $b_i e_i = b_i$ *für alle* $b_i \in B_i$*,* $i = 1, \ldots, t$*. Die Gram-Matrix von* ϕ *bezüglich* B *hat die Form* $diag(f_1, \ldots, f_t)$ *mit* $f_i = \phi(B_i, B_i)$.

Schreibt man die Matrizen in Γ *bezüglich* B*, so ist* $\Gamma = \Lambda(\Omega, n_1, \ldots, n_t, M)$ *mit* $m_{1j} = 0$ *für alle* $1 \leq j \leq t$*, wo* Ω *die* R*-Maximalordnung in der Divisionsalgebra* D *ist. Sei* $\mathcal{P}$ *das maximale Ideal von* Ω*. Da* Γ *invariant unter der Involution*

$$\lambda \mapsto \lambda^\circ = diag(f_1, \ldots, f_t)\overline{\lambda}^{tr} diag(f_1^{-1}, \ldots, f_t^{-1})$$

ist, gibt es ein $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *so, daß* $f_i \in \mathcal{P}^{m+m_{i1}} GL_{n_i}(\Omega)$.

Für $1 \leq i \leq t$ *kommt der zu* e_i *gehörige einfache* Γ*-Modul* S_i *in einer Kompositionsreihe von* $L^\#/L$ *mit der Vielfachheit* $m + m_{i1}$ *vor. Ist* L_0 *ein maximal ganzes* Γ*-Gitter in* V*, so sind die Kompositionsfaktoren von* $L_0^\#/L_0$ *gerade die* S_i*, für die* $m + m_{i1}$ *ungerade ist und die Kompositionsfaktoren von* $L_0/\mathcal{P}L_0^\#$ *sind die* S_i *für die* $m + m_{i1}$ *gerade ist.*

Sei nun $\Lambda = \Lambda^\circ$ eine erbliche Ordnung in der einfachen K-Algebra A. Dann operiert $^\circ$ inklusionsumkehrend auf der Kette der Λ-Gitter in dem einfachen A-Modul V. Deshalb hat $^\circ$ höchstens 2 Fixpunkte auf der Menge der einfachen Λ-Moduln. Also ergibt sich der folgende Satz.

Satz 4.2.9 *Sei* $\Lambda = \Lambda^\circ$ *eine erbliche Stammordnung in einer einfachen* K*-Algebra* $A \cong D^{n \times n}$ *für eine* K*-Divisionsalgebra* D *mit* R*-Maximalordnung* Ω*. Dann ist* Λ *entweder eine Maximalordnung oder* $\Lambda \cong \Lambda(\Omega, n_1, n_2; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.

4.3 Wittgruppen für Ordnungen mit Involution.

Nun wird die in Abschnitt 1.3 betrachtete Situation weiter analysiert. Sei R ein lokaler Integritätsbereich mit maximalem Ideal $\wp = \pi R$, Restklassenkörper $k = R/\wp$ und Quotientenkörper K. Sei A eine endlich dimensionale, separable K-Algebra mit einer Involution $^\circ : A \to A$ und $\Lambda \subseteq A$ eine R-Ordnung in A mit $\Lambda^\circ = \Lambda$. Mit $GW^t(\Lambda, {}^\circ)$ wird die Grothendieck-Witt-Gruppe der orthogonalen Λ-Torsionsmoduln bezeichnet (vgl. Bemerkung 1.3.2)

Lemma 4.3.1

$$GW^t(\Lambda, {}^\circ) \cong GW(k\Lambda, {}^\circ) \cong GW(\Lambda/J(\Lambda), {}^\circ)$$

Beweis. Sei (V, ϕ) ein regulärer orthogonaler $k\Lambda$-Modul. Vermöge des Isomorphismus $k \cong R/\pi R \cong \pi^{-1}R/R \subset K/R$ ist $\pi^{-1}\phi : V \times V \to \pi^{-1}R/R$ eine reguläre Λ-kovariante Form auf dem Λ-Torsionsmodul V. Dies definiert einen Gruppenhomomorphismus $f : GW(k\Lambda, \circ) \to GW^t(\Lambda, \circ)$.

Umgekehrt sei (M, ϕ) ein regulärer orthogonaler Λ-Torsionsmodul. Ist $\pi M \neq 0$, so sei $j \geq 2$ minimal mit $\pi^j M = 0$. Dann ist $N := \pi^{j-1}M$ ein total isotroper Λ-Teilmodul von M, da $\phi(\pi^{j-1}x, \pi^{j-1}y) = \phi(\pi^{j-2}x, y) = 0$ für alle $x, y \in M$. Also ist nach Lemma 1.3.11 $[(M, \phi)] = [(N^\perp/N, \phi)]$ in $GW^t(\Lambda, \circ)$. Da $\pi^{j-1}(N^\perp/N) = 0$ folgt mit vollständiger Induktion, daß (M, ϕ) zu einem regulären orthogonalen Λ-Torsionsmodul (M', ϕ') äquivalent ist mit $\pi M' = 0$. Dann ist aber $\phi'(M', M') \subset \pi^{-1}R/R$ und $(M', \pi\phi')$ ist ein regulärer orthogonaler $k\Lambda$-Modul. Dies definiert ein Inverses zu f. Die Isomorphie $GW(k\Lambda, \circ) \cong GW(\Lambda/J(\Lambda), \circ)$ folgt mit Lemma 1.3.6, da jedes Element in $GW(k\Lambda, \circ)$ einen eindeutig bestimmten anisotropen Vertreter hat und anisotrope Moduln halbeinfach sind. □

Definition 4.3.2 *Die* Witt-Zerlegungsabbildung δ_π *ist die Komposition von* $\delta : GW(A, \circ) \to GW^t(\Lambda, \circ)$ *mit dem Isomorphismus* $GW^t(\Lambda, \circ) \to GW(\Lambda/J(\Lambda), \circ)$.

Repränsentiert man die Elemente von $GW(A, \circ)$ durch A-anisotrope orthogonale A-Moduln, so ordnet die Witt-Zerlegungsabbildung also jedem orthogonalen A-Modul (V, ϕ) den anisotropen orthogonalen $\Lambda/J(\Lambda)$-Modul $(L^\#/L, \phi_L)$ zu, wo L ein maximal ganzes Λ-Gitter in V ist und

$$\phi_L : L^\#/L \times L^\#/L \to k \cong \pi^{-1}R/R, \phi_L(x + L, y + L) := \phi(x, y) + R.$$

Wie in [Dress, Theorem 5] ($\Lambda = RG$ für eine endliche Gruppe G) hat man in dieser Situation die folgende exakte Sequenz

$$(\star) \quad 0 \to GW(\Lambda, \circ) \xrightarrow{\iota} GW(A, \circ) \xrightarrow{\delta_\pi} GW(\Lambda/J(\Lambda), \circ).$$

(vgl. Abschnitt 1.3)

Für Gruppenringe über p-adischen Zahlen zeigt Folgerung 4.3.7, daß die Abbildung δ_π in $(\star)$ sogar surjektiv ist.

4.3.1 Die Surjektivität der Witt-Zerlegungsabbildung für Gruppenringe.

Dress beweist in [Dress] ein Analogon des Satzes von Brauer über induzierte Charaktere: Sei G eine endliche Gruppe, E die Menge aller elementaren Untergruppen von G,

$$E := \{U \leq G \mid U = U_1 \times U_2,\ U_1 \text{ zyklisch}, U_2\ p\text{-Gruppe}\ \}$$

und

$$H_2 := \{U \leq G \mid U \text{ hat zyklischen Normalteiler von 2-Potenzindex}\ \}.$$

Satz 4.3.3 *([Dress, Theorem 2]) Sei R ein Dedekindbereich. Induktion liefert eine surjektive Abbildung*

$$\oplus_{U\in E\cup H_2} GW(RU,\ ^\circ) \to GW(RG,\ ^\circ).$$

Der Satz von Brauer wird meist benutzt, um zu zeigen, daß für eine endliche Erweiterung K von $\mathbb{Q}_p$ mit Bewertungsring R und Restklassenkörper $k = R/\wp$ die Zerlegungsabbildung den Ring der verallgemeinerten Charaktere von G über K surjektiv auf den über k abbildet (vgl. [Ser], Kapitel 17).

Dieselbe Methode soll nun angewandt werden, um zu zeigen, daß die Sequenz

$$(\star)\quad 0 \to GW(RG,\ ^\circ) \to GW(KG,\ ^\circ) \to GW(kG,\ ^\circ) \to 0$$

exakt ist. Bis auf die Surjektivität der Abbildung $\delta_\pi : GW(KG,\ ^\circ) \to GW(kG,\ ^\circ)$ folgt dies aus [Dress, Theorem 5].

Die Beweisidee basiert auf der Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \oplus_{U\in E\cup H_2} GW(RU,\ ^\circ) & \to & \oplus_{U\in E\cup H_2} GW(KU,\ ^\circ) & \to & \oplus_{U\in E\cup H_2} GW(kU,\ ^\circ) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & GW(RG,\ ^\circ) & \to & GW(KG,\ ^\circ) & \to & GW(kG,\ ^\circ) & \to & 0
\end{array}$$

Da die senkrechten Abbildungen nach Satz 4.3.3 surjektiv sind, genügt es, die Behauptung für $U \in E \cup H_2$ zu zeigen.

Lemma 4.3.4 *Sei G eine endliche Gruppe mit $|G| \in R^*$. Dann gilt: Ist (M, b) ein regulärer orthogonaler kG-Modul, so gibt es ein G-invariantes R-Gitter L und eine G-invariante symmetrische Bilinearform ϕ so, daß $(L^\#/L, \phi_L) \cong (M, b)$ ist.*

Beweis. Auf der Ebene der Moduln folgt das Lemma aus [Ser, 15.5]. Sei also L ein RG-Gitter, so daß die kG-Moduln $L/\wp L$ und M isomorph sind. Sei $B : L \times L \to R$ eine symmetrische Bilinearform, die b auf M induziert. Dann ist $\phi := \frac{\pi}{|G|}\sum_{g\in G} gBg^{tr}$ eine G-invariante symmetrische Bilinearform auf L mit $\phi_L = b$. □

Folgerung 4.3.5 *Mit demselben Beweis gilt sogar für $|G| \in R^*$: Ist $(b_1, \ldots, b_n)$ eine k-Basis des Raums der G-invarianten symmetrischen Bilinearformen auf M so gibt es eine R-Basis $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ des Gitters der ganzzahligen G-invarianten symmetrischen Bilinearformen auf L, so daß mit $(\pi\phi_i)_L = b_i$.*

Satz 4.3.6 *Seien $u := char(k)$ und l Primzahlen, $G = C : P$ das semidirekte Produkt einer zyklischen Gruppe C von zu l teilerfremder Ordnung mit einer l-Gruppe P. Dann gilt: Ist (M, b) ein orthogonaler einfacher kG-Modul, so gibt es ein G-invariantes R-Gitter L und eine G-invariante symmetrische Bilinearform ϕ so, daß $(L^\#/L, \phi_L) \cong (M, b)$ ist.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zu dem von [Ser, Theorem 41].

• Sei zunächst $l \neq p$. Dann ist die p-Sylow-Gruppe S von G normal in G. Also operiert S trivial auf dem einfachen kG-Modul M. Nach Lemma 4.3.4 ist der orthogonale $k(G/S)$-Modul (M, b) von der Form $(L^{\#}/L, \phi_L)$ für einen orthogonalen $R(G/S)$-Modul (L, ϕ).

• Sei jetzt $l = p$. Dann gilt $char(k) \not| |C|$, und der kC-Modul M ist halbeinfach. Sei $M = \oplus M_\alpha$ eine Zerlegung von M in kC-isotypische Komponenten. G permutiert die M_α transitiv. Sei G_α der Stabilisator von M_α. Dann ist $M = Ind_{G_\alpha}^{G}(M_\alpha)$.

Da der Zentralisator von C in P ein p-Normalteiler von G ist und deshalb trivial auf M operiert, kann man annehmen, daß P treu auf C operiert.

Die folgenden 2 Fälle werden unterschieden:

a) Alle M_α haben eine C-invariante Bilinearform (d.h. $M_\alpha \cong M_\alpha^*$ für alle α).

b) Kein M_α hat eine C-invariante Bilinearform (d.h. $M_\alpha \cong M_{\alpha'}^*$ für alle α, wo $' : \{\alpha\} \to \{\alpha\}$ eine fixpunktfreie Permutation der Ordnung 2 ist).

Im Fall **a)** erfüllen G_α und M_α die Voraussetzungen des Satzes. Ist $G_\alpha \neq G$, so kann mit vollständiger Induktion angenommen werden, daß $(M_\alpha, b_{|M_\alpha})$ geliftet werden kann. D.h. es gibt ein Gitter L_α mit symmetrischer Bilinearform ϕ_α, so daß $(L_\alpha^{\#}/L_\alpha, (\phi_\alpha)_{L_\alpha}) \cong_{G_\alpha} (M_\alpha, b_{|M_\alpha})$. Indem man beide Seiten nach G hochinduziert, erhält man die Behauptung.

Also kann angenommen werden, daß $G_\alpha = G$ ist. Dann ist also $M = M_\alpha$ ein isotypischer kC-Modul, d.h. das Bild der zugehörigen Darstellung $\rho : kC \to End(M)$ ist ein Körper $\tilde{k}$. Nun sei $0 \neq v \in M$ ein Vektor, der invariant unter P ist. Da C ein Normalteiler in G ist, ist $\tilde{k}v$ ein G-invarianter Teilmodul von M, also $M = \tilde{k}v$, da M einfach ist. Vermöge $v \mapsto 1$ identifiziert man M mit $\tilde{k}$, wobei P auf $\tilde{k}$ als Gruppe von Galoisautomorphismen operiert. Sei nun $\tilde{K}$ die unverzweigte Erweiterung von K mit Restklassenkörper $\tilde{k}$ und sei $\tilde{R}$ der Ring der ganzen Zahlen in $\tilde{K}$. Der Homomorphismus $C \to \tilde{k}^*$ liftet sich eindeutig zu einem Homomorphismus $C \to \tilde{R}^*$. Weiter ist die Galoisgruppe $Gal(\tilde{K}, K)$ kanonisch isomorph zu $Gal(\tilde{k}, k)$. Da P treu auf C operiert, wird P zu einer Untergruppe von $Gal(\tilde{K}, K)$ und $G = C : P \leq \tilde{R}^* : Gal(\tilde{K}, K)$ und $\tilde{R}$ liftet den Modul M.

Da M und damit $\tilde{R}$ eine C-invariante symmetrische Bilinearform trägt und die Einschränkung der Darstellung von G auf $\tilde{K}$ auf P ein Vielfaches der regulären Darstellung ist, also die Charakterwerte der Elemente von $G - C$ alle 0 sind, gibt es eine symmetrische G-invariante Bilinearform ϕ_0 auf $\tilde{R}$. Da $\tilde{R}/\pi\tilde{R} \cong M$ ein irreduzibler kC-Modul und deshalb auch ein irreduzibler kG-Modul ist, ist das duale Gitter $\tilde{R}^{\#}$ von $\tilde{R}$ bezüglich ϕ_0 ein $\tilde{R} = RC$-Ideal in $\tilde{K}$ also von der Form $\pi^\alpha\tilde{R}$. Indem man ϕ_0 durch $\pi^{-\alpha}\phi_0$ ersetzt, kann man annehmen, daß $\tilde{R}^{\#} = \tilde{R}$. Sei b_0 die G-invariante Bilinearform auf M mit $(\pi^{-1}\tilde{R}/\tilde{R}, (\pi\phi_0)_{\tilde{R}}) \cong (M, b_0)$.

b_0 induziert auf $\tilde{k}$ eine Involution, also einen Galoisautomorphismus der Ordnung ≤ 2. Ebenso induziert ϕ_0 eine Involution auf $\tilde{K}$. Seien $\tilde{k}^+$ und $\tilde{K}^+$ die zugehörigen Fixkörper. Dann gilt für die Maximalordnung $\tilde{R}^+$ in $\tilde{K}^+$, daß $\tilde{R}^+/\pi\tilde{R}^+ \cong \tilde{k}^+$. Da $Gal(\tilde{K}/K)$ abelsch ist, operieren die Elemente von P als Galoisautomor-

phismen auf $\tilde{k}^+$ und $\tilde{K}^+$. Für die zugehörigen Fixkörper k^+ und K^+ mit Bewertungsring R^+ gilt wieder $k^+ \cong R^+/\pi R^+$.

Die G-invariante symmetrische reguläre Bilinearform b auf M ist von der Form $a_1 b_0$ für ein $0 \neq a_1 \in k^+$. Sei $a \in R^+$ mit $a + \pi R^+ = a_1$. Dann ist $a \in (R^+)^*$ und $(M, b) \cong (\pi^{-1}\tilde{R}/\tilde{R}, (\pi a \phi_0)_{\tilde{R}})$.

Im Fall **b)** ist $p = 2$. Wie im Fall a) kann man annehmen, daß $M = M_\alpha \oplus M_{\alpha'}$ ist. Dann ist G_α eine Untergruppe vom Index 2 in G. Ebenso wie in a) impliziert die Irreduzibilität von M, daß $M_\alpha \cong \tilde{k}$ und $M_{\alpha'} \cong \tilde{k}'$ Körpererweiterungen von k sind. Wie in a) liftet man den G_α-Modul M_α zum Ring der ganzen Zahlen $\tilde{R}$ in der unverzweigten Erweiterung $\tilde{K}$ von K mit Restklassenkörper $\tilde{k}$. Durch Induzieren erhält man den Modul $M = M_\alpha \oplus M_\alpha^*$ bzw. $L := \tilde{R} \oplus \tilde{R}^*$.

Wie eben existiert eine G-invariante reguläre symmetrische Bilinearform ϕ_0 auf L mit $(\pi^{-1}L/L, \pi\phi_0) \cong (M, b_0)$.

Der Raum der C-invarianten symmetrischen Bilinearformen auf M ist nun isomorph zu $\tilde{k}b_0$. Nach Folgerung 4.3.5 kann man diese Formen zu C-invarianten symmetrischen Bilinearformen $\tilde{K}\phi_0$ liften. Ist $P' := Stab_P(M_\alpha)$, so entsprechen die G-invarianten Formen in $\tilde{k}b_0$ (bzw. $\tilde{K}\phi_0$) gerade dem Fixkörper von P' in $\tilde{k}$ bzw. $\tilde{K}$. Wie eben erhält man, daß das Gitter der ganzen G-invarianten symmetrischen Bilinearformen auf L surjektiv auf den Raum der regulären symmetrischen Bilinearformen auf M abbildet und es also auf L eine reguläre G-invariante symmetrische Bilinearform ϕ gibt mit $(M, b) \cong (\pi^{-1}L/L, (\pi\phi)_L)$. □

Wegen Satz 4.3.3 folgt aus diesem Satz nun die Exaktheit von $(\star)$.

Folgerung 4.3.7 *Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal πR, Restklassenkörper $k = R/\pi R$ und Quotientenkörper K. Sei G eine endliche Gruppe. Dann ist die folgende Sequenz exakt.*

$$(\star) \quad 0 \to GW(RG, \circ) \to GW(KG, \circ) \to GW(kG, \circ) \to 0$$

Beweis. Nach Satz 4.3.3 genügt es, die Behauptung für Gruppen G zu zeigen, die einen zyklischen Normalteiler von l-Potenzindex haben. Dann ist aber auch der größte Normalteiler in G von zu l teilerfremder Ordnung, $C := O_{l'}(G)$, zyklisch und $G \cong C : P$ für eine l-Gruppe P. Daher folgt die Behauptung aus Satz 4.3.6. □

Diese Folgerung wird falsch, wenn man anstelle von Gruppenringen beliebige symmetrische Ordnungen zuläßt:

Beispiel 4.3.8 *Seien* $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $c := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in R^{2\times 2}$, *wo* $R := \mathbb{Z}_2$. *Sei* Λ *die Teilordnung von* $R^{2\times 2} \oplus R^{2\times 2}$ *mit R-Basis*

$$I + I, c + c, 2I + 0, 0 + 2c, a + 0, 0 + a, b + 0, 0 + b.$$

Dann ist Λ symmetrisch bezüglich $\frac{1}{4}(Tr_1+Tr_2)$ wo Tr_i die reduzierte Spur auf der jeweiligen Komponente $R^{2\times 2}$ bezeichnet. Das komponentenweise Transponieren ist eine Involution $^\circ$ auf Λ. Ist (V,F) ein einfacher orthogonaler $\mathbb{Q}_2\otimes_R\Lambda$-Modul, so gilt $\delta_2(V,F)=0$ oder $\delta_2(V,F)=(S,1)\perp(S,1)$, wo S der einfache Λ-Modul ist. Also ist die Witt-Zerlegungsabbildung δ_2 nicht surjektiv.

Eine einfache Anwendung der Surjektivität von δ_π auf die Existenz invarianter quadratischer Formen auf selbstdualen einfachen G-Moduln über einem Körper der Charakteristik 2 ist die folgende.

Folgerung 4.3.9 *(vgl. [Fei, Corollary IV.11.9]) Sei K eine endliche unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_2$, G eine endliche Gruppe S ein einfacher selbstdualer kG-Modul, der in $\delta_\pi(V,\phi)$ vorkommt für einen regulären orthogonalen KG-Modul (V,ϕ). Hat V keinen trivialen 2-modularen Konstituenten, so trägt S eine reguläre G-invariante quadratische Form.*
Insbesondere sind die selbstdualen einfachen kG-Moduln, die nicht zum Hauptblock gehören alle vom quadratischen Typ.

Beweis. Sei L ein maximal ganzes RG-Gitter in (V,ϕ). Dann gilt für alle $x\in L^\#$, daß $\phi(x,x)\in R$ ist. Denn sonst ist $(L^\#,2\phi)$ ein ganzes RG-Gitter in $(V,2\phi)$ und es gibt ein $x\in L^\#$ mit $2\phi(x,x)\notin 2R$. Dann ist das RG-Gitter $L':=\{y\in L^\# \mid \phi(y,y)\in R\}$ ein echtes Teilgitter von $L^\#$ mit $dim_k(L^\#/L')=1$. Da ϕ eine G-invariante reguläre symmetrische k-Bilinearform auf $L^\#/L'$ induziert, ist $L^\#/L'$ der triviale kG-Modul, welcher nach Voraussetzung kein 2-modularer Konstituent von V war. Also ist $\phi(x,x)\in R$ für alle $x\in L^\#$ und ϕ induziert eine k-wertige quadratische Form q auf $L^\#/2L^\#$, $q(x):=\phi(x,x)+2R$. Dabei ist für die zugehörige Bilinearform $L/2L^\#=(L^\#/2L^\#)^\perp$. Da V keinen trivialen 2-modularen Konstituenten hat, folgt wie eben, daß $\phi(x,x)\in 2R$ für alle $x\in L$. Also ist das Radikal $rad(q)=L/2L^\#$ und q induziert eine reguläre quadratische Form auf $L^\#/L$. Da $L^\#/L$ bezüglich der zugehörigen Bilinearform eine orthogonale Summe einfacher kG-Moduln ist, induziert ϕ auch eine G-invariante quadratische Form ($\neq 0$) auf S.
Die zweite Aussage folgt mit der Surjektivität von δ_π. □

4.3.2 Morita-Äquivalenz von Ordnungen mit Involution.

Definition 4.3.10 *([Miy, Section 3]) Zwei R-Ordnungen $(\Lambda,\ ^\circ)$ und $(\Lambda',\bar{}\,)$ mit Involutionen heißen* Morita-äquivalent, *falls es einen Λ-Λ'-Bimodul M gibt und einen Isomorphismus*

$$b: M\to M^*=\mathrm{Hom}_R(M,R)\cong\mathrm{Hom}_\Lambda(M,\Lambda)\cong\mathrm{Hom}_{\Lambda'}(M,\Lambda'),$$

welcher die folgenden 5 Bedingungen erfüllt:

1) $\tau : M^* \otimes_\Lambda M \to \Lambda'$ *und* $\mu : M \otimes_{\Lambda'} M^* \to \Lambda$ *sind Bimodulisomorphismen, welche die folgenden Diagramme kommutativ machen:*

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_{\Lambda'} M^* \otimes_\Lambda M & \to & M \otimes_{\Lambda'} \Lambda' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda \otimes_\Lambda M & \to & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M^* \otimes_\Lambda M \otimes_{\Lambda'} M^* & \to & M^* \otimes_\Lambda \Lambda \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda \otimes_{\Lambda'} M^* & \to & M^* \end{array} .$$

2) $b(\lambda m) = b(m)\lambda^\circ$ *für alle* $\lambda \in \Lambda, m \in M$.

3) $b(m\gamma) = \bar{\gamma} b(m)$ *für alle* $\gamma \in \Lambda', m \in M$.

4) $\tau(b(n) \otimes m) = \overline{\tau(b(m) \otimes n)}$ *für alle* $m, n \in M$.

5) $\mu(m \otimes b(n)) = \mu(n \otimes b(m))^\circ$ *für alle* $m, n \in M$.

Satz 4.3.11 *([Miy, Theorem B]) Sind* $(\Lambda, \ ^\circ)$ *und* $(\Lambda', \ ^-)$ *Morita-äquivalente R-Ordnungen mit Involutionen, so sind die Grothendieck-Witt-Gruppen* $GW(\Lambda, \ ^\circ)$ *und* $GW(\Lambda', \ ^-)$ *isomorph.*

Ist $\Lambda = \Lambda^\circ$ eine symmetrische R-Ordnung in A, so erhält man gewisse Morita-Äquivalenzen als Ordnung mit Involution analog zum klassischen Fall durch Multiplikation mit einem involutionsinvarianten Idempotent.

Satz 4.3.12 *Sei* $\Lambda = \Lambda^\circ$ *eine symmetrische R-Ordnung in A bezüglich der Form* Tr_z *und* $e = e^2 = e^\circ$ *ein Idempotent in* Λ *mit* $\Lambda = \Lambda e \Lambda$. *Dann induziert* $^\circ$ *eine Involution* $^\circ$ *auf* $e\Lambda e$ *und* $(\Lambda, \ ^\circ)$ *ist Morita-äquivalent zu* $(e\Lambda e, \ ^\circ)$.

Beweis. Sei $M := \Lambda e$. Dann ist M ein Λ-Linksmodul mit $End_\Lambda(M) = e\Lambda e$. Die Morita-Äquivalenz von Λ und $e\Lambda e$ als abstrakte Ordnungen wird z.B. in [Thé, Theorem (1.9.9)] gezeigt. Die Abbildungen τ und μ sind durch die Multiplikation in Λ gegeben. Die Bedingung 1) ist wegen der Assoziativität von Λ erfüllt. Nach [Thé, Proposition (1.6.4)] induziert die Form Tr_z eine unimodulare bilineare Paarung $\Lambda e \times e\Lambda \to R$. Also ist $e\Lambda \cong M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$. Definiere $b : \Lambda e \to e\Lambda$ durch $b(xe) := ex^\circ$ für alle $x \in \Lambda$. Dann ist b ein Isomorphismus und es gilt für alle $x, \lambda \in \Lambda$, daß $b(\lambda xe) = b(xe)\lambda^\circ$ und $b(xe\lambda e) = (e\lambda e)^\circ b(xe)$. Also erfüllt b die Bedingungen 2) und 3) aus Definition 4.3.10. Weiter gelten für alle $x, y \in \Lambda$ die Gleichungen $b(xe)ye = ex^\circ ye = (ey^\circ xe)^\circ = (b(ye)xe)^\circ$ und $yeb(xe) = yex^\circ = (xey^\circ)^\circ = (xeb(ye))^\circ$. Also sind die Bedingungen 4) und 5) aus Definition 4.3.10 erfüllt und die Ordnungen sind Morita-äquivalent. □

Die Isomorphie zwischen $GW(\Lambda, \ ^\circ)$ und $GW(e\Lambda e, \ ^\circ)$ ist gegeben durch

$$\varphi_e : GW(\Lambda, \ ^\circ) \to GW(e\Lambda e, \ ^\circ) : \ (L, B) \mapsto (L \otimes_\Lambda \Lambda e, B_e),$$

wo $L \otimes_\Lambda \Lambda e = Le$ und $B_e : Le \times Le$ die Einschränkung von B auf Le ist. (Le, B_e) liegt in $GW(e\Lambda e, \ ^\circ)$, da für $l_1, l_2 \in L$ gilt $B(l_1 e, l_2(1-e)) = B(l_1, l_2(1-e)e^\circ) = 0$.

Also ist $L = Le \perp L(1-e)$ und die Einschränkung von B auf Le ist regulär. Die Umkehrabbildung ist definiert durch

$$\varphi^e : GW(e\Lambda e,\ ^\circ) \to GW(\Lambda,\ ^\circ) :\ (L, B) \mapsto (L \otimes_{e\Lambda e} e\Lambda, B^e),$$

$$\text{wo } B^e(l_1 \otimes e\lambda_1, l_2 \otimes e\lambda_2) := B(l_1, l_2 e\lambda_2 \lambda_1^\circ e) \text{ für alle } l_1, l_2 \in L,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda.$$

Eine Morita-Äquivalenz von zwei R-Ordnungen Λ, Λ' induziert durch Tensorieren eine Morita-Äquivalenz zwischen den K-Algebren $K\Lambda$ und $K\Lambda'$ und auch zwischen $k\Lambda$ und $k\Lambda'$, welche auf der Ebene der Moduln mit der Zerlegungsabbildung verträglich sind.

Für die Morita-Äquivalenz von Ordnungen mit Involution gilt Analoges für die Witt-Zerlegungsabbildungen.

Satz 4.3.13 *Sei $\Lambda = \Lambda^\circ$ eine symmetrische R-Ordnung in A und $e = e^\circ = e^2$ ein Idempotent in Λ mit $\Lambda = \Lambda e \Lambda$. Die oben gegebene Morita-Äquivalenz zwischen Λ und $e\Lambda e$ induziert Gruppenisomorphismen $GW(\Lambda,\ ^\circ) \to GW(e\Lambda e,\ ^\circ)$ bzw. $GW(A,\ ^\circ) \to GW(eAe,\ ^\circ)$ und $GW(\Lambda/J(\Lambda),\ ^\circ) \to GW(e\Lambda e/J(e\Lambda e),\ ^\circ)$ so, daß das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{array}{ccccc} GW(\Lambda,\ ^\circ) & \to & GW(A,\ ^\circ) & \to & GW(\Lambda/J(\Lambda),\ ^\circ) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ GW(e\Lambda e,\ ^\circ) & \to & GW(eAe,\ ^\circ) & \to & GW(e\Lambda e/J(e\Lambda e),\ ^\circ) \end{array}$$

Beweis. Da die senkrechten Abbildungen durch Einschränken definiert sind, ist es klar, daß das linke Quadrat kommutiert. Sei also (V, B) ein orthogonaler $K\Lambda$-Modul und L ein maximal ganzes Λ-Gitter in V. Dann ist Le ein ganzes $e\Lambda e$-Gitter in $(Ve, B_{|Ve})$. Sei M ein ganzes $e\Lambda e$-Obergitter von Le. Dann ist $M \otimes_{e\Lambda e} e\Lambda$ isometrisch zu einem Λ-Obergitter von $L \cong Le \otimes_{e\Lambda e} e\Lambda$ in $V \cong Ve \otimes_{eAe} eA$. Ist $(M, B_{|M})$ ganz, so auch $(M \otimes_{e\Lambda e} e\Lambda, B^e_{|M})$. Deshalb ist $\delta_p(Ve) = (Le)^\#/Le \cong (L^\#/L)e$, da $L = Le \perp L(1-e)$. Die Multiplikation mit e ist aber genau der durch die Morita-Äquivalenz induzierte Isomorphismus $GW(\Lambda/J(\Lambda),\ ^\circ) \to GW(e\Lambda e/J(e\Lambda e),\ ^\circ)$. □

Zur Konstruktion eines Idempotentes $e = e^\circ \in \Lambda$ mit $\Lambda e \Lambda = \Lambda$ und möglichst kleinem $e\Lambda e$ werden involutionsinvariante Idempotente des Radikalrestklassenringes $\Lambda/J(\Lambda)$ zu involutionsinvarianten Idempotenten von Λ geliftet. Dazu seien $e_1, \ldots, e_a$ orthogonale involutionsinvariante Lifte der involutionsinvarianten zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$, $e_{a+1} \equiv e_{a+2}^\circ, \ldots, e_{h-1} \equiv e_h^\circ$ modulo $J(\Lambda)$ Lifte der übrigen zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$, so daß $1 = e_1 + \ldots + e_h$ eine Zerlegung der 1 in orthogonale Idempotente ist.

Für $1 \le j \le a$ soll nun ein möglichst primitives involutionsinvariantes Idempotent i_j in $e_j\Lambda e_j$ konstruiert werden. Dazu genügt es nach Bemerkung 4.2.1, ein solches in $X := e_j\Lambda e_j/J(e_j\Lambda e_j)$ zu finden. X ist eine einfache k-Algebra mit Involution $^\circ$ also isomorph zu einem Matrixring über einem Erweiterungskörper $\tilde{k}$ von

k für den $^\circ$ gegeben ist durch $x^\circ = f\bar{x}^{tr}f^{-1}$ für eine hermitesche Form $f = \pm\bar{f}^{tr}$ auf dem einfachen X-Modul V (vgl. Abschnitt 3.2.1). Nach Proposition 3.2.2 läßt sich f für den Fall, daß die Involution $^-$ auf dem Zentrum von X nicht trivial ist, oder $char(k) \neq 2$ und $f = f^{tr}$ ist, diagonalisieren. Im symplektischen Fall $f = -f^{tr}$ zeigt man leicht, daß $f \sim diag(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})$ ist und auch im Fall $char(k) = 2$ und $f = f^{tr}$ ist f orthogonale Summe 2-dimensionaler quadratischer Formen. Die Projektionen $i \in X$ bezüglich orthogonalen Zerlegungen von V sind aber involutionsinvariante Idempotente. Also gibt es ein involutionsinvariantes Idempotent $i_j \in X$ mit $dim_{\tilde{k}}(Vi_j) \leq 2$ minimal.

Seien $i_{a+1}, i_{a+3}, \ldots, i_{h-1}$ primitive Idempotente in $e_{a+1}\Lambda e_{a+1}, \ldots, e_{h-1}\Lambda e_{h-1}$.

Dann ist $e := i_1 + \ldots + i_a + i_{a+1} + i_{a+1}^\circ + \ldots + i_{h-1} + i_{h-1}^\circ$ ein involutionsinvariantes Idempotent in Λ für das $e\Lambda e$ und Λ als Ordnungen mit Involution Morita-äquivalent sind.

Eine R-Ordnung Γ heißt Basisordnung, falls es einen Erweiterungskörper $\tilde{k}$ von k gibt, so daß alle einfachen $\tilde{k}\Gamma$-Moduln eindimensional sind. Als Spezialfall der obigen Überlegungen erhält man die folgende Beobachtung.

Bemerkung 4.3.14 *Seien $char(k) \neq 2$ und alle zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ involutionsinvariant. Dann ist $(\Lambda, ^\circ)$ als Ordnung mit Involution Morita-äquivalent zu einer Basisordnung $(e\Lambda e, ^\circ)$ mit Involution.*

4.3.3 Der Radikalidealisatorprozess für Stammordnungen.

Die Involution $^\circ$ permutiert die zentral primitiven Idempotente $\bar{e_1}, \ldots, \bar{e_h}$ von $\Lambda/J(\Lambda)$. Gilt $\bar{e_i}^\circ \neq \bar{e_i}$, so trägt der einfache Λ-Modul S_i mit $S_i\bar{e_i} = S_i$ keine Λ-kovariante symmetrische Bilinearform. Seien $e_1, \ldots, e_h \in \Lambda$ ein System involutionsangepaßter orthogonaler Idempotente von Λ mit $\bar{e_i} = e_i + J(\Lambda)$. Sei e die Summe über alle involutionsinvarianten e_i ein Stammidempotent von Λ.

Aus Bemerkung 1.3.4 folgt, daß $GW(\Lambda/J(\Lambda)) \cong GW(e\Lambda e/J(e\Lambda e))$ ist. Nach dem folgenden Lemma kann man zur Berechnung von δ_π die Ordnung Λ durch $e\Lambda e$ ersetzen.

Lemma 4.3.15 *Mit den obigen Bezeichnungen ist das folgende Diagramm kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} GW(A, ^\circ) & \overset{\delta_\pi(\Lambda,-)}{\to} & GW(\Lambda/J(\Lambda), ^\circ) \\ {\scriptstyle V\mapsto Ve}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M\mapsto Me} \\ GW(eAe, ^\circ) & \overset{\delta_\pi(e\Lambda e,-)}{\to} & GW(e\Lambda e/J(e\Lambda e), ^\circ) \end{array}$$

Beweis. Sei (V, ϕ) ein orthogonaler A-Modul und L ein maximal ganzzahliges Λ-Gitter in V. Da $\phi(le, ve) = \phi(l, vee^\circ) = \phi(l, ve)$ gilt $(Le)^\# = L^\# \cap Ve = L^\#e$. Also ist $(Le)^\#/Le \cong (L^\#/L)e$ als orthogonaler $e\Lambda e$-Modul. $\square$

Wegen dieses Lemmas kann man zur Berechnung der Witt-Zerlegungsabbildung annehmen, daß die durch $^\circ$ auf den zentral primitiven Idempotenten von $\Lambda/J(\Lambda)$ induzierte Permutation trivial ist, also alle einfachen Λ-Moduln eine Λ-kovariante reguläre Bilinearform tragen, was gleichbedeutend damit ist, daß Λ eine Stammordnung ist.

Nach Lemma 4.1.2 gilt für $\Gamma \succ \Lambda$, daß $J(\Lambda) = J(\Gamma) \cap \Lambda$, also $\Lambda/J(\Lambda)$ kanonisch in $\Gamma/J(\Gamma)$ eingebettet ist. Nach dem folgenden Lemma kann man den Radikalidealisatorprozess zur Berechnung der Witt-Zerlegungsabbildung benutzen.

Lemma 4.3.16 *Sei $\Gamma = \Gamma^\circ$ eine Λ deckende R-Ordnung in A. Dann macht die Einschränkung $GW(\Gamma, {}^\circ) \to GW(\Lambda, {}^\circ)$ und $GW(\Gamma/J(\Gamma), {}^\circ) \to GW(\Lambda/J(\Lambda), {}^\circ)$ das folgende Diagramm kommutativ*

$$\begin{array}{ccccc} GW(\Gamma, {}^\circ) & \to & GW(A, {}^\circ) & \stackrel{\delta_\pi(\Gamma,-)}{\to} & GW(\Gamma/J(\Gamma), {}^\circ) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ GW(\Lambda, {}^\circ) & \to & GW(A, {}^\circ) & \stackrel{\delta_\pi(\Lambda,-)}{\to} & GW(\Lambda/J(\Lambda), {}^\circ) \end{array}$$

Beweis. Die Kommutativität des linken Quadrats ist klar. Sei (V, ϕ) ein orthogonaler A-Modul. Jedes Γ-Gitter L in V ist auch ein Λ-Gitter. Ist L ein maximal ganzes Γ-Gitter und M ein maximal ganzes Λ-Gitter in V, welches L enthält, so ist M/L ein total isotroper Λ-Teilmodul von $(L^\#/L, \phi_L)$ und $(L^\#/L, \phi_L) = (M^\#/M, \phi_M)$ in $GW(\Lambda/J(\Lambda), {}^\circ)$. □

Man beachte, daß die Abbildung $GW(\Gamma, {}^\circ) \to GW(\Lambda, {}^\circ)$ selten surjektiv ist. Das kommutative Diagramm kann als Weg benutzt werden, um $\delta_\pi(\Lambda, -)$ über $\delta_\pi(\Gamma, -)$ für $\Gamma \succ \Lambda$ auszurechnen.

Ordnungen, deren invariante Gitter leicht zu beschreiben sind, sind die graduierten Ordnungen (vgl. Abschnitt 4.2.2).

Lemma 4.3.17 *([Ple2, Theorem II.8]) Sei Λ eine graduierte Ordnung in A, V ein einfacher A-Modul, Ω die Maximalordnung in der Divisionsalgebra $\mathrm{End}_A(V)$ mit maximalem Ideal $\mathcal{P}$. Ist L ein Λ-Gitter in V, so ist die Vielfachheit jedes einfachen Λ-Moduls in einer Λ-Kompositionsreihe von $L/\mathcal{P}L \leq 1$.*

Für die Aussage des Lemmas genügt es natürlich, vorauszusetzen, daß $\oplus_{i=1}^s \epsilon_i \Lambda$ ($\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ die zentral primitiven Idempotente in A) eine graduierte Ordnung ist.

Satz 4.3.18 *Sei $\Lambda = \Lambda^\circ$ eine Stammordnung in $A = \oplus_{i=1}^s \epsilon_i A$ und $1 \leq i \leq s$, so daß $\Gamma := \epsilon_i \Lambda = \Gamma^\circ$ eine graduierte Ordnung in der einfachen involutionsinvarianten Algebra $A\epsilon_i \cong D^{n \times n}$ ist. Sei Ω die Maximalordnung von D und M eine Exponentenmatrix von Γ mit $m_{1j} = 0$. Sei Λ_N die Kopfordnung von Λ und Γ_N die Kopfordnung von Γ. Dann ist*

$$\Lambda_N \epsilon_i = \Gamma_N \cong \Lambda(\Omega, n_i, M_i).$$

Gibt es ein j mit m_{j1} ungerade, so ist $n_i \in \mathbb{N}^2$ und $M_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Sonst ist $\Lambda_N \epsilon_i$ eine Maximalordnung, $n_i = n$ und $M_i = (0)$.

Beweis. Sei (V, ϕ) ein orthogonaler einfacher A-Modul mit $V\epsilon_i = V$ und L' ein maximal ganzes Λ-Gitter in V. Dann induziert ϕ die anisotrope Bilinearform ϕ_L auf $(L')^\#/L'$ und $\delta_\pi(\Lambda, (V, \phi)) = ((L')^\#/L', \phi_{L'})$.

Sei L ein maximal ganzes Λ_N-Gitter in V. Dann kommen die einfachen Λ-Moduln in $L^\#/L$ mit Vielfachheit ≤ 1 vor. Da die einfachen Λ-Moduln alle selbstdual sind, ist $(L^\#/L, \phi_L)$ ein anisotroper Λ-Modul. Also ist $L^\#/L \cong_\Lambda (L')^\#/L'$.

Sei $\mathcal{P}$ das maximale Ideal in Ω. Die einfachen Λ_N-Moduln, die als Kompositionsfaktoren von $L/\mathcal{P}L$ vorkommen, schränken sich alle verschieden auf Λ ein. Da die einfachen Λ-Moduln alle selbstdual sind, sind auch alle einfachen Λ_N-Moduln selbstdual. Nach Satz 4.2.9 ist also $L^\#/L$ ein einfacher Λ_N-Modul und $\Lambda_N \epsilon_i \cong \Lambda(\Omega, x_i, y_i, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix})$ mit $x_i = dim_{\Omega/\mathcal{P}}(L^\#/L)$ und $y_i = dim_{\Omega/\mathcal{P}}(L/\mathcal{P}L^\#)$ (falls x_i oder $y_i = 0$, so ist $\Lambda_N \epsilon_i$ eine Maximalordnung). x_i und y_i sind durch $\Lambda\epsilon_i$ eindeutig bestimmt und man erhält dieselben Werte, wenn man Λ durch Γ ersetzt.

Der Rest folgt aus Bemerkung 4.2.8. □

Also kann man für gewisse Stammordnungen Λ, die Kopfordnung schon an der graduierten Hülle von Λ ablesen, wie die nachstehende Folgerung und der darauffolgende Satz zeigen.

Folgerung 4.3.19 *Ist $\Lambda = \Lambda^\circ$ eine Stammordnung, so daß $\Gamma := \oplus_{i=1}^s \epsilon_i \Lambda$ graduiert ist, dann ist $\Lambda_N = \Gamma_N$, d.h. die Kopfordnungen von Λ und ihrer graduierten Hülle stimmen überein.*

Satz 4.3.20 *Sei $\Lambda = \Lambda^\circ = \Lambda(R, n_1, \ldots, n_t, M)$ eine involutionsinvariante graduierte Stammordnung in der zerfallenden einfachen K-Algebra A, M eine Exponentenmatrix von Λ mit $m_{1j} = 0$ für alle $1 \leq j \leq t$. Seien $S_1, \ldots, S_t$ die zugehörigen einfachen Λ-Moduln. Sei ϕ eine reguläre A-kovariante Form auf dem einfachen A-Modul V, mit $\delta_\pi(\Lambda, (V, \phi)) = (U, b)$ anisotrop, so daß S_1 kein Λ-Kompositionsfaktor von U ist. Dann ist*

$$U \cong \oplus\{S_i \mid 1 \leq i \leq t, m_{i1} \text{ ungerade } \}$$

und jeder anisotrope Vertreter (U', b') von $\delta_\pi(\Lambda, (V, \pi\phi))$ erfüllt

$$U' \cong \oplus\{S_i \mid 1 \leq i \leq t, m_{i1} \text{ gerade } \}.$$

Insbesondere läßt Λ ein unimodulares Gitter in V fest, genau dann wenn alle m_{i1} gerade sind.

Beweis. Sei L das natürliche Λ-Gitter. Die Form $\phi = diag(\phi_1, \ldots, \phi_t)$ ist ein K-Vielfaches von der Form $diag(f_1, \ldots, f_t)$ aus Bemerkung 4.2.8. Multipliziert man ϕ mit einer geeigneten π-Potenz so, daß $\phi_1 \in GL_{n_1}(R)$ liegt, dann kommen genau die einfachen Λ-Moduln S_i mit m_{i1} ungerade in einer Λ-Kompositionsreihe von $L^\#/L$ mit ungerader Vielfachheit vor. Ist L' ein maximal ganzes Λ-Obergitter von L, so stimmen, da alle einfachen Λ-Moduln selbstdual sind, die Kompositionsfaktoren von $L^\#/(L')^\#$ mit denen von L'/L überein. Da in $(L')^\#/L'$ jeder einfache Λ-Modul höchstens mit Vielfachheit 1 als Kompositionsfaktor vorkommt, gilt $(L')^\#/L' \cong \oplus\{S_i \mid 1 \leq i \leq t, m_{i1} \text{ ungerade } \}$. Analog folgt, daß ein bezüglich $\pi\phi$ maximal ganzes Gitter L'' von der Form $(L'')^\#/L' \cong \oplus\{S_i \mid 1 \leq i \leq t, m_{i1} \text{ gerade } \}$ ist. □

4.3.4 Eine Anwendung für Blöcke mit zyklischem Defekt.

Sei K eine unverzweigte Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und Λ ein Block von RG mit zyklischer Defektgruppe der Ordnung p^a, so daß $k = R/\wp$ ein Zerfällungskörper von $\Lambda/\wp\Lambda$ ist. Seien $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{e+a}$ die zentral primitiven Idempotente von A, so daß $\epsilon_i^\circ = \epsilon_i$ für mindestens ein i.

Nach [Ple2, Theorem (VIII.3)] (vgl. auch [Rog]) ist nach geeigneter Umnummerierung der ϵ_i die Ordnung $\oplus_{i=1}^{e+a}\epsilon_i\Lambda$ graduiert mit $\epsilon_s\Lambda \cong \Lambda(R_s, \tilde{n}_s, H_{t_s})$ für $1 \leq s \leq a$ und $\epsilon_s\Lambda \cong \Lambda(R, \tilde{n}_s, aH_{t_s})$ für $a+1 \leq s \leq a+e$. Die R_s sind Bewertungsringe in verzweigten Erweiterungen von K, $\tilde{n}_s \in \mathbb{N}^{t_s}$ und H_t ist wie auf Seite 84 definiert.

Sei e_r ein Stammidempotent von Λ. Nach [HiL, Theorem 2.1.20] gilt dann entweder $e_r = 0$ oder es gibt mindestens 2 zentral primitive Idempotente ϵ_i von A mit $\epsilon_j^\circ = \epsilon_j$. Im letzten Fall gilt für alle $1 \leq i \leq e+a$, daß $e_r\epsilon_i \neq 0 \Leftrightarrow \epsilon_i = \epsilon_i^\circ$. Der Brauer-Baum von $e_r\Lambda e_r$ ist eine zusammenhängende gerade Linie S_Λ.

Seien ϵ_{j_1} und ϵ_{j_2} die zentral primitiven Idempotente die zu den Enden von S_Λ gehören.

Lemma 4.3.21 *Sei $e_r \neq 0$ und $\Lambda_r := e_r\Lambda e_r$. Mit den obigen Bezeichnungen gilt für alle $1 \leq i \leq e+a$ mit $\epsilon_i^\circ = \epsilon_i$*

(i) Ist $i = j_1$ oder $i = j_2$, so ist $\epsilon_i\Lambda_r$ eine Maximalordnung.

(ii) Ist $1 \leq i \leq a$ dann gehört ϵ_i zu dem Ausnahmevertex. Falls $i \neq j_1, j_2$ ist, dann ist

$$\epsilon_i\Lambda_r \cong \Lambda(R_i, n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, H_2).$$

(iii) Ist $a+1 \leq i \leq a+e$ und $i \neq j_1, j_2$, dann ist

$$\epsilon_i\Lambda_r \cong \Lambda(R, n_1^{(i)}, n_2^{(i)}, a \cdot H_2).$$

Folgerung 4.3.22 *Ist $a+1 \leq i \leq a+e$ und $i \neq j_1, j_2$, dann läßt $\epsilon_i\Lambda_r$ (bzw. $\epsilon_i\Lambda$) genau dann ein irreduzibles unimodulares Gitter fest, wenn a gerade ist.*

Kapitel 5

Gruppenringe.

In diesem Kapitel werden Methoden entwickelt, um symmetrische Ordnungen mit Involution, insbesondere Gruppenringe, als Ordnungen mit Involution bis auf Morita-Äquivalenz zu beschreiben. Dazu werden gewöhnliche und modulare Charaktertafeln der jeweiligen Gruppen benutzt, die man in [CCNPW], [JLPW] und als GAP-library ([GAP]) findet. Diese Quellen werden nicht mehr besonders aufgeführt.

5.1 Bezeichnungen.

Definition 5.1.1 *Sei p eine Primzahl, A eine halbeinfache Algebra über $\mathbb{Q}_p$ und Λ eine $\mathbb{Z}_p$-Ordnung in A. Eine unverzweigte Erweiterung K von $\mathbb{Q}_p$ heißt* unverzweigt genügend groß *für Λ, falls*

(i) der Restklassenkörper $k := R/pR$, wo R der Ring der ganzen Zahlen in K ist, ein Zerfällungskörper von $k \otimes_R \Lambda$ ist und

(ii) die einfachen $K \otimes_{\mathbb{Q}_p} A$-Moduln einen kommutativen Endomorphismenring haben.

Wie in Kapitel 4 sei in diesem Kapitel K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Ring der ganzen Zahlen R, maximalem Ideal $\wp = \pi R$ und Restklassenkörper $k := R/\pi R$. A bezeichnet eine endlich dimensionale halbeinfache K-Algebra, mit zentral primitiven Idempotenten $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$. Dann ist

$$A = \bigoplus_{t=1}^{s} \epsilon_t A = \bigoplus_{t=1}^{s} K_t^{n_t \times n_t}$$

Sei V_t der einfache A-Modul mit $V_t \epsilon_t = V_t$ $(1 \leq t \leq s)$.

Sei Λ eine R-Ordnung in A und $e_1, \ldots, e_h \in \Lambda$ Lifte der zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$. Ist eine Involution $^\circ$ auf A gegeben mit $\Lambda^\circ = \Lambda$, so

werden die $e_1, \ldots, e_h$ meist involutionsangepaßt gewählt. Dann ist

$$\Lambda = \bigoplus_{i=1}^{h} (e_i \Lambda e_i \oplus \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{h} e_i \Lambda e_j).$$

Zur Beschreibung von Λ genügt es, die symmetrischen Ordnungen $e_i \Lambda e_i$ und die Bimoduln $e_i \Lambda e_j$ zu beschreiben und die Multiplikation $e_i \Lambda e_j \times e_j \Lambda e_l \to e_i \Lambda e_l$ zu erklären.

Für $1 \leq i \leq h$ sei

$$c_i := \{1 \leq t \leq s \mid \epsilon_t e_i \neq 0\}$$

die Menge der Indizes der einfachen A-Moduln die in dem projektiven Λ-Modul $e_i \Lambda$ vorkommen.

5.1.1 Strategie.

Zur Vereinfachung der Rechnungen sei K unverzweigt genügend groß für Λ. Dann sind die Körper $K_t = Z(\epsilon_t A)$ rein verzweigte Erweiterungen von K vom Grad $d_t = [K_t : K]$. Sei R_t die R-Maximalordnung in K_t $(1 \leq t \leq s)$.

Nach Übergang zu einer Morita-äquivalenten Ordnung kann man annehmen, daß Λ eine Basisordnung ist, also die einfachen Λ-Moduln eindimensionale k-Vektorräume sind. Dann sei $P_i := e_i \Lambda$ der projektiv unzerlegbare Λ-Modul mit Kopf S_i $(1 \leq i \leq h)$. Dann ist $\Lambda / J(\Lambda) \cong \oplus_{i=1}^{h} k$ kommutativ und die S_i sind auch die minimalen 2-seitigen Ideale von $\Lambda / J(\Lambda)$.

Die wesentliche Einschränkung in diesem Abschnitt ist die Voraussetzung, daß

$$\Gamma := \oplus_{t=1}^{s} \epsilon_t \Lambda$$

eine graduierte Ordnung ist. Dann gibt es Exponentenmatrizen (vgl. Definition 4.2.7) $M^{(t)} = (m_{ij}^{(t)})_{i,j} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n_t \times n_t}$, so daß

$$\Lambda \epsilon_t \cong \Lambda(R_t, M^{(t)})$$

ist $1 \leq t \leq s$. Der Einfachheit halber werden die Zeilen und Spalten der Exponentenmatrix $M^{(t)}$ mit den Elementen von

$$r_t := \{1 \leq i \leq h \mid t \in c_i\}$$

indiziert für alle $1 \leq t \leq s$.

Methoden zur Berechnung von Γ für Blöcke Λ von Gruppenringen sind in [Ple2], [Ple1] entwickelt worden. Sie werden der Vollständigkeit halber sowie zur Festlegung der Bezeichnungen im nächsten Abschnitt wiedergegeben.

Im Kontext dieser Arbeit sind die Bimoduln $e_i \Lambda e_j$ für die involutionsinvarianten Idempotente $e_i = e_i^\circ$, $e_j = e_j^\circ$ deshalb von Bedeutung, da man aus den Isomorphietypen der $e_i \Lambda e_j$ als $e_i \Lambda e_i$-$e_j \Lambda e_j$-Bimodul die Witt-Zerlegungsabbildung

δ_π aus der exakten Sequenz $\star$ berechnen kann. Dies liefert die Information, in welchen A-Moduln es unimodulare Λ-Gitter gibt. (vgl. Abschnitt 5.5)

Zur Beschreibung von Λ werden die R-Gitter $e_i\Lambda e_j$ und die R-Ordnungen $e_i\Lambda e_i$ $(1 \leq i, j \leq h)$ in eine kommutative endlich dimensionale K-Algebra eingebettet. Dazu sei

$$V := \oplus_{i=1}^{s} V_i$$

die Summe aller einfachen A-Moduln und

$$E := \mathrm{End}_A(V).$$

Bemerkung 5.1.2 *(a) E ist ein kommutativer Ring isomorph zu $\oplus_{t=1}^{s} K_t \cong Z(A)$.*

(b) Für alle $1 \leq j \leq h$ ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}_\Lambda(P_j)$ kommutativ.

V hat einen bis auf Isomorphie eindeutigen Λ-Teilmodul isomorph zu P_j $(1 \leq j \leq h)$. Wähle also für alle $1 \leq j \leq h$ eine Einbettung

$$\varphi_j : P_j \hookrightarrow V.$$

Der Teilraum $K \otimes_R \varphi_j(P_j) \leq V$ ist unabhängig von der Wahl der Einbettung φ_j. Sei Q_j das eindeutige A-invariante Komplement von $K\varphi_j(P_j)$ in

$$V = K\varphi_j(P_j) \oplus Q_j.$$

Dann wird jeder Λ-Homomorphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, P_i)$ für $1 \leq i, j \leq h$ als Element von E betrachtet, indem φ auf Q_j mit Null fortgesetzt wird, $\varphi \in E$ mit $Q_j \leq Ker(\varphi)$.

Bemerkung 5.1.3 *Für $1 \leq j, j' \leq h$ ist der Endomorphismenring $\mathrm{End}_\Lambda(P_j)$ kanonisch (unabhängig von der Wahl von φ_j) in E eingebettet. Ebenso hat man (von φ_j und $\varphi_{j'}$ abhängige) Einbettungen von $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, P_{j'})$ in E.*

Ebenso wie den wohlbekannten Sachverhalt $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda) \cong \Lambda$ zeigt man das folgende Lemma.

Lemma 5.1.4 *Für $1 \leq i, j \leq h$ ist $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j) \cong e_j\Lambda e_i$.*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_j)$. Dann ist $\varphi(e_i) = e_j\alpha$ mit $\alpha \in \Lambda$. Da φ ein Λ-Homomorphismus ist, ist $\varphi(e_i\lambda) = e_j\alpha\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$. Insbesondere ist $e_j\alpha = e_j\alpha e_i$. Also ist φ durch Linksmultiplikation in Λ mit $e_j\alpha e_i$ induziert. □

Vermöge dieses Lemmas werden die R-Gitter $e_j\Lambda e_i$ als Teilgitter (nicht vollen Rangs) von E aufgefaßt. Die zentral primitiven Idempotente $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ bilden

eine kanonische "Basis" von E, d.h. jedes Element φ von E läßt sich eindeutig schreiben als

$$\varphi = \sum_{j=1}^{s} a_j \epsilon_j \text{ mit } a_j \in K_j.$$

Eine $n \times s$-Matrix X heißt Erzeugermatrix von $e_j \Lambda e_i$ falls $X_{l,j} \in K_j$ für alle l, j und die n Vektoren $\sum_{j=1}^{s} X_{l,j}\epsilon_j$ das R-Gitter $e_j \Lambda e_i$ erzeugen. Sind diese Vektoren sogar R-linear unabhängig, so heißt X eine Basismatrix. Der Zeilenraum der Matrix X wird mit $\langle X \rangle$ bezeichnet. Ist $\varphi \in E$ und X eine Erzeugermatrix, so sei $X\varphi$ die Matrix der Produkte.

Die Bezeichnungen aus diesem Abschnitt 5.1 werden im folgenden beibehalten.

5.2 Die graduierte Hülle.

In diesem Abschnitt sei K unverzweigt genügend groß für Λ und Λ eine Basisordnung in A, die symmetrisch ist bezüglich $\Phi := Tr_u$ mit $u = \sum_{t=1}^{s} u_t \epsilon_t$, so daß Γ eine graduierte Ordnung ist.

Die graduierte Ordnung Γ bestimmt die Exponentenmatrizen $M^{(t)}$ nicht eindeutig. Invarianten von Γ sind hingegen die Strukturkonstanten:

Bemerkung und Definition 5.2.1 *Sei $1 \leq t \leq s$, $\epsilon_t \Gamma =: \Gamma'$ und $i, j, l \in r_t$. Dann ist*

$$(e_i \Gamma' e_j)(e_j \Gamma' e_l) = \pi_t^{m_{ijl}^{(t)}} e_i \Gamma' e_l$$

wo $m_{ijl}^{(t)} = m_{ij}^{(t)} + m_{jl}^{(t)} - m_{il}^{(t)} \geq 0$. Die Zahlen $m_{ijl}^{(t)}$ heißen Strukturkonstanten *von Γ.*

5.2.1 Die Führerformel für graduierte Ordnungen.

Zur Bestimmung der graduierten Hülle von Λ ist die Führerformel von grundlegender Bedeutung. Der nächste Satz folgt direkt aus Satz 4.1.14 durch Berechnung des Duals $\Gamma^{\#}$.

Satz 5.2.2 *([Ple2, Theorem (III.8)]) Das größte Γ-Ideal in Λ ist*

$$\Gamma^{\#} = F_{\Gamma}(\Lambda) = \oplus_{t=1}^{s}(\epsilon_t \Lambda \cap \Lambda).$$

Dabei ist

$$\Gamma^{\#} = \oplus_{t=1}^{s} \Lambda(R_t, \kappa_t J_{n_t} - (M^{(t)})^{tr})$$

mit $\kappa_t = \mu_t - \delta_t$, wo $J_{n_t} \in \{1\}^{n_t \times n_t}$ mit allen Einträgen 1 ist, $\pi_t^{-\delta_t} R_t$ die inverse Differente der R-Ordnung R_t, also das Dual des R-Gitters R_t bzgl. der Spurbilinearform, ist und $\pi_t^{\mu_t} R_t = u_t^{-1} R_t$.

Da $\Gamma^{\#} \subset \Lambda \subset \Gamma$ ist, folgt

$$m_{ij}^{(t)} + m_{ji}^{(t)} \leq \kappa_t \text{ für alle } i, j \in r_t.$$

Nach Multiplikation mit den Idempotenten $e_i \in \Lambda$ $(1 \leq i \leq h)$ findet man

Folgerung 5.2.3 *([Ple2, Theorem (IV.4)(v)]) Sei $1 \leq t \leq s$ und $i, j \in r_t$. Die Vielfachheit des einfachen Λ-Moduls S_i als Kompositionsfaktor von $\epsilon_t P_j/(\epsilon_t P_j \cap P_j)$ ist*

$$\kappa_t - m_{ij}^{(t)} - m_{ji}^{(t)}.$$

5.2.2 Amalgame.

Definition 5.2.4 *Seien O eine R-Ordnung und $L_1, \ldots, L_t$ O-Gitter.*

(i) Ein volles O-Teilgitter L von $L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ heißt Amalgam *oder* subdirektes Produkt *von $L_1, \ldots, L_t$, falls die Projektionen $\pi_i : L \to L_i$ surjektiv sind. Die Menge aller Amalgame von $L_1, \ldots, L_t$ wird mit $\mathcal{A}(L_1, \ldots, L_t)$ bezeichnet.*

(ii) Sei $L \in \mathcal{A}(L_1, \ldots, L_t)$. Die Elementarteiler *$Elt(L)$ von L sind definiert als die Invarianten der endlichen abelschen Gruppe $L_1 \oplus \ldots \oplus L_t/L$. Eine Basiswechselmatrix zwischen einer R-Basis von $L_1 \oplus \ldots \oplus L_t$ und einer R-Basis von L heißt auch eine* Basiswechselmatrix *von L.*

(iii) Die O-Moduln $L_i/(L \cap L_i)$ heißen amalgamierende Faktoren.

Amalgame von Gittern werden in Kapitel II von [Ple1] betrachtet. Die zentral primitiven Idempotente von $K\Lambda = A$ liefern wichtige Projektionen.

Bemerkung 5.2.5 *Die Ordnung Λ ist ein Amalgam*

$$\Lambda \in \mathcal{A}(\epsilon_1\Lambda, \ldots, \epsilon_s\Lambda).$$

Allgemeiner gilt für $1 \leq i, j \leq h$, daß

$$e_i\Lambda e_j \in \mathcal{A}(\epsilon_{i_1} e_i\Lambda e_j, \ldots, \epsilon_{i_t} e_i\Lambda e_j)$$

falls $c_i \cap c_j = \{i_1, \ldots, i_t\}$.
Da die Zerlegungszahlen von Λ alle 0 oder 1 sind, sind die projektiv unzerlegbaren Λ-Moduln P_i $(1 \leq i \leq h)$ Amalgame

$$P_i \in \mathcal{A}(\epsilon_{i_1} P_i, \ldots, \epsilon_{i_t} P_i)$$

wo $c_i = \{i_1, \ldots, i_t\}$.

L ist das einzige Amalgam in $\mathcal{A}(L)$.
Amalgame von 2 Gittern sind auch recht gut verstanden (vgl. [Ple1, Kapitel II]).

Lemma 5.2.6 *Ist $L \in \mathcal{A}(L_1, L_2)$ ein Amalgam von zwei Gittern, so gibt es einen O-Isomorphismus*

$$\varphi : L_1/(L_1 \cap L) \to L_2/(L_2 \cap L)$$

zwischen den amalgamierenden Faktoren mit $L = \{(l_1, l_2) \in L_1 \oplus L_2 \mid \varphi(l_1) = \varphi(l_2)\}$.

Amalgamierungsmatrizen projektiv unzerlegbarer Λ-Gitter sind in [Ple2] wie folgt definiert.

Definition 5.2.7 *([Ple1, Definition (III.3)], [Ple2, Definition (IV.6)]) Sei $1 \leq i \leq h$. Sei $A(P_i) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{.\})^{|c_i| \times h}$ eine Matrix, deren Zeilen mit den Elementen von c_i und deren Spalten mit $\{1, \ldots, h\}$ indiziert sind. $A(P_i)$ ist die* Amalgamierungsmatrix *des projektiv unzerlegbaren Gitters P_i, falls für alle $j = 1, \ldots, h$, $t \in c_i \cap c_j$*

$$A(P_i)_{t,j} = \kappa_t - m_{ij}^{(t)} - m_{ji}^{(t)} \quad \textit{die Vielfachheit von } S_j \textit{ in } \epsilon_t P_i/(\epsilon_t P_i \cap P_i) \textit{ ist.}$$

Hier ist κ_t wie in Satz 5.2.2 definiert. Ist $t \in c_i - c_j$, so sei $A(P_i)_{t,j}$ gleich "." gesetzt.

Bemerkung 5.2.8 *Aus der Definition sieht man, daß die Einträge in der Amalgamierungsmatrix symmetrisch in i und j sind. D.h. es gilt*

$$A(P_i)_{t,j} = A(P_j)_{t,i} \textit{ für alle } 1 \leq i, j \leq h,\ t \in c_i \cap c_j.$$

Da die Diagonaleinträge in den Exponentenmatrizen 0 sind, ist außerdem

$$A(P_i)_{t,i} = \kappa_t \textit{ für alle } 1 \leq i \leq h,\ t \in c_i.$$

$A(P_i)_{t,j}$ heißt die Amalgamierungstiefe *von ϵ_t bei $e_i \Lambda e_j$.*
$e_i \Lambda e_j$ heißt gleichmäßig amalgamiert, *falls die Amalgamierungstiefen der ϵ_t ($t \in c_i \cap c_j$) in $e_i \Lambda e_j$ alle gleich sind. Diese Amalgamierungstiefe heißt dann die* gemeinsame Amalgamierungstiefe *von $e_i \Lambda e_j$.*

Die nächste Bemerkung erhält man aus der Führerformel Satz 5.2.2 und Folgerung 5.2.3.

Bemerkung 5.2.9 *Die Amalgamierungstiefe von ϵ_t bei $e_i \Lambda e_j$ ist die Bewertung des Elementarteilers $\neq 1$ des Amalgams $e_i \Lambda e_j \in \mathcal{A}(\epsilon_t(e_i \Lambda e_j), (1 - \epsilon_t)(e_i \Lambda e_j))$. Insbesondere ist sie kleiner oder gleich der maximalen Bewertung der Elementarteiler von $e_i \Lambda e_j \in \mathcal{A}(\epsilon_1(e_i \Lambda e_j), \ldots, \epsilon_s(e_i \Lambda e_j))$.*

Aus der Interpretation der Einträge der Amalgamierungsmatrizen als Vielfachheiten in amalgamierenden Faktoren erhält man mit Lemma 5.2.6

Folgerung 5.2.10 *([Ple2, Corollary (IV.7)]) Sei* $1 \leq i \neq j \leq h$.

(i) Besteht $c_i \cap c_j = \{t\}$ *nur aus einem Element, dann ist* $A(P_i)_{t,j} = 0$, *also*

$$m_{ij}^{(t)} + m_{ji}^{(t)} = \kappa_t.$$

(ii) Ist $c_i \cap c_j = \{l, t\}$ *zweielementig, so ist* $A(P_i)_{t,j} = A(P_i)_{l,j}$, *also*

$$\kappa_t - m_{ij}^{(t)} - m_{ji}^{(t)} = \kappa_l - m_{ij}^{(l)} - m_{ji}^{(l)}.$$

5.2.3 Automorphismen und Antiautomorphismen.

In diesem Abschnitt wird die Wirkung von Automorphismen und Antiautomorphismen von Λ auf die Exponentenmatrizen der graduierten Ordnung Γ beschrieben. Sei dazu α ein Automorphismus oder ein Antiautomorphismus von Λ. Dann induziert α eine Permutation der zentral primitiven Idempotente von A und von $\Lambda/J(\Lambda)$. Die zugehörigen Permutationen von $\{1, \ldots, s\}$ und $\{1, \ldots, h\}$ werden wieder mit α bezeichnet. Da es eine Einheit in Λ gibt, welche die Menge $\{\alpha(e_1), \ldots, \alpha(e_h)\}$ in $\{e_1, \ldots, e_h\}$ konjugiert, kann man annehmen, daß $\alpha(e_i) = e_{\alpha(i)}$ $1 \leq i \leq h$ ist.

Lemma 5.2.11 *([Ple2, Proposition (IV.1)])*

(i) Sei α *ein Automorphismus von* Λ. *Dann gilt*

$$m_{ijl}^{(t)} = m_{\alpha(i)\alpha(j)\alpha(l)}^{(\alpha(t))} \text{ für alle } 1 \leq t \leq s, 1 \leq i, j, l \leq n_t.$$

(ii) Sei α *ein Antiautomorphismus von* Λ. *Dann gilt*

$$m_{ijl}^{(t)} = m_{\alpha(l)\alpha(j)\alpha(i)}^{(\alpha(t))} \text{ für alle } 1 \leq t \leq s, 1 \leq i, j, l \leq n_t.$$

Die wichtigste Anwendung dieses Lemmas ist für $\alpha = \circ$.

Folgerung 5.2.12 *Angenommen alle Idempotente* e_i *sind involutionsinvariant, d.h.* $e_i^\circ = e_i$ *für alle* $1 \leq i \leq h$. *Dann gilt* $m_{ijl}^{(t)} = m_{ljl}^{(t)}$, *also*

$$m_{ij}^{(t)} + m_{jl}^{(t)} + m_{li}^{(t)} = m_{ji}^{(t)} + m_{il}^{(t)} + m_{lj}^{(t)} \text{ für alle } 1 \leq t \leq s, i, j, l \in r_t.$$

Insbesondere gilt für das Element l *von* r_t *mit* $m_{l,i}^{(t)} = 0$ *für alle* $i \in r_t$, *daß*

$$m_{ij}^{(t)} + m_{jl}^{(t)} = m_{ji}^{(t)} + m_{il}^{(t)} \text{ für alle } 1 \leq t \leq s, i, j \in r_t.$$

Also ist für alle $1 \leq t \leq s$ *und* $i, j \in r_t$

$$m_{ij}^{(t)} = \frac{1}{2}(\kappa_t - A(P_j)_{t,i} + A(P_l)_{t,j} - A(P_l)_{t,i})$$

und die Einträge in den Exponentenmatrizen von Γ *sind schon durch die Amalgamierungsmatrizen von* Λ *bestimmt.*

5.3 Die Bimoduln.

In diesem Abschnitt sei K unverzweigt genügend groß für die Basisordnung Λ in A, die symmetrisch ist bezüglich $\Phi := Tr_u$ mit $u = \sum_{t=1}^{s} u_t \epsilon_t$, so daß Γ eine graduierte Ordnung ist.

Wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben sei $V := \oplus_{i=1}^{s} V_i$ die Summe aller einfachen A-Moduln und $E := \mathrm{End}_A(V)$. Für $i = 1, \ldots, h$ sei $\varphi_i : P_i \to V$ ein fest gewählter Λ-Monomorphismus. Die R-Gitter $e_i \Lambda e_j \cong \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, P_i)$ werden mit den Teilmengen

$$\Lambda_{ji} := (\varphi_j^{-1})_{|\varphi_j(P_j)} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_j, P_i)\varphi_i$$

von E identifiziert, wo $\varphi_j^{-1} : E \to KP_j$ der zu φ_j rechtsinverse A-Epimorphismus ist, der das A-invariante Komplement von $K\varphi_j(P_j)$ in E als Kern hat.

Für $1 \leq i \leq s$ ist $K_i := Z(A\epsilon_i)$ mit R-Maximalordnung $R_i \subset K_i$. Sei L das Kompositum der Körper K_i mit R-Maximalordnung O und maximalem Ideal $\mathcal{P}$.

Definition 5.3.1 *Sei $0 \neq \varphi \in E$. Dann läßt sich φ eindeutig schreiben als $\varphi = \sum_{i=1}^{s} a_i \epsilon_i$ mit $a_i \in K_i$.*

(i) Das gebrochene O-Ideal $\sum_{i=1}^{s} a_i O$ heißt die Norm von φ,

$$n(\varphi) := \sum_{i=1}^{s} a_i O \subseteq L.$$

Die Abbildung $n : E - \{0\} \to$ Gruppe der gebrochenen O-Ideale heißt die Normfunktion *von E.*

(ii) Der Träger *von φ ist $T(\varphi) := \{i \in \{1, \ldots, s\} \mid a_i \neq 0\}$.*

Klar ist

Bemerkung 5.3.2 *Sind $i, l \in \{1, \ldots, h\}$ und $\varphi \in \Lambda_{il}$, so ist $T(\varphi) \subseteq c_i \cap c_l$, wo $c_i = \{1 \leq j \leq s \mid \epsilon_j P_i \neq 0\}$ für $i = 1, \ldots, h$*

Die Normfunktion hat die folgende Multiplikativitätseigenschaft

Bemerkung 5.3.3 *Sind $\varphi, \psi \in E - \{0\}$, so gilt*

$$n(\varphi)n(\psi) \text{ teilt } n(\varphi\psi)$$

und für $i \in \mathbb{N}$ ist

$$n(\varphi^i) = n(\varphi)^i.$$

Wie schon zu Beginn dieses Kapitels bemerkt ist die Einbettung $\Lambda_{ii} \subset E$ unabhängig von der Wahl des Λ-Homomorphismus $\varphi_i : P_i \hookrightarrow V$, die Mengen Λ_{ij} für $i \neq j$ hängen jedoch i.a. von der Wahl von φ_i und φ_j ab.

Lemma 5.3.4 *Für $1 \leq i \leq h$ ist die Einheitengruppe Λ_{ii}^* des lokalen Rings Λ_{ii} gleich*

$$\Lambda_{ii}^* = \{\varphi \in \Lambda_{ii} \mid n(\varphi) = O\}.$$

Beweis. Sei $x \in \Lambda_{ii}$ ein Element der Norm O. Dann ist für alle $j \in \mathbb{N}$ die Norm $n(x^j) = O$. Insbesondere ist $x^j \notin p\Lambda_{ii}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Also liegt x nicht im eindeutigen maximalen Ideal von Λ_{ii} und ist deshalb eine Einheit.
Die umgekehrte Inklusion ist trivial, da $n(id_{|P_i}) = O$ ist. □

Da P_i und P_j für $i \neq j$ nicht isomorph sind, findet man mit Lemma 5.3.4.

Bemerkung 5.3.5 *Seien $1 \leq i \neq l \leq h$, $0 \neq \varphi \in \Lambda_{il} \subset E$ und $0 \neq \psi \in \Lambda_{li} \subset E$. Dann ist $\varphi\psi = \psi\varphi \in \Lambda_{ii} \cap \Lambda_{ll}$ mit*

$$\mathcal{P} \supseteq n(\varphi\psi).$$

Daraus erhält man eine wichtige Folgerung, die in Kapitel 6 gebraucht wird.

Folgerung 5.3.6 *Seien P_0, P_1, P_2 projektiv unzerlegbare Λ-Moduln. Seien $f_i \in \Lambda_{i-1,i}$ und $g_i \in \Lambda_{i,i-1}$ $(i = 1, 2)$ mit*
(i) $n(f_i g_i) = p$ $(i = 1, 2)$.
(ii) $g_1 f_1$ ist kongruent zu $f_2 g_2$ modulo $p\Lambda_{11}$.
Angenommen der Träger von $g_1 f_1 \in \Lambda_{11} \cap \Lambda_{00}$ ist disjunkt zum Träger von $f_2 g_2 \in \Lambda_{11} \cap \Lambda_{22}$.
Dann gibt es eine Einheit $u \in \Lambda_{11}^*$ mit $(g_1 f_1 - f_2 g_2)u = g_1 f_1 u - f_2 g_2 u = pid_{|P_1}$ und $g_1 f_1 u = p \sum_{i \in T(g_1 f_1)} \epsilon_i$ und $g_2 f_2 u = -p \sum_{i \in T(g_2 f_2)} \epsilon_i$.

Nun ist Λ eine symmetrische Ordnung bezüglich der assoziativen Bilinearform Tr_u, $u = \sum_{i=1}^{s} u_i \epsilon_i \in E$, $u_i \in K_i$.

Bemerkung 5.3.7 *(vgl. Lemma 4.1.12) Die symmetrisierende Form Tr_u von Λ induziert eine Bilinearform $\phi : E \times E \to K, (a, b) \mapsto \phi(a, b) := \sum_{j=1}^{s} tr_{K_j/K}(abu\epsilon_j)$. Dann gilt für die Einschränkung ϕ_{il} von ϕ auf $\Lambda_{il} \times \Lambda_{li}$*

$$\phi_{il} : \Lambda_{il} \times \Lambda_{li} \to R \text{ ist nicht ausgeartet.}$$

Definition 5.3.8 *Sind $M_1 \subset M_2 \subset E$ zwei volle R-Gitter in E mit $M_2/M_1 \cong \oplus_{j=1}^{t} R/p^{x_j}R$, so sei der* Index *$[M_2 : M_1]$ von M_1 in M_2 definiert als $[M_2 : M_1] := p^{x_1 + \ldots + x_t} R$.*

Sei ν_p die Fortsetzung der p-adischen Bewertung von K auf L ($\nu_p(p) = 1$) und für gebrochene O-Ideale I in L sei $\nu_p(I) := min\{\nu_p(x) \mid x \in I\}$.

Lemma 5.3.9 *Sei $\mathcal{D}(R_i)$ die inverse Differente von R_i, also das Dual von R_i bezüglich der Spurbilinearform über R ($i = 1, \ldots, s$). Für $j = 1, \ldots, h$ sei*

$$D_j := \prod_{i \in c_j} [R_i : u_i^{-1} \mathcal{D}(R_i)] O.$$

Ist $(\psi_1, \ldots, \psi_l)$ eine R-Basis von Λ_{jj}, so ist

$$2 \sum_{i=1}^{l} \lfloor \nu_p(n(\psi_i)) \rfloor \leq \nu_p(D_j),$$

wo $\lfloor r \rfloor$ für $r \in \mathbb{Q}$ die größte ganze Zahl $\leq r$ bezeichnet.

Beweis. Sei π_i ein Primelement von R_i und $d_i := [K_i : K]$ der Verzweigungsindex von K_i. Sei $M := \oplus_{i \in c_j} R_i \epsilon_i$ die R-Maximalordnung in $K\Lambda_{jj}$. Bezüglich Tr_u ist $[M : M^{\#}]O = D_j$. Da Λ_{jj} bezüglich Tr_u selbstdual ist, ist $[M : \Lambda_{jj}]O = \sqrt{D_j}$. Da $p^{\sum_{i=1}^{l} \lfloor \nu_p(n(\psi_i)) \rfloor}$ den Index $[M : \Lambda_{jj}]$ teilt, folgt die Behauptung. □

Kennt man die Ordnung Λ_{jj} und den Λ_{jj}-Modul Λ_{ij}, so kennt man eine Oberordnung und eine Teilordnung der symmetrischen Ordnung Λ_{ii}:

Bemerkung 5.3.10 *Seien $1 \leq i, j \leq h$. Dann gilt*

$$\mathrm{End}_{\Lambda_{jj}}(\Lambda_{ij})^{\#} \subset \Lambda_{ii} \subset \mathrm{End}_{\Lambda_{jj}}(\Lambda_{ij}).$$

Ein weiteres Hilfsmittel zur Bestimmung der lokalen Ordnungen Λ_{ii} für Blöcke Λ von Gruppenringen RG sind die zentralen Charaktere. Die Menge der Klassensummen $C_g := \sum_{h \in g^G} h$ mit $g \in G$ ist eine R-Basis des Zentrums $Z(RG)$. Die Operation von C_g auf den einfachen KG-Moduln kann man mit Hilfe der Charaktertafel von G ausrechnen.

Bemerkung 5.3.11 *(vgl. [Ple1, Seite 90]) Sei Λ Morita-äquivalent zum Block eines Gruppenrings RG und seien $\chi_1, \ldots, \chi_s$ absolut irreduzible Charaktere von G, die zu $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ gehören. Für $g \in G$ und $1 \leq t \leq s$ sei*

$$\omega_t(C_g) := \frac{|C_g|}{\chi_t(1)} \chi_t(g) \in K_t.$$

Dann ist

$$\sum_{t \in c_i} \omega_t(C_g) \epsilon_t \in \Lambda_{ii}$$

für alle $1 \leq i \leq h$.

Es folgen einige Überlegungen, die in den Beispielen in Abschnitt 5.6 von Nutzen sind. Dazu sei nun R ein kommutativer lokaler Integritätsbereich mit maximalem Ideal πR.

Lemma 5.3.12 *Sei $O \in \mathcal{A}(R,\ldots,R)$ eine kommutative lokale R-Ordnung $O \leq \oplus^n R$ und $L \in \mathcal{A}(R,\ldots,R)$ ein O-Gitter vom R-Rang n. Dann ist R^n/L als R-Modul isomorph zu einem Faktormodul von R^n/O. Dabei gilt $R^n/L \cong R^n/O$ nur dann wenn die O-Moduln L und O isomorph sind.*

Beweis. Sei $B \in R^{n\times n}$ so daß die Zeilen von B die Koeffizienten bezüglich der Standardbasis von R^n der Vektoren einer R-Basis von O sind. Nach elementaren Zeilenumformungen und eventuellen Spaltenvertauschungen kann man annehmen, daß B die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & \pi^{a_2} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \pi^{a_n} \end{pmatrix},$$

wo $(1,\pi^{a_2},\ldots,\pi^{a_n})$ die (geordneten) Elementarteiler der Matrix B sind, d.h. $a_1 := 0 < a_2 \leq \ldots \leq a_n$ und die Einträge in der i-ten Zeile von B sind durch π^{a_i} teilbar. Sei $B' \in R^{n\times n}$ eine entsprechende Basiswechselmatrix für L. Da L ein subdirektes Produkt von R^n ist, kommt für alle $j = 1,\ldots,n$ in der j-ten Spalte von B' eine Einheit $x_j \in R^*$ vor. Da L ein O-Modul ist, enthält L einen Teilmodul M mit Basiswechselmatrix der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 & * & \ldots & * \\ 0 & x_2\pi^{a_2} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & x_n\pi^{a_n} \end{pmatrix}$$

mit Elementarteilen $(1,\pi^{a_2},\ldots,\pi^{a_n})$. Also ist R^n/L ein Faktormodul von R^n/M, welcher als R-Modul isomorph zu R^n/O ist. Ist $M = L$, so gibt es nur eine Zeile von B', in der Einheiten $\in R^*$ vorkommen. Dann sind aber alle Einträge dieser Zeile Einheiten, da L ein volles subdirektes Produkt ist. Nach Anwenden eines O-Isomorphismus, kann man annehmen, daß die erste Zeile von B' nur aus Einsen besteht. Dann enthält L aber $1\cdot O = O$ einen Teilmodul isomorph zu O. Aus der Gleichheit der Elementarteiler, folgt $L \cong O$ (als O-Moduln). □

Lemma 5.3.13 *Ist $L \in \mathcal{A}(R,\ldots,R)$ selbstdual bzgl. einer Form $F := \pi^{-a}diag(x_1,\ldots,x_n)$ mit $x_i \in R^*$ und ist $Elt(L) = (\pi^{a_1},\ldots,\pi^{a_n})$ $(a_1 \leq \ldots \leq a_n)$, so gilt $a_i = a - a_{n+1-i}$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Beweis. Sei $B = DU$ eine Basiswechselmatrix für L, wo $U \in GL_n(R)$, $D = diag(\pi^{a_1},\ldots,\pi^{a_n})$. Dann ist $B^{-tr}F^{-1}$ eine Basiswechselmatrix für $L^\#$. Ist $V := diag(1/x_1,\ldots,1/x_n) \in GL_n(R)$, so gilt $B^{-tr}F^{-1} = \pi^a D^{-1}U^{-tr}V$. Da $U^{-tr}V \in GL_n(R)$ ist, sind die Elementarteiler von $L^\#$ gerade $(\pi^{a-a_n},\ldots,\pi^{a-a_1})$. Da $L = L^\#$ ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 5.3.14 *Seien e_i und $e_j \in \Lambda$ involutionsinvariante Lifte zentral primitiver Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ und $c_i \cap c_j = \{i_1, \ldots, i_t\}$. Dann gilt*

$$Elt(e_i\Lambda e_j) = Elt(e_j\Lambda e_i).$$

Sind $a_1, \ldots, a_t$ die Einträge $\neq .$ in der zu e_j gehörenden Spalte der Amalgamierungsmatrix von P_i, so ist die Determinante von $e_i\Lambda e_j$ gerade $\pi^{\frac{1}{2}(a_1+\ldots+a_t)}$. Gilt zusätzlich $\epsilon_l^\circ = \epsilon_l$ und $K_l = K$ für alle $l \in c_i \cap c_j$, so ist $e_i\Lambda e_j$ selbstdual bezüglich einer Form $diag(x_1\pi^{-a_1}, \ldots, x_t\pi^{-a_t})$. mit $x_1, \ldots, x_t \in R^*$.

Beweis. Die Involution $^\circ$ ist ein Bimodulisomorphismus zwsichen $e_i\Lambda e_j$ und $e_j\Lambda e_i = (e_i\Lambda e_j)^\circ$. Da $\oplus_{l\in c_i\cap c_j}\epsilon_l(e_j\Lambda e_i) = (\oplus_{l\in c_i\cap c_j}\epsilon_l(e_i\Lambda e_j))^\circ$ stimmen die Elementarteiler der Amalgame überein.

Sei $c_i \cap c_j = \{m_1, \ldots, m_t\}$, so daß sich a_l und m_l entsprechen. $\sum_{l=1}^t a_l$ ist die Anzahl der R-Kompositionsfaktoren von $(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_i\Lambda e_j)/(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_i\Lambda e_j \cap e_i\Lambda e_j)$. Mit $|k|^o := |(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_i\Lambda e_j)/e_i\Lambda e_j|$ und $|k|^u := |e_i\Lambda e_j/(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_i\Lambda e_j \cap e_i\Lambda e_j)|$. gilt $\sum_{l=1}^t a_l = o + u$. Da Λ eine symmetrische Ordnung ist, findet man durch Dualisieren mit der Führerformel $|k|^u = |(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_j\Lambda e_i)/e_j\Lambda e_i|$. Also ist die Determinante des Amalgams $e_i\Lambda e_j$ gleich π^o und die von $e_j\Lambda e_i$ gleich π^u. Da die beiden Bimoduln isomorph sind, gilt $o = u = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^t a_l$ (vgl. [Ple1, Hauptsatz (III.2)]).

Identifiziert man $(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_i\Lambda e_j)$ und $(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_j\Lambda e_i)$ mit R^t, so wird die Abbildung $^\circ : e_i\Lambda e_j \to e_j\Lambda e_i$ durch Multiplikation mit einer Diagonalmatrix $diag(x_1, \ldots, x_t)$ mit $x_l \in R^*$ beschrieben. Bezüglich Φ ist das Dual

$$(\oplus_{l=1}^t\epsilon_{m_l}e_i\Lambda e_j)^\# = (\oplus_{l=1}^t\pi^{a_l}\epsilon_{m_l}e_j\Lambda e_i).$$

Also gilt für jede Basiswechselmatrix B von $e_i\Lambda e_j$

$$B\ diag(x_1\pi^{a_1}, \ldots, x_t\pi^{a_t})B^{tr} \in GL_t(R). \qquad \square$$

Lemma 5.3.15 *Sei $O \in \mathcal{A}(R, \ldots, R)$ eine kommutative lokale R-Ordnung $O \leq \oplus^n R$ und $L \in \mathcal{A}(R, \ldots, R)$ ein O-Gitter vom R-Rang n.*

(i) Hat L nur einen Elementarteiler $\in R^*$, so gibt es ein $u \in (\oplus^n R)^*$ mit $uO \subset L$.

(ii) Ist $F_{R^n}(O) = \pi^2 R^n$ und $Elt(O) = (1, \pi, \ldots, \pi, \pi^2)$ und ist der maximale Elementarteiler von L gleich π^2, so ist $L \cong O$.

Beweis. (i) Sei B eine Basiswechselmatrix von L. Da L ein Amalgam ist, steht in jeder Spalte von B eine Einheit. Da L nur einen Elementarteiler 1 hat, gibt es nur eine Zeile von B, in der Einheiten vorkommen dürfen. Also hat B eine Zeile $(x_1, \ldots, x_n)$, mit allen $x_i \in R^*$. Indem man den i-ten Basisvektor von R^n mit x_i multipliziert, kann man annehmen, daß diese Zeile von der Form $(1, \ldots, 1)$ ist.

Dann gilt aber $O \cong (1,\ldots,1)O \subseteq L$.
(ii) Durch elementare Zeilenumformungen kann man dann jede Basiswechselmatrix von O auf die Form

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 0 & \ldots & 0 & x_2\pi \\ 0 & 0 & \pi & \ddots & \vdots & x_3\pi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \pi & x_{n-1}\pi \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

mit $x_i \in R^*$ $(2 \leq i \leq n-1)$ bringen. Nach (i) genügt es zu zeigen, daß L nur einen Elementarteiler 1 hat. Angenommen L hat 2 Elementarteiler $= 1$. Dann gibt es einen Vektor $v = (*,\ldots,*,a,*,\ldots,*,1)$ in L, der an der letzten Stelle eine 1 und an einer anderen Stelle eine Koordinate $a \in \pi R$ hat. Multipliziert man v mit den Basisvektoren von O, so findet man $(0,\ldots,0,\pi) \in L$ und die Elementarteiler von L teilen alle π. □

5.4 Logistik.

Sei Λ wie in Abschnitt 5.3. Zur Berechnung der Witt-Zerlegungsmatrizen (vgl. Abschnitt 5.5) genügen die Isomorphietypen der Bimoduln $e_i\Lambda e_j$. Zur Beschreibung der Ordnung Λ werden wie in Abschnitt 5.3 die Gitter $e_i\Lambda e_j$ nach Wahl von Homomorphismen $\varphi_i : P_i \hookrightarrow V$ als Teilmengen Λ_{ji} von E (gegeben durch eine Basismatrix) angesehen. Diese Teilmengen hängen für $i \neq j$ von der Wahl der Einbettungen φ_i und φ_j ab. Allerdings kann man nicht jedes System von Bimodulisomorphismen durch eine geeignete Wahl der Einbettungen realisieren.

Seien $\varphi_i : P_i \hookrightarrow V$ $(1 \leq i \leq h)$ Λ-Monomorphismen und

$$\Lambda_{il} = \varphi_i^{-1}\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_l)\varphi_l \subset E \ (1 \leq i,l \leq h)$$

wie in Abschnitt 5.3.

Bemerkung 5.4.1 *Seien $\varphi_i' : P_i \hookrightarrow V$ $(i = 1,\ldots,h)$ weitere Λ-Monomorphismen. Seiein φ_i^{-1}, $(\varphi_i')^{-1} : V \to P_i$ die zu φ_i bzw. φ_i' rechtsinversen Λ-Epimorphismen die das Λ-invariante Komplement von KP_i in V als Kern haben. Dann ist $\varphi_i^{-1}\varphi_i' = \sum_{j\in c_i} d_{ij}\epsilon_j \in E$. Für $1 \leq i,l \leq h$ sei $\Lambda_{il}' = (\varphi_i')^{-1}\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i,P_l)\varphi_l' \subset E$. Dann ist*

$$\Lambda_{il}' = \sum_{j\in c_i\cap c_l} d_{ij}^{-1}d_{lj}\epsilon_j\Lambda_{il}.$$

Sei für $1 \leq j \leq s$ die Matrix $D_j := diag(1, d_{l_2j},\ldots,d_{l_nj})$, wo $r_j = \{l_1,\ldots,l_n\}$. Dann induziert die Konjugation mit $\sum_{j=1}^s D_j\epsilon_j \in K\Lambda$ (d.h. mit D_j in der j-ten Komponente) einen Isomorphismus $\Lambda \to \Lambda'$.

Verschiedene Wahlen der Einbettungen $\varphi_i : P_i \hookrightarrow V$ kann man also durch Konjugation mit Diagonalmatrizen ineinander überführen.

Definition 5.4.2 *Ein System von Bimodulisomorphismen* $\varphi_{il} : \Lambda_{il} \to \Lambda'_{il} := \varphi(\Lambda_{il}) : \lambda \mapsto \lambda \sum_{j \in c_i \cap c_l} \varphi_j^{(il)} \epsilon_j$ *(*$1 \leq i, l \leq h$*) heißt* zulässig, *wenn es Zahlen* $d_{ij} \in K_j^*$ *(*$1 \leq i \leq h, 1 \leq j \leq s$*) gibt, so daß*

$$\varphi_j^{(il)} = d_{ij}^{-1} d_{lj} \text{ für alle } 1 \leq i, l \leq h \text{ und } 1 \leq j \leq s.$$

Bemerkung 5.4.3 *Ist* Λ *eine symmetrische Ordnung, so ist für* $1 \leq i, l \leq h$ *nach Bemerkung 5.3.7 das Dual von* Λ_{il} *bezüglich der Einschränkung von* ϕ *auf* $K\Lambda_{li} = K\Lambda_{il} \subset E$ *gleich* Λ_{li}*. Diese Eigenschaft bleibt unter zulässigen Systemen von Bimodulisomorphismen erhalten.*

Eine einfacher Test, welche Wahlen man durch zulässige Isomorphismen realisieren kann, gibt das folgende (direkt aus der Lie-Theorie für die GL_n abzuleitende) Lemma.

Lemma 5.4.4 *Sei* $1 \leq j \leq s$ *und* $(i_1, l_1), \ldots, (i_n, l_n) \in r_j \times r_j$*. Sei* $(b_1, \ldots, b_m)$ *eine Basis von* $\mathbb{Q}^m$*. Sind die Vektoren* $b_{i_1} - b_{l_1}, \ldots, b_{i_n} - b_{l_n}$ *linear unabhängig, so gibt es für jede Wahl von Elementen* $x_{i_1,l_1}, \ldots, x_{i_n,l_n} \in K_j^*$ *ein zulässiges System von Bimodulisomorphismen* φ_{il} *mit* $\varphi_j^{(i_t l_t)} = x_{i_t,l_t}$ *für alle* $1 \leq t \leq n$*.*

Als hinreichend kompliziertes Beispiel wird in Abschnitt 5.6 der Hauptblock von $\mathbb{Z}_3 S_9$ betrachtet (Satz 5.6.13).

5.5 Witt-Zerlegungsmatrizen.

In diesem Abschnitt sei K unverzweigt genügend groß für Λ und die Restklassenkörpercharakteristik $char(k) \neq 2$. Zunächst kann Λ eine beliebige Basisordnung in A sein. Es wird eine Methode entwickelt, um die in Abschnitt 4.3 definierte exakte Sequenz

$$(\star) \quad 0 \to GW(\Lambda, \circ) \xrightarrow{\iota} GW(A, \circ) \xrightarrow{\delta_\pi} GW(\Lambda/J(\Lambda), \circ)$$

zu berechnen. In Abschnitt 4.3 war gezeigt worden, daß die Bilder unter δ_π durch eine orthogonale Summe selbstdualer einfacher Λ-Moduln vertreten werden. Deshalb kann man Œ annehmen, daß $e_i^\circ = e_i$ für alle $1 \leq i \leq h$. und $\epsilon_j^\circ = \epsilon_j$ für $j = 1, \ldots, s$. Dann wird auf K_j durch $\circ$ eine Involution induziert.

Für $j = 1, \ldots, s$ sei dann F_j eine A-kovariante nicht ausgeartete symmetrische K-Bilinearform auf V_j.

Lemma 5.5.1 $V_j = \perp_{i=1}^h V_j e_i$.

Beweis. $F_j(ve_i, we_l) = F_j(v, we_le_j^\circ) = 0$ falls $i \neq l$. □

Für $i = 1, \ldots, h$ seien $f_i \in R^*$ ($\overline{f_i} \in k^*$ ist die Gram-Matrix einer Λ-kovarianten nicht ausgearteten symmetrischen k-Bilinearform auf dem eindimensionalen Λ-Modul S_i). Ist L_j ein bezüglich F_j ganzes $R_j\Lambda$-Gitter in V_j, so gibt es eine R_j-Basis $B = \cup_{i=1}^h Be_i$ von $L_j = \perp_{i=1}^h L_je_i$, bezüglich der die Gram-Matrix von F_j die Form $diag(a_{ji}f_i \mid i \in r_j)$ für geeignete hermitesche Matrizen $a_{ji} \in R_j^{d_{ji} \times d_{ji}}$, wo d_{ji} die Vielfachheit von S_i in L_j/π_jL_j bezeichnet.

Definition 5.5.2 *Die* Witt-Zerlegungsmatrix $\mathrm{WD}(\Lambda)$ *bezüglich* $F_1, \ldots, F_s$ *und* $f_1, \ldots, f_h$ *ist die* $s \times h$*-Matrix mit Einträgen*

$$\mathrm{WD}(\Lambda)_{j,i} := a_{ji} \in W(K_j, \ ^\circ).$$

Eine $s \times h$*-Matrix* $\mathrm{WD}(\Lambda)$ *mit* $\mathrm{WD}(\Lambda)_{j,i} \in W(K_j)$ *heißt eine* Witt-Zerlegungsmatrix *von* Λ*, falls es reguläre* Λ*-kovariante Formen* F_j *und* f_i *gibt, so daß* $\mathrm{WD}(\Lambda)$ *eine Witt-Zerlegungsmatrix bezüglich* $F_1, \ldots, F_s$ *und* $f_1, \ldots f_h$ *ist.*

Wie im Beweis von Satz 1.3.8 sieht man unter Benutzung der Wohldefiniertheit der Zerlegungszahlen die folgende Bemerkung ein.

Bemerkung 5.5.3 *Die Witt-Zerlegungsmatrix ist wohldefiniert, d.h. sie hängt nicht von der Wahl der Gitter* L_j *in* V_j *und der Gitterbasen* B *ab (wohl aber von der Wahl der* F_j *und* f_i*).*

Satz 5.5.4 *Sei* $W \cong \oplus_{j=1}^s n_jV_j$ *ein* A*-Modul. Genau dann gibt es eine nicht ausgeartete* A*-kovariante Form* F *auf* W*, so daß* W *ein unimodulares* Λ*-Gitter enthält, wenn es für* $j = 1, \ldots, s$ *Zahlen* $b_{j1}, \ldots, b_{jn_j} \in K_j^*$ *gibt, mit* $b_{jl}^\circ = b_{jl}$ *für* $l = 1, \ldots, n_j$*, so daß für alle* $1 \leq i \leq h$ *das Element*

$$\sum_{j=1}^{s} Tr_{K_j/K}(\sum_{l=1}^{n_j} b_{jl}\mathrm{WD}(\Lambda)_{j,i}) \in W(K)$$

im Kern von $\delta_\pi : W(K) \to W(k)$ *liegt.*

Beweis. Die A-kovarianten regulären symmetrischen K-Bilinearformen F auf W sind von der Form $F = \perp_{j=1}^s (\perp_{l=1}^{n_j} Tr_{K_j/K}b_{jl}F_j)$ mit $b_{jl}^\circ = b_{jl} \in K_j^*$. Sei L ein bezüglich F maximal ganzes Λ-Gitter in W. Dann ist $(L^\#/L, F_L) = \perp_{i=1}^h (\oplus^{m_i}S_i, \phi_i)$ für geeignete $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und k-Bilinearformen ϕ_i ein halbeinfacher orthogonaler Λ-Modul. Da $L^\#/L$ anisotrop ist, ist für alle $1 \leq i \leq h$ der bilineare k-Vektorraum (k^{m_i}, ϕ_i) anisotrop. Also ist (W, F) im Kern von δ_π genau dann, wenn $\phi_i = 0$ in $W(k)$ gilt für alle $1 \leq i \leq h$. □

Sei nun Λ symmetrisch und $\Gamma := \oplus_{j=1}^s \epsilon_j\Lambda$ eine graduierte Ordnung. Für $1 \leq i, j \leq h$ ist

$$e_i\Lambda e_j = (e_j\Lambda e_i)^\# = (e_j\Lambda e_i)^\circ.$$

Kennt man $e_j\Lambda e_i$, so kann man das Dual $e_i\Lambda e_j$ leicht berechnen. Die Involution $^\circ$ hat nach Bemerkung 4.2.8 eine einfache Form.

Lemma 5.5.5 *Seien $1 \leq i,j \leq h$. Für alle $l \in c_i \cap c_j$ gibt es $d_l \in K_l^*$, $D := \sum_{l \in c_i \cap c_j} d_l \epsilon_l$, so daß für alle $\varphi = \sum_{l \in c_i \cap c_j} a_l \epsilon_l \in e_j \Lambda e_i$ das Bild unter der Involution $^\circ$ von der Form*

$$\varphi^\circ = (\sum_{l \in c_i \cap c_j} a_l^\circ \epsilon_l) D$$

ist.

Ist also X eine Basismatrix von $e_j \Lambda e_i$ so ist $X^\circ D$ eine Basismatrix von $(e_j \Lambda e_i)^\# = (e_j \Lambda e_i)^\circ$ für D aus dem Lemma. Dabei ist D meistens durch $e_j \Lambda e_i$ und F im Sinne des folgenden Lemmas eindeutig bestimmt.

Lemma 5.5.6 *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 5.5.5 sei zusätzlich angenommen, daß $e_j \Lambda e_i$ ein unzerlegbarer $e_j \Lambda e_j$-$e_i \Lambda e_i$-Bimodul ist. Seien $d_l' \in K_l^*$ $(l \in c_i \cap c_j)$, $D' := \sum_{l \in c_i \cap c_j} d_l' \epsilon_l$ mit $XD' = XD$. Dann gibt es ein $c \in R^*$ mit $d_l^{-1} d_l' \equiv c \pmod{\pi_l R_l}$.*

Beweis. $DD' \in End_{e_j \Lambda e_j - e_i \Lambda e_i}(e_j \Lambda e_i)$ ist eine Einheit in einem lokalen Ring. □

Dabei ist D schon durch den Isomorphietyp des $e_i \Lambda e_i$-$e_j \Lambda e_j$ Bimoduls modulo $\sum_{l \in c_j \cap c_i} (K_l^*)^2 \epsilon_l$ bestimmt.

Bemerkung 5.5.7 *Seien $a_l \in K_l^*$ für alle $l \in c_i \cap c_j$ und $A := \sum_{l \in c_i \cap c_j} a_l \epsilon_l$, $A' := \sum_{l \in c_i \cap c_j} a_l^{-1} \epsilon_l$. Ist XD eine Basismatrix des Duals von $\langle X \rangle$, so ist $XAD = (XA')A^2 D$ eine Basismatrix des Duals von $\langle XA' \rangle$.*

Kennt man also genügend viele Isomorphietypen unzerlegbarer Bimoduln $e_i \Lambda e_j$, so kann man eine Witt-Zerlegungsmatrix wie folgt bestimmen.

Methode 5.5.8 *Für jedes $l = 1, \ldots, s$ wähle ein $i_l \in r_l$ und setze* $\mathrm{WD}(\Lambda)_{li_l} := (1)$. *Dann ist die π_l-Potenz der Einträge in* $\mathrm{WD}(\Lambda)$ *schon durch die Exponentenmatrizen von $\oplus_{l=1}^s \epsilon_l \Lambda$ festgelegt:*

$$\mathrm{WD}(\Lambda)_{li} := \begin{cases} (a_{li} 1) & m_{ili}^{(l)} + m_{iil}^{(l)} \text{ gerade} \\ (a_{li} \pi_l) & m_{ili}^{(l)} + m_{iil}^{(l)} \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $a_{li} \in R^*$. (Beachte, daß die Quadratklassen in R_l^* schon durch Elemente von R^* vertreten werden, da die beiden Ringe den gleichen Restklassenkörper haben.)

Für jedes $i = 1, \ldots, h$ wähle ein $l_i \in c_i$ und setze $a_{l_i i} := 1$. Diese Wahlen treffe man möglichst redundanzfrei, so daß durch sie alle F_l und f_i festgelegt sind.

Für alle $i,j \in \{1, \ldots, h\}$ für die $e_i \Lambda e_j$ ein unzerlegbarer Bimodul ist, bestimme man Elemente $d_l^{i,j} \in K_l^*$ $(l \in c_i \cap c_j)$ mit

$$e_i \Lambda e_j (\sum_{l \in c_i \cap c_j} d_l^{i,j} \epsilon_l) = (e_i \Lambda e_j)^\#,$$

so daß für die l, für die $\mathrm{WD}(\Lambda)_{l,i}$ *und* $\mathrm{WD}(\Lambda)_{l,j}$ *schon gewählt sind,*

$$d_l^{i,j} = \mathrm{WD}(\Lambda)_{l,i}/\mathrm{WD}(\Lambda)_{l,j}$$

ist. Ist $\mathrm{WD}(\Lambda)_{l,i}$ *schon bekannt, so setze* $\mathrm{WD}(\Lambda)_{l,j} := \mathrm{WD}(\Lambda)_{l,i}/d_l^{i,j}$ *und ist* $\mathrm{WD}(\Lambda)_{l,j}$ *schon bekannt, so setze* $\mathrm{WD}(\Lambda)_{l,i} := \mathrm{WD}(\Lambda)_{l,j}d_l^{i,j}$.

Satz 5.5.9 *Sind nach Anwenden von Methode 5.5.8 alle Einträge von* $\mathrm{WD}(\Lambda)$ *berechnet, so ist das Ergebnis eine Witt-Zerlegungsmatrix von* Λ.

Beweis. Nach Bemerkung 4.2.8 ist die Involution auf $\Lambda\epsilon_l$ von der Form $\lambda \mapsto diag(h_i^{(l)} f_i \mid i \in r_l)\lambda^{tr} diag((h_i^{(l)})^{-1} f_i^{-1} \mid i \in r_l)$ für geeignete $h_i^{(l)} \in K_l^*$. Ist nun $l \in c_i \cap c_j$, so ist $d_l^{i,j} \in c h_i^{(l)} f_i (h_j^{(l)} f_j)^{-1} (K_l^*)^2$ für eine von l unabhängige Konstante $c = c(i,j) \in R^*$. Ist nun für ein l der Quotient $h_i^{(l)}/h_j^{(l)} \in K_l^*/(K_l^*)^2$ bekannt, so bestimmt dieser $c \in R^*/(R^*)^2$. Also ist dann aus der Kenntnis von $h_i^{(l)}$ (oder $h_j^{(l)}$) der jeweils andere Wert $h_j^{(l)}$ (bzw. $h_i^{(l)}$) aus $d_l^{i,j}/c$ berechenbar. □

Ist $|c_i \cap c_j| = 2$ und $e_i\Lambda e_j$ unzerlegbar, so ist $d_l^{i,j}$ besonders leicht zu bestimmen.

Beispiel 5.5.10 *Sei* $c_i \cap c_j = \{l, m\}$, $R_l = R_m = R$ *und* $e_i\Lambda e_j$ *unzerlegbar. Dann ist* $d_l^{i,j}/d_m^{i,j} = -u_m/u_l$. *Ist* Λ *Morita-äquivalent zu einem Block eines Gruppenrings und sind* χ_m *und* χ_l *zu* ϵ_m *und* ϵ_l *gehörige absolut irreduzible Charaktere, so ist* $d_l^{i,j}/d_m^{i,j} = -\chi_m(1)/\chi_l(1)$.

Beweis. $e_i\Lambda e_j$ ist isomorph zu einem Bimodul mit Basismatrix $X := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \pi^d \end{pmatrix}$. Das Dual dieses Moduls hat Basismatrix $X^{-tr}(u_l^{-1}\epsilon_l + u_m^{-1}\epsilon_m)$. Also ist auch $X(-u_l^{-1}\pi^{-d}\epsilon_l + u_m^{-1}\pi^{-d}\epsilon_m)$ eine Basismatrix für das Dual. □

Der Gruppenring $\mathbb{Z}_3S_6$.

Der Gruppenring $\mathbb{Z}_3S_6$ hat 3 Blöcke, von denen 2 Defekt 0 haben. Die Witt-Zerlegungsmatrix des nichttrivialen Blocks ist

	1	1′	6	4	4′
1	**(1)**	.	.	.	.
1′	.	**(1)**	.	.	.
5a	**(1)**	.	.	**(3)**	.
5a′	.	**(1)**	.	.	**(3)**
5b	**(1)**	.	.	.	**(3)**
5b′	.	**(1)**	.	**(3)**	.
16	**(1)**	(1)	(−1)	(3)	(3)
10	.	.	**(1)**	**(3)**	.
10′	.	.	(1)	.	**(3)**

Die Zeilen sind indiziert durch gewöhnliche Charaktere von $G = S_6$, die Spalten durch 3-modulare Brauer-Charaktere. Dabei wird der Charakter χ durch seinen Grad $\chi(1)$ bezeichnet. Zur Unterscheidung werden Buchstaben angefügt und die Charaktere x' erhält man aus x durch Tensorieren mit dem Signumcharakter $1'$.
Beweis. Die graduierte Hülle von $\mathbb{Z}_3 S_6$ ist schon in [Ple1, Beispiel (III.9)] bestimmt worden. Da der Defekt des Blocks 2 ist, erhält man diese aber auch direkt aus der Jantzen-Schaper-Formel (vgl. [Ple3]). Die fett gedruckten Einträge in der Witt-Zerlegungsmatrix sind die Einträge die durch Anpassung der kovarianten Formen auf den irreduziblen Moduln gewählt werden (vgl. Methode 5.5.8). Die übrigen Einträge erhält man mit Hilfe von Beispiel 5.5.10: Aus Zeile $5b$ erhält man den Eintrag $4'$ in Zeile 16. Dann liefert Zeile $5a'$ den Eintrag in Spalte $1'$, Charakter $5b'$ den Eintrag in Spalte 4 und 10 in Spalte 6 von Zeile 16. Jetzt erhält man aus den Einträgen 6 und $4'$ in Zeile 16 den letzten Eintrag in Spalte 6, Zeile $10'$.
□

5.6 Beispiele.

5.6.1 Der Gruppenring $\mathbb{Z}_2[\zeta_7]SL_2(8)$.

Andersen, Jørgensen und Landrock beschreiben in [AJL] die Loewy-Reihen der projektiv unzerlegbaren $\mathbb{F}_{p^n} SL_2(p^n)$-Moduln. Einen besonders einfachen fast einreihigen Teilmodulverband erhält man für die projektiven Decken der einfachen $\mathbb{F}_{p^n} SL_2(p^n)$-Moduln, deren Dimension durch p^{n-1} teilbar ist.

Sei R der Ring der ganzen Zahlen in der unverzweigten Erweiterung K vom Grad n von $\mathbb{Q}_p$.

Sei S ein einfacher $\mathbb{F}_{p^n} SL_2(p^n)$-Modul der Dimension ap^{n-1} mit $p \not| a$ und P der projektive $RSL_2(p^n)$-Modul mit Kopf S. Sei $J := J(RSL_2(p^n))$. Nach [AJL, Lemma 3.4, Theorem 4.3] gibt es $n+2$ ($n+1$, falls $p = 2$) paarweise nicht isomorphe einfache $RSL_2(p^n)$-Moduln $S =: S_0, S_1, \ldots, S_n, S_n'$ (wo S_n' für $p = 2$ wegfällt), so daß für $i = 0, \ldots, n$ die i-te Loewy-Schicht von P/pP isomorph ist zu

$$PJ^i/(PJ^{i+1} + pP) \cong \begin{cases} S_i & \text{falls } i < n \text{ oder } p = 2 \text{ und } i \leq n \\ S_n \oplus S_n' & \text{falls } p > 2 \text{ und } i = n \end{cases}.$$

Aus der Beschreibung der Zerlegungsabbildung in [HSW] ergibt sich, daß der $KSL_2(p^n)$-Modul KP Summe von 2 verschiedenen einfachen $KSL_2(p^n)$-Moduln V_1, V_2 ist. Seien ϵ_1 und ϵ_2 die zentral primitiven Idempotente von $KSL_2(p^n)$ zu den Moduln V_1 und V_2. Dann ist für $i = 1, 2$ die Ordnung $\Gamma_i := \epsilon_i RSL_2(p^n)$ eine graduierte Ordnung. Die Exponentenmatrizen erhält man aus dem folgenden Satz.

Satz 5.6.1 *Nach eventuellem Vertauschen von V_1 und V_2 gilt*

$$\Gamma_1 \cong \Lambda(R, S_0, S_1, \ldots, S_n, M_n) \text{ und } \Gamma_2 \cong \Lambda(R, S_0, \ldots, S_{n-1}, S_n', M_n)$$

falls $p \neq 2$ und $\Gamma_2 \cong \Lambda(R, S_0, \ldots, S_{n-1}, M_{n-1})$ falls $p = 2$. Dabei ist für $m \in \mathbb{N}$

$$M_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m & m-1 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Die Loewy-Länge von $P\epsilon_1/pP\epsilon_1$ ist $\geq n+1$, da S_n erst in der $n+1$-ten Schicht vorkommen kann. Da $P\epsilon_1/pP\epsilon_1$ aber nur $n+1$ Kompositionsfaktoren hat, ist $P\epsilon_1/pP\epsilon_1$ einreihig von der Länge $n+1$. Man schreibe die Ordnung Γ_1 bezüglich einer geeigneten Gitterbasis von $P\epsilon_1$, welche eine kompatible Basis für alle Γ_1-Gitter in V_1 ist und auf eine Kettenbasis von $P\epsilon_1/pP\epsilon_1$ abbildet. Dann gilt für die zugehörige Exponentenmatrix M, daß die Einträge oberhalb der Diagonalen von M alle 0 sind: $m_{ij} = 0$, falls $i \leq j$, da der Teilmodulverband von $P\epsilon_1/pP\epsilon_1$ einreihig ist.

Die natürliche Involution auf $RSL_2(p^n)$ induziert eine Involution auf Γ_i $(i = 1, 2)$, welche alle zentral primitiven Idempotente von $\Gamma_i/J(\Gamma_i)$ festläßt. Deshalb gilt für $1 \leq i, j \leq n+1$, die Gleichung

$$(\mathbf{A}) \quad m_{ji} = m_{ij} + m_{j1} - m_{i1} \text{ (vgl. Folgerung 5.2.12).}$$

Da $m_{ij} = 0$ für $i < j$, die Summe $m_{ij} + m_{ji}$ jedoch > 0 sein muß, gilt also $m_{i1} < m_{j1}$ für $i < j$. Die Ungleichung $m_{n+1,1} \leq n$ legt damit die erste Spalte von M fest. Die übrigen Einträge findet man mit Gleichung $(\mathbf{A})$. Also ist $M = M_n$.

Ist $p \neq 2$, so gelten dieselben Überlegungen auch für Γ_2. Allgemein kann man folgende einfachere Argumentation führen: Sei $\tilde{M}$ die Exponentenmatrix von Γ_2 bezüglich einer analogen Basis von $P\epsilon_2/pP\epsilon_2$ wie eben. Dann gilt $\tilde{m}_{ij} = 0$ für $i \leq j$. Da die Cartan-Invarianten c_{S,S_i} für $i = 1, \ldots, n-1$ alle 2 sind, gilt $\tilde{m}_{i,1} = m_{i,1}$ für $2 \leq i \leq n$. Die übrigen Einträge von $\tilde{M}$ ergeben sich wieder mit der Gleichung $(\mathbf{A})$. □

Ein weiterer allgemein für die Gruppenringe $RSL_2(2^n)$ anzuwendender Schluß ist in [Ple1, Seite 115] für die Gruppe $SL_2(8)$ durchgeführt.

Lemma 5.6.2 *Sei $G = SL_2(2^n)$, R der Ring der ganzen Zahlen in der unverzweigten Erweiterung K vom Grad n von $\mathbb{Q}_2$, Λ der Hauptblock von RG und e ein Lift des zentral primitiven Idempotents von $\Lambda/J(\Lambda)$, welches zum trivialen Modul gehört.*

(i) [Alp, Lemma 7] Der projektive Λ-Modul $e\Lambda$ ist isomorph zu 1_U^G, wo U die bis auf Konjugation in G eindeutige zyklische Untergruppe der Ordnung 2^n+1 ist.

(ii) In $e\Lambda \otimes K$ kommen alle irreduziblen $K\Lambda$-Moduln mit Vielfachheit 1 vor.

(iii) Sei ϵ die Summe der zentral primitiven Idempotente von $K\Lambda$ die zu den Charakteren vom Grad $2^n - 1$ gehören. Dann ist $2e\epsilon \in e\Lambda e$.

Beweis. (i) ist die Aussage von Lemma 7 [Alp] und (ii) bekommt man aus der Kenntnis aller irreduziblen $K\Lambda$-Moduln und der Tatsache, daß alle Zerlegungszahlen von Λ 0 oder 1 sind ([HSW, Corollary 2.8]) durch Dimensionsvergleich. Zu (iii): Sei U wie in (i) und $N := N_G(U) \cong D_{2(2^n+1)}$ der Normalisator von U in G. Die triviale Darstellung 1 von U setzt sich zu den beiden Darstellungen 1 und σ von N fort: $1_U^N = 1 \oplus \sigma$ über K. Aus den Charaktertafeln in [Schur] findet man mit der Frobenius-Reziprozität, daß der Charakter von σ_N^G gerade die Summe der Charaktere vom Grad $2^n - 1$ von G ist. Sei $\epsilon' \in KN$ das zu σ gehörende zentral primitive Idempotent. Da $\nu_2(|N|) = 1$ ist, gilt $2\epsilon' \in RN$. Insbesondere induziert $2\epsilon'$ einen RN-Homomorphismus φ von dem RN-Gitter $L := 1_U^N$ in $e\Lambda = L_N^G$. Dann ist aber $\varphi^G \in \mathrm{End}_\Lambda(e\Lambda) = e\Lambda e$. Durch Vergleich von Kern und Bild der Projektion $\frac{1}{2}\varphi^G$ findet man $\frac{1}{2}\varphi^G = e\epsilon$. Also ist $2e\epsilon \in e\Lambda e$. □

Beispiel 5.6.3 *Sei nun speziell $p = 2$ und $n = 3$, also $R := \mathbb{Z}_2[\zeta_7]$ der Ring der ganzen Zahlen in der unverzweigten Erweiterung vom Grad 3 von $\mathbb{Q}_2$ und $G := SL_2(8)$. Dann hat RG 2 Blöcke von denen einer Defekt 0 hat. In diesem Beispiel wird der Hauptblock Λ von RG beschrieben, ohne die in [Kos1] gegebene Präsentation der zu $\Lambda/2\Lambda$ Morita-äquivalenten Basisalgebra zu benutzen. Hierbei werden für die irreduziblen gewöhnlichen Charaktere die Notationen von [HSW] verwendet. Die irreduziblen Brauer-Charaktere werden mit den echten Teilmengen von $\{1,2,3\}$ bezeichnet (vgl. [Alp]).*

Aus [HSW] erhält man folgende Zerlegungsmatrix für G:

	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
1	1	.	.	.	.	.	.
δ_1	1	1	.	.	.	.	1
δ_2	1	.	.	1	.	1	.
δ_4	1	.	1	.	1	.	.
δ_3	1	1	1	1	.	.	.
η_1	1	1	.	1	.	.	1
η_2	1	.	1	1	.	1	.
η_3	1	1	1	.	1	.	.

Die graduierte Hülle Γ von Λ ist gegeben durch

$\Lambda_1 = \Lambda(R, \emptyset, (0))$, $\Lambda_{\delta_3} = \Lambda(R, \emptyset, \{3\}, \{2\}, \{1\}, N)$,
$\Lambda_{\delta_1} = \Lambda(R, \{2,3\}, \{3\}, \emptyset, M')$, $\Lambda_{\eta_1} = \Lambda(R, \{2,3\}, \{3\}, \emptyset, \{1\}, M)$,
$\Lambda_{\delta_2} = \Lambda(R, \{1,3\}, \{1\}, \emptyset, M')$, $\Lambda_{\eta_2} = \Lambda(R, \{1,3\}, \{1\}, \emptyset, \{2\}, M)$,
$\Lambda_{\delta_4} = \Lambda(R, \{1,2\}, \{2\}, \emptyset, M')$, $\Lambda_{\eta_3} = \Lambda(R, \{1,2\}, \{2\}, \emptyset, \{3\}, M)$,

wo

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(vgl. [Ple1, Beispiel (III.16)])

Für die einfachen Λ-Moduln λ, sei $e_\lambda \in \Lambda$ ein involutionsinvarianter Lift des zu λ gehörigen zentral primitiven Idempotents von $\Lambda/J(\Lambda)$.

Die symmetrischen lokalen Ringe $e_\lambda \Lambda e_\lambda$ werden durch Angabe einer Basismatrix für die entsprechenden Ringe $O_\lambda \leq R^{n_\lambda}$ der zu Λ Morita-äquivalenten Basisordnung Γ beschrieben, wo n_λ die Anzahl der gewöhnlichen Charaktere von G ist, in denen der modulare Konstituent λ vorkommt. Dabei kommen die einfachen Summanden von $e_\lambda \Gamma e_\lambda$ in der gleichen Reihenfolge wie oben.

$\lambda = \{2,3\}$, $\{1,3\}$ oder $\{1,2\}$: $O_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rangle$.

$\lambda = \{3\}$, $\{1\}$ oder $\{2\}$: $O_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rangle$ *falls* $\lambda = \{3\}$

und $O_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rangle$ *falls* $\lambda = \{1\}$ *oder* $\{2\}$.

$$\lambda = \emptyset\text{:}\ O_\lambda = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rangle$$

Beweis. Die Exponentenmatrizen zu δ_1, δ_2, δ_4 und η_i $(i = 1,2,3)$ erhält man aus Satz 5.6.1. Die Exponentenmatrix N von δ_3 sei so normiert, daß in der ersten Zeile nur 0 steht. Da G einen Automorphismus α der Ordnung 3 hat, welcher δ_3 und $\emptyset$ festläßt und die drei anderen modularen Konstituenten von δ_3 vertauscht, ist die erste Spalte von N von der Form $(0,a,a,a)^{tr}$ für ein $1 \leq a \leq 3$. Da die einfachen Λ-Moduln alle selbstdual sind, sind die Einträge n_{ij} von N mit $2 \leq i \neq j \leq 4$ alle gleich. Wegen $1 \leq n_{ij} + n_{ji} \leq 3$ für alle $i \neq j$, folgt $n_{ij} = 1$ für alle $2 \leq i \neq j \leq 4$. Den Parameter a wird gleich aus den lokalen Ringen $e_\lambda \Lambda e_\lambda$ bestimmt.

Die Amalgamierungsmatrizen der projektiv unzerlegbaren Λ-Moduln P_λ sind also wie folgt gegeben:

	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
$P_{\{2,3\}}$							
δ_1	1	2	.	.	.	.	3
η_1	1	2	.	0	.	.	3
$P_{\{3\}}$							
δ_1	2	3	.	.	.	.	2
δ_3	$3-a$	3	1	1	.	.	.
η_1	2	3	.	1	.	.	2
η_3	2	3	1	.	0	.	.
$P_\emptyset$							
1	3	.	.	.	.	.	.
δ_1	3	2	.	.	.	.	1
δ_2	3	.	.	2	.	1	.
δ_4	3	.	2	.	1	.	.
δ_3	3	$3-a$	$3-a$	$3-a$	.	.	.
η_1	3	2	.	2	.	.	1
η_2	3	.	2	2	.	1	.
η_3	3	2	2	.	1	.	.

Die übrigen Amalgamierungsmatrizen erhält man durch Anwenden des Galois-automorphismus α.

Zur Bestimmung der symmetrischen Ordnungen $e_\lambda \Lambda e_\lambda$ und den Bimoduln $e_\lambda \Lambda e_\gamma$ wird Λ durch eine Morita-äquivalente Basisordnung ersetzt. Die Ringe $e_\lambda \Lambda e_\lambda$ fallen dann mit O_λ zusammen und die Bimoduln $e_\lambda \Lambda e_\gamma$ sind Teilmoduln von $R^{c_{\lambda,\gamma}}$.

Sei $\lambda := \{2,3\}$ und $\gamma := \{3\}$. Dann ist O_λ wie behauptet und $e_\lambda \Lambda e_\gamma \cong \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rangle$ als O_λ-O_γ-Bimodul. Deshalb ist das Bild der Operation von O_γ auf $e_\lambda \Lambda e_\gamma$ enthalten in $\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \rangle$ Daher ist die lokale R-Ordnung

$$O_\gamma = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2x \\ 0 & 0 & 4 & 4y \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \rangle$$

für geeignetes $x, y \in R$. Da O_γ symmetrisch bezüglich $\frac{1}{8} diag(-1,-1,1,1)$ ist, findet man $2x \equiv 2 \pmod 8$ und $4y \equiv -4 \pmod 8$.

Nun wird gezeigt, daß der Parameter a in N gleich 1 ist. Da alle 2-Brauer-Charaktere von G reell sind, ist nach Lemma 5.3.14 die Summe über die Einträge jeder Spalte der Amalgamierungsmatrizen gerade. Daher ist $a = 1$ oder $a = 3$. Ist $a = 3$, so enthält der Modul $e_\emptyset \Lambda e_\gamma$ das Element $(0,1,0,0)$. Da der Modul ein

O_γ-Modul ist, und $(0,2,0,2) \in O_\gamma$, ist die Amalgamierungstiefe von η_3 bei $e_\emptyset \Lambda e_\gamma$ nur 1, was ein Widerspruch ist. Daher ist $a = 1$.

Sei $O \leq R^4$ das Bild der Darstellung von $O_\emptyset$ auf dem Modul $e_\emptyset \Lambda e_\gamma$. Dann ist nach Lemma 5.6.2 das Element $(0,0,2,2) \in O$. Da $O_\gamma \hookrightarrow \mathrm{End}_R(e_\emptyset \Lambda e_\gamma) \cong R^4$ ist, ist $e_\emptyset \Lambda e_\gamma$ ein $\tilde{O} := \langle O_\gamma, (0,0,2,2) \rangle$-Modul mit

$$\tilde{O} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rangle.$$

Da die Determinante von $e_\emptyset \Lambda e_\gamma$ als Amalgam von R^4 gleich $2^{8/2} = 2^4$ ist, folgt $e_\emptyset \Lambda e_\gamma \cong \tilde{O}$ als $\tilde{O}$-Modul. Dann ist aber $O \leq \tilde{O}$. Die symmetrische Ordnung $O_\emptyset$ enthält also das Dual $\tilde{O}^\#$. Analoge Schlüsse kann man für $\gamma = \{2\}$ und $\gamma = \{1\}$ durchführen und findet so die Teilordnung O', die von den drei verschiedenen $\tilde{O}^\#$ und 1 erzeugt wird in $O_\emptyset$. Diese Ordnung O' ist aber bereits symmetrisch, also ist $O_\emptyset = O'$.

Die zugehörigen Matrixeinheiten von Γ sind multiplikativ unabhängig und die übrigen Bimoduln erhält man durch Multiplikation, so daß die Isomorphietypen der Bimoduln zur Amalgamierungstiefe 2 den Ring Λ beschreiben. □

5.6.2 Die Hauptblöcke von $\mathbb{Z}_2 M_{11}$ und $\mathbb{Z}_2 L_3(3)$.

In [Ple2, Example (VI.6)] ist gezeigt worden, daß die graduierten Hüllen der Hauptblöcke von $\mathbb{Z}_2 M_{11}$ und $\mathbb{Z}_2 L_3(3)$ Morita-äquivalent sind. Dies gilt sogar für die Blöcke selbst:

Satz 5.6.4 *Sei B_1 der Hauptblock des Gruppenrings $\mathbb{Z}_2 M_{11}$ und B_2 der Hauptblock des Gruppenrings $\mathbb{Z}_2 L_3(3)$. Dann sind B_1 und B_2 Morita-äquivalent.*

Beweis. Die durch die Morita-Äquivalenz gegebene Bijektion der zentral primitiven Idempotente von $\mathbb{Q}_2 B_1$ und $\mathbb{Q}_2 B_2$ ist durch die folgende Zuordnung der irreduziblen Charaktere gegeben:

M_{11}	1	44	45	10	10ab	11	55
$L_3(3)$	1	12	13	26	26ab	27	39
$\chi(1)$ modulo 16	1	12	13	10	4	11	7

In der ersten Zeile stehen hierbei die Dimensionen der einfachen $\mathbb{Q}_2 B_1$-Moduln, in der zweiten Zeile, die der jeweiligen unter der Morita-Äquivalenz entsprechenden $\mathbb{Q}_2 B_2$-Moduln. Modulo dem 2-Anteil der Gruppenordnungen stimmen diese Dimensionen überein.

Diese Bijektion induziert nach [Ple2, Example VI.6] eine Morita-Äquivalenz zwischen den graduierten Hüllen von B_1 und B_2. Sie induziert auch einen Isomorphismus $Z(B_1) \cong Z(B_2)$, wie man aus der Berechnung der jeweiligen zentralen Charaktere erhält. Weiter gibt es eine Bijektion der 2-Brauer-Charaktere von B_1 und B_2, so daß die beiden Blöcke gleiche Zerlegungsmatrizen haben. Außerdem sind B_1 und B_2 symmetrische Ordnungen bezüglich der Form Tr_u, wo $16u := \epsilon_1 + 12\epsilon_2 + 13\epsilon_3 + 10\epsilon_4 + 10\epsilon_5 + 11\epsilon_6 + 7\epsilon_7$ ist und die ϵ_i die jeweiligen zentral primitiven Idempotente von $\mathbb{Q}_2 M_{11}$ bzw. $\mathbb{Q}_2 L_3(3)$ sind.
Behauptung: *Sei O die zu B_1 Morita-äquivalente Basisordnung. Dann ist O schon bis auf Isomorphie eindeutig durch Tr_u, Zerlegungsmatrix, graduierte Hülle und $Z(O)$ bestimmt.*
Seien e_1, e_{10} und $e_{44} \in O$ Lifte der zentral primitiven Idempotente von $O/J(O)$ die zu den 2-Brauer-Charakteren von M_{11} vom Grad 1, 10 bzw. 44 gehören. Bezeichnen die ϵ_i von oben auch die zentral primitiven Idempotente von O, so ist die graduierte Hülle von O nach [Ple2, Example VI.6] gegeben durch

$$\epsilon_1 O \cong \Lambda(\mathbb{Z}_2, e_1, (0)),\ \epsilon_2 O \cong \Lambda(\mathbb{Z}_2, e_{44}, (0)),\ \epsilon_3 O \cong \Lambda(\mathbb{Z}_2, e_1, e_{44}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}),$$

$$\epsilon_4 O \cong \Lambda(\mathbb{Z}_2, e_{10}, (0)),\ \epsilon_5 O \cong \Lambda(\mathbb{Z}_2[\sqrt{-2}], e_{10}, (0)),\ \epsilon_6 O \cong \Lambda(\mathbb{Z}_2, e_1, e_{10}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}),$$

$$\epsilon_7 O \cong \Lambda(\mathbb{Z}_2, e_1, e_{10}, e_{44}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}).$$

Sei V die direkte Summe über ein Vertretersystem der Isomorphieklassen der irreduziblen $\mathbb{Q}_2 O$-Moduln, $E := \mathrm{End}_{\mathbb{Q}_2 O}(V)$ und $P_1 = e_1 O$, $P_{10} = e_{10} O$ und $P_{44} = e_{44} O$ die projektiv unzerlegbaren O-Moduln. Wir identifizieren O mit $\mathrm{End}_O(O)$. Da die Matrixeinheiten in $e_1\epsilon_7 O e_{10}$ und $e_1\epsilon_7 O e_{44}$ multiplikativ unabhängig sind, gibt es Einbettungen $\varphi_i : P_i \hookrightarrow V$ $(i = 1, 10, 44)$, so daß $e_1 O e_{10} = \langle 4\epsilon_6 + 4\epsilon_7, 16\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2} \subset E$, $e_1 O e_{44} = \langle 4\epsilon_3 + 4\epsilon_7, 16\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2} \subset E$, und $e_{10} O e_{44} = \langle 4\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2} \subset E$. Dann ergibt sich durch Dualisieren $e_{10} O e_1 = \langle \epsilon_6 - \epsilon_7, 4\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2} \subset E$, $e_{44} O e_1 = \langle \epsilon_3 - \epsilon_7, 4\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2} \subset E$, und $e_{10} O e_{44} = \langle 4\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2} \subset E$.
Außerdem folgt aus der Kenntnis von $Z(O)$, daß
$e_{44} O e_{44} = e_{44} Z(O) e_{44} = \langle \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_7, 2\epsilon_3 - 6\epsilon_7, 16\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2}$,
$e_{10} O e_{10} = e_{10} Z(O) e_{10} = \langle \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7, 2\epsilon_5 - 8\epsilon_7, \sqrt{-2}\epsilon_5 + 2\epsilon_6 + 6\epsilon_7, 4\epsilon_6 - 4\epsilon_7, 16\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2}$
$e_1 Z(O) e_1 = \langle \epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_6 + \epsilon_7, 4\epsilon_3 + 4\epsilon_7, 8\epsilon_6 + 8\epsilon_7, 16\epsilon_7 \rangle_{\mathbb{Z}_2} \subset e_1 O e_1$ vom Index 2.

Es ist $e_1 O e_{10} e_{10} O e_1 \subset e_1 O e_1$. Also findet man den zusätzlichen Erzeuger $4\epsilon_6 - 4\epsilon_7 \in e_1 O e_1 - e_1 Z(O) e_1$. Daher ist O durch die oben angegebenen Daten eindeutig bestimmt und B_1 und B_2 sind Morita-äquivalent. □

5.6.3 Einige Blöcke vom Defekt 2.

Ein Satz von Brauer und Feit (vgl. [Lan, Corollary 8.15]) besagt, daß die Höhe-0-Vermutung für Blöcke vom Defekt ≤ 2 gilt. In gewissen Spezialfällen kann man dies auch mit der Theorie der symmetrischen Ordnungen folgern.

Satz 5.6.5 *(vgl. [Neb]) Sei R ein diskreter Bewertungsring mit Primelement π und O eine kommutative lokale R-Ordnung mit $\pi^2 R^n \subset O \subset R^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $\pi R^n \not\subset O$. Seien $d_1, \ldots, d_n \in R$, so daß O symmetrisch bezüglich*

$$\Phi : O \times O \to R,\ ((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \mapsto \pi^{-2} \sum d_i a_i b_i$$

ist. Dann liegen die $d_i \in R^*$ $(1 \leq i \leq n)$ und

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 0 & \ldots & 0 & -d_2/d_n\pi \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \pi & -d_{n-1}/d_n\pi \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

ist eine Basismatrix für O.

Beweis. Die Determinante einer Basismatrix von O liegt in $\pi^{n-o/2}R^*$, wo $o = (\sum_{i=1}^n \nu_\pi(d_i))$ ist. Also ist o gerade. Ist $o > 2$, so kann O kein lokaler Ring sein. Ist $o = 2$, so ist $O = R(1, \ldots, 1) + \pi R^n$ und enthält πR^n. Also ist $o = 0$, alle d_i sind Einheiten in R und der Führer von R^n in O ist $(R^n)^\# = \pi^2 R^n$. Eine Basismatrix von O kann durch elementare Zeilenumformungen immer auf die Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & \pi & 0 & \ldots & 0 & a_2\pi \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \pi & a_{n-1}\pi \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

mit $a_i \in R$ gebracht werden. Durch Berechnung der Skalarprodukte des 2-ten bis $n-1$-ten Basisvektors mit $1 \in O$ findet man $a_i \equiv -d_i/d_n \pmod{\pi}$ $(1 \leq i \leq n)$. □

Etwas allgemeiner gilt sogar:

Lemma 5.6.6 *Sei p eine ungerade Primzahl, K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ mit Ganzheitsring R, $\pi^{(1)}$, $\pi^{(2)}$ Primelemente von R und $K_1 = K[\sqrt{\pi^{(1)}}]$, $K_2 := K[\sqrt{\pi^{(2)}}]$ verzweigte quadratische Erweiterungen von K. Sei $R_j \subset K_j$ die*

R-Maximalordnung ($j = 1, 2$). Sei $O \in \mathcal{A}(R_1, R_2, R, \ldots, R)$ eine kommutative lokale R-Ordnung so, daß O symmetrisch bezüglich $\Phi : O \times O \to R$,

$$((a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)) \mapsto \pi^{-2}(tr_{K_1/K}(d_1 a_1 b_1) + tr_{K_2/K}(d_2 a_2 b_2) + \sum_{j=3}^{n} d_j a_j b_j)$$

mit $d_1, \ldots, d_n \in R^*$ ist. Dann gibt es $a \in R$ mit $a^2 \equiv -\frac{\pi^{(1)} d_j}{\pi^{(2)} d_2} \pmod{\pi R}$. Ist M wie in Satz 5.6.5, so bilden die Zeilen von M zusammen mit dem Vektor $b := (\pi_1, a\pi_2, 0, \ldots, 0)$ eine Basis von O.

Beweis. Sei $\pi_1 := \sqrt{\pi^{(1)}} \in R_1$ und $\pi_2 := \sqrt{\pi^{(2)}} \in R_2$. Sei O' die von $(R_1 \oplus R_2 \oplus R \oplus \ldots \oplus R)^{\#,\Phi}$ und $1 = (1, \ldots, 1)$ erzeugte R-Ordnung. Dann gilt $O' \subset O \subset (O')^{\#,\Phi}$. Die R-Ordnung $(O')^{\#,\Phi}$ wird erzeugt von $X := \pi_1 R \oplus \pi_2 R$ und den Zeilen von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -d_2/d_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -d_{n-1}/d_n \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \pi^2 \end{pmatrix}$$

Da O lokal ist, liegt O sogar in der von M und X erzeugten R-Ordnung O''. Also enhält O das Dual $(O'')^{\#,\Phi}$, das von M und $X^{\#,\Phi} = \pi X$ erzeugt wird, vom Index π und ist von der Form $O = \langle M \rangle \perp Y$, wo $\pi X \leq Y = Y^{\#,\Phi} \leq X$ ein volles subdirektes Produkt ist. Also enthält Y einen Vektor b wie oben für ein $a \in R^*$. Da das Skalarprodukt $\Phi(b, b) = 2\pi^{-2}(d_1 \pi^{(1)} + d_2 a^2 \pi^{(2)})$ ganz ist, ist a wie behauptet. □

Der Gruppenring $\mathbb{Z}_3 M_{11}$.

In diesem Abschnitt wird die zu $\mathbb{Z}_3 M_{11}$ Morita-äquivalente Basisordnung konstruiert. $\mathbb{Q}_3$ und $\mathbb{F}_3$ sind Zerfällungskörper für M_{11}. Nicht alle 3-Brauer-Charaktere von M_{11} sind reell, beschränkt man sich auf die selbstdualen modularen (und gewöhnlichen) Charaktere, so erhält man eine recht einfach aussehende Ordnung, für die die Witt-Zerlegungsmatrix trivial zu berechnen ist. Trotzdem wird dieser Ring als ein Beispiel für einen Gruppenring mit nicht selbstdualen einfachen Moduln hier berechnet.

Der Gruppenring $\mathbb{Z}_3 M_{11}$ hat 2 Blöcke, von denen einer Defekt 0 hat. Der Hauptblock hat Defektgruppe $C_3 \times C_3$. Die 3-modularen Zerlegungszahlen von M_{11} sind alle 0 oder 1. Sei also Λ die zum Hauptblock von $\mathbb{Z}_3 M_{11}$ Morita-äquivalente Basisordnung.

Eine Witt-Zerlegungsmatrix von Λ kann aus der folgenden Zerlegungsmatrix von Λ konstruiert werden, indem man die zu $5a$, $5b$, $10a$ und $10b$ gehörigen Spalten

und die Zeilen $10a$, $10b$, $16a$ und $16b$ streicht und die eingeklammerten Einsen als Elemente von $W(\mathbb{Q}_3)$ auffaßt.

	1	$5a$	$5b$	10	$10a$	$10b$	24
1	(1)	.	.	.	.	.	.
10	.	.	.	(1)	.	.	.
$10a$	.	.	.	.	1	.	.
$10b$	.	.	.	.	.	1	.
11	(1)	1	1	.	.	.	.
$16a$	1	1	.	.	1	.	.
$16b$	1	.	1	.	.	1	.
44	.	1	1	(1)	.	.	(1)
55	(1)	1	1	.	1	1	(1)

Die graduierte Hülle von Λ ist schon in [Ple2, Example (VI.7)] angegeben:
$\epsilon_1\Lambda = \Lambda(e_1, (0))$, $\epsilon_{10}\Lambda = \Lambda(e_{10}, (0))$, $\epsilon_{10a}\Lambda = \Lambda(e_{10a}, (0))$,
$\epsilon_{10b}\Lambda = \Lambda(e_{10b}, (0))$, $\epsilon_{11}\Lambda = \Lambda(e_1, e_{5a}, e_{5b}, M_1)$, $\epsilon_{16a}\Lambda = \Lambda(e_1, e_{5a}, e_{10a}, M_1)$,
$\epsilon_{16b}\Lambda = \Lambda(e_1, e_{10b}, e_{5b}, M_1)$, $\epsilon_{44}\Lambda = \Lambda(e_{5a}, e_{5b}, e_{10}, e_{24}, M_2)$,
$\epsilon_{55}\Lambda = \Lambda(e_1, e_{10a}, e_{10b}, e_{5a}, e_{5b}, e_{24}, M_3)$. Hierbei sind

$$M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ und } M_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalordnungen $e_i\Lambda e_i$ ergeben sich aus Satz 5.6.5. Für die Bimoduln $e_i\Lambda e_j$ mit $i \neq j$ gilt der folgende Satz.

Satz 5.6.7 *Es gibt Einbettungen $\varphi_i : P_i \to V$, $i \in \{1, 5a, 5b, 10, 10a, 10b, 24\}$, so daß B_{ij} eine Basismatrix des Bimoduls $e_i\Lambda e_j$ ist, wo die B_{ij} für $c_{ij} > 1$ wie folgt gegeben sind:*

$$B_{1,5a} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_{5a,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_{1,5b} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$B_{5b,1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_{1,10a} = B_{1,10b} = B_{10a,5a} = B_{5b,10b} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$B_{10a,1} = B_{10b,1} = B_{5a,10a} = B_{10b,5b} = B_{24,5a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$B_{5a,5b} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_{5b,5a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix},$$

$$B_{5a,24} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \; B_{24,5b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B_{5b,24} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Hierbei kommen die relevanten Idempotente in derselben Reihenfolge wie oben und sind in den Spalten der Zerlegungsmatrix ablesbar.

Beweis. Œ kann man annehmen, daß $B_{1,10a}$, $B_{1,10b}$, $B_{10a,5a}$, $B_{10b,5b}$, $B_{24,5a}$ und $B_{24,5b}$ obige Form haben. Die Basismatrizen $B_{10a,1}$, $B_{10b,1}$, $B_{5a,10a}$, $B_{5b,10b}$, $B_{5a,24}$ und $B_{5b,24}$ findet man durch Dualisieren. Nun gilt $e_{5a}\Lambda e_{10a}e_{10a}\Lambda e_1 \subset e_{5a}\Lambda e_1$ Also liegt $\epsilon_{16a} + \epsilon_{55}$ in $e_{5a}\Lambda e_1$. Also kann $B_{5a,1}$ wie im Satz gewählt werden. Analog erhält man $B_{1,5b}$ und die Matrizen $B_{1,5a}$ und $B_{5b,1}$ wieder durch Dualisieren. Da $3(\epsilon_{11} + \epsilon_{55}) \in e_{5b}\Lambda e_1 e_1 \Lambda e_{5a} \subset e_{5b}\Lambda e_{5a}$ ergibt sich die Basismatrix $B_{5b,5a}$. Wieder findet man $B_{5a,5b}$ durch Dualisieren. □

Folgerung 5.6.8 *Die bezüglich Tr_u symmetrische Ordnung Λ ist durch ihre graduierte Hülle schon eindeutig bestimmt.*

Die Loewy-Reihen der projektiv unzerlegbaren Λ-Moduln P_i. Liest man nur die fettgedruckten einfachen Moduln, so erhält man die Loewy-Reihe von $P_i/3P_i$.

	P_1	P_{10}	P_{24}
	1	**10**	**24**
J			
	$1 + \mathbf{5a} + \mathbf{10b}$	$\mathbf{5b} + 10$	**5a**
J^2			
	$1 + \mathbf{5b} + \mathbf{10a}$	$10 + \mathbf{24}$	$\mathbf{5b} + \mathbf{10} + \mathbf{10a}$
J^3			
	$1 + \mathbf{1^3} + \mathbf{24}$	$\mathbf{5a} + 10$	$\mathbf{1} + 24$
J^4	– – – – – – – – –	– – – – – – – – – –	– – – – – – – – – –
	$1 + \mathbf{5a} + 5a^2 + \mathbf{10b} + 10b$	$5b + \mathbf{10}$	$\mathbf{5a} + 5a + \mathbf{10b}$
J^5			
	$1 + \mathbf{5b} + 5b^2 + \mathbf{10a} + 10a$	$10 + 24$	$\mathbf{5b} + 5b + 10 + 10a$
J^6			
	$\mathbf{1} + 1^4 + 24$	$5a + 10$	$1 + \mathbf{24} + 24$
J^7	– – – – – – – – –	– – – – – – – – – –	– – – – – – – – – –

	P_{5a}	P_{5b}
	$\mathbf{5a}$	$\mathbf{5b}$
J		
	$\mathbf{5b}+\mathbf{10}+\mathbf{10a}$	$\mathbf{1}+\mathbf{24}$
J^2		
	$\mathbf{1^2}+\mathbf{24}$	$\mathbf{5a^2}+\mathbf{10b}$
J^3		
	$\mathbf{5a^2}+5a+\mathbf{10b}$	$\mathbf{5b^2}+5b+\mathbf{10}+\mathbf{10a}$
J^4	$---------$	$---------$
	$\mathbf{5b^2}+10+\mathbf{10a}+10a$	$\mathbf{1^2}+1+\mathbf{24}+24$
J^5		
	$\mathbf{1}+1^2+\mathbf{24}+24$	$\mathbf{5a}+5a^2+\mathbf{10b}+10b$
J^6		
	$\mathbf{5a}+5a^3+10b$	$\mathbf{5b}+5b^3+10+10a$
J^7	$---------$	$---------$

	P_{10a}	P_{10b}
	$\mathbf{10a}$	$\mathbf{10b}$
J		
	$\mathbf{1}+10a$	$\mathbf{5b}+10b$
J^2		
	$\mathbf{5a}+10a+\mathbf{10b}$	$\mathbf{1}+10b+\mathbf{24}$
J^3		
	$\mathbf{5b}+\mathbf{10a}+10a$	$\mathbf{5a10b}+10b$
J^4	$---------$	$---------$
	$\mathbf{1}+1+10a+\mathbf{24}$	$\mathbf{5b}+5b+\mathbf{10a}+10b$
J^5		
	$\mathbf{5a}+5a+10a+10b$	$\mathbf{1}+1+10b+24$
J^6		
	$5b+\mathbf{10a}+10a^2$	$5a+\mathbf{10b}+10b^2$
J^7	$---------$	$---------$

Definiert man

$$E := 27(\epsilon_1+\epsilon_{10}+\epsilon_{10a}+\epsilon_{10b})+3(\epsilon_{11}+\epsilon_{16a}+\epsilon_{16b}+\epsilon_{44}+\epsilon_{55})$$

so gilt

$$J^4E = J^7.$$

Der Gruppenring $\mathbb{Z}_5J_2$.

Der Gruppenring $\mathbb{Z}_5J_2$ hat fünf Blöcke, von denen vier Defekt ≤ 1 haben. Der Primkörper $\mathbb{F}_5$ ist ein Zerfällungskörper von $\mathbb{F}_5J_2$ und $\mathbb{Q}_5[\sqrt{5}]$ ist ein Zerfällungs-

körper von $\mathbb{Q}_5 J_2$. Die Zerlegungszahlen sind alle 0 oder 1. Die gewöhnlichen und modularen Charaktere sind alle reell.

Sei Λ die Basisordnung des Hauptblocks von $\mathbb{Z}_5 J_2$.

Satz 5.6.9

$WD(\Lambda) :=$

	1	14	21	41	85	189
1	(1)	.	.	.	.	.
14*ab*	.	(1)	.	.	.	.
21*ab*	.	.	(1)	.	.	.
36	(1)	(1)	(10)	.	.	.
63	(1)	.	(5)	(2)	.	.
126	.	.	.	(1)	(5)	.
189*ab*	.	.	.	.	.	(1)
224*ab*	.	(1)	(10)	.	.	(1)
288	.	(1)	.	.	(5)	(1)
336	.	.	(1)	(5)	(1)	(10)

ist eine Witt-Zerlegungsmatrix von Λ.

Sei $R := \mathbb{Z}_5[\sqrt{5}]$. *Die graduierte Hülle von* Λ *ist gegeben durch* $\epsilon_1\Lambda = \Lambda(1,(0))$, $\epsilon_{14ab}\Lambda = \Lambda(R,14,(0))$, $\epsilon_{21ab}\Lambda = \Lambda(R,21,(0))$, $\epsilon_{189ab}\Lambda = \Lambda(R,189,(0))$, $\epsilon_{36}\Lambda = \Lambda(1,14,21,M_1)$, $\epsilon_{63}\Lambda = \Lambda(1,41,21,M_1)$, $\epsilon_{126}\Lambda = \Lambda(41,85,M_2)$, $\epsilon_{224ab}\Lambda = \Lambda(R,14,21,189,M_3)$, $\epsilon_{288}\Lambda = \Lambda(14,85,189,M_1)$, $\epsilon_{336}\Lambda = \Lambda(21,41,85,189,M_4)$. *Hier sind* $M_1 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $M_3 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *und* $M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Die graduierte Hülle von Λ *bestimmt den Ring* Λ *bis auf Isomorphie eindeutig. Genauer gibt es Einbettungen* $\varphi_i : P_i \to V$ *der projektiv unzerlegbaren* Λ*-Moduln* P_i *in die direkte Summe* V *über ein Vertretersystem der einfachen* $K\Lambda$*-Moduln, so daß für* $i \neq j$ *die nichttrivialen Erzeuger* α_{ij} *von* $\varphi_i^{-1} e_i \Lambda e_j \varphi_j \subset \mathrm{End}_{K\Lambda}(V) \cong Z(K\Lambda)$ *von der Form*

$$\alpha_{21,1} = \epsilon_{36} + \epsilon_{63}, \quad \alpha_{1,21} = 5\epsilon_{36} + 15\epsilon_{63}, \quad \alpha_{41,21} = \epsilon_{63} + \epsilon_{336},$$
$$\alpha_{85,41} = \epsilon_{126} + \epsilon_{336}, \quad \alpha_{41,85} = 5\epsilon_{126} - 5\epsilon_{336}, \quad \alpha_{21,41} = 5\epsilon_{63} + 10\epsilon_{336},$$
$$\alpha_{21,14} = 5\epsilon_{36} + \sqrt{5}\epsilon_{224ab}, \quad \alpha_{14,21} = \epsilon_{36} + 3\sqrt{5}\epsilon_{224ab}, \quad \alpha_{85,189} = \epsilon_{288} + \epsilon_{336},$$
$$\alpha_{21,189} = \sqrt{5}\epsilon_{224ab} + 5\epsilon_{336}, \quad \alpha_{189,21} = 3\sqrt{5}\epsilon_{224ab} + \epsilon_{336},$$
$$\alpha_{14,189} = 5\epsilon_{224ab} + 5\epsilon_{288}, \quad \alpha_{189,14} = \epsilon_{224ab} - \epsilon_{288}, \quad \alpha_{189,85} = 5\epsilon_{288} + 10\epsilon_{336}.$$

sind. Die Ordnungen $e_i\Lambda e_i$ *ergeben sich aus Lemma 5.6.6.*

Ein wesentlicher Schluß im Beweis des Satzes ist in dem folgenden Lemma wiedergegeben:

Lemma 5.6.10 *Sei K eine endliche Erweiterung von $\mathbb{Q}_p$ und R der Ring der ganzen Zahlen in K mit Primelement π. Sei Λ eine symmetrische R-Ordnung so daß $\oplus_{j=1}^{s}\epsilon_j\Lambda$ eine graduierte Ordnung ist. Sei $1 \leq j \leq s$ und $\mathcal{P}$ das maximale Ideal in der R-Maximalordnung in der K-Divisionsalgebra D mit $K\Lambda\epsilon_j \cong D^{n\times n}$. Sei $x \in \mathbb{N}$ minimal mit $\mathcal{P}^x\epsilon_j\Lambda \subset \Lambda$. Seien P_1, P_2, P_3 3 verschiedene projektiv unzerlegbare Λ-Moduln mit selbstdualen Köpfen, so daß $A(P_1)_{j,P_2} =: a \neq .$, $A(P_1)_{j,P_3} =: b \neq .$ und $A(P_2)_{j,P_3} =: c \neq ..$ Dann ist $x - c - a + b$ gerade.*

Beweis. Eine geeignete Exponentenmatrix von $\epsilon_j\Lambda$ enthält eine Teilmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & x-a & x-b \\ 0 & 0 & x-c-u \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix} \text{ mit einem } u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

Da die relevanten einfachen Λ-Moduln alle selbstdual sind, gilt nach Folgerung 5.2.12 daß

$$x - c - u = u - (x - a) + (x - b).$$

Also ist $2u = x - c - a + b$ gerade. □

Beweis. (von Satz 5.6.9) Die Amalgamierungsmatrizen von Λ sind nach Folgerung 5.2.10 von der Form

P_1	1	14	21	41	85	189
1	2	.	.	.	.	.
36	2	0	a	.	.	.
63	2	.	a	0	.	.

P_{14}	1	14	21	41	85	189
$14ab$	.	3	.	.	.	.
36	0	2	b	.	.	.
$224ab$	.	3	b	.	.	c
288	.	2	.	.	0	c

P_{21}	1	14	21	41	85	189
$21ab$	.	.	3	.	.	.
36	a	b	2	.	.	.
63	a	.	2	d	.	.
$224ab$	.	b	3	.	.	e
336	.	.	2	d	0	e

P_{41}	1	14	21	41	85	189
63	0	.	d	2	.	.
126	.	.	.	2	f	.
336	.	.	d	2	f	0

P_{85}	1	14	21	41	85	189
126	.	.	.	f	2	.
288	.	0	.	.	2	g
336	.	.	0	f	2	g

P_{189}	1	14	21	41	85	189
$189ab$	.	.	.	.	.	3
$224ab$	.	c	e	.	.	3
288	.	c	.	.	g	2
336	.	.	e	0	g	2

für geeignete $a, b, c, d, e, f, g \in \{0, 1\}$. Nach Lemma 5.6.10 angewandt auf die Quadrupel $(\epsilon_{36}, 1, 14, 21)$, $(\epsilon_{63}, 1, 21, 41)$, $(\epsilon_{336}, 21, 41, 189)$, $(\epsilon_{336}, 41, 85, 21)$, $(\epsilon_{336}, 41, 85, 189)$, $(\epsilon_{288}, 14, 85, 189)$, folgt $a \equiv b$, $a \equiv d$, $d \equiv e$, $d \equiv f$, $f \equiv g$, $c \equiv g$ modulo 2. Da die Parameter in $\{0, 1\}$ liegen, gilt also $a = b = c = d = e = f = g$. Der Parameter a wird durch Einschränken auf die Untergruppe $U := 3.PGL_2(9)$ von J_2 bestimmt. Für den gewöhnlichen Charakter vom Grad 36 von J_2 gilt $36_{|U} = 9 + 9' + 18$. Seine 5-modularen Konstituenten schränken sich auf U wie folgt ein: $1_{|U} = 1$, $21_{|U} = 1' + 8' + 12$, $14_{|U} = 6 + 8$. Da $\nu_5(|U|) = 1$ ist, gilt für das epimorphe Bild $\epsilon_{36}\mathbb{Z}_5U$ von $\mathbb{Z}_5U \subset \mathbb{Z}_5J_2$: $\epsilon_{36}\mathbb{Z}_5J_2 \supset \epsilon_{36}\mathbb{Z}_5U \cong \Lambda(1, 8', M) \oplus \Lambda(1', 8, M) \oplus \Lambda(6, 12, M)$, wo $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Nun ist $\epsilon_{36}\Lambda \cong \Lambda(1, 14, 21, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-a \\ 0 & 0 & 2-b-x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix})$ für ein $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Daraus ergibt sich $a = 1$.

Mit Folgerung 5.2.12 bestimmen sich aus den Amalgamierungsmatrizen die Exponentenmatrizen für die graduierte Hülle von Λ.

Seien nun $e_1, e_{14}, e_{21}, e_{41}, e_{85}$ und $e_{189} \in \Lambda$ Lifte der jeweiligen zentral primitiven Idempotente von $\Lambda/J(\Lambda)$ und $I := \{1, 14, 21, 41, 85, 189\}$ ihre Indizes.

Da die nichtdiagonalen Einträge der Cartan-Matrix alle ≤ 2 sind, sind die Isomorphietypen der Bimoduln $e_i\Lambda e_j$ $(i \neq j \in I)$ eindeutig. Daraus ergibt sich eine Witt-Zerlegungsmatrix mit Methode 5.5.8.

Die symmetrischen Ordnungen $e_i\Lambda e_i$ sind mit Lemma 5.6.6 eindeutig zu bestimmen. Sie können aber auch direkt aus den zentralen Charakteren berechnet werden. Jedes System von Bimodulisomorphismen, das die Matrixeinheiten festläßt, ist induziert durch Bimodulautomorphismen und Konjugation mit einem Element von $K\Lambda$. □

Bemerkung 5.6.11 *Es gibt 2 Isomorphieklassen symmetrischer involutionsinvarianter Ordnungen in $(K\Lambda, \circ, Tr_u)$ mit der gleichen Zerlegungsmatrix und der gleichen Operation von $\circ$ auf den einfachen Moduln wie Λ. Eine Klasse wird vertreten durch Λ, die zweite durch eine Basisordnung Λ' für die $e_i\Lambda' e_j$ zerlegbar ist, für alle $i \neq j \in I$ mit $|c_i \cap c_j| = 2$.*

5.6.4 Der Gruppenring $\mathbb{Z}_3 S_9$.

Satz 5.6.12 *Der Gruppenring $\mathbb{Z}_3 S_9$ hat fünf Blöcke, von denen vier Defekt ≤ 1 haben (vgl. [Jam]).*

(i) Eine Witt-Zerlegungsmatrix für den Hauptblock Λ von $\mathbb{Z}_3 S_9$ ist:

	1	$1'$	7	$7'$	21	$21'$	35	$35'$	41	$41'$
1	(1)	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$1'$	.	(1)	.	.	.	.	.	.	.	.
8	(1)	.	(−1)	.	.	.	.	.	.	.
$8'$	.	(1)	.	(−1)	.	.	.	.	.	.
$42a$	.	.	.	.	(1)	(−3)	.	.	.	.
28	.	.	(1)	.	(1)	.	.	.	.	.
$28'$	.	.	.	(1)	.	(1)	.	.	.	.
70	.	.	.	.	.	.	(1)	(−1)	.	.
42	.	(1)	.	.	.	.	.	.	(3)	.
$42'$	(1)	.	.	.	.	.	.	.	.	(−3)
48	.	.	(1)	.	.	.	.	.	(3)	.
$48'$	.	.	.	(1)	.	.	.	.	.	(−3)
56	.	.	.	.	(1)	.	(−1)	.	.	.
$56'$	.	.	.	.	.	(1)	.	(1)	.	.
84	.	(−1)	.	(3)	.	.	(1)	.	(−3)	.
$84'$	(1)	.	(−3)	.	.	.	.	(1)	.	(−3)
105	(1)	.	(3)	.	(1)	.	(3)	.	(1)	.
$105'$	.	(1)	.	(3)	.	(1)	.	(−3)	.	(−1)
120	(1)	(−3)	(−3)	.	.	.	(3)	(1)	(1)	.
$120'$	(1)	(−3)	.	(1)	.	.	(3)	(1)	.	(3)
168	.	(1)	(1)	(3)	(3)	(−1)	(1)	(−3)	(−3)	.
$168'$	(1)	.	(3)	(1)	(−1)	(3)	(3)	(−1)	.	(3)

Die Charaktere x' erhält man aus x durch Tensorieren mit dem Signumcharakter $1'$.

(ii) Die graduierte Hülle Γ von Λ ist wie folgt: (Es ist immer nur einer der beiden Summanden Λ_x und $\Lambda_{x'}$ von Γ angegeben. $\Lambda_{x'}$ erhält man aus Λ_x indem man alle vorkommenden Moduln mit dem Signum $1'$ tensoriert.)

$$\Lambda_1(1,(0)),\ \Lambda_8(1,7,\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}),\ \Lambda_{42a}(21,21',\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}),\ \Lambda_{28}(7,21,\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}),$$
$$\Lambda_{70}(35,35',\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}),\ \Lambda_{42}(1',41,\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}),\ \Lambda_{48}(7,41,\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}),$$

$$\Lambda_{56}(21,35,\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}),\quad \Lambda_{84}(7',1',35,41,\begin{pmatrix}0&1&1&2\\0&0&1&1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}),$$

$$\Lambda_{105}(35,1,7,21,41,\begin{pmatrix}0&1&2&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&0&0&0\\0&1&1&0&1\\0&1&1&1&0\end{pmatrix}),$$

$$\Lambda_{120}(35',1,1',7,35,41,\begin{pmatrix}0&2&1&1&1&2\\0&0&1&0&0&1\\0&2&0&1&1&1\\0&1&1&0&1&1\\0&1&1&1&0&1\\0&1&0&0&0&0\end{pmatrix}),$$

$$\Lambda_{168}(21',1',7,7',21,35,35',41,\begin{pmatrix}0&2&2&1&1&2&1&3\\0&0&1&0&1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&0&1\\0&1&2&0&1&1&1&2\\0&2&1&1&0&1&1&2\\0&1&1&0&0&0&0&1\\0&1&1&1&1&1&0&2\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}).$$

(iii) Die symmetrischen Ordnungen $e_\lambda\Lambda e_\lambda$ für die irreduziblen Brauer-Charaktere λ von Λ sind schon durch die zentralen Charaktere gegeben.

(iv) Die Bimoduln $e_\lambda\Lambda e_\gamma$ sind gleichmäßig amalgamiert. Bei gemeinsamer Amalgamierungstiefe $a_{\lambda,\gamma}=2$, ist der Isomorphietyp von $e_\lambda\Lambda e_\gamma$ schon durch die zentralen Charaktere gegeben.

Beweis. Die Behauptung (iii) rechnet man direkt mit Hilfe von GAP aus der Charaktertafel und der Zerlegungsmatrix der S_9 nach. Damit kann man auch die Operation von $e_\lambda\Lambda e_\lambda$ auf $e_\gamma\Lambda e_\lambda$ für verschiedene Brauer-Charaktere γ und λ im Hauptblock von G bestimmen. Aus dieser Operation ergeben sich obere Schranken für die Einträge in den Amalgamierungsmatrizen, die in allen Fällen, bis auf den 4 mit 0^a gekennzeichneten Positionen scharf sind. Die Amalgamierungsmatrizen sind wie folgt:

$P1$	1	$1'$	7	$7'$	21	$21'$	35	$35'$	41	$41'$
1	4	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	4	.	2^*	.	.	.	.	.	.	.
$42'$	3	.	.	.	.	.	.	.	.	2^*
$84'$	3	.	2^*	.	.	.	.	1	.	2^+
105	3	.	2^+	.	1	.	2^*	.	1	.
120	3	0^a	2^+	.	.	.	2^+	1^*	1	.
$120'$	3	0^a	.	1	.	.	2^*	1	.	2^+
$168'$	3	.	2^+	1	1^*	0	2^+	1	.	2^+

$P7$	1	$1'$	7	$7'$	21	$21'$	35	$35'$	41	$41'$
8	2^*	.	4	.	.	.	.	.	.	.
28	.	.	4	.	2^*	.	.	.	.	.
48	.	.	3	.	.	.	.	.	2^*	.
$84'$	2^*	.	3	.	.	.	.	2^*	.	1^*
105	2^+	.	3	.	2^+	.	1^*	.	2^+	.
120	2^+	1	3	.	.	.	1	2^*	2^+	.
168	.	1	3	0^a	2^+	1^*	1	2^+	2^+	.
$168'$	2^+	.	3	0^a	2^*	1	1	2^+	.	1

$P21$	1	$1'$	7	$7'$	21	$21'$	35	$35'$	41	$41'$
$42a$	.	.	.	.	3	2^+	.	.	.	.
28	.	.	2^*	.	4	.	.	.	.	.
56	.	.	.	.	4	.	2^*	.	.	.
105	1	.	2^+	.	3	.	2^*	.	1	.
168	.	0	2^+	1	3	2^+	2^+	1	1	.
$168'$	1^*	.	2^*	1^*	3	2^*	2^*	1^*	.	0^*

$P35$	1	$1'$	7	$7'$	21	$21'$	35	$35'$	41	$41'$
70	.	.	.	.	.	.	4	2^*	.	.
56	.	.	.	.	2^*	.	4	.	.	.
84	.	1	.	2^*	.	.	3	.	2^+	.
105	2^*	.	1^*	.	2^*	.	3	.	2^*	.
120	2^+	1	1	.	.	.	3	2^+	2^+	.
$120'$	2^*	1^*	.	2^*	.	.	3	2^*	.	1^*
168	.	1	1	2^+	2^+	1^*	3	2^+	2^+	.
$168'$	2^+	.	1	2^+	2^*	1	3	2^+	.	1

$P41$	1	$1'$	7	$7'$	21	$21'$	35	$35'$	41	$41'$
42	.	2^*	.	.	.	.	.	.	3	.
48	.	.	2^*	.	.	.	.	.	3	.
84	.	2^+	.	1^*	.	.	2^+	.	3	.
105	1	.	2^+	.	1	.	2^*	.	3	.
120	1	2^+	2^+	.	.	.	2^+	1^*	3	.
168	.	2^+	2^+	1	1^*	0	2^+	1	3	.

Die Amalgamierungsmatrizen zu den modularen Charakteren x' erhält man wieder durch Tensorieren mit dem Signum. Die Richtigkeit der Amalgamierungsmatrizen wird gleich bewiesen.

Zunächst wird mit der Berechnung von Γ begonnen: Die erste Zeile der Exponentenmatrizen für Γ erhält man aus der Jantzen-Schaper-Determinantenformel [Ple3], [Schap], [Jan]. Daraus ergeben sich direkt die mit * gekennzeichneten Einträge in den Amalgamierungsmatrizen. Die mit $^+$ markierten Einträge erhält man mit Hilfe von Lemma 5.3.15 aus der Operation der Diagonalordnungen, da das Bild O unter der jeweiligen Darstellung Elementarteiler $1, 3, \ldots, 3, 9$ hat.

Die übrigen Einträge < 3 in den Amalgamierungsmatrizen sind ≤ 1. Ihre Parität bekommt man aus den ersten Zeilen der Exponentenmatrizen mit Hilfe von Folgerung 5.2.12, da alle Charaktere reell sind. Damit ist Γ bestimmt.

Ebenso kennt man die Diagonalordnungen und die Isomorphietypen der Bimoduln $e_\lambda \Lambda e_\gamma$ falls die Amalgamierungstiefe von λ und γ gleich 2 ist.

Daraus kann man die Witt-Zerlegungsmatrix, wie in Methode 5.5.8 beschrieben, bestimmen. □

Die zum Hauptblock Λ von $\mathbb{Z}_3 S_9$ Morita-äquivalente Basisordnung Λ_0 ist durch die Angaben in diesen Satz eindeutig bestimmt. Sei V die direkte Summe über ein Vertretersystem der Isomorphieklassen der irreduziblen $\mathbb{Q}_3\Lambda$ Moduln und $E := \mathrm{End}_\Lambda(V) \cong \mathbb{Q}_3^{22}$.

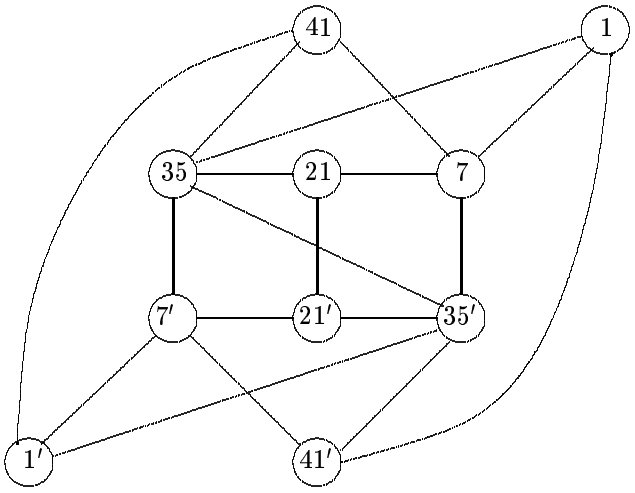
Satz 5.6.13 *Sei $I := \{1, 1', 7, 7', 21, 21', 35, 35', 41, 41'\}$ die Menge der Indizes der einfachen Λ-Moduln. Für $i \in I$ sei P_i der zu i gehörige projektiv unzerlegbare Λ-Modul. Dann gibt es Einbettungen $\varphi_i : P_i \to V$, $i \in I$, so daß die folgenden Elemente von $a_{il} \in \Lambda_{i,l} := (\varphi_i^{-1})_{|P_i}\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, P_l)\varphi_l \subset E$ zusammen mit der Identität $id_{P_i} \in \mathrm{End}_\Lambda(P_i) \subset E$ (für alle $i \in I$), den Ring Λ_0 als $\mathbb{Z}_3$-Ordnung erzeugen.*

$a_{1,7} = 9\epsilon_8 + 3\epsilon_{84'} + 3\epsilon_{105} + \epsilon_{120} + \epsilon_{168'}$
$a_{1',7'} = 9\epsilon_{8'} + 3\epsilon_{84} + 3\epsilon_{105'} + \epsilon_{120'} + \epsilon_{168}$
$a_{1,35} = \epsilon_{105} + \epsilon_{120} + \epsilon_{120'} - \epsilon_{168'}$
$a_{1',35'} = \epsilon_{105'} + \epsilon_{120} + \epsilon_{120'} - \epsilon_{168}$
$a_{1,41'} = 3\epsilon_{42'} + 3\epsilon_{84'} + 3\epsilon_{120'} - 3\epsilon_{168'}$
$a_{1',41} = 3\epsilon_{42} + 3\epsilon_{84} + 3\epsilon_{120} - 3\epsilon_{168}$
$a_{7,21} = 3\epsilon_{28} + \epsilon_{105} + \epsilon_{168} + \epsilon_{168'}$
$a_{7',21'} = 3\epsilon_{28'} + \epsilon_{105'} + \epsilon_{168} + \epsilon_{168'}$
$a_{7,35'} = 3\epsilon_{84'} + \epsilon_{120} + \epsilon_{168} + 3\epsilon_{168'}$

$a_{7,1} = \epsilon_8 + \epsilon_{84'} - \epsilon_{105} + 3\epsilon_{120} + 6\epsilon_{168'}$
$a_{7',1'} = \epsilon_{8'} + \epsilon_{84} - \epsilon_{105'} + 3\epsilon_{120'} + 6\epsilon_{168}$
$a_{35,1} = 3\epsilon_{105} + 3\epsilon_{120} + 3\epsilon_{120'} - 3\epsilon_{168'}$
$a_{35',1'} = 3\epsilon_{105'} + 3\epsilon_{120} + 3\epsilon_{120'} - 3\epsilon_{168}$
$a_{41',1} = \epsilon_{42'} + \epsilon_{84'} - \epsilon_{120'} + \epsilon_{168'}$
$a_{41,1'} = \epsilon_{42} + \epsilon_{84} - \epsilon_{120} + \epsilon_{168}$
$a_{21,7} = 3\epsilon_{28} + 3\epsilon_{105} + 3\epsilon_{168} - 3\epsilon_{168'}$
$a_{21',7'} = 3\epsilon_{28'} + 3\epsilon_{105'} - 3\epsilon_{168} + 3\epsilon_{168'}$
$a_{35',7} = \epsilon_{84'} + 3\epsilon_{120} + 3\epsilon_{168} + \epsilon_{168'}$

$a_{7',35} = 3\epsilon_{84} + \epsilon_{120'} + 3\epsilon_{168} + \epsilon_{168'}$ $a_{35,7'} = \epsilon_{84} + 3\epsilon_{120'} + \epsilon_{168} + 3\epsilon_{168'}$
$a_{7,41} = 3\epsilon_{48} + \epsilon_{105} + 3\epsilon_{120} + 3\epsilon_{168}$ $a_{41,7} = \epsilon_{48} + 3\epsilon_{105} - \epsilon_{120} - \epsilon_{168}$
$a_{7',41'} = 3\epsilon_{48'} + \epsilon_{105'} + 3\epsilon_{120'} + 3\epsilon_{168'}$ $a_{41',7'} = \epsilon_{48'} + 3\epsilon_{105'} - \epsilon_{120'} - \epsilon_{168'}$
$a_{21,21'} = 3\epsilon_{42a} + \epsilon_{168} - 3\epsilon_{168'}$ $a_{21',21} = \epsilon_{42a} + 3\epsilon_{168} - \epsilon_{168'}$
$a_{21,35} = 9\epsilon_{56} + \epsilon_{105} + 3\epsilon_{168} + 3\epsilon_{168'}$ $a_{35,21} = \epsilon_{56} - 3\epsilon_{105} - \epsilon_{168} + 4\epsilon_{168'}$
$a_{21',35'} = 9\epsilon_{56'} + \epsilon_{105'} + 3\epsilon_{168} + 3\epsilon_{168'}$ $a_{35',21'} = \epsilon_{56'} - 3\epsilon_{105'} + 4\epsilon_{168} - \epsilon_{168'}$
$a_{35,35'} = 9\epsilon_{70} - \epsilon_{120} - 3\epsilon_{120'} + \epsilon_{168} - 12\epsilon_{168'}$ $a_{35',35} = \epsilon_{70} + 3\epsilon_{120} + \epsilon_{120'} + 3\epsilon_{168} - \epsilon_{168'}$
$a_{35,41} = \epsilon_{84} + 3\epsilon_{105} + 3\epsilon_{120} + 3\epsilon_{168}$ $a_{41,35} = -3\epsilon_{84} + \epsilon_{105} + \epsilon_{120} - \epsilon_{168}$
$a_{35',41'} = \epsilon_{84'} + 3\epsilon_{105'} + 3\epsilon_{120'} + 3\epsilon_{168'}$ $a_{41',35'} = -3\epsilon_{84'} + \epsilon_{105'} + \epsilon_{120'} - \epsilon_{168'}$

Ersetzt man Pfeile in beide Richtungen durch einen ungerichtete Kante, so ist der Ext-Köcher von $\Lambda/3\Lambda$ wie folgt:



Beweis. Aus Satz 5.6.12 erhält man die Isomorphietypen der Bimoduln, die mit Tiefe 2 amalgamiert sind. Da die zugehörigen Matrixeinheiten jeweils multiplikativ unabhängig sind, kann man eine Basis von $\Lambda_{i,l}$ für die folgenden Paare (i,l) wählen:

$$(1,7),\ (1',7'),\ (1,35),\ (1',35'),\ (1,41'),\ (1',41),\ (7,21),\ (7',21'),\ (21,21').$$

Die Moduln $\Lambda_{l,i}$ erhält man durch Dualisieren. Obwohl der zugehörige Eintrag in der Komponente 168 bzw. 168′ von $(7,41)$, $(7',41')$ von den schon festgelegten Matrixeinheiten abhängig ist, wird noch jeder Bimodulisomorphismus von $\Lambda_{7,41}$ bzw. $\Lambda_{7',41'}$ durch einen Ringisomorphismus von Λ_0 und einen Bimodulautomorphismus induziert. Für die Angabe der Bimoduln $\Lambda_{i,l}$ mit $(i,l) = (7,35')$, $(7',35)$, $(21,35)$, $(21',35')$, $(35,35')$, $(35,41)$, und $(35',41')$ und deren duale Moduln $\Lambda_{l,i}$ führt man insgesamt 16 Parameter ein, für die man durch Multiplikation (unter Benutzung der Amalgamierungsmatrizen) zeigt, daß sie kongruent 1 modulo 3 sind.

Man setzt an, daß die Moduln von folgenden Vektoren $b_{i,l} \in \Lambda_{i,l} \subset E$ erzeugt werden:

$b_{7,35'} = 3\epsilon_{84'} + \epsilon_{120} + b\epsilon_{168} + 3c\epsilon_{168'}$ $\quad b_{35',7} = \epsilon_{84'} + 3\epsilon_{120} + \frac{3}{b}\epsilon_{168} + \frac{1}{c}\epsilon_{168'}$
$b_{7',35} = 3\epsilon_{84} + \epsilon_{120'} + 3c'\epsilon_{168} + b'\epsilon_{168'}$ $\quad b_{35,7'} = \epsilon_{84} + 3\epsilon_{120'} + \frac{1}{c'}\epsilon_{168} + \frac{3}{b'}\epsilon_{168'}$
$b_{21,35} = 9\epsilon_{56} + \epsilon_{105} + 3d\epsilon_{168} + 3e\epsilon_{168'}$ $\quad b_{35,21} = -1\epsilon_{56} + 3\epsilon_{105} + \frac{1}{d}\epsilon_{168} - \frac{4}{e}\epsilon_{168'}$
$b_{21',35'} = 9\epsilon_{56'} + \epsilon_{105'} + 3e'\epsilon_{168} + 3d'\epsilon_{168'}$ $\quad b_{35',21'} = \epsilon_{56'} - 3\epsilon_{105'} + \frac{1}{e'}\epsilon_{168} + \frac{2}{d'}\epsilon_{168'}$
$b_{35,35'} = 2\epsilon_{120} - 9\epsilon_{70} + 3\epsilon_{120'} - \epsilon_{168} + 12\epsilon_{168'}$ $\quad b_{35',35} = \epsilon_{70} + \frac{3}{a}\epsilon_{120} + \epsilon_{120'} + 3\epsilon_{168} - \epsilon_{168'}$
$b_{35,41} = \epsilon_{84} + 3f\epsilon_{105} + 3g\epsilon_{120} + 3h\epsilon_{168}$ $\quad b_{41,35} = -3\epsilon_{84} + \frac{1}{f}\epsilon_{105} + \frac{1}{g}\epsilon_{120} - \frac{1}{h}\epsilon_{168}$
$b_{35',41'} = \epsilon_{84'} + 3f'\epsilon_{105'} + 3g'\epsilon_{120'} + 3h'\epsilon_{168'}$ $\quad b_{41',35'} = \frac{1}{f'}\epsilon_{105'} - 3\epsilon_{84'} + \frac{1}{g'}\epsilon_{120'} - \frac{1}{h'}\epsilon_{168'}$

Hier sind $a, b, c, d, e, f, g, h, b', c', d', e', f', g', h' \in \mathbb{Z}_3^*$.

Nun ist

$$\Lambda_{1,35}\Lambda_{35,7'} \subset \Lambda_{1,7'} = \Lambda_{1,41'}\Lambda_{41',7'}$$

woraus man $b' \equiv 1 \pmod 3$ und analog (indem man x mit x' vertauscht) $b \equiv 1 \pmod 3$ erhält. Aus

$$\Lambda_{1,35}\Lambda_{35,21} \subset \Lambda_{1,21} = \Lambda_{1,7}\Lambda_{7,21}$$

erhält man $e \equiv 1 \pmod 3$ und analog $e' \equiv 1 \pmod 3$. Aus

$$\Lambda_{1,35}\Lambda_{35,41} \subset \Lambda_{1,41} = \Lambda_{1,7}\Lambda_{7,41}$$

erhält man $f \equiv g \pmod 3$ und analog $f' \equiv g' \pmod 3$. Der Bimodul $\Lambda_{1',35}$ enthält $\Lambda_{1',35'}\Lambda_{35',35}$, $\Lambda_{1',7'}\Lambda_{7',35}$ und $\Lambda_{1',41}\Lambda_{41,35}$. Also findet man die drei Vektoren $(0, 3/a, 1, -3)$, $(9, 0, 1, 3c')$ und $(-9, 3/g, 0, 3/h)$ in $\Lambda_{1',35}$. Da die Elementarteiler des Amalgams $\Lambda_{1',35}$ $1, 1, 3, 3$ sind, folgt, daß die drei Vektoren modulo $3\sum \epsilon_i\Lambda_{1',35}$ linear abhängig sind. Also ist $a \equiv g \pmod 3$ und $1/h \equiv -(c'+1) \pmod 3$. Da h und c' in $\mathbb{Z}_3^*$ liegen gilt $h \equiv c' \equiv 1 \pmod 3$. Analog findet man $(0, a, 3, -3), (9, 1, 0, 3c)$ und $(-9, 0, 3/g', 3h')$ in $\Lambda_{1,35'}$. Also ergibt sich $a \equiv g' \equiv h' \equiv c \equiv 1 \pmod 3$.

Schließlich ist

$$\Lambda_{7',35}\Lambda_{35,21} \subset \Lambda_{7',21} = \Lambda_{7',21'}\Lambda_{21',21},$$

woraus man $d \equiv 1 \pmod 3$ folgert. Analog erhält man $d' \equiv 1 \pmod 3$.

Um die Ordnung eindeutig zu bestimmen, benötigt man aber die Parameter modulo 9. Die betrachteten Bimoduln Λ_{il} enthalten aber alle $3(\epsilon_j + x\epsilon_m)\Lambda_{il}$ (für alle $j \neq m \in c_i \cap c_l$) für geeignete, von j, m, i, l abhängige, $x \in \mathbb{Z}_3^*$. Also kann man immer annehmen, daß an allen bis auf einer Komponente von Λ_{il} die Parameter $= 1$ sind.

Als freien Parameter kann man bei $\Lambda_{21,35}$ bzw. $\Lambda_{21',35'}$ die Komponente von ϵ_{56} bzw. $\epsilon_{56'}$ und bei $\Lambda_{35,35'}$ die bei ϵ_{70} wählen. Bei $\Lambda_{7,35}$ bzw. $\Lambda_{7',35'}$ hat man den freien Parameter bei ϵ_{84} bzw. $\epsilon_{84'}$. Also kann man annehmen, daß $a = b = c = d = e = f = g = b' = c' = d' = e' = f' = g' = 1$ ist. In $\Lambda_{35,41}$ kann man die Komponente bei ϵ_{84} ändern, falls man gleichzeitig die gleich Komponente bei $\Lambda_{1',41}$ ändert. Da in $\Lambda_{1',41}$ aber noch ϵ_{42} ein freier Parameter war, kann man durch Anwenden eines Ringisomorphismus $h = 1$ erreichen. Analog bekommt man $h' = 1$.

Man erhält die angegebenen Elemente aus den Bimoduln $\Lambda_{i,l}$ und rechnet leicht nach, daß sie die gesamte Ordnung erzeugen. □

Die Loewy-Reihen der projektiv unzerlegbaren Λ-Moduln P_1, P_7, P_{21}, P_{35} und P_{41} sind wie folgt gegeben: Dabei steht in der mittleren Spalte jeweils die Loewy-Reihe von $P_i/3P_i$, liest man beide Spalten zusammen, so erhält man die Loewy-Reihe von P_i.

P_1		
	1	
P_1J		
	7 35 41′	1
P_1J^2		
	1^3 7′ 21 $35'^2$ 41	1 7
P_1J^3		
	$1'^2$ 7^3 21′ 35^2 $41'^2$	1^2 7 35 41′
P_1J^4		
	1^3 7′ 21 $35'^2$ 41	1^4 7 7′ 21 $35'^2$ 41
P_1J^5	− − − − − − − −	− − − − − − − − −
	7 35 41′	1^2 $1'^2$ 7^4 21′ 35^3
P_1J^6		
	1	1^7 7 $7'^2$ 21^2 $35'^4$ 41^2
P_1J^7	− − − − − − − −	− − − − − − − − −

P_1J^5 ist eine direkte Summe irreduzibler Gitter. Die einfachen Konstituenten, die in dem periodischen Teil P_1J^5/P_1J^7 vorkommen, verteilen sich wie folgt auf die irreduziblen Summanden:

	1	8	42′	84′	105	120	120′	168′
P_1J^5								
	1	1 7	41′	7 41′	35 7	1′ 7 35	1′ 35 41′	7 21′ 35 41′
P_1J^6								
	1	1 7	1	1 35′	1 21 41	1 35′ 41	1 7′ 35′	1 7′ 21 35′
P_1J^7								

P_7	
	7
P_7J	
	$1\ 21\ 35'\ 41$
P_7J^2	
	$1'\ 7^3\ 21'\ 35^2\ 41'$
P_7J^3	
	$1^3\ 7'^2\ 21^2\ 35'^2\ 41^2$
P_7J^4	
	$1'\ 7^3\ 21'\ 35^2\ 41'$
P_7J^5	$---------$
	$1\ 21\ 35'\ 41$
P_7J^6	
	7
P_7J^7	$---------$

P_7	
P_7J	
	7
P_7J^2	
	$1\ 7\ 21$
P_7J^3	
	$1^1\ 7^2\ 21\ 35'\ 41$
P_7J^4	
	$1\ 1'\ 7^4\ 21\ 21'\ 35^2\ 41'$
P_7J^5	$----------$
	$1^4\ 7^2\ 7'^2\ 21^3\ 35'^3\ 41^3$
P_7J^6	
	$1\ 1'^2\ 7^7\ 21\ 21'^2\ 35^4\ 41'^2$
P_7J^7	$----------$

P_7J^5 ist eine direkte Summe irreduzibler Gitter. Die einfachen Konstituenten, die in dem periodischen Teil P_7J^5/P_7J^7 vorkommen, verteilen sich wie folgt auf die irreduziblen Summanden:

	8	28	48	84′	105	120	168	168′
P_7J^5								
	1 7	7 21	41	1 35′	1 21 41	1 35′ 41	7′ 21 35′ 41	1 21 35′ 7′
P_7J^6								
	1 7	7 21	7	7 41′	7 35	1′ 7 35	1′ 7 21′ 35	7 21′ 35 41′
P_7J^7								

P_{21}	
	21
$P_{21}J$	
	$7\ 21'\ 35$
$P_{21}J^2$	
	$1\ 7'\ 21^2\ 35'\ 41$
$P_{21}J^3$	
	$1'\ 7^2\ 21'\ 35^2\ 41'$
$P_{21}J^4$	
	$1\ 7'\ 21^2\ 35'\ 41$
$P_{21}J^5$	$----------$
	$7\ 21'\ 35$
$P_{21}J^6$	
	21
$P_{21}J^7$	$----------$

P_{21}	
$P_{21}J$	
	21
$P_{21}J^2$	
	$7\ 21\ 35$
$P_{21}J^3$	
	$7\ 21^2\ 21'\ 35$
$P_{21}J^4$	
	$1\ 7\ 7'\ 21^3\ 35\ 35'\ 41$
$P_{21}J^5$	$----------$
	$1'\ 7^3\ 21^2\ 21'^2\ 35^3\ 41'$
$P_{21}J^6$	
	$1^2\ 7\ 7'^2\ 21^5\ 35\ 35'^2\ 41^2$
$P_{21}J^7$	$----------$

$P_{21}J^5$ ist eine direkte Summe irreduzibler Gitter. Die einfachen Konstituenten, die in dem periodischen Teil $P_{21}J^5/P_{21}J^7$ vorkommen, verteilen sich wie folgt auf

die irreduziblen Summanden:

	$42a$	48	56	105	168	$168'$
$P_{21}J^5$						
	$21'$	7 21	21 35	7 35	$1'$ 7 $21'$ 35	7 $21'$ 35 $41'$
$P_{21}J^6$						
	21	7 21	21 35	1 21 41	$7'$ 21 $35'$ 41	1 $7'$ 21 $35'$
$P_{21}J^7$						

P_{35}		
	35	
$P_{35}J$		
	1 $7'$ 21 $35'$ 41	35
$P_{35}J^2$		
	$1'^2$ 7^2 $21'$ 35^3 $41'$	21 35 $35'$
$P_{35}J^3$		
	1^2 $7'^2$ 21^2 $35'^3$ 41^2	1 $7'$ 21 35^2 $35'$ 41
$P_{35}J^4$		
	$1'^2$ 7^2 $21'$ 35^3 $41'$	$1'^2$ 7^2 21 $21'$ 35^4 $35'$ $41'$
$P_{35}J^5$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$
	1 $7'$ 21 $35'$ 41	1^3 $7'^3$ 21^3 35^2 $35'^4$ 41^3
$P_{35}J^6$		
	35	$1'^4$ 7^4 21 $21'^2$ 35^7 $35'$ $41'^2$
$P_{35}J^7$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

$P_{35}J^5$ ist eine direkte Summe irreduzibler Gitter. Die einfachen Konstituenten, die in dem periodischen Teil $P_{35}J^5/P_{35}J^7$ vorkommen, verteilen sich wie folgt auf die irreduziblen Summanden:

	70	56	84	105	120	$120'$	168	$168'$
$P_{35}J^5$								
	35 $35'$	21 35	$7'$ 41	1 21 41	1 $35'$ 41	1 $7'$ $35'$	$7'$ 21 $35'$ 41	1 $7'$ 21 $35'$
$P_{35}J^6$								
	35 $35'$	21 35	$1'$ 35	7 35	$1'$ 7 35	$1'$ 35 $41'$	$1'$ 7 $21'$ 35	7 $21'$ 35 $41'$
$P_{35}J^7$								

P_{41}		
	41	
$P_{41}J$		
	$1'\ 7\ 35$	
$P_{41}J^2$		
	$1\ 7'\ 21\ 35'\ 41^2$	41
$P_{41}J^3$		
	$1'^2\ 7^2\ 21'\ 35^2$	$1'\ 7\ 35$
$P_{41}J^4$		
	$1\ 7'\ 21\ 35'\ 41^2$	$1\ 7'\ 21\ 35'\ 41^3$
$P_{41}J^5$	$---------$	$----------$
	$1'\ 7\ 35$	$1'^3\ 7^3\ 21'\ 35^3$
$P_{41}J^6$		
	41	$1^2\ 7'^2\ 21^2\ 35'^2\ 41^5$
$P_{41}J^7$	$---------$	$----------$

$P_{41}J^5$ ist eine direkte Summe irreduzibler Gitter. Die einfachen Konstituenten, die in dem periodischen Teil $P_{41}J^5/P_{41}J^7$ vorkommen, verteilen sich wie folgt auf die irreduziblen Summanden:

	42	48	84	105	120	168
$P_{41}J^5$						
	$1'$	7	$1'\ 35$	$7\ 35$	$1'\ 7\ 35$	$1'\ 7\ 21'\ 35$
$P_{41}J^6$						
	41	41	$7'\ 41$	$1\ 21\ 41$	$1\ 35'\ 41$	$7'\ 35'\ 21\ 41$
$P_{41}J^7$						

Definiert man

$$E := 9(\epsilon_1 + \epsilon_{1'} + \epsilon_8 + \epsilon_{8'} + \epsilon_{28} + \epsilon_{28'} + \epsilon_{70} + \epsilon_{56} + \epsilon_{56'})$$

$$+3(\epsilon_{42a} + \epsilon_{42} + \epsilon_{42'} + \epsilon_{48} + \epsilon_{48'} + \epsilon_{84} + \epsilon_{84'} + \epsilon_{105} + \epsilon_{105'} + \epsilon_{120} + \epsilon_{120'} + \epsilon_{168} + \epsilon_{168'}),$$

so gilt für $J := J(\Lambda)$

$$J^5 E = J^7.$$

Kapitel 6

Gruppenringe spezieller linearer Gruppen.

6.1 Der Gruppenring $\mathbb{Z}_2[\zeta_{2^f-1}]SL_2(2^f)$.

Sei $3 \leq f \in \mathbb{N}$, R der Ring der ganzen Zahlen in der unverzweigten Erweiterung K vom Grad f von $\mathbb{Q}_2$ und $k := R/2R \cong \mathbb{F}_{2^f}$ der Restklassenkörper. Sei $G := SL_2(2^f)$ die Gruppe der 2×2-Matrizen über k mit Determinante 1. Dann ist (K, R, k) ein 2-modulares Zerfällungssystem für G.

Nach Steinbergs Tensorproduktsatz stehen die einfachen kG-Moduln in Bijektion zu den Teilmengen von $N := \{1, \ldots, f\}$. Sei M_1 der natürliche kG-Modul. Der Frobenius-Automorphismus von k über dem Primkörper wird mit F bezeichnet. Für $i = 0, \ldots, f-1$ sei M_{i+1} der Modul M_1 mit der mit F^i getwisteten kG-Operation. Dann sind die einfachen kG-Moduln gerade die Moduln

$$M_I := \otimes_{i \in I} M_i$$

für alle Teilmengen $I \subseteq N$. Dabei ist $dim_k(M_I) = 2^{|I|}$. Insbesondere ist $M_\emptyset$ der triviale kG-Modul und M_N der projektive einfache kG-Modul. Die M_I mit $N \neq I \subset N$ gehören alle zum Hauptblock von kG.

Die projektiven kG-Moduln sind in [Alp] beschrieben. Bezeichnet $\overline{P_I}$ die projektive Decke von M_I ($I \subseteq N$), so ist nach [Alp, Theorem 1]

$$\overline{P_I} = M_N \otimes M_{N-I}, \text{ falls } \emptyset \neq I \subseteq N$$

und

$$\overline{P_\emptyset} \oplus M_N = M_N \otimes M_N.$$

Alperin berechnet auch die Ext-Gruppen zwischen den einfachen kG-Moduln. Durch explizite Beschreibung der Homomorphismenräume zwischen den projektiv unzerlegbaren kG-Moduln erhält Koshita dann eine Präsentation für die zu kG

gehörige Basisalgebra. Für zwei Teilmengen I, I' von N bezeichne $I + I'$ die symmetrische Differenz

$$I + I' := I \cup I' - I \cap I'.$$

Für $i, j \in N$ sei $i + j \in N$ (bzw. $i - j \in N$) das Element von N, das modulo f zu $i + j \in \mathbb{Z}$ (bzw. $i - j \in \mathbb{Z}$) kongruent ist.

Satz 6.1.1 *([Kos1, Theorem]) Sei $f \geq 3$ und $\overline{\Lambda}$ die Basisalgebra des Hauptblocks von kG. Sei Q der Köcher, dessen Ecken mit den echten Teilmengen von N identifiziert werden, mit Pfeilen*

$$\alpha_{i,I} : I + \{i\} \to I \text{ für alle } I \subseteq N, i \in N, i - 1 \notin I.$$

Sei kQ die Pfadalgebra von Q. Dann lassen sich für $I, J \subseteq N$ die Pfade in Q von I nach $J = I + \{i_1\} + \ldots + \{i_a\}$ schreiben als

$$(I|i_1, \ldots, i_a|J) = \alpha_{i_1, I+\{i_1\}} \alpha_{i_2, I+\{i_1\}+\{i_2\}} \ldots \alpha_{i_a, J}.$$

$(I||I)$ ist das Idempotent in kQ, welches zur Ecke I gehört. In dieser Schreibweise sei X das Ideal von kQ, welches von den Elementen

$$(I + \{i\} + \{j\}|i, j|I) - (I + \{i\} + \{j\}|j, i|I) \ (i - 1, j - 1 \notin I, \ j \neq i - 1, i, i + 1)$$

$$(I|i, i|I) \ (i - 1 \notin I, i \in I)$$

$$(I + \{i + 1\}|i + 1, i, i|I) - (I + \{i + 1\}|i, i, i + 1|I) \ (i - 1, i \notin I)$$

$$(I + \{i + 1\}|i, i + 1, i|I) \ (i - 1 \notin I, i \in I)$$

erzeugt wird. Dann ist $\overline{\Lambda} \cong kQ/X$.
Sei $\Psi : kQ \to \overline{\Lambda}$ der in [Kos1] konstruierte Epimorphismus mit Kern X.

Die Bilder der Pfade in Q unter Ψ von der Ecke I zur Ecke J erzeugen den k-Vektorraum $\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_I}, \overline{P_J})$.

Koshita gibt in [Kos1, Proposition 3] eine k-Basis für $\mathrm{End}_{kG}(\overline{P_I})$ an.

Definition 6.1.2 *Für $i \notin I \subseteq N$ sei*

$$\omega_{I,i} := \Psi((I|j, j + 1, \ldots, i - 1, i, i, i - 1, \ldots, j + 1, j|I))$$

wo j das eindeutig bestimmte Element von N ist, für das $j - 1 \notin I$ aber $J := \{j, j + 1, \ldots, i - 1\} \subseteq I$. Liegt $i - 1$ nicht in I, so sei $j := i$, $J = \emptyset$ und

$$\omega_{I,i} := \Psi((I|i, i|I)).$$

Die Länge von $\omega_{I,i}$ ist die Länge des dazugehörigen Pfades in Q, also

$$l(I, i) := 2(|J| + 1).$$

Die $\omega_{I,i}$ sind Endomorphismen von $\overline{P_I}$. Da die Zerlegungszahlen von RG alle 0 oder 1 sind ([HSW, Corollary 2.8]), sind die Endomorphismenringe der projektiv unzerlegbaren kG-Moduln kommutativ. Also kommutieren die $\omega_{I,i}$ für die verschiedenen $i \in N - I$ und für jede Teilmenge $T \subseteq N - I$ ist

$$\omega_{I,T} := \prod_{i \in T} \omega_{I,i}$$

unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Proposition 6.1.3 *([Kos1, Proposition 3]) Sei $I \subset N$ eine echte Teilmenge von N. Die $\omega_{I,T}$, wo T über die Teilmengen von $N - I$ läuft, sind eine Basis von* $\mathrm{End}_{kG}(\overline{P_I})$.

Um auch die Räume $\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_H}, \overline{P_I})$ für $I, H \subset N$ beschreiben zu können, benötigt man noch weitere Elemente von kQ:

Definition 6.1.4 *Sei $H \subset I \subset N$, so daß ein Pfad von H nach I der Länge $|I - H|$ in Q existiert, so sei $\omega_{H \subset I}$ das Bild eines solchen Pfades unter Ψ und $\omega_{I \supset H}$ das Bild des umgekehrten Pfades von I nach H derselben Länge in Q.*

Das folgende Lemma folgt auch aus [Kos1, Proposition 3].

Lemma 6.1.5 *Seien $H, I \subset N$, so daß* $\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_H}, \overline{P_I}) \neq 0$. *Dann ist*

$$\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_H}, \overline{P_I}) = \omega_{H \supset H \cap I} \mathrm{End}_{kG}(\overline{P_{H \cap I}}) \omega_{H \cap I \subset I}.$$

Nun wird die in [HSW] berechnete 2-modulare Zerlegungsmatrix von G benutzt, um $\overline{\Lambda}$ zu einer zum Hauptblock von RG Morita-äquivalenten Ordnung hochzuliften. Sei also Λ die zum Hauptblock von RG gehörige Basisordnung. Für echte Teilmengen $I \subset N$ sei P_I der projektiv unzerlegbare RG-Modul mit $P_I/2P_I = \overline{P_I}$ und $e_I \in \Lambda$ Lift des zentral primitiven Idempotents von $\Lambda/J(\Lambda)$ das zu M_I gehört mit $e_I e_J = \delta_{I,J} e_I \in \Lambda$ $(I, J \subset N)$ und $1_\Lambda = \sum_{I \subset N} e_I$. Dann ist $\Lambda = \oplus_{I,J \subset N} e_I \Lambda e_J$. Die R-Gitter $e_I \Lambda e_J$ sind isomorph zu $\mathrm{Hom}_{RG}(P_I, P_J)$.

Sei nun $V := KP_\emptyset$ die Summe über alle einfachen KG-Moduln und $E := \mathrm{End}_{KG}(V)$. Wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben wird $\mathrm{Hom}_{RG}(P_I, P_J)$ als Teilmenge von E aufgefaßt. Seien $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ die zentral primitiven Idempotente von KG, die man auch als die primitiven Idempotente von E auffassen kann. Für $I \subset N$ sei

$$c_I := \{1 \leq j \leq s \mid \epsilon_j P_I \neq 0\}$$

die Menge der Indizes der einfachen KG-Moduln die in KP_I vorkommen.

Mit dieser Identifikation findet man

Bemerkung 6.1.6 *Sei $I \subset N$ mit $|N - I| = n > 0$. Dann ist $|c_I| = 2^n = dim_R(\mathrm{End}_{RG}(P_I))$ und $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$ ist ein Teilgitter von $\oplus_{j \in c_I} R\epsilon_j$ vom Index (s. Definition 5.3.8) $2^{2^{n-1} f} R$.*

Beweis. Sei $M := \oplus_{j \in c_I} R\epsilon_j$ die R-Maximalordnung in $K \otimes_R \mathrm{End}_{RG}(P_I)$. Die Ordnung $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$ ist eine symmetrische Ordnung bezüglich der Form $\Phi := Tr_u$, wo $u := \frac{1}{|G|} \sum_{j \in c_I} \chi_j \epsilon_j$, wo χ_j der Charaktergrad des zu ϵ_j gehörigen irreduziblen Charakters von G ist. Da $\chi_j \in R^*$ ungerade ist, ist das Dual von M bezüglich Φ vom Index $(2^f)^{(2^n)}R$ in M. Also ist $[M : \mathrm{End}_{RG}(P_I)] = \sqrt{2^{f2^n}R} = 2^{2^{n-1}f}R$. $\square$

Nun werden geeignete Lifte der $\omega_{I,T}$ konstruiert.

Definition 6.1.7 *(i) Für $I \subset N$ und $i-1 \in N-I$ sei $\varphi_{I,i} \in \mathrm{Hom}_{RG}(P_{I+\{i\}}, P_I)$ ein Lift von $\Psi(\alpha_{i,I})$.*

(ii) Für $i \notin I \subseteq N$ sei $\beta'_{I,i} \in \mathrm{End}_{RG}(P_I)$ analog zu $\omega_{I,i}$ definiert: Ist $i-1 \in I$, so sei j das eindeutig bestimmte Element von N, für das $j-1 \notin I$ aber $J := \{j, j+1, \ldots, i-1\} \subseteq I$ und

$$\beta'_{I,i} := \varphi_{I+\{j\},j}\varphi_{I-\{j,j+1\},j+1} \cdots \varphi_{I-J+\{i\},i}\varphi_{I-J,i}\varphi_{I-J+\{i-1\},i-1} \cdots \varphi_{I-\{j\},j+1}\varphi_{I,j}.$$

Liegt $i-1$ nicht in I, so sei

$$\beta'_{I,i} := \varphi_{I+\{i\},i}\varphi_{I,i}.$$

(iii) Seien $H \subset I \subset N$, so daß ein Weg $\omega = \alpha_1 \ldots \alpha_l \in Q$ von H nach I und ein Weg $\omega' = \alpha'_l \ldots \alpha'_1 \in Q$ von I nach H existieren der Länge $l := |I - H|$. Dann seien $\beta'_{H \subset I} := \prod_{i=1}^{l} \varphi_i$ und $\beta'_{I \supset H} := \prod_{i=1}^{l} \varphi'_i$ wo φ_i und $\varphi'_i \in E$ Lifte von $\Psi(\alpha_i)$ und $\Psi(\alpha'_i)$ sind $(i = 1, \ldots l)$.

Wie die $\omega_{I,i}$ kommutieren auch die Lifte $\beta'_{I,i} \in E$ für die verschiedenen $i \in N-I$ und für jede Teilmenge $T \subseteq N - I$ ist

$$\beta'_{I,T} := \prod_{i \in T} \beta'_{I,i}$$

unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

Aus Proposition 6.1.3 erhält man nun direkt

Folgerung 6.1.8 *$(\beta'_{I,T}, (T \subseteq N-I))$ ist eine R-Basis des R-Gitters $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$.*

Das folgende Lemma ist die wesentliche Beobachtung bei der Bestimmung des Gruppenrings RG.

Lemma 6.1.9 *Für $I \subset N$ und $T \subset N - I$ gilt*

$$n(\beta'_{I,T}) = 2^{l(I,T)}$$

wo $l(I,T) := \sum_{i \in T} \frac{1}{2} l(I,i)$.

Beweis. Aus Bemerkung 5.3.5 folgt, daß $2^{l(I,T)}$ die Norm von $\beta'_{I,T}$ teilt. Denn sei $i \in N - I$ und $l := \frac{1}{2}l(I,i)$. Dann ist $\beta'_{I,i}$ ein Produkt $\beta'_{I,i} = f_1 \dots f_l g_l \dots g_1$ mit $f_j \in \mathrm{Hom}_{RG}(P_{I_j}, P_{I_{j+1}})$ und $g_j \in \mathrm{Hom}_{RG}(P_{I_{j+1}}, P_{I_j})$ für gewisse paarweise verschiedene Teilmengen $I_1, \dots, I_{l+1}$ von N. In dem kommutativen Ring E kann man das Produkt als $\beta'_{I,i} = (f_1 g_1)(f_2 g_2) \dots (f_l g_l)$ berechnen. Nach Bemerkung 5.3.5 ist die Norm von $f_j g_j$ durch 2 teilbar und nach Bemerkung 5.3.3 ist dann die Norm von $\beta'_{I,i}$ durch 2^l und deshalb $n(\beta'_{I,T})$ durch $2^{l(I,T)}$ teilbar.

Die umgekehrte Beziehung ergibt sich mit Hilfe von Lemma 5.3.9: Sei $n := |N - I|$. Dann ist

$$\sum_{T \subseteq N-I} l(I,T) = \frac{1}{2} \sum_{T \subseteq N-I} \sum_{i \in T} l(I,i) = \frac{1}{2} \sum_{i \in N-I} l(I,i) 2^{n-1} = f 2^{n-1}.$$

Also folgt die Behauptung aus Bemerkung 6.1.6 und Lemma 5.3.9. □

Insbesondere folgt für $I \subset N$ und $T = \{i\} \subset N - I$, so daß $i - 1 \notin I$, daß $n(\beta'_{I,i}) = 2$ ist. Da nach Satz 6.1.1

$$\beta'_{I,\{i\}} == \varphi_{I+\{i\},i}\varphi_{I,i} = \varphi_{I,i}\varphi_{I+\{i\},i} \in 2\mathrm{End}_{RG}(P_{I+\{i\}}),$$

findet man mit Lemma 5.3.4, daß $\frac{1}{2}\beta'_{I,i} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{I+\{i\}})^*$ eine Einheit ist. Also findet man

Bemerkung 6.1.10 *Ist $i - 1, i \notin I$, so ist $\varphi_{I,i}$ injektiv und $\beta'_{I,\{i\}}$ $\in 2(\mathrm{End}_{RG}(P_{I+\{i\}})^*)$. Es gibt also eine Einheit $u_{I,i} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{I+\{i\}})^*$, so daß*

$$u_{I,i}\beta'_{I,\{i\}} = 2id_{P_{I+\{i\}}} \in \mathrm{End}_{RG}(P_I).$$

Für $I \subset N$ sei $pr_I := \sum_{j \in c_I} \epsilon_j \in E$ die Projektion auf KP_I.

Definition 6.1.11 *Sei $I \subset N$ mit $i \notin I$. Ist $i - 1 \notin I$, so sei*

$$\beta_{I,i} = 2pr_{I+\{i\}}.$$

Sonst sei j das eindeutig bestimmte Element von N, für das $j - 1 \notin I$ aber $J := \{j, j+1, \dots, i-1\} \subseteq I$ und

$$\beta_{I,i} := 2^{|J|+1} pr_{I-J+\{i\}} pr_I.$$

Ist $T \subset N - I$, so sei

$$\beta_{I,T} := \prod_{i \in T} \beta_{I,i}$$

wo das leere Produkt $\beta_{I,\emptyset} := pr_I$ als das Einselement von $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$ definiert ist.

Dann folgt aus obigen Betrachtungen der folgende Satz.

Satz 6.1.12 *Sei $I \subset N$.*

(a) $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$ *wird als R-Ordnung erzeugt von* $(pr_I)_{|P_I} = id_{|P_I}$ *und den* $\beta_{I,i}$ *mit* $i \in N - I$. *Genauer bilden die* $\beta_{I,T}$ *mit* $T \subset N - I$ *eine R-Basis des Gitters* $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$.

(b) Sei H eine weitere Teilmenge von N, so daß $\mathrm{Hom}_{RG}(P_H, P_I) \neq \{0\}$. *Dann ist*

$$\mathrm{Hom}_{RG}(P_H, P_I) \cong (pr_H(\mathrm{End}_{RG}(P_{H\cap I}))pr_I)$$

als $\mathrm{End}_{RG}(P_H) - \mathrm{End}_{RG}(P_I)$*-Bimodul. Die nichttrivialen Einträge in der Spalte zu* P_H *der Amalgamierungsmatrix von* P_I *sind alle gleich*

$$f - |I - (H \cap I)| - |H - (H \cap I)|.$$

(c) Es gibt Exponentenmatrizen $M^{(j)}$, $j = 1, \ldots, s$ *für* $\oplus_{j=1}^{s} \Lambda\epsilon_j$ *für die die nichttrivialen Einträge von der Form*

$$m_{H,I}^{(j)} = |H - I| \quad (j \in c_H \cap c_I)$$

sind.

Beweis. (a) Sei $I \subset N$ und $i \in N - I$. Liegt $i - 1 \notin I$, so ist $\beta_{I,i}$ nach Bemerkung 6.1.10 ein Element von $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$. Ist $i - 1 \in I$, so sei j das eindeutig bestimmte Element von N ist, für das $j - 1 \notin I$ aber $J := \{j, j+1, \ldots, i-1\} \subseteq I$ und für $l = j, \ldots, i-1$ sei $I_l := I - \{j, \ldots, l\}$ und die Einheit $u_l := u_{I_l, l+1}$ aus Bemerkung 6.1.10. Dann ist

$$\beta'_{I,i} \prod_{l=j}^{i-1} u_l = (\varphi_{I-\{j\},j}\varphi_{I,j}u_j)(\varphi_{I-\{j,j+1\},j+1}\varphi_{I-\{j\},j+1}u_{j+1}) \ldots$$

$$\ldots (\varphi_{I-J,i-1}\varphi_{I-J+\{i-1\},i-1}u_{i-1})(\varphi_{I-J+\{i\},i}\varphi_{I-J,i}u_{I-J,i}) =$$

$$(2pr_I)(2pr_{I-\{j\}}) \ldots (2pr_{I-J})(2pr_{I-J+\{i\}}) = 2^{|J|+1} pr_I pr_{I-J+\{i\}}$$

da die Mengen

$$c_I \subset c_{I-\{j\}} \subset \ldots \subset c_{I-J}$$

ineinander enthalten sind. Also liegen die $\beta_{I,T}$ mit $T \subset N - I$ in $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$. Seien für $T \subset N - I$ die Koeffizienten $a(I,T)'_j, a(I,T)_j \in R$ $(j = 1, \ldots, s)$ so daß $\beta'_{I,T} = \sum_{j=1}^{s} a(I,T)'_j \epsilon_j$ und $\beta_{I,T} = \sum_{j=1}^{s} a(I,T)_j \epsilon_j$. Da $\beta_{I,T}$ aus $\beta'_{I,T}$ durch Multiplikation mit Einheiten in lokalen Ringen hervorgeht, gibt es ein $k_{I,T} \in R^*$ mit

$$k_{I,T} a(I,T)_j \equiv a(I,T)'_j \pmod{2n(\beta'_{I,T})}$$

für alle $1 \leq j \leq s$. Nach Übergang zu $k_{I,T}\beta_{I,T}$ kann man annehmen, daß $k_{I,T} = 1$ ist, also die Koeffizenten von $\beta_{I,T}$ und die von $\beta'_{I,T}$ modulo $2n(\beta'_{I,T})$ übereinstimmen. Nach Lemma 6.1.9 ist $n(\beta_{I,T}) = n(\beta'_{I,T}) = 2^{l(I,T)}$ und das Produkt der Normen ist

$$\prod_{T \subset N-I} n(\beta_{I,T}) = 2^{2^{n-1}f}$$

genau der Index von $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$ in $\oplus_{j \in c_I} R\epsilon_j$, wo $n := |N - I|$. Sei $B' := (a(I,T)'_j)_{T,j}$, $B := (a(I,T)_j)_{T,j}$ und $D := diag(n(\beta'_{I,T}) \mid T \subseteq N - I)$. Dann ist $B' = DU$ für eine Matrix $U \in GL_{2^n}(R)$ und $B = DV$ mit $V \equiv U \pmod{2R}$. Insbesondere ist die Determinante von V eine Einheit in R. Also ist $(\beta_{I,T} \mid T \subseteq N - I)$ auch eine R-Basis von $\mathrm{End}_{RG}(P_I)$.
(b) Nach Lemma 6.1.5 ist

$$\mathrm{Hom}_{RG}(P_H, P_I) = \beta'_{H \supset H \cap I} \mathrm{End}_{RG}(P_{H \cap I}) \beta'_{H \cap I \subset I}.$$

Die Multiplikation mit $\beta'_{H \supset H \cap I}\beta'_{H \cap I \subset I} \in E$ induziert also den gewünschten Bimodulisomorphismus.

Die nichttrivialen Koeffizienten von $\beta'_{H \supset H \cap I}\beta'_{H \cap I \subset H}\beta'_{I \supset H \cap I}\beta'_{H \cap I \subset I}$ haben nach dem Beweis von (a) alle Bewertung

$$l(\omega_{H \cap I \subset H}) + l(\omega_{H \cap I \subset I}) = |H - H \cap I| + |I - H \cap I|$$

Also folgt die Behauptung über die Einträge in den Amalgamierungsmatrizen.
(c) Seien die Exponentenmatrizen $M^{(j)}$ so normiert, daß in der Zeile zu $M_\emptyset$ nur 0 steht:

$$m^{(j)}_{\emptyset,H} = 0 \text{ für alle } H \subset N, j \in c_H.$$

Dann gilt wegen Teil (b) für $I, H \subset N$ mit $j \in c_H \cap c_I$

$$(\star) \quad m^{(j)}_{H,I} + m^{(j)}_{I,H} = |H - H \cap I| + |I - H \cap I|.$$

Insbesondere ist

$$m^{(j)}_{H,\emptyset} = |H| \text{ für alle } H \subset N, j \in c_H.$$

Da die einfachen kG-Moduln alle selbstdual sind, findet man mit Folgerung 5.2.12

$$m^{(j)}_{H,I} = m^{(j)}_{I,H} - m^{(j)}_{I,\emptyset} + m^{(j)}_{H,\emptyset} = m^{(j)}_{I,H} - |I| + |H|.$$

Also ergibt sich die Behauptung mit $(\star)$. □

Dieser Satz beschreibt noch nicht den Isomorphietyp von Λ, da die Multiplikation $e_I\Lambda e_J \times e_J\Lambda e_H \to e_I\Lambda e_H$ noch nicht angegeben ist.

Den naheliegensten Kandidaten für Λ beschreibt die folgende Vermutung.

Vermutung: Es gibt Einbettungen $\varphi_I : P_I \hookrightarrow P_\emptyset$, $I \subset N$, so daß für alle $I, H \subset N$

$$\mathrm{Hom}_{RG}(\varphi_H(P_H), \varphi_I(P_I)) = 2^{|I-(H\cap I)|}(pr_H(\mathrm{End}_{RG}(\varphi_{H\cap I}(P_{H\cap I})))pr_I) \subset E.$$

Bemerkung 6.1.13 *Sei Λ wie in der Vermutung. Dann erfüllen die $\beta_{I,i}$ die Relationen aus Satz 6.1.1 modulo 2Λ.*

Beweis. Mit Hilfe der kombinatorischen Beschreibung der Mengen c_I aus [HSW] zeigt man leicht:
Gilt $i, i-1 \notin I \subset N$, dann ist $c_{I+\{i\}} \subset c_I$.
Ist $i \in I \subset N$, dann ist $c_{I+\{i+1\}} \cap c_I = \emptyset$.
Gilt $i-1, i, i+1 \notin I$, dann ist $c_{I+\{i+1\}} \subset c_{I+\{i+1,i\}} \cup c_{I+\{i\}}$.
Die Relationen aus Satz 6.1.1 lauten in den $\beta_{I,i}$:

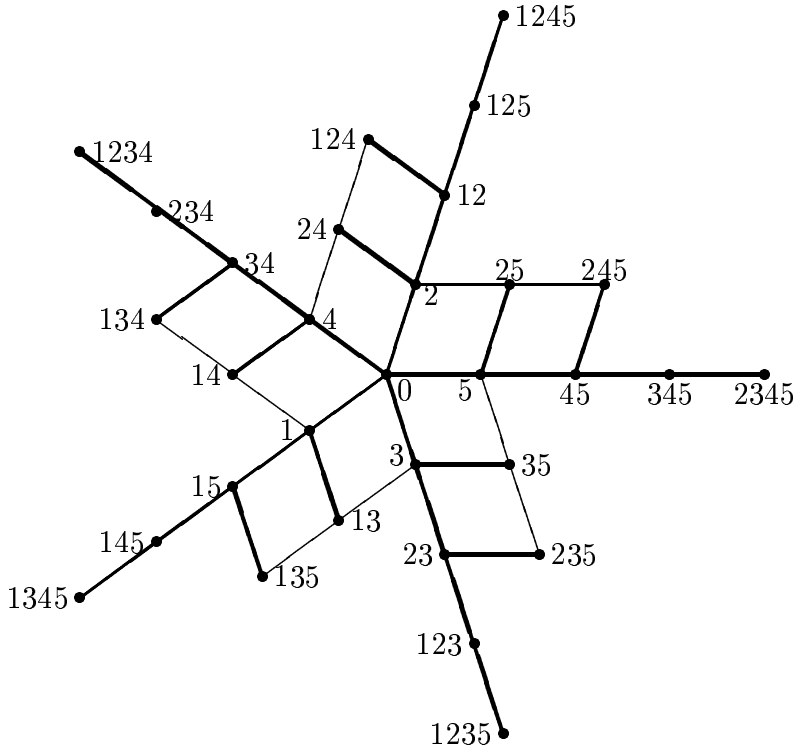
$$\beta_{I+\{i,j\},i}\beta_{I+\{j\},j} = \beta_{I+\{i,j\},j}\beta_{I+\{i\},i} \quad (i-1, j-1 \notin I,\ j \neq i-1, i, i+1)$$

$$\beta_{I,i}\beta_{I+\{i\},i} = 2\beta_{I,\emptyset}\ (i-1 \notin I, i \in I)$$

$$\beta_{I+\{i+1\},i+1}\beta_{I,i}\beta_{I+\{i\},i} + \beta_{I+\{i+1\},i}\beta_{I+\{i+1,i\},i}\beta_{I+\{i+1\},i+1} = 2\beta_{I+\{i+1\},i+1}\ (i-1, i \notin I)$$

$$\beta_{I+\{i+1\},i}\beta_{I+\{i+1,i\},i+1}\beta_{I+\{i\},i} = 0\ (i-1 \notin I, i \in I). \qquad \square$$

Der Ext-Köcher für den Hauptblock von $kSL_2(2^5)$.



Die Ecken des Graphen sind mit den projektiv unzerlegbaren Moduln P_I indiziert, wobei nur die Elemente von I angegeben sind und 0 für die leere Menge steht. Die Pfeile $P_I \to P_{I+\{i\}}$ und $P_{I+\{i\}} \to P_I$ in Q sind durch eine einfache Kante dargestellt.

Bemerkung 6.1.14 *Die Vermutung ist richtig für $f \leq 6$.*

Beweis. Für jede echte Teilmenge $\emptyset \neq I \subset N$ wähle ein $i \in I$ so, daß $i-1 \notin I$. Sei T die Menge dieser Paare (I,i). Vermöge des Monomorphismus $\varphi_{I-\{i\},i} : P_I \to P_{I-\{i\}}$ aus Bemerkung 6.1.10 mit $(I,i) \in T$ bette man P_I in $P_{I-\{i\}}$ ein, so daß rekursiv alle projektiv unzerlegbaren RG-Moduln in $P_\emptyset$ eingebettet werden. Für alle $I \subset N$ bezeichne $\varphi_I : P_I \hookrightarrow P_\emptyset$ diese Einbettung. In diesen Koordinaten gilt dann für alle $(I,i) \in T$, daß

$$\mathrm{Hom}_{RG}(\varphi_I(P_I), \varphi_{I-\{i\}}(P_{I-\{i\}})) = pr_I(\mathrm{End}_{RG}(\varphi_{I-\{i\}}(P_{I-\{i\}}))).$$

Eine Wahlmöglichkeit von T für $f = 5$ ist in dem Bild des Ext-Köchers für $SL_2(2^5)$ dargestellt. Die Abbildungen φ_I verlaufen entlang der fettgedruckten Kanten von außen nach innen.

Also genügt es zu zeigen, daß für alle nicht fettgedruckten Kanten $(P_I, P_{I-\{i\}})$ mit $i \in I \subset N$, $i-1 \notin I$ der Homomorphismus $pr_I \in \mathrm{Hom}_{RG}(\varphi_I(P_I), \varphi_{I-\{i\}}(P_{I-\{i\}}))$ liegt. Sei dazu z.B. $I = \{2,4,5\}$ und $i = 4$. Sei

$$\xi \in \mathrm{Hom}_{RG}(\varphi_{\{2,4,5\}}(P_{\{2,4,5\}}), \varphi_{\{2,5\}}(P_{\{2,5\}}))$$

ein Lift von $\Psi(\alpha_{4,\{2,5\}})$. Nach Satz 6.1.1 gibt es ein $x \in \mathrm{End}_{RG}(\varphi_{\{5\}}(P_{\{5\}}))$ mit

$$\xi = \xi pr_{\{2,5\}} = pr_{\{2,4,5\}} pr_{\{4,5\}}(1+2x) = pr_{\{2,4,5\}}(1+2x).$$

Da $2\mathrm{End}_{RG}(\varphi_{\{5\}}(P_{\{5\}})) \subset \mathrm{End}_{RG}(\varphi_{\{2,5\}}(P_{\{2,5\}}))$, ist $1+2x$ eine Einheit in $\mathrm{End}_{RG}(\varphi_{\{2,5\}}(P_{\{2,5\}}))$. Also liegt $pr_{\{2,4,5\}} \in \mathrm{Hom}_{RG}(\varphi_{\{2,4,5\}}(P_{\{2,4,5\}}), \varphi_{\{2,5\}}(P_{\{2,5\}}))$. Die anderen Beweise sind ganz analog. Ist $f = 6$, so benutzt man zusätzlich noch die Operation der Galoisgruppe $Gal(K/\mathbb{Q}_2) \cong C_f$. □

6.2 Der Gruppenring $\mathbb{Z}_p[\zeta_{p^f-1}]SL_2(p^f)$.

Sei p eine ungerade Primzahl, $f \in \mathbb{N}$, R der Ring der ganzen Zahlen in der unverzweigten Erweiterung K vom Grad f von $\mathbb{Q}_p$ und $k := R/pR \cong \mathbb{F}_{p^f}$ der Restklassenkörper. Sei $G := SL_2(p^f)$ die Gruppe der 2×2-Matrizen über k mit Determinante 1. Dann ist k ein Zerfällungskörper für kG.

kG hat 3 Blöcke, von denen einer Defekt 0 hat. Die beiden anderen Blöcke (der Hauptblock und der Block der treuen irreduziblen Charaktere) haben Defekt f.

Ist $f = 1$, so sind die p-Sylow-Gruppen von G zyklisch (der Ordnung p) und der Gruppenring $\mathbb{Z}_pG$ kann mit Hilfe der allgemeinen Theorie [Ple2, Chapter VIII], [Lin] beschrieben werden. Für $f = 2$ ist der Gruppenring aus [Neb] bekannt.

Für $f \geq 3$ wird die zu RG Morita-äquivalente Basisordnung nahezu vollständig in diesem Kapitel beschrieben.

Wie im Fall $p = 2$ bezeichne F den Frobenius-Automorphismus $x \mapsto x^p$ des Körpers $k = \mathbb{F}_{p^f}$ über $\mathbb{F}_p$. Für jeden k-Vektorraum M, sei $M^{(i)}$ der i-mal mit F getwistete Vektorraum: $M^{(i)} = M$ mit skalarer Multiplikation $x \cdot v := x^{p^i} v$

$(x \in k, v \in M)$. Die Gruppe G operiert als Automorphismengruppe auf der Polynomalgebra $k[X,Y]$, wo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ die Erzeuger X und Y auf $dX - bY$ bzw. $-cX + aY$ abbildet. Für $0 \leq \lambda < p$ sei $M_\lambda \subseteq k[X,Y]$ der Teilraum der homogenen Polynome vom Grad λ mit $dim(M_\lambda) = \lambda + 1$. Für $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{f-1})$ mit $0 \leq \lambda_i < p$ sei

$$M_\lambda := M_{\lambda_0} \otimes_k M_{\lambda_1}^{(1)} \otimes_k \ldots \otimes_k M_{\lambda_{f-1}}^{(f-1)}.$$

Dann bilden die $\bar{k}G$-Moduln $\bar{k}M_\lambda$ ein Repräsentantensystem der Isomorphieklassen einfacher $\bar{k}G$-Moduln über dem algebraischen Abschluß $\bar{k}$ von k.

6.2.1 Die Gruppenalgebra in Charakteristik p.

In diesem Abschnitt wird die in [Kos2] gegebene Beschreibung von kG referiert. Sei $P := \{0, \ldots, p-1\}^f - \{(p-1, \ldots, p-1)\}$. Die Elemente von P stehen in Bijektion zu den einfachen nicht projektiven kG-Moduln. Um die Bezeichnungen aus [HSW] für die einfachen kG-Moduln beizubehalten, werden die Elemente $a \in P$ mit $N := \{0, \ldots, f-1\}$ indiziert, $a = (a_0, \ldots, a_{f-1}) \in P$ entspricht dann dem einfachen kG-Modul M_a.

Wie im Abschnitt 6.1 wird mit den Elementen von N modulo f gerechnet.

Die Ext-Gruppen Ext^1_{kG} zwischen den einfachen kG-Moduln M_λ sind in [AJL] berechnet: Für $i \in N$ und $h = \pm 1$ sei

$$P(i,h) := \{a \in P \mid 0 \leq a_{i-1} \leq p-2 \text{ und } 0 \leq a_i + h \leq p-1\}$$

und $f(i,h) : P(i,h) \to P; a \mapsto b$, wo $b_j = a_j$ für alle $i, i-1 \neq j \in N$, $b_i = a_i + h$ und $b_{i-1} = p - 2 - a_{i-1}$.

Dann gilt

Satz 6.2.1 *([AJL, Corollary 4.5]) Seien $a, b \in P$. Dann ist $\mathrm{Ext}^1_{kG}(M_a, M_b) \neq 0$ genau dann wenn es ein $i \in N$, $h \in \pm 1$ gibt, so daß $b = f(i,h)(a)$ ist.*
Ist $f \geq 3$, so sind die nichttrivialen Ext*-Gruppen eindimensional.*

Für $a \in P$ sei $\overline{P_a}$ der projektive kG-Modul mit Kopf M_a und

$$\overline{\Lambda} := \mathrm{End}_{kG}(\oplus_{a \in P} \overline{P_a})$$

die Basisalgebra der Summe der beiden Blöcke vom Defekt f von kG. Koshita berechnet in [Kos2] Relationen zwischen Erzeugern dieser Ext-Gruppen:

Für $a \in P$ sei

$$S(a) := \{i \in N \mid a_i = p-1\}.$$

Satz 6.2.2 *([Kos2, Theorem 2.2]) Sei $f \geq 3$. Sei Q der Köcher, dessen Ecken mit den Elementen von P identifiziert werden, mit Pfeilen*

$$\alpha_{i,h,a} : f(i,h)(a) \to a \text{ für alle } i \in N, h = \pm 1, a \in P(i,h).$$

Sei kQ die Pfadalgebra von Q. Dann lassen sich für $a, b \in P$ die Pfade in Q von a nach b schreiben als

$$(a|(i_1,h_1),\ldots,(i_l,h_l)|b) = \alpha_{i_1,h_1,f(i_1,-h_1)(a)}\alpha_{i_2,h_2,I}\ldots\alpha_{i_l,h_l,b}.$$

$(a||a)$ ist das Idempotent in kQ, welches zur Ecke a gehört. In dieser Schreibweise sei X das Ideal von kQ, welches von den Elementen

$$(f(j,r)(f(i,h)(a))|(j,r),(i,h)|a) - (f(j,r)(f(i,h)(a))|(i,h)(j,r)|a)$$
$$(i,j \in N; j \neq i-1,i,i+1; h,r = \pm 1; a \in P(i,h) \cap P(j,r))$$

$$(a|(i,h),(i,h)|f(i,h)(f(i,h)(a))) \quad (i \in N; h = \pm 1; a, f(i,h)(a) \in P(i,h))$$

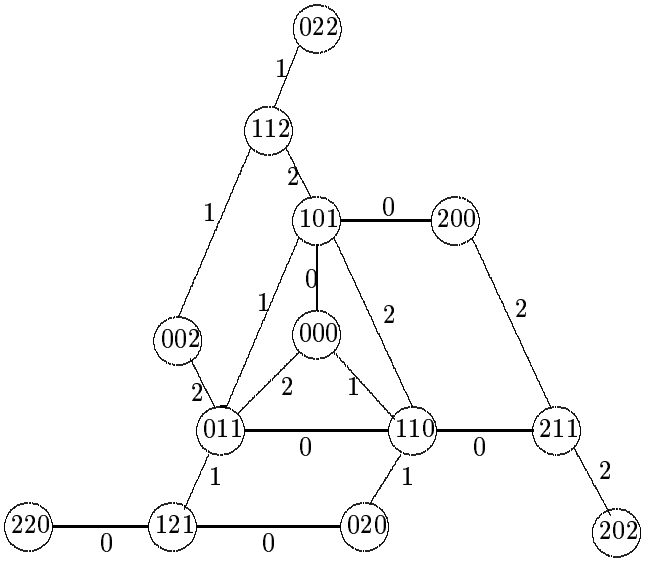
$$(a|(i,1),(i,-1)|a) \quad (i \in N; a \in P(i,-1), i \in S(a))$$

$$(a|(i,1),(i,-1)|a) - (a|(i,-1),(i,1)|a) \quad (i \in N; a \in P(i,-1) \cap P(i,1))$$

$$(f(i+1,r)(f(i,h)(a))|(i+1,r),(i,h)|a) - (f(j,r)(f(i,h)(a)|(i,-h)(i+1,r)|a)$$
$$(i \in N; h,r = \pm 1; a \in P(i,h); a, f(i,h)(a) \in P(i+1,r))$$

erzeugt wird. Dann ist $\overline{\Lambda} \cong kQ/X$.

Beispiel. Der Ext-Köcher des Hauptblocks von $kPSL_2(3^3)$. Die Pfeile $\alpha_{i,h,a}$ und $\alpha_{i,-h,f(i,h)(a)}$ sind zu einer Kante zusammengefaßt.



Definition 6.2.3 *Für $i \in N$, $h = \pm 1$ und $a \in P(i,h)$ heißt i die* Richtung *von $\alpha_{i,h,a} \in Q$.*

Sei

$$\Psi : kQ \to \overline{\Lambda}$$

der in [Kos2] konstruierte Epimorphismus mit $Ker(\Psi) = X$. Die Bilder unter Ψ der Pfade in Q von der Ecke a zur Ecke b erzeugen den k-Vektorraum $\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_a}, \overline{P_b})$. Koshita gibt in [Kos2, Proposition 9.2] eine k-Basis für $\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_a}, \overline{P_b})$ an.

Definition 6.2.4 *(a) Seien $a, b \in P$ mit $S(a) = S(b)$ und $\emptyset \neq T = \{i_1, \ldots, i_l\} \subseteq N$ so daß $(a|(i_1,h_1), \ldots, (i_l,h_l)|b) \in Q$ für geeignete $h_1, \ldots, h_l \in \{\pm 1\}$. Dann bezeichne*

$$\langle a \sim b|T\rangle := \Psi((a|(i_1,h_1), \ldots, (i_l,h_l)|b))$$

ein Bild eines solchen Pfades. $\langle a \sim a|\emptyset\rangle := \Psi((a||a))$.

(b) Sind $a, b \in P$ so, daß ein Pfad $\omega = (a|\ldots|b) \in Q$ der Länge $l(\omega) = |S(a) - S(b)|$ existiert, so sei $\langle a \supset b\rangle$ das Bild eines solchen Pfades unter Ψ.

(c) Sind $a, b \in P$ so, daß ein Pfad $\omega = (a|\ldots|b) \in Q$ der Länge $l(\omega) = |S(b) - S(a)|$ existiert, so sei $\langle a \subset b\rangle$ das Bild eines solchen Pfades unter Ψ.

(d) Sind $a, b \in P$ so, daß ein $x \in P$ existiert mit $S(x) = S(a) \cap S(b)$ für welches $\langle a \supset x\rangle$ existiert, dann ist x eindeutig und

$$a \ominus b := x.$$

(e) Sei $a \in P$, $i \in N - S(a)$. Ist $i - 1 \in S(a)$, so sei $j - 1 \notin S(a)$ so daß $\{j, j+1, \ldots, i-1\} \subseteq S(a)$. Dann sei

$$[a,i] := \Psi((a|(j,1), \ldots, (i-1,1), (i,-1), (i,1), (i-1,-1), \ldots, (j,-1)|a)).$$

Ist $i - 1 \notin S(a)$, dann sei

$$[a,i] := \Psi((a|(i,-1), (i,1)|a)).$$

Ist $T \subset N - S(a)$, so ist das Produkt $\prod_{i \in T}[a,i]$ unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren und wird mit $[a,T]$ bezeichnet.

Definition 6.2.5 *Seien $a, b \in P$, $T_1 \subset N - (S(a) \cup S(b))$ so daß*

(1) $a \ominus b$ und $b \ominus a$ existieren und

(2) $\langle (a \ominus b) \sim (b \ominus a), T_1 \rangle$ *existiert.*

Dann sei für $T_2 \subset N - (S(a) \cup S(b) \cup T_1)$

$$\langle\langle a, T_1, T_2, b\rangle\rangle := \langle a \supset (a \ominus b)\rangle\langle (a \ominus b) \sim (b \ominus a), T_1\rangle[b \ominus a, T_2]\langle (b \ominus a) \subset b\rangle.$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt

Proposition 6.2.6 *([Kos2, Proposition 9.2]) Seien* $a, b \in P$. *Die Elemente* $\langle\langle a, T_1, T_2, b\rangle\rangle$, *für die* a, b, T_1 *die Bedingungen (1) und (2) aus obiger Definition erfüllen und* $T_2 \subset N - (S(a) \cup S(b) \cup T_1)$, *bilden eine Basis von* $\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_a}, \overline{P_b})$.

Bemerkung 6.2.7 *Seien* a, b *wie in Definition 6.2.5. Die Richtungen der Pfeile, die im Weg zu* $\langle a \supset (a \ominus b)\rangle$ *bzw.* $\langle (b \ominus a) \subset b\rangle$ *vorkommen, sind genau die Elemente von* $S(a) - S(b)$ *bzw.* $S(b) - S(a)$. *Deshalb ist der Weg* $\langle\langle a, T_1, T_2, b\rangle\rangle$ *von der Form* $\langle a \sim b, T\rangle$ *für eine Teilmenge* $T \subset N$.

Lemma 6.2.8 *Sei* $a \in P$ *und* $\emptyset \neq T \subseteq N$ *so, daß* $\langle a \sim a, T\rangle$ *existiert. Dann ist* $T = N$ *und es gibt* $\nu_0, \ldots, \nu_{f-1} \in \{\pm 1\}$, *so daß* $a_i = \frac{p-2-\nu_i}{2}$ *für* $i = 0, \ldots, f-1$.

Beweis. Betrachtet man die Einträge von a modulo 2, so vertauschen die Operatoren $f(i,h)$ und $f(i',h')$ $(i, i' \in N, h, h' = \pm 1)$. Dabei ändert $f(i,h)$ genau die Parität von a_i und a_{i-1}. Deshalb ist mit $i \in T$ auch $i - 1 \in T$. Also ist $T = N$. Außerdem gibt es für alle $i = 0, \ldots, f-1$ ein $\nu_i \in \{\pm 1\}$ so daß

$$p - 2 - a_i + \nu_i = a_i.$$

Also ergibt sich die Behauptung. □

Definition 6.2.9 *Sei* $\tilde{P} := \{a \in P \mid a_i = \frac{p-2-\nu_i}{2}$ *für* $\nu_i = \pm 1$ *für alle* $i \in N\}$. *Ist* $a \in \tilde{P}$, *so heißt das Element* $\langle a \sim a, N\rangle \in \overline{\Lambda}$ *ein* Kreis *durch* a.

Folgerung 6.2.10 *(a) Ist* $a \in P - \tilde{P}$, *so bilden die* $2^{|N - S(a)|}$ *Endomorphismen* $[a, T]$ *mit* $T \subseteq N - S(a)$ *eine* k*-Basis von* $\mathrm{End}_{kG}(\overline{P_a})$.

(b) Ist $a \in \tilde{P}$, *so gibt es einen weiteren Basisvektor,* $\langle a \sim a, N\rangle$.

Definition 6.2.11 *Seien* $a, b \in P$, *so daß* $\mathrm{Hom}_{kG}(\overline{P_a}, \overline{P_b}) \neq 0$. *Liegen* a *und* b *nicht beide in* $\tilde{P}$, *so existiert genau ein* $T_1 \subset N - (S(a) \cup S(b))$, *so daß* $\langle (a \ominus b) \sim (b \ominus a), T_1\rangle \in Q$. *Dann sei*

$$d(a,b) := l(\langle a \supset (a \ominus b)\rangle\langle (a \ominus b) \sim (b \ominus a), T_1\rangle\langle (b \ominus a) \subset b\rangle)$$

die Länge eines kürzesten Weges in Q *von* a *nach* b *ohne sich wiederholende Richtungen.*

6.2.2 Zerlegungszahlen.

Um die Beschreibung von kG zu einer Beschreibung von RG hochzuliften, benötigen wir einige kombinatorische Eigenschaften der Zerlegungszahlen von RG. Eine nützliche Beschreibung dieser Zerlegungszahlen findet man in [HSW] (vgl. auch [Bur]).

Mit den Bezeichnungen aus [HSW] sind die gewöhnlichen Charaktere der absolut irreduziblen $\mathbb{C}G$-Moduln 1, δ, δ', δ_1, ..., $\delta_{(p^f-1)/2}$, St, η, η', η_1, ..., $\eta_{(p^f-3)/2}$, mit Charaktergraden $\eta(1) = \eta'(1) = (p^f+1)/2$, $\delta(1) = \delta'(1) = (p^f-1)/2$, $\delta_i(1) = p^f - 1$, und $\eta_i(1) = p^f + 1$. Die Operation von F auf den gewöhnlichen Charakteren ist durch Multiplikation der Indizes mit p gegeben, $\delta_i^F = \delta_{pi}$ und $\eta_j^F = \eta_{pj}$, wobei die Indizes modulo p^f+1 bzw. p^f-1 zu lesen sind und mit den Negativen identifiziert werden. η_j und δ_j gehören genau dann zum Hauptblock von RG wenn j gerade ist.

Für den irreduziblen p-Brauer-Charakter $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{f-1})$ sei die Menge

$$W(\lambda) = \{0 \le \nu \le p^f - 1 \mid \nu = \sum_{i=0}^{f-1} \epsilon_i \tilde{\lambda}_i p^i \text{ für geeignete } \epsilon_0, \ldots, \epsilon_{f-1} = \pm 1\},$$

wo $\tilde{}$ die durch

$$\tilde{x} := p - 1 - x$$

definierte Bijektion der Menge $\{0, \ldots, p-1\}$ ist.

Für $\epsilon = \pm 1$ sei $V^\epsilon(\lambda) = W(\lambda) \cup (p^f - \epsilon - W(\lambda))$

Für $j = 1, \ldots, (p^f-3)/2$ sei $d^{(1)}_{\lambda,j} := d_{\lambda,\eta_j}$ die Vielfachheit des p-Brauer-Charakters λ in der Einschränkung von η_j auf die p-regulären Klassen von G. Analog seien die übrigen Zerlegungszahlen mit $d^{(-1)}_{\lambda,j} := d_{\lambda,\delta_j}$ $(j = 1, \ldots, (p^f-1)/2)$, $d^{(1)}_{\lambda,(p^f-1)/2} := d_{\lambda,\eta} = d_{\lambda,\eta'}$ und $d^{(-1)}_{\lambda,(p^f+1)/2} := d_{\lambda,\delta} = d_{\lambda,\delta'}$ bezeichnet.

Dann beschreiben die Mengen $V^\epsilon(\lambda)$ genau die Mengen der gewöhnlichen Charaktere von G, die λ als p-modularen Konstituenten haben:

Satz 6.2.12 *([HSW, Theorem 2.7])*

a) $d^{(\epsilon)}_{\lambda,j} = 1$ *falls* $j \in V^\epsilon(\lambda)$ *und* 0 *sonst.*

b) $d_{\lambda,St} = 1$ *falls* $\lambda = p^f - 1$ *und* 0 *sonst.* $d_{\lambda,1} = 1$ *falls* $\lambda = 0$ *und* 0 *sonst.*

Die Elemente von $V^\epsilon(\lambda)$ behandelt man wie die Indizes von η bzw. δ, betrachtet sie also modulo $p^f - \epsilon$ und identifiziert x mit $p^f - \epsilon - x$.

Um den Gruppenring RG zu beschreiben, benötigt man einige kombinatorische Eigenschaften der p-Zerlegungsmatrix von G. Zunächst werden die p-modularen Konstituenten der "Ausnahmecharaktere" η, η', δ und δ' bestimmt.

Lemma 6.2.13 *(vgl. [HSW, Corollary 2.4]) Die p-modularen Konstituenten von η und η' bzw. δ und δ' stimmen überein. Die Menge all dieser p-modularen Konstituenten ist gerade*

$$M := \{\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{f-1}) \mid \lambda_i = \frac{1}{2}(p - 2 + \epsilon_i) \text{ für } \epsilon_i \in \{\pm 1\}\}.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 6.2.12. Sei X die Menge der p-modularen Konstituenten von η, η', δ und δ'. Sei $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{f-1}) \in M$ mit $\lambda_i = \frac{1}{2}(p-2+\epsilon_i)$. Dann ist $\tilde{\lambda}_i = p - 1 - \lambda_i = \frac{1}{2}(p - \epsilon_i)$. Sei $\epsilon := \prod_{i=0}^{f-1} \epsilon_i$. Sei $\nu_{f-1} := 1$, und für $j = f-2, \ldots, 0$ $\nu_j := \nu_{j+1}\epsilon_{j+1}$. Dann ist

$$\nu_j \frac{1}{2}(p - \epsilon_j)p^j + \nu_{j+1}\frac{1}{2}(p - \epsilon_{j+1})p^{j+1} = \frac{1}{2}(-\nu_j\epsilon_j p^j + \nu_{j+1}p^{j+2}).$$

Also findet man

$$\sum_{i=0}^{f-1} \nu_i \frac{1}{2}(p - \epsilon_i)p^i = \frac{1}{2}(p^f - \epsilon).$$

Daher ist $M \subset X$.

Die Gleichheit folgt durch Vergleich der Dimensionen: Durch Induktion über f zeigt man nämlich leicht

$$\sum_{\lambda \in M} dim(\lambda) = \sum_{(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{f-1}) \in \{\pm 1\}^f} \prod_{i=0}^{f-1} \frac{p + \epsilon_i}{2} = p^f.$$

Da η und δ zu verschiedenen Blöcken gehören, ist $\sum_{\lambda \in X} dim(\lambda) = \eta(1) + \delta(1) = \frac{1}{2}(p^f + 1) + \frac{1}{2}(p^f - 1) = p^f$. □

Folgerung 6.2.14 *Sei $\lambda \in M$ ein p-modularer Konstituent von δ und $\epsilon := 1$ oder ein p-modularer Konstituent von η und $\epsilon := -1$. Dann ist*

$$\chi_m^{(\epsilon)} := |\frac{1}{2}(p^f - \epsilon) - p^m| \in V^\epsilon(\lambda) \text{ für alle } 0 \leq m \leq f - 1.$$

Beweis. Nach dem Beweis von Lemma 6.2.13 ist $\frac{1}{2}(p^f + \epsilon) \in W(\lambda)$ also $\frac{1}{2}(p^f + \epsilon) \in V^\epsilon(\lambda)$. Mit λ liegen auch alle Bilder $\lambda^F, \ldots, \lambda^{F^{f-1}} \in M$. Also ist $\frac{1}{2}(p^f + \epsilon)p^m \in V^\epsilon(\lambda)$ für $m = 0, \ldots, f-1$. Nun ist $\frac{1}{2}((p^m + 1)(p^f - \epsilon) - (p^{f+m} + \epsilon p^m)) = \frac{1}{2}(p^f - \epsilon) - \epsilon p^m$ und $(p^f - \epsilon) - (\frac{1}{2}(p^f - \epsilon) - \epsilon p^m) = \frac{1}{2}(p^f - \epsilon) + \epsilon p^m$. Also ist $\chi_m^{(\epsilon)} \in V^\epsilon(\lambda)$. □

Definition 6.2.15 *Sei* $\mathrm{Kr} := (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(f)})$ *eine Folge von p-Brauer-Charakteren von G, so daß*

$$\lambda_i^{(j)} = \frac{1}{2}(p - 2 + \epsilon_i^{(j)})p^i \text{ mit } \epsilon_i^{(j)} = \pm 1 (0 \leq i \leq f - 1) \text{ für } j = 1, \ldots, f.$$

Kr *heißt ein* Kreis, *falls eine Bijektion* $\pi : \{1, \ldots, f\} \to \{0, \ldots, f-1\}$ *existiert, so daß*

$$\epsilon_i^{(j)} = \begin{cases} \epsilon_i^{(j-1)} & i \neq \pi(j), \pi(j)-1 \\ -\epsilon_i^{(j-1)} & i = \pi(j) \text{ oder } \pi(j)-1 \end{cases} \quad \text{für } j = 2, \ldots, f.$$

Lemma 6.2.16 *Sei* Kr $:= (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(f)})$ *ein Kreis und* $\epsilon = \pm 1$. *Sei* $a \in \mathcal{X} := \bigcap_{j=1}^{f} V^{\epsilon}(\lambda^{(j)})$ *mit* $0 \leq a < (p^f - \epsilon)/2$. *Dann gibt es ein* $0 \leq m \leq f-1$ *mit* $a = \chi_m^{(\epsilon)}$.

Beweis. Seien $\nu_0^{(j)}, \ldots, \nu_{f-1}^{(j)} \in \{\pm 1\}$ so, daß $\lambda_i^{(j)} = \frac{1}{2}(p - 2 + \nu_i^{(j)})$ $(i = 0, \ldots, f-1,$ $j = 1, \ldots, f)$. Dann ist $\tilde{\lambda}_i^{(j)} = \frac{p - \nu_i^{(j)}}{2}$. Sei nun $a \in \mathcal{X}$ mit $0 \leq a \leq \frac{p^f - \epsilon}{2}$. Dann gibt es also $\epsilon_i^{(j)} \in \{\pm 1\}$ $(1 \leq j \leq f, 0 \leq i \leq f-1)$ mit $\epsilon_{f-1}^{(j)} = 1$ für alle $1 \leq j \leq f$, so daß für alle $1 \leq j \leq f$ entweder

$$a = \sum_{i=0}^{f-1} \epsilon_i^{(j)} \frac{p - \nu_i^{(j)}}{2} p^i = \frac{p^f - \epsilon_0^{(j)} \nu_0^{(j)}}{2} + \sum_{i=1}^{f-1} \frac{\epsilon_{i-1}^{(j)} - \epsilon_i^{(j)} \nu_i^{(j)}}{2} p^i$$

oder

$$a = (p^f - \epsilon) - \sum_{i=0}^{f-1} \epsilon_i^{(j)} \frac{p - \nu_i^{(j)}}{2} p^i = \frac{p^f - 2\epsilon + \epsilon_0^{(j)} \nu_0^{(j)}}{2} - \sum_{i=1}^{f-1} \frac{\epsilon_{i-1}^{(j)} - \epsilon_i^{(j)} \nu_i^{(j)}}{2} p^i.$$

Sei K_0 die Menge der $1 \leq j \leq f$, für die die erste Gleichung erfüllt ist, und K_1 die Menge der übrigen $1 \leq j \leq f$.

- Behauptung 1: Ist $K_1 = \emptyset$, so ist $a = \frac{p^f \pm \epsilon}{2}$.

Denn dann gibt es $\nu \in \{\pm 1\}$ mit $2a \equiv -\nu \pmod{p}$ und es ist $\epsilon_0^{(j)} \nu_0^{(j)} = \nu$ für alle $1 \leq j \leq f$. Also ist $a - \frac{p^f - \nu}{2} = \sum_{i=1}^{f-1} a_i p^i$ mit

$$a_i := \frac{\epsilon_{i-1}^{(j)} - \epsilon_i^{(j)} \nu_i^{(j)}}{2} \in \{-1, 0, 1\} \text{ für alle } 1 \leq j \leq f.$$

Die Behauptung 1 ist äquivalent zu $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq f-1$. Sei $m \in \{1, \ldots, f-1\}$ maximal mit $a_m \neq 0$. Dann ist für $n = m+1, \ldots, f-1$ und alle $1 \leq j \leq f$

$$\epsilon_{n-1}^{(j)} = \epsilon_n^{(j)} \nu_n^{(j)} = \prod_{i=n}^{f-1} \nu_i^{(j)}.$$

Weiter ist

$$0 \neq a_m = \epsilon_{m-1}^{(j)} = -\epsilon_m^{(j)} \nu_m^{(j)} = -\prod_{i=m}^{f-1} \nu_i^{(j)}.$$

Ist $j := \pi^{-1}(m)$, so ist aber $\prod_{i=m}^{f-1} \nu_i^{(j)} = -\prod_{i=m}^{f-1} \nu_i^{(j-1)}$, was ein Widerspruch ist. Also sind alle $a_i = 0$ und a ist wie behauptet.

- Ebenso zeigt man: Ist $K_0 = \emptyset$, so ist $a = \frac{p^f-\epsilon}{2}$ oder $a = \frac{p^f-3\epsilon}{2} = (p^f - \epsilon) - \frac{p^f+\epsilon}{2}$.
- Seien also jetzt beide Mengen $K_0, K_1 \neq \emptyset$. Dann ist $a \equiv (p^f - \epsilon_0^{(j)}\nu_0^{(j)})/2 \pmod{p}$ für alle $j \in K_0$ und $a \equiv (p^f - 2\epsilon + \epsilon_0^{(j)}\nu_0^{(j)})/2 \pmod{p}$ für alle $j \in K_1$. Daraus schließt man, daß $\epsilon_0^{(j)}\nu_0^{(j)} = \epsilon$ für alle $1 \leq j \leq f$ gilt. Sei $j \in K_0$ und a_i wie oben definiert $(1 \leq i \leq f-1)$. Dann gilt wegen der Eindeutigkeit der p-adischen Entwicklung von a

$$\frac{\epsilon_{i-1}^{(j)} - \epsilon_i^{(j)}\nu_i^{(j)}}{2} = a_i \text{ für alle } j \in K_0$$

und

$$\frac{\epsilon_{i-1}^{(j)} - \epsilon_i^{(j)}\nu_i^{(j)}}{2} = -a_i \text{ für alle } j \in K_1.$$

Sei wieder m maximal mit $a_m \neq 0$. Dann ist wieder für $n = m+1, \ldots, f-1$

$$\epsilon_{n-1}^{(j)} = \epsilon_n^{(j)}\nu_n^{(j)} = \prod_{i=n}^{f-1} \nu_i^{(j)} \text{ für alle } 1 \leq j \leq f \text{ und}$$

$$0 \neq (-1)^h a_m = \epsilon_{m-1}^{(j)} = -\epsilon_m^{(j)}\nu_m^{(j)} = -\prod_{i=m}^{f-1} \nu_i^{(j)} \text{ für alle } j \in K_h,\ h = 0, 1.$$

Sei nun $l < m$ der nächst kleinere Index mit $a_l \neq 0$. Dann ist für $n = l+1, \ldots, m-1$ und alle $1 \leq j \leq f$

$$\epsilon_{n-1}^{(j)} = \prod_{i=n}^{m-1} \nu_i^{(j)} = -\prod_{i=n}^{f-1} \nu_i^{(j)}$$

und für $j \in K_h$ $(h = 0, 1)$

$$0 \neq (-1)^h a_l = \epsilon_{l-1}^{(j)} = -\epsilon_l^{(j)}\nu_l^{(j)} = \prod_{i=l}^{f-1} \nu_i^{(j)}.$$

Insbesondere ist der Quotient

$$a_l/a_m = -\prod_{i=l}^{m-1} \nu_i^{(j)}$$

auf ganz $K_0 \cup K_1$ konstant. Ist $j := \pi^{-1}(m)$, so ist aber $\prod_{i=l}^{m-1} \nu_i^{(j)} = -\prod_{i=l}^{m-1} \nu_i^{(j-1)}$. Also gibt es kein solches $1 \leq l < m$ mit $a_l \neq 0$. Da $p^f - \epsilon - (\frac{p^f-\epsilon}{2} + p^m) = \frac{p^f-\epsilon}{2} - p^m$ ist a wie im Lemma behauptet. □

Nun werden die p-modularen Konstituenten des zu $\chi_m^{(\epsilon)}$ gehörigen gewöhnlichen Charakters bestimmt.

Lemma 6.2.17 *Sei $\epsilon = \pm 1$ und $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_{f-1})$ ein p-Brauer-Charakter von G mit $\sum_{i=0}^{f-1} \lambda_i \equiv \chi_m^{(\epsilon)} \pmod 2$. Ist $0 \leq m \leq f-1$ so liegt $\chi_m^{(\epsilon)} \in V^\epsilon(\lambda)$ genau dann, wenn es für $0 \leq i \neq m \leq f-1$ Vorzeichen $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$ gibt, so daß*

$$\lambda_i = \frac{p-2+\epsilon_i}{2} \text{ für alle } 0 \leq i \neq m \leq f-1$$

und

$$\lambda_m \in \{\frac{p-5}{2}, \frac{p-3}{2}, \frac{p-1}{2}, \frac{p+1}{2}\}.$$

Beweis. Sei λ solch ein p-Brauer-Charakter wie im Lemma beschrieben. Ist $\lambda_m = \frac{p-3}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$, so ist nach Folgerung 6.2.14 $\frac{p^f-\epsilon}{2} + p^i \in V^\epsilon(\lambda)$ für alle $0 \leq i \leq f-1$. Sonst gibt es $\nu = \pm 1$, so daß $\lambda_m + \nu = \frac{p-3}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$. Definiert man $\lambda' = \sum_{i=0}^{f-1} \lambda_i p^i + \nu p^m$, so ist $\frac{p^f-\epsilon}{2} \in W(\lambda')$ und deshalb $\frac{p^f-\epsilon}{2} \pm p^m \in V^\epsilon(\lambda)$. Also enthalten die Mengen $V^\epsilon(\lambda)$ das Element $\chi_m^{(\epsilon)}$.

Eine Dimensionsabschätzung mit Hilfe von Satz 6.2.12 zeigt wieder, daß dies alle möglichen λ sind. Die angegebenen modularen Charaktere sind nämlich demnach modulare Konstituenten eines Charakters vom Grad $p^f + \epsilon$. Die λ, mit $\lambda_m = \frac{p-3}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$ sind gerade die p-modularen Konstituenten eines Charakters vom Grad $\frac{p^f-\epsilon}{2}$. Indem man die Fälle $p \equiv 3 \pmod 4$ und $p \equiv 1 \pmod 4$ unterscheidet, findet man, daß die λ mit $\lambda_m = \frac{p-5}{2}$, in Bijektion zu den p-modularen Konstituenten eines Charakters vom Grad $\frac{p^{f-1}-\epsilon}{2}$ von $SL_2(p^{f-1})$ stehen und die λ mit $\lambda_m = \frac{p+1}{2}$ zu Konstituenten eines Charakters vom Grad $\frac{p^{f-1}+\epsilon}{2}$. Also ergibt sich die Summe über die Charaktergrade der angegebenen modularen Charaktere als

$$\frac{p^f-\epsilon}{2} + \frac{p^f-\epsilon}{2}\frac{p-3}{2} + \frac{p^f+\epsilon}{2}\frac{p+3}{2} = p^f + \epsilon.$$

□

Ist $p = 2$, so gibt es Einbettungen $P_{I+\{i\}} \hookrightarrow P_I$ $(i, i-1 \notin I \subset N)$. Für größere Primzahlen p gibt es, jedenfalls auf der Ebene der Zerlegungszahlen, längere Folgen von jeweils p projektiv unzerlegbaren RG-Moduln $P_0, \ldots, P_{p-1}$, so daß $KP_{p-1} \hookrightarrow KP_{p-2} \cong KP_{p-1} \oplus X_{p-2}$, $X_{p-2} \hookrightarrow KP_{p-3} \cong X_{p-2} \oplus X_{p-3}$, $\ldots$, $X_2 \hookrightarrow KP_1 \cong X_2 \oplus X_1$, $X_1 \hookrightarrow X_0$ Die Folge der Brauer-Charaktere zu $P_0, \ldots, P_{p-1}$ nennen wir einen String:

Definition 6.2.18 *Sei $\lambda := (\lambda_0, \ldots, \lambda_{f-1})$ ein irreduzibler p-Brauer-Charakter von G und $m \in N$, mit $\lambda_m = 0$, $\lambda_{m-1} < p-1$. Definiere $\lambda^{(0)} := \lambda$ und für $j = 0, \ldots, p-2$ sei $\lambda^{(j+1)} := f(m,1)(\lambda^{(j)})$. Die Folge*

$$ST(\lambda, m) := (\lambda^{(0)}, \ldots, \lambda^{(p-1)})$$

heißt der m-String mit Ursprung λ oder einfach ein m-String.

Lemma 6.2.19 *Sei $(\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(p-1)})$ ein m-String.*
Dann ist $W(\lambda^{(p-1)}) \subset W(\lambda^{(p-2)})$ und für $j=1,\dots,p-2$ gilt
$W(\lambda^{(j)}) \subset W(\lambda^{(j+1)}) \cup W(\lambda^{(j-1)})$. Weiter gilt $W(\lambda^{(j-1)}) - W(\lambda^{(j)}) \neq \emptyset$.

Beweis. Das Lemma folgt aus der Gleichung

$$\sum_{i=0}^{f-1} \epsilon_i \tilde{\lambda}_i p^i = \sum_{i=0, i\neq j, j-1}^{f-1} \epsilon_i \tilde{\lambda}_i p^i - \epsilon_{j-1}(p - \tilde{\lambda}_{j-1})p^{j-1} + \epsilon_j(\tilde{\lambda}_j - \epsilon_j\epsilon_{j-1})p^j.$$

Ist $\lambda_j = p-1$, so ist $\tilde{\lambda}_j = 0$ und man kann $\epsilon_j = -\epsilon_{j-1}$ wählen.

Schließlich ist $|W(\lambda^{(j-1)})| \geq |W(\lambda^{(j)})|$ nach [HSW, Lemma 3.7 (b)]. Da die Zerlegungsabbildung surjektiv ist, sind die beiden Mengen verschieden, woraus $W(\lambda^{(j-1)}) - W(\lambda^{(j)}) \neq \emptyset$ folgt. □

Der Schnitt $V^\epsilon(\lambda^{(j)}) \cap V^\epsilon(\lambda^{(j-2)})$ wird im folgenden Lemma bestimmt.

Lemma 6.2.20 *Sei $l := \frac{p-1}{2}$ und $(\lambda^{(0)},\dots,\lambda^{(p-1)})$ ein m-String, so daß $V^\nu(\lambda^{(i)} \cap V^\nu(\lambda^{i+2}) \neq \emptyset$ für ein $\nu = \pm 1$ und $1 \leq i \leq p-3$. Dann ist $i = l-2$ oder $i = l-1$ und*

$$\chi_m^\nu \in V^\nu(\lambda^{(l-2)}) \cap V^{(\nu)}(\lambda^{(l-1)}) \cap V^\nu(\lambda^{(l)}) \cap V^{(\nu)}(\lambda^{(l+1)})$$

wobei für $p=3$ $\lambda^{(l-2)}$ wegzulassen ist.

Beweis. Das Lemma wird nur für $m=0$ gezeigt. Die Fälle $m>0$ erhält man durch Anwenden des Frobenius-Automorphismus. Sei $\lambda^{(i)} = (\lambda_0,\dots,\lambda_{f-1})$ und $\lambda^{(i+2)} = (\lambda'_0,\dots,\lambda'_{f-1})$. Da $c_{\lambda,\lambda'} > 0$, gibt es ein $\epsilon = \pm 1$ so, daß

$$(W(\lambda) \cap W(\lambda')) \cup (W(\lambda) \cap (p^f - \epsilon - W(\lambda'))) \neq \emptyset.$$

Angenommen es gibt $\alpha \in W(\lambda) \cap W(\lambda')$. Dann gibt es Vorzeichen ϵ_i, ϵ'_i $(0 \leq i \leq f-1)$ so, daß $\sum_{i=0}^{f-1} \epsilon_i \tilde{\lambda}_i p^i = \sum_{i=0}^{f-1} \epsilon'_i \tilde{\lambda}'_i p^i$. Dann ist also

$$\epsilon_0\tilde{\lambda}_0 - \epsilon'_0(\tilde{\lambda}_0 - 2) = p(\sum_{i=1}^{f-1}(\epsilon_i\tilde{\lambda}_i - \epsilon'_i\tilde{\lambda}_i)p^{i-1}).$$

Die linke Seite der Gleichung ist eine gerade Zahl zwischen $-2(p-1)$ und $2(p-1)$. Die rechte Seite der Gleichung ist durch p teilbar, also ist $\epsilon_0\tilde{\lambda}_0 - \epsilon'_0(\tilde{\lambda}_0 - 2) = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung $\tilde{\lambda}_0 \geq 2$.

Also gibt es $\epsilon = \pm 1$ und ein $\alpha \in W(\lambda) \cap (p^f - \epsilon) - W(\lambda')$ mit $0 \leq \alpha \leq p^f - \epsilon$.

Dann ist $\alpha = \sum_{i=0}^{f-1} \nu_i\tilde{\lambda}_i p^i = p^f - \epsilon - \sum_{i=0}^{f-1} \nu'_i\tilde{\lambda}'_i p^i$, für geeignete ν_i, $\nu'_i \in \{\pm 1\}$ mit $\nu_{f-1} = \nu'_{f-1} = 1$.

Also

$$\nu_0\tilde{\lambda}_0 + \nu'_0(\tilde{\lambda}_0 - 2) + \epsilon = p^f - p(\sum_{i=1}^{f-1}(\nu_i\tilde{\lambda}_i + \nu'_i\tilde{\lambda}_i)p^{i-1}).$$

Die linke Seite ist eine ungerade Zahl zwischen $-2p$ und $2p$ und die rechte Seite ist durch p teilbar. Also sind beide Seiten $= \nu_0 p$ und

$$\tilde{\lambda}_0 = \frac{1}{2}(p + 2 - \epsilon\nu_0).$$

Für die übrigen λ_i folgt die Gleichung

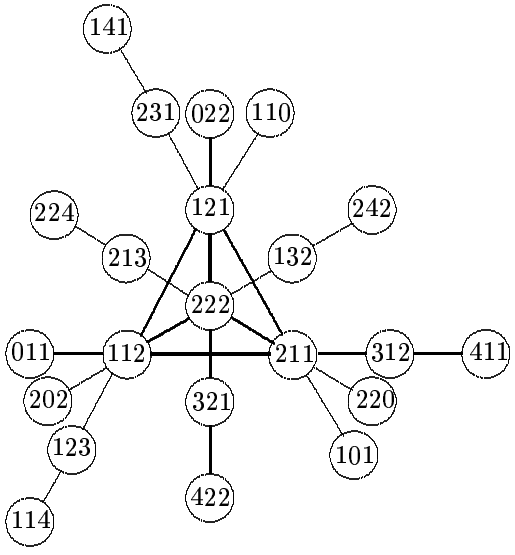
$$\sum_{i=1}^{f-1} \nu_i \tilde{\lambda}_i p^{i-1} = p^{f-1} - \nu_0 - \sum_{i=1}^{f-1} \nu_i' \tilde{\lambda}_i p^{i-1}.$$

Indem man $\overline{\lambda} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_{f-1})$ als Brauer-Charakter von $SL_2(p^{f-1})$ auffaßt, erhält man ein Element von $W(\overline{\lambda}) \cap p^{f-1} - \nu_0 - W(\overline{\lambda})$. Nach [HSW, Lemma 2.3] enthält dieser Schnitt höchstens ein Element, nämlich $\frac{1}{2}(p^{f-1} - \nu_0)$. Nach Lemma 6.2.13 ist daher $\lambda_{f-1} = \lambda'_{f-1} < p - 1$. Dabei ist $\frac{1}{2}(p^{f-1} - \nu_0)$ gerade, genau dann wenn $\sum_{i=1}^{f-1} \tilde{\lambda}_i$ gerade ist. Also bestimmen die λ_i mit $i \geq 1$ das Vorzeichen ν_0 und die Parität von λ_0 bestimmt $\epsilon\nu_0$.

Also ergibt sich die Behauptung mit $\nu := \epsilon$. Das Element in $V^\nu(\lambda) \cap V^\nu(\lambda')$ ist gerade $\frac{1}{2}p(p^{f-1} - \nu_0) + \nu_0\tilde{\lambda}_0 = \frac{1}{2}(p^f - \nu) + \nu_0$. Also ist $\chi_0^{(\nu)} \in V^{(\nu)}(\lambda) \cap V^{(\nu)}(\lambda')$. Das Lemma folgt nun aus Lemma 6.2.17 und Lemma 6.2.16. □

Definition 6.2.21 *Ein m-String wie im Lemma heißt* tangential. *Dann liegen nämlich $\lambda^{(l)}$ und $\lambda^{(l-1)}$ in $\tilde{P}$ und es gibt einen Kreis durch $\lambda^{(l)}$ und $\lambda^{(l-1)}$.*
Die Pfeile $(\lambda^{(l)}|(m,-1)|\lambda^{(l-1)})$ und $(\lambda^{(l-1)}|(m,1)|\lambda^{(l)})$ heißen Ausnahmepfeile in Richtung m.

Beispiel. Die tangentialen Strings im Köcher des Hauptblocks von $PSL_2(125)$. Die Kreise und damit auch die Ausnahmepfeile sind durch fettgedruckte Kanten dargestellt.



6.2.3 Die R-Ordnung Λ.

Wie für $p = 2$ im vorigen Kapitel, wird aus der Beschreibung von $\overline{\Lambda}$ in Abschnitt 6.2.1 eine R-Ordnung konstruiert, welche zu der direkten Summe der beiden Blöcke vom Defekt > 0 von RG Morita-äquivalent ist. Um die Bezeichnungen zu erleichtern, werden die beiden Blöcke einzeln betrachtet. Sei also $\mathcal{B}$ entweder der Hauptblock von RG oder der Block der treuen Charaktere und $y := 0$ oder $y := 1$. Sei

$$P' := \{a \in P \mid \sum_{i=0}^{f-1} a_i \equiv y \pmod 2\}$$

die Menge der Indizes der einfachen $\mathcal{B}$-Moduln.

Für $a \in P'$ sei P_a der projektiv unzerlegbare RG-Modul mit Kopf M_a und

$$\Lambda := \mathrm{End}_{RG}(\oplus_{a \in P'} P_a).$$

Zunächst werden geeignete Lifte $\beta'_{a,T}, \beta'_a \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)$ der Endomorphismen $[a,T]$ und $\langle a \sim a, N\rangle$ $(a \in P', T \subset N - S(a))$ konstruiert.

Für $i \in N$, $h = \pm 1$ und $a \in P(i,h) \cap P'$ sei

$$\varphi_{i,h,a} \in \mathrm{Hom}_{RG}(P_{f(i,h)(a)}, P_a)$$

ein Lift von $\Psi(\alpha_{i,h,a})$. Dann sei für $T \subset N - S(a)$ der Endomorphismus $\beta'_{a,T} \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)$ analog zu $[a,T]$ definiert, indem man $\Psi(\alpha_{i,h,a})$ in den Definitionen durch $\varphi_{i,h,a}$ ersetzt. Ebenso definiere man für $a \in \tilde{P} \cap P'$ den Lift β'_a von $\langle a \sim a, N\rangle$.

Folgerung 6.2.22 *Die Lifte $\beta'_{a,T}, \beta'_a \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)$ der Basisvektoren $[a,T]$ und $\langle a \sim a, N\rangle$ von $\mathrm{End}_{kG}(\overline{P_a})$ aus Folgerung 6.2.10 bilden eine R-Basis des R-Gitters $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$.*

Wie eben sei V die Summe über ein Vertretersystem der Isomorphieklassen aller einfacher KG-Moduln im Block $\mathcal{B}$ und $E := \mathrm{End}_{KG}(V)$. Für $a, b \in P'$ wird $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$ wie in Abschnitt 5.1.1 als Teilmenge von E aufgefaßt. Seien $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s$ die zentral primitiven Idempotente von E.

Ist f gerade, so ist K ein Zerfällungskörper von KG. Dann seien die ϵ_j so geordnet, daß ϵ_1 zu δ oder η gehört und ϵ_2 zu δ' oder η'. In dem Fall sei $O := R$ und $A := \{1,2\}$ die Menge der Indizes der Ausnahmecharaktere in $\mathcal{B}$.

Ist f ungerade, so sei

$$\mu := (-1)^{(p-1)/2} \text{ und } O := R[\sqrt{\mu p}].$$

Dann sind die KG-Moduln mit Charakter $\delta + \delta'$ und $\eta + \eta'$ irreduzibel und O ist isomorph zu der Maximalordnung im Endomorphismenring dieser Moduln.

In dem Fall seien die Idempotente so geordnet, daß $O \cong Z(\epsilon_1\mathcal{B})$ und setzen $A := \{1\}$.

Für $a \in P'$ sei

$$c_a := \{1 \leq j \leq s \mid \epsilon_j P_a \neq 0\}$$

die Menge der Indizes der einfachen KG-Moduln die in KP_a vorkommen.

Ist $\delta \in \mathcal{B}$, so sei χ_m der Index von $\eta_{\chi_m^{(1)}} \in \mathcal{B}$. Ist $\eta \in \mathcal{B}$, so sei χ_m der Index von $\delta_{\chi_m^{(-1)}} \in \mathcal{B}$.

Aus Lemma 6.2.13 erhält man dann

Bemerkung 6.2.23 *Sei $a \in P'$. Dann ist $a \in \tilde{P}$ genau dann, wenn $1 \in c_a$.*

Wie Bemerkung 6.1.6 zeigt man die folgende Bemerkung.

Bemerkung 6.2.24 *Sei $a \in P'$ und $n := |N - S(a)|$.*

(a) Ist $a \notin \tilde{P}$, so ist $|c_a| = 2^n = dim_R(\mathrm{End}_{RG}(P_a))$ und $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$ ist ein Teilgitter von $\oplus_{j\in c_a} R\epsilon_j$ vom Index $p^{2^{n-1}f}$.

(b) Sei $a \in \tilde{P}$.
Ist f gerade, so ist $|c_a| = 2^n + 1 = dim_R(\mathrm{End}_{RG}(P_a))$ und $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$ ist ein Teilgitter von $\oplus_{j\in c_a} R\epsilon_j$ vom Index $p^{(2^n+1)f/2}$.
Ist f ungerade, so ist $|c_a|+1 = 2^n+1 = dim_R(\mathrm{End}_{RG}(P_a))$ und $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$ ist ein Teilgitter von $O\epsilon_1 \oplus \oplus_{j\in c_a, j\neq 1} R\epsilon_j$ vom Index $p^{((2^n+1)f-1)/2}$.

Lemma 6.2.25 *Sei $a \in P' - \tilde{P}$ und $T \subseteq N - S(a)$ und $\beta'_{a,T}$ wie oben definiert. Dann ist*

$$n(\beta'_{a,T}) = p^{l(a,T)}O \quad , \text{ wo } l(a,T) := \sum_{i\in T} \frac{1}{2} l(a,i).$$

Beweis. Aus Bemerkung 5.3.5 folgt wie im Beweis von Lemma 6.1.9, daß $p^{l(a,T)}$ die Norm $n(\beta'_{a,T})$ teilt. Auf der anderen Seite ist

$$\sum_{T\subseteq N-S(a)} l(a,T) = \frac{1}{2} \sum_{T\subseteq N-S(a)} \sum_{i\in T} l(a,i) = \frac{1}{2} \sum_{i\in N-S(a)} l(a,i)2^{n-1} = f2^{n-1}.$$

Also folgt die Behauptung aus Bemerkung 6.2.24 und Lemma 5.3.9. □

Insbesondere gilt

Folgerung 6.2.26 *Sei $a \in P'$, $i \in S(a)$, $i-1 \notin S(a)$ und $b := f(i,-1)(a)$. Dann ist $\varphi_{i,1,b}\varphi_{i,-1,a} \in p\mathrm{End}_{RG}(P_a)^*$.*

Beweis. Da $i-1, i \notin S(b)$ liegen, gilt $[b,i] = \Psi((b|(i,-1),(i,1)|b))$. Also ist $\beta'_{b,i} = \varphi_{i,-1,a}\varphi_{i,1,b}$ nach Lemma 6.2.25 ein Element der Norm p. Nach Satz 6.2.2 ist aber $\varphi_{i,1,b}\varphi_{i,-1,a} \in p\mathrm{End}_{RG}(P_a)$. Also gibt es ein $u \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)$ mit $n(u) = 1$ und $\varphi_{i,1,b}\varphi_{i,-1,a} = pu$. Mit Lemma 5.3.4 folgt die Behauptung. □

Bemerkung 6.2.27 *Seien $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, ..., $a^{(f)} \in P'$, so daß es einen Kreis in Q durch $a^{(1)}$, ..., $a^{(f)}$ gibt. Dann ist*

$$c_{a^{(1)}} \cap \ldots \cap c_{a^{(f)}} = A \cup \{\chi_0, \ldots, \chi_{f-1}\}.$$

Beweis. Nach Folgerung 6.2.14 und Lemma 6.2.20 enthalten alle c_a mit $a \in \tilde{P} \cap P'$ das Element χ_0. Nun wird die Menge $\tilde{P} \cap P'$ unter dem Frobenius-Automorphismus F in sich abgebildet. Da $\chi_0, \ldots, \chi_{f-1}$ eine Bahn unter F bilden, folgt

$$A \cup \{\chi_0, \ldots, \chi_{f-1}\} \subseteq c_a.$$

Lemma 6.2.16 sagt gerade aus, daß der Schnitt $c_{a^{(1)}} \cap \ldots \cap c_{a^{(f)}}$ nicht größer ist. □

Lemma 6.2.28 *Sei $a \in P'$, $m \in N$ mit $a_m = 0$, $a_{m-1} < p-1$. Sei $a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)}$ der m-String mit Ursprung a. Definiere für $j = 1, \ldots, p-1$ die Homomorphismen*

$$f_j := \varphi_{a^{(j)},m,-1}, \quad g_j := \varphi_{a^{(j-1)},m,1} \in E.$$

Sei $1 \leq j \leq p-1$.

(i) $g_{p-1}f_{p-1} \in p\mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(p-1)}})^*$.

(ii) $n(g_jf_j) = p$, *genauer ist für* $j < p-1$

$$g_jf_j = \sum_{i=1}^{s} a_{ji}\epsilon_i$$

mit $a_{ji} \in pO$ $(1 \leq i \leq s)$ und $a_{ji} \notin p\wp$ für $i \in c_{a^{(j)}} - c_{a^{(j+1)}}$.

(iii) Ist $j < p-1$, so ist $g_jf_j - f_{j+1}g_{j+1} \in p\mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}})^*$.

Beweis. (i) ist die Aussage von Folgerung 6.2.26.
(ii) und (iii) wird durch Induktion über j bewiesen:
Für $j = p-1$ gilt (ii) wegen (i).
Sei $j = p-2$. Wegen Satz 6.2.2 ist

$$g_jf_j - f_{j+1}g_{j+1} \in p\mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}}).$$

Wegen Aussage (i) ist die Norm dieses Endomorphismus genau p. Also ist $\frac{1}{p}(g_jf_j - f_{j+1}g_{j+1}) \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}})^*$, woraus (ii) für $j = p-2$ folgt, da $c_{a^{(j)}} - c_{a^{(j+1)}} \neq \emptyset$.
Sei nun $j < p-2$ und (ii) für $j+1$ bewiesen. Wegen Satz 6.2.2 ist $g_jf_j - f_{j+1}g_{j+1} \in p\mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}})$. Da (ii) für $j+1$ gilt, ist die Norm dieses Endomorphismus genau p. Also gilt (iii) für j und damit auch (ii) für j, da $c_{a^{(j)}} - c_{a^{(j+1)}} \neq \emptyset$. □

Aus diesem Lemma folgt nun, daß Lemma 6.2.25 auch für $a \in \tilde{P}$ gilt:

Lemma 6.2.29 *Sei $a \in \tilde{P} \cap P'$ und $T \subseteq N - S(a)$ und $\beta'_{a,T}$, β'_a wie oben definiert. Dann ist*

$$n(\beta'_{a,T}) = p^{l(a,T)}O \text{ und } n(\beta'_a) = \begin{cases} p^{f/2}R & f \text{ gerade} \\ \wp^f & f \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 6.2.25 findet man, daß die Norm $n(\beta'_{a,T})$ durch $p^{l(a,T)}$ teilbar ist, unter Benutzung von Lemma 6.2.28 (ii). Also gilt mit Lemma 5.3.9, daß die Norm des letzten Basisvektors β'_a ein Teiler von $p^{f/2}R$ bzw. $\wp^f = p^{\frac{f-1}{2}}\wp$ ist, je nachdem ob f gerade oder ungerade ist. Es genügt also zu zeigen, daß $p^{f/2}$ bzw. $\wp^f$ jeden Koeffizienten von β'_a teilt. Dann folgt das Lemma wie Lemma 6.2.25.

Sei $a^{(1)} = a, a^{(2)}, \ldots, a^{(f)}, a^{(f+1)} = a$ ein Kreis durch a, $f_i \in \mathrm{Hom}_{RG}(P_{a^{(i)}}, P_{a^{(i+1)}})$ $(i = 1, \ldots, f)$ Lifte der Bilder $\Psi(a^{(i)}, (m_i, \nu_i), a^{(i+1)})$ der zugehörigen Pfeile in Q so, daß

$$\beta'_a = \prod_{i=1}^{f} f_i = \sum_{j=1}^{s} b_j \epsilon_j$$

mit $b_j \in O$ ist. Aus Bemerkung 6.2.27 folgt

$$\textbf{(1)} \quad b_j = 0, \text{ falls } j \notin A \cup \{\chi_0, \ldots, \chi_{f-1}\}.$$

$a^{(i)}$ und $a^{(i+1)}$ sind Nachbarn auf einem m_i-String (an Stelle l, $l-1$ oder $l-1$, l, $l := \frac{p-1}{2}$). Also gilt

(2) Es gibt ein $b^{(i)} \in P'$, so daß ein Pfeil $(a^{(i+1)}|(m_i, \nu_i)|b^{(i)}) \in Q$ existiert,

oder $p = 3$ und es gibt solch ein $b^{(i)}$ mit $(b^{(i)}|(m_i, \nu_i)|a^{(i)}) \in Q$.
Œexistiere für alle $1 \leq i \leq f$ der Pfeil $(a^{(i+1)}|(m_i, \nu_i)|b^{(i)}) \in Q$. Die Überlegung in dem anderen Fall verläuft ganz analog. Sei für $1 \leq i \leq f$ der Homomorphismus h_i ein Lift des Bilds eines solchen Pfeils und für $1 \leq i \leq f$ sei $g_i \in \mathrm{Hom}_{RG}(P_{a^{(i+1)}}, P_{a^{(i)}})$ ein Lift von $\Psi(a^{(i+1)}, (m_i, -\nu_i), a^{(i)})$.
Aus Satz 6.1.1 folgt $f_i h_i \in p\mathrm{Hom}_{RG}(P_{a^{(i)}}, P_{b^{(i)}})$. Genauer sagt Lemma 6.1.8, daß ein Endomorphismus $e_i \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(i+1)}})$ existiert, so daß

$$\textbf{(3)} \quad f_i h_i = p \prod_{j=1, j \neq i}^{f} g_j e_i h_i.$$

Dabei ist wegen Lemma 6.2.28 der Koeffizient von h_i bei $\epsilon_{\chi_{m_i}}$ nicht 0.
Seien für $j = 1, \ldots, f$ x_j die Koeffizienten von f_j, y_j die Koeffizienten von g_j und e der Koeffizient von e_i bei $\epsilon_{\chi_{m_i}}$. Dann gilt also wegen **(3)**

$$x_i = p \prod_{j=1, j \neq i}^{f} y_j e.$$

Der Koeffizient von β'_a bei χ_{m_i} ist

$$b_{\chi_{m_i}} = \prod_{j=1}^{f} x_j = p \prod_{j=1, j\neq i}^{f} x_j y_j e.$$

Nun gilt nach Lemma 6.2.28 (ii), daß $x_j y_j R = pR$.
Also teilt p^f die Koeffizienten von β'_a bei χ_{m_i} für alle $1 \leq i \leq f$.

Sei $\beta''_a = \prod_{j=f}^{1} g_j \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)$ genauso wie β'_a definiert, indem man den Kreis andersherum läuft. Dann ergibt sich aus Lemma 6.2.28 (ii) daß $n(\beta'_a\beta''_a)$ durch p^f geteilt wird. Aus Lemma 6.2.28 (ii) folgt

(**4**) Ist $i \in A$, so sind die Koeffizienten x'_j und y'_j von f_j und g_j bei ϵ_i nicht 0.

Sei $b_i = \prod_{j=1}^{f} x'_j$ und $b'_i := \prod_{j=1}^{f} y'_j$. Dann gilt $p^f \mid b_i b'_i$. Ist f ungerade, so folgt $\wp^f \mid b_1 O$ oder $\wp^f \mid b'_1 O$. Da aber auch β''_a anstelle von β'_a als Basisvektor von $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$ genommen werden kann, muß $b_1 O = b'_1 O = \wp^f = n(\beta'_a)$ sein.
Sei nun f gerade. Da $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$ eine symmetrische Ordnung ist, gilt $\Phi(\beta'_a id_{|P_a}) \in R$ für die Form $\Phi = Tr_u$. Nun ist $p^f \Phi(\beta'_a) \equiv b_1 + b_2 \pmod{p^f R}$. Also ist $b_1 \equiv -b_2 \pmod{p^f R}$. Wie oben schließt man, daß b_1 und b_2 beide die p-adische Bewertung $\frac{f}{2}$ haben und $n(\beta'_a) = p^{f/2} R$. □

Folgerung 6.2.30 *Es gibt ein $x \in R^*$, so daß $\beta'_a \equiv x\beta_a \pmod{p^f \oplus_{i\in c_a} O\epsilon_i}$, wo*

$$\beta_a := \begin{cases} p^{f/2}(\epsilon_1 - \epsilon_2) & f \text{ gerade} \\ p^{(f-1)/2}\sqrt{\mu p}\,\epsilon_1 & f \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Definition 6.2.31 *Sei $j \in \{0, \ldots, p-2\}$. Ist der m-String $a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)}$ nicht tangential oder $j \neq \frac{p-3}{2}$, so sei die Projektion*

$$\mathrm{pr}_{a^{(j)},m} := \sum_{l \in c_{a^{(j)}} \cap c_{a^{(j+1)}}} \epsilon_l \in E.$$

Ist der m-String $a^{(0)}, \ldots, a^{(p-1)}$ tangential und $j = \frac{p-3}{2}$, so sei $\{\chi_m\} = c_{a^{(j-1)}} \cap c_{a^{(j)}} \cap c_{a^{(j+1)}} \cap c_{a^{(j+2)}}$ (vgl. Lemma 6.2.20). Dann definiere

$$\mathrm{pr}_{a^{(j)},m} := \sum_{t \in c_{a^{(j)}} \cap c_{a^{(j+1)}} - \{\chi_m\}} \epsilon_t \in E.$$

Lemma 6.2.32 *Mit den Bezeichnungen aus Lemma 6.2.28 gilt. Für $j = 0, \ldots, p-2$ ist*

$$p \cdot \mathrm{pr}_{a^{(j)},m} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}}) \cap \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j+1)}}).$$

Genauer gibt es Einheiten $u_j, v_j \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}})^*$ so daß

$$p \cdot \mathrm{pr}_{a^{(j)},m} \equiv u_j f_{j+1} g_{j+1} \equiv g_{j+1} f_{j+1} v_{j+1} \pmod{\oplus_{l=0}^{f-1} p^{f+1} R\epsilon_{\chi_l}}.$$

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion über j von oben geführt. Sei also $j = p-2$. Nach Lemma 6.2.28 (i) gibt es eine Einheit $v_{p-1} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(p-1)}})^*$ mit $g_{p-1}f_{p-1}v_{p-1} = p \cdot \mathrm{pr}_{a^{(p-2)},m} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(p-2)}}) \cap \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(p-1)}})$. Wegen Lemma 6.2.28 (iii) gibt es eine Einheit $v_{p-2} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(p-2)}})^*$ mit $g_{p-2}f_{p-2}v_{p-2} - v_{p-2}f_{p-1}g_{p-1} = p \cdot id_{|P_{a^{(p-2)}}}$.

Ist $c_{a^{(p-1)}} \cap c_{a^{(p-3)}} = \{\chi\} \neq \emptyset$, so ist $v_{p-2}f_{p-1}g_{p-1} + v_{p-1}g_{p-1}f_{p-1} = b\epsilon_\chi \in p\mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(p-2)}})$ für ein $b \in p^{f+1}R$. Ist der Schnitt leer, dann ist $v_{p-2}f_{p-1}g_{p-1} = -p \cdot \mathrm{pr}_{a^{(p-2)},m}$. Mit $u_{p-2} = -v_{p-2}$ gilt die Behauptung für $j = p-2$.
Sei $j \in \{0, \ldots, p-3\}$ und die Behauptung für $j+1$ schon bewiesen. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Einheit $v_{j+1} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j+1)}})^*$ so daß $g_{j+1}f_{j+1}v_{j+1} \equiv p \cdot \mathrm{pr}_{a^{(j)},m} \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}}) \cap \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j+1)}})$ modulo $\oplus_{l=0}^{f-1} p^{f+1}R\epsilon_{\chi_l}$. Wegen Lemma 6.2.28 (iii) gibt es eine Einheit $v_j \in \mathrm{End}_{RG}(P_{a^{(j)}})^*$ mit $g_jf_jv_j - v_jf_{j+1}g_{j+1} = p \cdot id_{|P_{a^{(j)}}}$. Wie eben folgt, daß modulo $\oplus_{l=0}^{f-1} p^{f+1}R\epsilon_{\chi_l}$ gilt $v_jf_{j+1}g_{j+1} \equiv -p \cdot \mathrm{pr}_{a^{(j)},m}$ und $g_jf_jv_j \equiv p \cdot \mathrm{pr}_{a^{(j-1)},m}$. Setze $u_j = -v_j$, dann gilt die Behauptung für j. □

Nun wird ein Erzeugendensystem der symmetrischen Ordnung $\mathrm{End}_{RG}(P_b)$ für alle $b \in P'$ angegeben. Sei $a \in P'$, $i \in N - S(a)$. In Analogie zu der Definition von $[a,i] \in \mathrm{End}_{kG}(\overline{P_a})$ werden Erzeuger $\beta_{a,i}$ von $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$ definiert, die die $\beta'_{a,i}$ von oben ersetzen sollen.

Definition 6.2.33 *Für $a \in P'$ sei $\mathrm{pr}_a := \sum_{l \in c_a} \epsilon_l \in E$ das Einselement von $\mathrm{End}_{RG}(P_a) \subset E$.*
Sei $a \in P'$, $m \in N - S(a)$. Ist $m-1 \notin S(a)$, so liegt a auf einem m-String. Dann sei

$$\beta_{a,m} := p \cdot \mathrm{pr}_{a,m}.$$

Ist $m-1 \in S(a)$, so sei $j-1 \notin S(a)$ so daß $J := \{j, j+1, \ldots, m-1\} \subseteq S(a)$. Dann sei $b := f(m-1,1)(f(m-2,1)(\ldots f(j+1,1)(f(j,1)(a))\ldots))$ und

$$\beta_{a,i} := p^{|J|+1}\mathrm{pr}_{b,m}\mathrm{pr}_a.$$

Für $T \subset N - S(a)$ sei $\beta_{a,T} := \prod_{m \in T} \beta_{a,m}$, wo $\beta_{a,\emptyset} := \mathrm{pr}_a$.

Satz 6.2.34 *Sei $a \in P'$.*
Ist $a \notin \tilde{P}$, so ist

$$\mathrm{End}_{RG}(P_a) = \langle \beta_{a,T} \mid T \subset N - S(a) \rangle_R.$$

Ist $a \in \tilde{P}$, so ist

$$\mathrm{End}_{RG}(P_a) = \langle \beta_{a,T}, \beta_a \mid T \subset N - S(a) \rangle_R.$$

Beweis. Mit Lemma 6.2.32 und Lemma 6.2.28 sieht man, daß die Elemente $\beta_{a,m}$ in $\mathrm{End}_{RG}(P_a)$ liegen. Ist $a \in \tilde{P}$, so zeigt Folgerung 6.2.30, daß $\beta_a \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)$. Sei $\beta_{a,T} = \sum_{i \in c_a} a(a,T)_i\epsilon_i$ und $\beta'_{a,T} = \sum_{i \in c_a} a(a,T)'_i\epsilon_i$. Da die $\beta_{a,m}$ aus den $\beta'_{a,m}$ durch Multiplikation mit Einheiten in lokalen Ringen hervorgingen, gibt

es $k_T \in R^*$ mit $k_T a(a,T)_i \equiv a(a,T)'_i \pmod{p \cdot n(\beta_{a,T})}$ für alle $i \in c_a$. Eine Relation unter den $\beta_{a,T}$ vergrößert das Produkt der Elementarteiler der von den $\beta'_{a,T}$ erzeugten Ordnung. (vgl. Beweis von Satz 6.1.12.) Also erzeugen die $\beta_{a,T}$ dieselbe Ordnung wie die $\beta'_{a,T}$ und die Behauptung folgt mit Folgerung 6.2.22. □

Proposition 6.2.35 *Seien $a, b \in P'$ so, daß entweder a oder b nicht in $\tilde{P}$ liegen und* $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b) \neq \{0\}$. *Definiere* $\mathrm{pr}_{a,b} := \sum_{j \in c_a \cap c_b} \epsilon_j$.

$$\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b) \cong (\mathrm{pr}_{a,b}(\mathrm{End}_{RG}(P_{b \ominus a}))$$

als $\mathrm{End}_{RG}(P_a) - \mathrm{End}_{RG}(P_b)$*-Bimodul. Die nichttrivialen Einträge in der Spalte zu P_a der Amalgamierungsmatrix von P_b sind alle gleich*

$$A(P_b)_{j,a} = f - d(a,b),$$

wo $d(a,b)$ wie in Definition 6.2.11 definiert ist.

Beweis. Sei $T_1 \subset N - (S(a) \cup S(b))$ wie in Definition 6.2.11. Aus Proposition 6.2.6 folgt, daß $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$ als $\mathrm{End}_{RG}(P_{b \ominus a})$-Modul von jedem Lift von

$$w_{a,b} := \langle a \supset (a \ominus b) \rangle \langle (a \ominus b) \sim (b \ominus a), T_1 \rangle \langle (b \ominus a) \subset b \rangle$$

erzeugt wird. Daraus folgt die Isomorphie $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b) \cong (\mathrm{pr}_{a,b}(\mathrm{End}_{RG}(P_{b \ominus a}))$.

Sei also $\beta_{a,b}$ das Produkt der Lifte $\varphi_{i,h,a'}$ der Bilder $\Psi(\alpha_{i,h,a'})$ der in dem Weg zu $w_{a,b}$ vorkommenden Pfeile $\alpha_{i,h,a'}$. Analog sei $\beta_{b,a}$ definiert.
Da nicht beide a und b in $\tilde{P}$ liegen, gilt $A \cap c_a \cap c_b = \emptyset$.
Sei $m \in \{0, \ldots, f-1\}$ und $\chi_m \in c_a \cap c_b$. Sei Œ $a \notin \tilde{P}$. Setzt man $l := \frac{p-5}{2}$, so ist nach Lemma 6.2.17 $a_m \in \{l, l+3\}$.

Angenommen in dem Weg zu $w_{a,b}$ kommt ein Ausnahmepfeil $(a'|(m, \pm 1)|b')$ in Richtung m vor. Dann ist $a'_m = l+2$ und $b'_m = l+1$ oder $a'_m = l+1$ und $b'_m = l+2$. Da $w_{a,b}$ von der Form $\langle a \sim b, T \rangle$ mit $T \subset N$ ist, wird der Eintrag a_m höchstens noch einmal durch einen Pfeil in Richtung $m+1$ zu $p-2-a_m$ verändert. Da aber $p-2-l = l+3$ und $p-2-(l+3) = l \neq l+1, l+2$ ist, ist dies ein Widerspruch.

Also ist $\beta_{a,b}\beta_{b,a} = \sum_{j \in c_a \cap c_b} x_j \epsilon_j$, wo nach Lemma 6.2.32 $x_j R = p^{d(a,b)} R$ ist. Also ist

$$\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)\mathrm{Hom}_{RG}(P_b, P_a) \in \mathcal{A}(\oplus_{j \in c_a \cap c_b} p^{d(a,b)} R \epsilon_j)$$

und die Behauptung folgt. □

Liegen in obiger Proposition a und b beide in $\tilde{P}$, so ist die Beschreibung von $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$ etwas komplizierter, da dieser Modul als $\mathrm{End}_{RG}(P_b)$-Modul nicht von einem Element erzeugt wird.

Proposition 6.2.36 *Seien $a, b \in \tilde{P} \cap P'$. Dann gibt es $T_1, T_2 \subset N$ mit $N = T_1 \dot\cup T_2$ und $\langle a \sim b | T_i \rangle \in Q$ $i = 1, 2$.*
Sei $d_i := |T_i|$ die Länge dieser Wege, Œ $d_1 \leq d_2$.
Sei für $i = 1, 2$ C_i die Menge der Indizes der einfachen KG-Moduln, die in c_x liegen, für alle Punkte x auf dem Weg $\langle a \sim b | T_i \rangle$ und $R_i := \{\chi_m \mid m \in T_i\} \subset C_i$.
Für die Amalgamierungsmatrizen gilt: Sei $j \in c_a \cap c_b$. Dann ist

$$A(P_b)_{j,a} = \begin{cases} f - d_1 & j \in C_1 - C_2 \\ f - d_2 & j \in C_2 - C_1 \\ d_i & j \in R_i \\ m d_2 & j \in A \end{cases},$$

wo $m := 1$, falls f gerade ist und $m := 2$, falls f ungerade ist.
Der Isomorphietyp von $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$ bestimmt sich wie folgt: Definiere

$$\beta_1 := \sum_{j \in C_1 - R_1} \epsilon_j \quad \textit{und } \beta_2 := \sum_{j \in C_2 - R_2 - A} \epsilon_j + b_2,$$

wo

$$b_2 := \begin{cases} p^{\frac{f}{2} - d_1}(\epsilon_1 - \epsilon_2) & f \textit{ gerade} \\ p^{\frac{f-1}{2} - d_1}\sqrt{\mu p}\epsilon_1 & f \textit{ ungerade} \end{cases}$$

Dann ist

$$\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b) \cong \beta_1 \mathrm{End}_{RG}(P_b) + \beta_2 \mathrm{End}_{RG}(P_b) + \sum_{j \in R_1} p^{d_2} R\epsilon_j + \sum_{j \in R_2} p^{d_1} R\epsilon_j$$

als $\mathrm{End}_{RG}(P_a) - \mathrm{End}_{RG}(P_b)$-Bimodul.

Beweis. Wegen Proposition 6.2.6 und Lemma 6.2.27 gilt

$$c_a \cap c_b = C_1 \cup C_2 \text{ und } C_1 \cap C_2 = A \cup R_1 \cup R_2 = A \cup \{\chi_0, \ldots, \chi_{f-1}\}.$$

Sei für $j = 1, 2$ β_j das Produkt der Lifte $\varphi_{i,h,a'}$ der Bilder $\Psi(\alpha_{i,h,a'})$ der in dem Weg zu $\langle a \sim b | T_j \rangle$ vorkommenden Pfeile $\alpha_{i,h,a'}$. Dann erzeugen nach Proposition 6.2.6 die Elemente β_1 und β_2 den $\mathrm{End}_{RG}(P_b)$-Modul $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$.

Für $i = 1, 2$ ist $\beta_i = \sum_{j \in C_i} x_j^{(i)} \epsilon_j$ mit $x_j^{(i)} \in O$.

Sei β_1', β_2' zu den Wegen $\langle b \sim a | T_1 \rangle$ und $\langle b \sim a | T_2 \rangle$ analog zu β_1 und β_2 definiert. Da die Involution $\mathrm{End}_{RG}(P_a)\beta_i \mathrm{End}_{RG}(P_b)$ auf $\mathrm{End}_{RG}(P_b)\beta_i' \mathrm{End}_{RG}(P_a)$ abbildet, gibt es $\gamma_a^{(i)} \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)$, $\gamma_b^{(i)} \in \mathrm{End}_{RG}(P_b)$ und $f_j \in O$ $(j \in C_i)$ so, daß

$$\beta_i^\circ = \sum_{j \in C_i} f_j (x_j^{(i)})^\circ \epsilon_j = \gamma_b^{(i)} \beta_i' \gamma_a^{(i)}.$$

Da auch β_i° den Bimodul $\mathrm{End}_{RG}(P_b)\beta_i' \mathrm{End}_{RG}(P_a)$ erzeugt, ist $\gamma_a^{(i)} \gamma_b^{(i)}$ eine Einheit in dem lokalen Ring $\mathrm{End}_{RG}(P_a)\mathrm{End}_{RG}(P_b) \subset E$. Insbesondere haben die Koeffizienten von β_i° und β_i' die gleiche p-adische Bewertung.

Zunächst werden die Einträge in den Amalgamierungsmatrizen bestimmt. Sei dazu $j \in c_a \cap c_b$.
Ist $j \notin C_1 \cap C_2$ so sei $j \in C_i$ ($i = 1$ oder 2). Dann ist wegen Lemma 6.2.32

$$\epsilon_j \mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)\mathrm{Hom}_{RG}(P_b, P_a) = p^{d_i} R\epsilon_j,$$

also $A(P_b)_{j,a} = f - d_i$.
Sei nun $j = \chi_m \in R_i$ für ein $0 \leq m \leq f-1$. Wie im Beweis zu Lemma 6.2.29 **(3)** sieht man, daß $f_j(x_j^{(i)})^2 \in p^f R$ liegt. Also ist die p-adische Bewertung $\nu_p(x_j^{(i)}) \geq \frac{1}{2}(f - \nu_p(f_j))$. Für $\{i,l\} = \{1,2\}$ findet man für $x_j^{(l)}$ jedoch

$$(\mathbf{1}) \quad f_j(x_j^{(l)})^2 R = p^{d_l} R.$$

Also ist $A(P_b)_{j,a} = d_i = f - d_l$.
Sei nun $j \in A$. Dann ist die p-adische Bewertung $\nu_p(f_j(x_j^{(i)})(x_j^{(i)})^\circ) = d_i$. Also ist $A(P_b)_{j,a} = m \cdot max(d_1, d_2) = m \cdot d_2$.
Die Koeffizienten von β_1 und β_2 bestimmen sich nun wie folgt: Sei $i = 1$ oder $i = 2$. Nach Anwenden eines Isomorphismus kann man annehmen, daß $x_j^{(i)} = 1$ für alle $j \in C_i - R_i - A$ und $x_j^{(1)} = 1$ für alle $j \in A$.
Zunächst wird gezeigt:

$$(\mathbf{2}) \quad \text{Für } j \in R_i \text{ ist } x_j^{(i)} \text{ durch } p^{d_i} \text{ teilbar.}$$

Nach Lemma 6.2.32 gibt es Einheiten $u_1, \ldots, u_{d_i}$ in den jeweiligen Endomorphismenringen der projektiv unzerlegbaren, die auf dem Weg $\langle a \sim b | T_i \rangle$ vorkommen, so daß $\beta_i \beta_i^\circ u = \sum_{j \in C_i - R_i} p^{d_i}\epsilon_j + p^{f+d_i} \sum_{j \in R_i} a_j \epsilon_j$ ist, wo $u := \prod_{l=1}^{d_i} u_l = \sum_{j \in C_i} v_j \epsilon_j$ mit $v_j \in O^*$. Sei $\{i,l\} = \{1,2\}$. Dann ist

$$f_j x_j^{(i)} (x_j^{(i)})^\circ v_j = \begin{cases} p^{f+d_i} a_j & j \in R_i \\ p^{d_i} & j \in C_i - R_i \end{cases}$$

und deshalb $\nu_p(x_j^{(i)}) = \frac{1}{2}(f + d_i - \nu_p(f_j)) = \frac{1}{2}(f + d_i - d_l) = d_i$ für alle $j \in R_1$, da für diese j $x_j^{(l)} = 1$ und deshalb nach **(1)** die Bewertung von f_j gleich d_l ist. Also folgt **(2)**.
Da für $j \in R_i$ $x_j^{(l)} = 1$ gewählt ist und $p^{f-d_l}\epsilon_j \beta_l \in \mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$ liegt, kann man Œ annehmen, daß $x_j^{(i)} = 0$ für alle $j \in R_i$.
Es genügt also die Koeffizienten $x_j^{(2)}$ für $j \in A$ zu bestimmen. Dazu betrachtet man $\beta_1^\circ \beta_2 = \sum_{j \in A} f_j x_j^{(2)} \epsilon_j \in \mathrm{End}_{RG}(P_a) \cap \mathrm{End}_{RG}(P_b)$. Nach Lemma 6.2.32 gibt es $u \in R^*$, so daß $f_j = up^{d_1}$ für alle $j \in A$. Da nach Lemma 6.2.29 die Norm von $\beta_1^\circ \beta_2$ gleich $p^{f/2}R$ (falls f gerade) bzw. $\wp^f$ (falls f ungerade) ist, folgt mit Folgerung 6.2.30, daß $\beta_1^\circ \beta_2$ ein R^*-Vielfaches von $p^{d_1} b_2$ ist. Indem man β_2 durch ein R^*-Vielfaches ersetzt und dann die Koeffizienten von β_2 bei den ϵ_j, mit $j \in C_2 - C_1$

durch Anwenden eines Isomorphismus wieder zu 1 macht, folgt die Behauptung. □

Nun kann man aus den Isomorphietypen der Bimoduln $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$ eine Witt-Zerlegungsmatrix für Λ bestimmen. Sei $1 \leq j \leq s$ und $r_j := \{a \in P' \mid j \in c_a\}$ die Menge der modularen Konstituenten von $V\epsilon_j$. Dann ist $r_j =: X_j \dot\cup Y_j$, so, daß für alle $a, a' \in X_j$ und $b, b' \in Y_j$

$$f - A(P_a)_{j,a'} \equiv f - A(P_b)_{j,b'} \equiv f - A(P_a)_{j,b} - 1 \pmod 2.$$

(Ist $j \in A$ und f ungerade, so ist eine der beiden Mengen gleich leer.) Dann setze für alle $a \in X_j$, $b \in Y_j$

$$\mathrm{WD}(\Lambda)_{j,a} := (1) \text{ und } \mathrm{WD}(\Lambda)_{j,b} := (p) \in W(K_j).$$

Proposition 6.2.37 $\mathrm{WD}(\Lambda)$ *ist eine Witt-Zerlegungsmatrix von* Λ.

Beweis. Seien $a, b \in P'$, so daß $b = f(m,h)(a)$.
Sei zunächst entweder a oder b nicht in $\tilde P$. Dann wird $\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$ von einem Element h als $\mathrm{End}_{RG}(P_a) - \mathrm{End}_{RG}(P_b)$-Bimodul erzeugt. Nach Anwenden eines Isomorphimus kann man annehmen, daß $h = \sum_{j \in c_a \cap c_b} \epsilon_j$. Sei g ein Bimodulerzeuger von $\mathrm{Hom}_{RG}(P_b, P_a)$. Dann gibt es eine Einheit $u \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)^*$ so, daß $hgu = \sum_{j \in c_a \cap c_b} p\epsilon_j$. Also erzeugt $gu = \sum_{j \in c_a \cap c_b} p\epsilon_j$ den Bimodul $\mathrm{Hom}_{RG}(P_b, P_a) = p\mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b)$.
Seien nun beide $a, b \in \tilde P$ und

$$\beta_1 = \sum_{j \in c_a \cap c_b, j \neq \chi_m} \epsilon_j \text{ und } \beta_2 = b_2 + \epsilon_{\chi_m}$$

wie im Beweis von Proposition 6.2.36. Dann gibt es eine Einheit $u \in \mathrm{End}_{RG}(P_a)^*$, so daß $\beta_1^\circ u = \sum_{j \in c_a \cap c_b, j \neq \chi_m} p\epsilon_j$. Daher ist $\beta_2^\circ u = pb_2^\circ + x\epsilon_{\chi_m}$ für ein $x \in R$. Das Skalarprodukt von β_2 und $\beta_2^\circ u$ bezüglich der symmetrisierenden Form Φ für Λ ist

$$\Phi(\beta_2, \beta_2^\circ) = r(p^{-2} - xp^{-f})$$

für ein $r \in R^*$. Also ist $x = p^{f-2}$ und die Involution $^\circ : \mathrm{Hom}_{RG}(P_a, P_b) \to \mathrm{Hom}_{RG}(P_b, P_a)$ ist durch die Multiplikation mit

$$\sum_{j \in c_a \cap c_b} p^{f - A(P_a)_{j,b}} \epsilon_j$$

gegeben. Da die übrigen Homomorphismenräume aus Produkten solcher Homomorphismen bestehen, folgt die Behauptung. □

Literaturverzeichnis

[Alp] J.L. Alperin, *Projective modules for* $SL(2, 2^n)$. J. Pure Appl. Algebra **15** (1979), 219-234.

[AJL] H.H. Andersen, J. Jørgensen, P. Landrock, *The projective indecomposable modules of* $SL_2(K)$, Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser. **46** (1983) 38-52.

[Ben] D. J. Benson, *Representations and cohomology.* Cambridge studies in advanced math. **30** (1991).

[BeZ] H. Benz, H. Zassenhaus, *Über verschränkte Produktordnungen.* J. Number Theory **20** (1985), 282-298.

[Bur] R. Burkhardt, *Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen* $PSL(2, p^f)$. J. Algebra **40**, (1976) 75-96.

[CCNPW] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker, R. A. Wilson, *Atlas of finite groups.* Oxford University Press (1985).

[CuR] C. W. Curtis, I. Reiner, *Methods of Representation Theory* Vol I, Wiley Classics (1990)

[Dress] A. W. M. Dress, *Induction and structure theorems for orthogonal representations of finite groups.* Annals of Math. **102** (1975) 291-325.

[DHM] F. DeMeyer, D. Harrison, R. Miranda, *Quadratic forms over* $\mathbb{Q}$ *and Galois extensions of commutative rings.* AMS Memoirs vol. 77, no. 394 (1989).

[Fei] W. Feit, *The Representation Theory of Finite Groups.* North-Holland (1982).

[Frö] A. Fröhlich, *Orthogonal and symplectic representations of groups.* Proc. London Math. Soc. (3) **24** (1972) 470-506.

[GAP] M. Schönert (ed.), *Groups, Algorithms and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen, Germany (1994) available via anonymous ftp on the server ftp://ftp-gap.dcs.st-and.ac.uk/pub/gap

[HSW] P.W.A.M. van Ham, T.A. Springer, M. van der Wel, *On the Cartan invariants of $SL_2(\mathbb{F}_q)$.* Commun. Algebra **10**, No. 14 (1982) 1565-1588.

[Has] H. Hasse, *Äquivalenz quadratischer Formen in einem beliebigen Zahlkörper.* J. für die reine und angew. Math. **153** (1924) 158-162.

[HiL] G. Hiß, K. Lux, *Brauer Trees of Sporadic Groups.* Oxford Science Publications (1989)

[Hup] B. Huppert, *Endliche Gruppen I.* Springer Grundlehren **134** (1967)

[Jac] H. Jacobinski, *Maximalordnungen und erbliche Ordnungen.* Vorlesungen aus dem Fachbereich Mathematik der Universität Essen, Heft 6 (1981)

[Jam] G. James, *The Representation Theory of the Symmetric Groups.* Springer LNM **682** (1978)

[JLPW] C. Jansen, K. Lux, R. A. Parker, R. A. Wilson, *An atlas of Brauer Characters.* Clarendon Press, Oxford (1995).

[Jan] J. C. Jantzen, *Darstellungen halbeinfacher algebraischer Gruppen und zugeordnete kontravariante Formen.* Bonner Math. Schriften **67** (1973).

[Kit] Y. Kitaoka, *Arithmetic of Quadratic Forms.* Cambridge University Press (1993)

[Kne] M. Kneser, *Lectures on Galois Cohomology of Classical Groups.* Tata Institute, Bombay (1969)

[Knu] M.-A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings.* Springer Grundlehren **294** (1991)

[Kos1] H. Koshita, *Quiver and Relations for $SL(2, 2^n)$ in characteristic 2*, J. Pure Appl. Algebra **97** (1994) 313-324.

[Kos2] H. Koshita, *Quiver and Relations for $SL(2, p^n)$ in characteristic p with p odd*, Commun. Algebra **26**, No.3 (1998) 681-712.

[Lan] P. Landrock, *Finite group algebras and their modules.* LMS Lecture Notes **84** (1983)

[Lang] S. Lang, *Algebraic Number Theory.* Addison-Wesley (1970)

[Lam] T.Y. Lam, *The Algebraic Theory of Quadratic Forms.* Mathematics Lecture Notes Series, Benjamin (1973)

[LeT] D.W. Lewis, J.-P. Tignol, *On the signature of an involution.* Arch. Math. **60** (1993) 128-135.

[Lin] M. Linckelmann, *The isomorphism problem for cyclic blocks and their source algebras.* Invent. math. **125** (1996) 265-283.

[Miy] M. Miyamoto, *Equivariant Witt Groups of Finite Groups of Odd Order.* J. Algebra **133** (1990) 197-210.

[Mor 90] J. F. Morales, *Equivariant Witt groups.* Canad. Math. Bull. Vol 33 (2) (1990) 207-218.

[Neb] G. Nebe, *The group ring of $SL_2(p^2)$ over the p-adic integers.* J. Algebra **210** (1998) 593-613.

[Ple1] W. Plesken, *Gruppenringe über lokalen Dedekindbereichen.* Habilitationsschrift, RWTH-Aachen (1980)

[Ple2] W. Plesken, *Group rings of finite groups over the p-adic integers.* Springer LNM **1026** (1983).

[Ple3] W. Plesken, *Some arithmetic-geometric problems related to Specht-lattices.* Bayreuther Math. Schriften **43** (1993) 97-108.

[Rei] I. Reiner, *Maximal Orders.* Academic Press, 1975.

[Rog] , K. W. Roggenkamp, *Blocks of cyclic defect and Green-orders.* Commun. Algebra **20**, No.6 (1992) 1715-1734.

[Schur] I. Schur, *Über eine Klasse von endlichen Gruppen linearer Substitutionen.* 128-142 in I. Schur: *Gesammelte Abhandlungen I.* Springer Verlag (1973).

[Schap] K.-D. Schaper, *Charakterformeln für Weyl-Moduln und Specht-Moduln in Primzahlcharakteristik.* Diplomarbeit Bonn, Juni 1981.

[Scha] W. Scharlau, *Quadratic and Hermitian Forms.* Springer Grundlehren **270** (1985)

[Ser] J.P. Serre, *Linear Representations of Finite Groups.* Springer GTM **42** (1977).

[Thé] J. Thévenaz, *G-Algebras and Modular Representation Theory.* Oxford Science Publications (1995)

[Tho] J. G. Thompson, *Bilinear Forms in Characteristic p and the Frobenius-Schur Indicator.* Springer LNM **1185** (1984) 221-230.

[Tur1] A. Turull, *Bilinear forms for $SL_2(q)$, $\tilde{A}_n$ and similar groups.* Preprint

[Tur2] A. Turull, *Schur index two and bilinear forms.* J. Algebra **157**, No.2 (1993) 562-572.

[Was] L. C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields.* Springer GTM **83** (1982).

[Zas] H. Zassenhaus, *On the Spinor Norm.* Arch. Math. XIII (1962) 434-451.

Index