

Berechnung von Charaktertafeln zentraler Erweiterungen
ausgewählter Gruppen

von
Sebastian Dany

DIPLOMARBEIT

in Mathematik

vorgelegt der
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
März 2006

Angefertigt am
Lehrstuhl D für Mathematik
bei
Professor Dr. G. Hiß

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	3
Vorwort	5
1 Grundlagen	7
1.1 Zentrale Erweiterungen	7
1.2 Charaktertafeln und Fusionen	12
1.3 Gruppen mit exzeptionellem Multiplikator	20
1.4 Die Aufgabe	21
2 Struktursätze	25
2.1 U und M haben teilerfremde Ordnung	25
2.2 U ist perfekt	26
2.3 U ist „fast perfekt“	26
2.4 U ist isomorph zu \mathcal{A}_n oder \mathcal{S}_n	28
3 Brute-Force Verfahren	33
3.1 Formulierung des Verfahrens	33
3.2 Anpassen an GAP-Bibliothek	35
4 Erzeugen von Untergruppen in GAP	39
4.1 Zufallsverfahren	39
4.2 Ein Verfahren basierend auf Datenbanken	43
5 Methoden für „größere“ Gruppen	45
5.1 Bestimmung von Tafel und Fusionen	45
5.2 Verschiedene Konjugiertenklassen isomorpher Untergruppen	48
5.3 Zusammengesetzter Multiplikator	51

6	Beispiele und Ergebnisse	57
6.1	$O_7(3)$	57
6.1.1	Überblick	57
6.1.2	$2.O_7(3)$	58
6.1.3	$3.O_7(3)$	64
6.1.4	$6.O_7(3)$	68
6.2	$U_3(5)$ und $L_3(7)$	69
6.3	$O_8^+(2)$	71
6.3.1	Überblick	71
6.3.2	Die maximalen Untergruppen	73
6.4	$U_6(2)$	80
6.4.1	Überblick	80
6.4.2	Die maximalen Untergruppen	81
6.5	Weitere Gruppen	89
A	Symbole	97
	Literaturverzeichnis	99

Vorwort

In der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen sind Charaktertafeln wichtige Werkzeuge, mit deren Hilfe viele Aussagen über Gruppen getroffen werden können. So enthält das Computeralgebrasystem GAP, siehe [GAP05], eine Datenbank mit Charaktertafeln von „interessanten“ Gruppen. Ziel der vorliegenden Diplomarbeit ist es, diese Datenbank zu erweitern.

Interessante Gruppen sind zum Beispiel die endlichen einfachen Gruppen und ihre Schurschen Erweiterungen sowie ihre maximalen Untergruppen. Sei etwa G eine einfache Gruppe, (\mathfrak{G}, π) eine Schursche Erweiterung von G und $U \leq G$ eine maximale Untergruppe von G . Man kann zeigen, dass $\mathfrak{U} := \pi^{-1}(U) \leq \mathfrak{G}$ maximal in \mathfrak{G} ist und alle maximalen Untergruppen von \mathfrak{G} von dieser Form sind, vergleiche Satz (1.35). Somit wird eine Bijektion zwischen den maximalen Untergruppen von G und denen von \mathfrak{G} induziert und $(\mathfrak{U}, \pi|_{\mathfrak{U}})$ ist eine zentrale Erweiterung von U .

Während von einigen Gruppen G und \mathfrak{G} wie oben bereits Charaktertafeln in der GAP-Bibliothek enthalten sind (zum Beispiel ist dies der Fall für Gruppen, die im Atlas of finite groups, siehe [CCN⁺03], enthalten sind) gilt dies nicht für viele maximalen Untergruppen von G und die überwiegende Mehrheit von maximalen Untergruppen von \mathfrak{G} . Im Rahmen dieser Diplomarbeit konnten die Charaktertafeln der maximalen Untergruppen einiger einfacher Gruppen und ihren Schurschen Erweiterungen berechnet werden, so dass sie nun in die GAP-Bibliothek aufgenommen werden können.

Besonderes Augenmerk lag hierbei auf den einfachen Gruppen mit exzeptionellem Schurschen Multiplikator, die in Tabelle 1.2 aufgezählt sind. Bis auf die Gruppen $L_3(4)$, $U_4(3)$, $F_4(2)$ und ${}^2E_6(2)$ wurden die Gruppen der Tabelle 1.2 in dieser Arbeit untersucht und bis auf eine maximale Untergruppe von $O_8^+(2)$ konnten alle gewünschten Charaktertafeln bestimmt werden.

In Kapitel 6 können die erzielten Ergebnisse zu den untersuchten Gruppen eingesehen werden; die Gruppen $O_7(3)$, $O_8^+(2)$ sowie $U_6(2)$ werden dabei detailliert vorgestellt. Eine ausführliche Beschreibung der Aufgabenstellung und der übrigen Kapitel befindet sich in Abschnitt 1.4.

Das Thema der Arbeit verdanke ich Herrn Prof. Gerhard Hiß. Ihm sei für seine stets hilfsbereite und freundliche Unterstützung gedankt sowie für die Einführung in das faszinierende Gebiet der Algebra und der Darstellungstheorie im besonderen. Mein herzlicher Dank gilt Thomas Breuer. Er hatte immer Zeit für meine Fragen, auf die er mit großer Geduld und Verständnis einging; viele Tee- und Kekserunden mit anregenden und aufmunternden Gesprächen trugen zum Gelingen dieser Arbeit bei.

Herrn Prof. Klaus Lux danke ich für die Unterstützung zur Gewinnung einer Permutationsdarstellung von $3.O_7(3)$. An dieser Stelle sei auch den weiteren Mitarbeitern des Lehrstuhls für die angenehme Arbeitsatmosphäre gedankt, vor allem Christoph Köhler, Max Neunhöffer, Frank Lübeck und Felix Noeske, deren Türen stets offen waren und mir häufig mit Rat und Tat zur Seite standen (die Jungs - nicht die Türen).

Auch bedanke ich mich gerne bei meinen Freunden und Wegbegleitern durchs ganze Studium Johannes Orlob, Daniel Nett und Jörg Rüsge. Ihre Unterstützung in vielerlei Hinsicht war eine große Hilfe und Freude für mich.

Schließlich ist es mir ein großes Anliegen, mich ganz herzlich bei meinen Eltern zu bedanken. Nicht nur, dass sie mir erst ein Studium ermöglichten, sie unterstützten mich stets in meinem Handeln und gaben mir großen Rückhalt.

Kapitel 1

Grundlagen

In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden Grundlagen aus der Gruppen- und Darstellungstheorie bereitgestellt, die in dieser Arbeit verwendet werden. Im dritten Abschnitt wird eine Liste der Gruppen mit exzeptionellem Schurschen Multiplikator angegeben. Das Ziel sowie die Vorgehensweise der vorliegenden Arbeit werden im vierten Abschnitt vorgestellt.

1.1 Zentrale Erweiterungen

Gegenstand dieses Abschnittes sind zentrale Erweiterungen, insbesondere werden Schursche Erweiterungen und Darstellungsgruppen eingeführt. Es sei G eine endliche Gruppe.

(1.1) Definition

Eine **zentrale Erweiterung** von G ist ein Paar (H, π) , so dass

- (i) $\pi : H \longrightarrow G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus ist und
- (ii) $\text{Kern}(\pi) \leq Z(H)$ ist.

Gelegentlich wird auch (H, Z) eine **zentrale Erweiterung** von G genannt, falls gilt:

- (i') $H/Z \cong G$ und
- (ii') $Z \leq Z(H)$.

Mit $Z = \text{Kern}(\pi)$ sind die Bedingungen (i) und (i') beziehungsweise (ii) und (ii') äquivalent. Im ersten Fall steht der Epimorphismus π im Vordergrund, im zweiten Fall die zentrale Untergruppe Z .

(1.2) Definition

Eine zentrale Erweiterung (\mathfrak{G}, π) von G erfüllt die **projektive Hebbbarkeitseigenschaft**, wenn gilt:

Zu jedem Homomorphismus $\mathfrak{X} : G \longrightarrow PGL_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert ein Homomorphismus $\mathfrak{Y} : \mathfrak{G} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathfrak{G} & \xrightarrow{\pi} & G \\
 \mathfrak{y} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{x} \\
 GL_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\text{kan}} & PGL_n(\mathbb{C})
 \end{array} \quad (\text{pH})$$

Eine Gruppe kleinstmöglicher Ordnung, die mit einem Epimorphismus die projektive Hebbbarkeitseigenschaft erfüllt, wird besonders ausgezeichnet.

(1.3) Definition

Eine endliche Gruppe \mathfrak{G} minimaler Ordnung, so dass eine zentrale Erweiterung (\mathfrak{G}, π) von G existiert, die die projektive Hebbbarkeitseigenschaft erfüllt, heißt eine **(Schursche) Darstellungsgruppe** von G .

Es gibt noch eine weitere Art von zentralen Erweiterungen, die von Interesse sind.

(1.4) Definition

Eine zentrale Erweiterung (H, Z) von G heißt eine **Schursche Erweiterung** von G oder **Schursch**, wenn $Z \leq H'$ gilt.

(1.5) Bemerkung

Eine (zentrale) Erweiterung (H, Z) von G heißt **zerfallend**, wenn Z in H ein Komplement hat, das heißt wenn eine Untergruppe $K \leq H$ existiert mit $KZ = H$ und $K \cap Z = \{1\}$. Nichttriviale Schursche Erweiterungen sind nichtzerfallende zentrale Erweiterungen.

Beweis.

Sei (H, Z) eine Schursche Erweiterung von G mit $Z \neq \{1\}$. Angenommen, es existiert eine Untergruppe $K \leq H$ mit $KZ = H$ und $K \cap Z = \{1\}$.

Da Z zentral in H ist, ist $K \trianglelefteq H$ mit $H/K \cong Z$ abelsch. Folglich ist $H' \leq K$. Nach Voraussetzung ist somit auch $Z \leq K$, was ein Widerspruch zu $K \cap Z = \{1\}$ ist. \square

Schursche Erweiterungen von einfachen und perfekten Gruppen können genauer beschrieben werden, wie das folgende Lemma zeigt.

(1.6) Lemma

Sei (H, Z) eine Schursche Erweiterung von G . Dann gilt:

(a) Ist G einfach und nichtabelsch, so ist $Z = Z(H)$.

(b) Ist G perfekt, so ist $H' = H$.

Beweis.

Es ist $Z \trianglelefteq Z(H) \trianglelefteq H$. Damit ist $Z(H)/Z \trianglelefteq H/Z \cong G$. Da G einfach und nichtabelsch ist, folgt $Z = Z(H)$, also (a).

Aus $H'/Z = H'Z/Z = (H/Z)' \cong G' = G \cong H/Z$ folgt (b). \square

Nun wird der Schursche Multiplikator eingeführt. Die Definition ist relativ technisch und wird nicht weiter motiviert, da das „Wesen“ des Schurschen Multiplikators für diese Arbeit nicht von Bedeutung ist. Im Vordergrund steht die Charakterisierung von Darstellungsgruppen mittels des Schurschen Multiplikators und Schurscher Erweiterungen, welche anschließend formuliert wird.

(1.7) Definition & Bemerkung

(a) Eine Abbildung $\alpha : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}^*$, die

(i) $\alpha(xy, z)\alpha(x, y) = \alpha(x, yz)\alpha(y, z)$ für alle $x, y, z \in G$ und

(ii) $\alpha(1, 1) = 1$

erfüllt, heißt ein **Faktorensystem von G mit Werten in \mathbb{C}^*** . Mit $Z^2(G, \mathbb{C}^*)$ werde die Menge aller Faktorensysteme von G mit Werten in \mathbb{C}^* bezeichnet.

(b) Sei $\mu : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ eine Abbildung mit $\mu(1) = 1$ und sei $\alpha_\mu : G \times G \longrightarrow \mathbb{C}^*$ definiert durch $\alpha_\mu(x, y) := \mu(x)\mu(y)\mu(xy)^{-1}$.

Dann ist α_μ ein Faktorensystem von G mit Werten in \mathbb{C}^* . Faktorensysteme der Form α_μ heißen **prinzipale Faktorensysteme**. Mit $B^2(G, \mathbb{C}^*)$ werde die Menge aller prinzipalen Faktorensysteme bezeichnet.

(c) $Z^2(G, \mathbb{C}^*)$ bildet mit punktweiser Multiplikation eine abelsche Gruppe. Wegen $B^2(G, \mathbb{C}^*) \leq Z^2(G, \mathbb{C}^*)$ ist somit $M(G) := Z^2(G, \mathbb{C}^*)/B^2(G, \mathbb{C}^*)$ wohldefiniert. $M(G)$ heißt der **(Schursche) Multiplikator** von G .

(d) Nach Theorem (11.15) in [Isa76] ist der Multiplikator von G endlich.

Zur Definition des Multiplikators kann auch ein allgemeinerer Körper als \mathbb{C} verwendet werden; dies ist aber für diese Arbeit nicht erforderlich.

Der folgende Satz liefert die Existenz einer Darstellungsgruppe und die oben angesprochene Charakterisierung mit Hilfe des Schurschen Multiplikators und Schurscher Erweiterungen.

(1.8) Satz

Jede endliche Gruppe hat eine Darstellungsgruppe. Diese kann wie folgt charakterisiert werden:

Sei (H, π) eine zentrale Erweiterung von G . Dann ist H genau dann eine Darstellungsgruppe von G , wenn gilt

(i) (H, π) ist Schursch und

(ii) $|\text{Kern}(\pi)| = |M(G)|$.

In diesem Fall ist ferner $\text{Kern}(\pi) \cong M(G)$.

Beweis.

Siehe Theorem (11.43) in [CR90]. □

Die Theorie der zentralen Erweiterungen wird nun weiter ausgebaut. Es wird das Konzept der Überlagerungsgruppen eingeführt, mit dem ein wichtiger Zusammenhang zwischen Schurschen Erweiterungen und Darstellungsgruppen für perfekte Gruppen hergeleitet werden kann.

(1.9) Definition

- (a) Seien (H_1, π_1) und (H_2, π_2) zwei zentrale Erweiterungen von G . Ein **Homomorphismus** $\phi : (H_1, \pi_1) \rightarrow (H_2, \pi_2)$ ist ein Gruppenhomomorphismus $\phi : H_1 \rightarrow H_2$ mit $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$.
- (b) Die zentrale Erweiterung (Γ, π) von G heißt **universell**, falls für jede zentrale Erweiterung (H, σ) von G ein Homomorphismus $\phi : (\Gamma, \pi) \rightarrow (H, \sigma)$ existiert.

Die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von universellen zentralen Erweiterungen beantwortet der folgende Satz.

(1.10) Satz

G besitzt eine universelle zentrale Erweiterung genau dann, wenn G perfekt ist. Bis auf Isomorphie (im Sinne von (1.9)(a)) ist die universelle zentrale Erweiterung eindeutig bestimmt.

Beweis.

Siehe 33.4 & 33.1 in [Asc00]. □

Dies gibt Anlass zu einer weiteren Definition.

(1.11) Definition

Sei G perfekt und (Γ, π) die universelle zentrale Erweiterung von G . Die Gruppe Γ heißt **universelle Überlagerungsgruppe** von G .

Der folgende Satz liefert weitere wichtige Eigenschaften einer universellen Überlagerungsgruppe.

(1.12) Satz

Sei G eine perfekte (nicht notwendig endliche) Gruppe. Dann ist ihre universelle Überlagerungsgruppe ebenfalls perfekt und sie ist endlich, falls G endlich ist.

Beweis.

Siehe 33.2 & 33.10 in [Asc00]. □

Ziel ist nun die Aussage, dass die universelle Überlagerungsgruppe einer perfekten endlichen Gruppe isomorph zu jeder ihrer Darstellungsgruppen ist. Dazu werden zunächst einige Hilfssätze formuliert, die auch eigenständig von Bedeutung sind.

(1.13) Satz

Sei G perfekt mit universeller Überlagerungsgruppe Γ . Sei (H, Z) eine Schursche Erweiterung von G . Dann existiert ein zentraler Normalteiler $N \leq Z(\Gamma)$ mit $\Gamma/N \cong H$.

Beweis.

Nach (1.6)(b) ist $H' = H$. Seien $\pi : \Gamma \rightarrow G$ und $\sigma : H \rightarrow G$ die zugehörigen kanonischen Epimorphismen. Nach Definition (1.9) von universellen Erweiterungen existiert ein Homomorphismus $\phi : \Gamma \rightarrow H$ mit $\pi = \sigma \circ \phi$.

Es gilt $\phi(\Gamma) \text{Kern}(\sigma) = H$. Die Inklusion \subseteq ist klar. Sei also $h \in H$. Wähle ein $x \in \Gamma$ mit $\pi(x) = \sigma(h)^{-1}$ (existiert, da π surjektiv). Es ist $h = \phi(x^{-1})\phi(x)h$ und $\sigma(\phi(x)h) = 1$ nach Wahl von ϕ und x , also $h \in \phi(\Gamma) \text{Kern}(\sigma)$.

Da $\text{Kern}(\sigma)$ zentral in H ist, ist $\phi(\Gamma)$ normal in H , womit folgt: $H/\phi(\Gamma) \cong \text{Kern}(\sigma)/[\phi(\Gamma) \cap \text{Kern}(\sigma)]$ ist eine abelsche Gruppe. Also ist $H' \leq \phi(\Gamma) \leq H = H'$. Damit ist ϕ surjektiv. Setze $N := \text{Kern}(\phi)$ und erhalte $\Gamma/N \cong H$. Zeige noch, dass N zentral ist:

Sei dazu $\tilde{Z} := \phi^{-1}(Z) \trianglelefteq \Gamma$. Wegen $\Gamma/\tilde{Z} \cong (\Gamma/N)/(\tilde{Z}/N) \cong G \cong \Gamma/\text{Kern}(\pi)$ ist $|\tilde{Z}| = |\text{Kern}(\pi)|$. Da ϕ surjektiv ist, gilt $\pi(\tilde{Z}) = \sigma(Z) = 1$. Also ist $\tilde{Z} = \text{Kern}(\pi)$, womit $N \leq Z(\Gamma)$ nachgewiesen ist. \square

(1.14) Satz

Sei (H, Z) eine Schursche Erweiterung von G . Dann existiert ein Monomorphismus $Z \hookrightarrow M(G)$, insbesondere ist $|Z|$ ein Teiler von $|M(G)|$ und H ist endlich.

Beweis.

Siehe Hilfssatz V.23.3, Satz V.6.4 und Satz V.6.3 in [Hup67]. Die Endlichkeit von H ergibt sich aus (1.7)(d). \square

Nun kann der angekündigte Satz formuliert werden.

(1.15) Satz

Sei G perfekt mit universeller Überlagerungsgruppe Γ und sei \mathfrak{G} eine Darstellungsgruppe von G . Dann gilt $\Gamma \cong \mathfrak{G}$. Insbesondere ist \mathfrak{G} (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt und endlich.

Im Folgenden wird daher auch von „der“ Darstellungsgruppe gesprochen.

Beweis.

Seien $\pi : \Gamma \rightarrow G$ und $\sigma : \mathfrak{G} \rightarrow G$ die zugehörigen kanonischen Epimorphismen. Nach Definition (1.9) von universellen Erweiterungen existiert ein Homomorphismus $\phi : \Gamma \rightarrow \mathfrak{G}$ mit $\pi = \sigma \circ \phi$.

Nach (1.8) und (1.6)(b) ist (\mathfrak{G}, σ) eine Schursche Erweiterung von G und \mathfrak{G} ist perfekt. Somit folgt wie im Beweis zu (1.13), dass ϕ surjektiv ist. Sei $Z = \text{Kern}(\pi)$. Wegen (1.12) ist (Γ, Z) eine Schursche Erweiterung von G und Γ ist endlich. Aus (1.14) folgt $|Z| \leq |M(G)|$. Somit ist $|\Gamma| = |G||Z| \leq |G||M(G)| = |\mathfrak{G}|$ nach (1.8). Da ϕ surjektiv ist, folgt daraus die erste Behauptung.

Die Eindeutigkeit und Endlichkeit von \mathfrak{G} folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von Γ , vergleiche (1.10) und (1.12). \square

Wichtig ist das folgende Korollar, in dem die bisherigen Ergebnisse zusammengefasst sind.

(1.16) Korollar

Sei G perfekt mit Darstellungsgruppe \mathfrak{G} . Sei (H, Z) eine Schursche Erweiterung von G . Dann existiert ein zentraler Normalteiler $N \leq Z(\mathfrak{G})$ mit $\mathfrak{G}/N \cong H$. Insbesondere teilt $|Z|$ die Ordnung von $M(G)$. Es ist $H \cong \mathfrak{G}$ genau dann, wenn $|Z| = |M(G)|$.

Beweis.

Verwende (1.15), (1.13), (1.14) und (1.8). □

In dieser Arbeit spielen einfache Gruppen und ihre nach Satz (1.15) eindeutig bestimmten Darstellungsgruppen eine wichtige Rolle. Ebenso von Interesse sind auch Schursche Erweiterungen von einfachen Gruppen, die nach Korollar (1.16) Faktorgruppen der Darstellungsgruppe sind. Dabei können in dieser Arbeit Schursche Erweiterungen an die Stelle der Darstellungsgruppen treten; die zweite Eigenschaft einer Darstellungsgruppe in Satz (1.8) wird in dieser Arbeit nicht benötigt. Im folgenden Setup wird dies festgehalten.

(1.17) Setup

Sei G einfach und (\mathfrak{G}, π) eine Schursche Erweiterung von G mit $M := \text{Kern}(\pi)$. Nach Satz (1.14) teilt M die Ordnung von $M(G)$. Dabei ist ausdrücklich beides zugelassen, dass $|M| = |M(G)|$ ist oder $|M| < |M(G)|$ gilt. Im ersten Fall ist \mathfrak{G} die Darstellungsgruppe von G , im letzten Fall ist \mathfrak{G} eine echte Faktorgruppe der Darstellungsgruppe, vergleiche (1.16).

1.2 Charaktertafeln und Fusionen

Sei G eine endliche Gruppe. In diesem Abschnitt werden Charaktertafeln und Fusionen, zentrale Objekte dieser Arbeit, eingeführt.

Zunächst werden Potenzabbildungen und Fusionen erklärt. Sie sind auf den Konjugiertenklassen einer Gruppe definiert.

(1.18) Definition

(a) Sei $n \in \mathbb{Z}$.

Die Abbildung $G \rightarrow G, g \mapsto g^n$ induziert eine Abbildung

$$\text{pow}_{n,G} : \text{Cl}(G) \rightarrow \text{Cl}(G), \text{Cl}_G(g) \mapsto \text{Cl}_G(g^n).$$

Sie heißt **(n -te) Potenzabbildung** von G .

Sei $\mathfrak{P}(G) := \{\text{pow}_{p,G} \mid p \in \mathbb{P}, p \leq \text{maximale Elementordnung in } G\}$.

(b) Sei $U \leq G$ und $\iota : U \hookrightarrow G$ eine Einbettung von U nach G . Die von ι induzierte Abbildung

$$\iota_* : \text{Cl}(U) \rightarrow \text{Cl}(G), \text{Cl}_U(u) \mapsto \text{Cl}_G(\iota(u))$$

heißt die **Untergruppenfusion** zu ι von U nach G .

(c) Sei $N \trianglelefteq G$ und $\pi : G \rightarrow G/N$ der kanonische Epimorphismus. Die von π induzierte Abbildung

$$\pi_* : \text{Cl}(G) \rightarrow \text{Cl}(G/N), \text{Cl}_G(g) \mapsto \text{Cl}_{G/N}(gN)$$

heißt die **Faktorfusion** zu π von G nach G/N .

(d) Eine **Fusion** ist eine Untergruppen- oder eine Faktorfusion.

(1.19) Bemerkungen

- (a) Fusionen sind durch die zu Grunde liegenden Homomorphismen eindeutig bestimmt.
- (b) Da G endlich ist, ist die Abbildung $\text{pow}_{-1,G}$ durch die Potenzabbildungen mit positiven Exponent bestimmt. Somit sind alle Potenzabbildungen von G wegen $\text{pow}_{nm,G} = \text{pow}_{n,G} \circ \text{pow}_{m,G}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ durch $\mathfrak{P}(G)$ festgelegt.
- (c) Seien $U, V \leq G$ und ι_U und ι_V die zugehörigen Einbettungen mit $\iota_U(u) = u$ für alle $u \in U$ beziehungsweise $\iota_V(v) = v$ für alle $v \in V$. Dann folgt aus $U^g = V$ für ein $g \in G$, dass $(\iota_U)_*(\text{Cl}_U(u)) = (\iota_V)_*(\text{Cl}_V(u^g))$ für alle $u \in U$ gilt.

Nun werden Darstellungen eingeführt, welche der Definition von Charakteren zugrunde liegen.

(1.20) Definition

Eine **Darstellung** von G (über \mathbb{C}) ist ein Homomorphismus $\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Eine Darstellung \mathfrak{X} heißt **reduzibel**, wenn eine Matrix $Z \in \text{Gl}_n(\mathbb{C})$ existiert mit

$$Z^{-1}\mathfrak{X}(g)Z = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_1(g) & * \\ 0 & \mathfrak{X}_2(g) \end{pmatrix} \quad \text{für alle } g \in G,$$

wobei $\mathfrak{X}_1(g) \in \text{Gl}_k(\mathbb{C})$ und $\mathfrak{X}_2(g) \in \text{Gl}_m(\mathbb{C})$ mit $1 \leq k, m \leq n$.

Ist \mathfrak{X} nicht reduzibel, so heißt \mathfrak{X} **irreduzibel**.

Die Darstellung $\mathfrak{X} : G \rightarrow \text{Gl}_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^*$, $g \mapsto 1$, heißt **triviale Darstellung**.

Darstellungen können allgemeiner über beliebigen Körpern eingeführt werden, dies ist aber für die Zwecke dieser Arbeit nicht nötig.

Nun können Charaktere erklärt werden.

(1.21) Definition

Sei \mathfrak{X} eine Darstellung von G .

Der **Charakter** von \mathfrak{X} ist die Abbildung $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$, $g \mapsto \text{Spur}(\mathfrak{X}(g))$. Dabei heißt $n [= \chi(1)]$ der **Grad** von χ . Ein Charakter χ heißt **irreduzibel**, wenn \mathfrak{X} irreduzibel ist. Die Menge der irreduziblen Charaktere von G werde mit $\text{Irr}(G)$ bezeichnet. Ist χ ein Charakter, so heißt $\text{Kern}(\chi) := \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)\}$ der **Kern** von χ . Ist $\text{Kern}(\chi) = \{1\}$, so heißt χ **treu**.

Da die Spur einer Matrix invariant unter Konjugation ist, gilt folgende Aussage, die bedeutend für die Definition von Charaktertafeln ist.

(1.22) Lemma

Charaktere sind konstant auf den Konjugiertenklassen von G .

Aufgrund von Lemma (1.22) führen wir folgende Notation ein: Für $C \in \text{Cl}(G)$ und einen Charakter χ von G definiere $\chi(C) := \chi(g)$ für ein $g \in C$. Damit können und werden wir

einen Charakter von G auch als eine Funktion $\text{Cl}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ auffassen.

Auch das folgende Resultat ist wichtig im Hinblick auf Charaktertafeln.

(1.23) Satz

Die Anzahl der Konjugiertenklassen von G ist gleich der Anzahl der irreduziblen Charaktere von G .

Beweis.

Siehe Corollary (2.7) in [Isa76]. □

(1.24) Definition & Bemerkung

Sei $\Theta_G : \text{Irr}(G) \times \text{Cl}(G) \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\Theta_G((\chi, C)) := \chi(C)$. Nach Lemma (1.22) ist Θ_G wohldefiniert.

Sei $\mathfrak{P}(G)$ wie in Definition (1.18). Das Paar $\text{tbl}(G) := (\Theta_G, \mathfrak{P}(G))$ bildet die **Charaktertafel** (oder kurz **Tafel**) von G .

(1.25) Bemerkung

Soll die Charaktertafel $\text{tbl}(G)$ einer Gruppe explizit berechnet werden, ist eine Auswertung von Θ_G nötig. Ordne $\text{Irr}(G)$ und $\text{Cl}(G)$ an, etwa $\text{Irr}(G) := \{\chi_1, \dots, \chi_k\}$ und $\text{Cl}(G) := \{C_1, \dots, C_k\}$. (Beachte hierbei Satz (1.23).) Damit induziert Θ_G eine „Tafel“, das heißt eine Matrix $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq k} \in \mathbb{C}^{k \times k}$, die als Einträge die Werte der irreduziblen Charaktere hat.

In der Regel wählt man für χ_1 den trivialen Charakter (Charakter der trivialen Darstellung) und $C_1 = \{1\}$. Ansonsten gibt es aber keine natürliche Anordnung von $\text{Irr}(G)$ und $\text{Cl}(G)$, so dass $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ nur bis auf Permutation der Zeilen und Spalten bestimmt ist.

In dieser Arbeit steht – vergleiche Abschnitt 1.4 – die explizite Berechnung von $\text{tbl}(G)$, das heißt die Auswertung von Θ_G , im Vordergrund. Daher wird unter „Missbrauch der Notation“ bei fester Anordnung von $\text{Irr}(G)$ und $\text{Cl}(G)$ das Paar $((\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq k}, \mathfrak{P}(G))$ ebenfalls Charaktertafel von G genannt und mit $\text{tbl}(G)$ bezeichnet. Wie oben gesehen, ist in diesem Sinne eine Charaktertafel nur bis auf Permutationen der Zeilen und Spalten von $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ bestimmt.

Wird im Folgenden von „der“ Charaktertafel einer Gruppe gesprochen, so ist die Charaktertafel bezüglich einer festen Anordnung von $\text{Irr}(G)$ und $\text{Cl}(G)$ gemeint, zum Beispiel die in einer Datenbank gespeicherte Tafel einer Gruppe, vergleiche Beispiel (1.33)(a).

Nach Bemerkung (1.25) ist es wünschenswert, Charaktertafeln miteinander vergleichen zu können. Dazu wird ein weiterer Begriff eingeführt.

(1.26) Definition & Bemerkung

Sei H eine endliche Gruppe.

(a) Eine Bijektion $\pi : \text{Cl}(G) \rightarrow \text{Cl}(H)$ mit den Eigenschaften

(i) $\chi \circ \pi \in \text{Irr}(G)$ für alle $\chi \in \text{Irr}(H)$ und

(ii) $\pi \circ \text{pow}_{p,G} = \text{pow}_{p,H} \circ \pi$ für alle $p \in \mathbb{P}$,

heißt ein **Tafelisomorphismus** von $\text{tbl}(G)$ nach $\text{tbl}(H)$ oder kurz von G nach H .

- (b) Zwei Charaktertafeln $\text{tbl}(G)$ und $\text{tbl}(H)$ heißen **isomorph**, falls ein Tafelisomorphismus zwischen ihnen existiert. In diesem Fall können Anordnungen von $\text{Irr}(G)$ und $\text{Cl}(G)$ sowie $\text{Irr}(H)$ und $\text{Cl}(H)$ gewählt werden, so dass die von Θ_G und Θ_H induzierten Matrizen gleich sind.
- (c) Ein Tafelisomorphismus von G nach G heißt ein **Tafelautomorphismus**. Die Menge der Tafelautomorphismen von G werde mit $\text{TAut}(G)$ bezeichnet. Mit der Verknüpfung \circ bildet sie eine Gruppe.
- (d) Ein Gruppenisomorphismus zwischen G und H induziert einen Tafelisomorphismus von G nach H .

Nun wird auf das Zusammenspiel von Charaktertafeln und Fusionen eingegangen. Dazu folgt eine einleitende Bemerkung.

(1.27) Bemerkung

Fusionen und Charaktere stehen in Zusammenhang, ein Beispiel: Sei $U \leq G$ und $f : \text{Cl}(U) \rightarrow \text{Cl}(G)$ die von der natürlichen Einbettung induzierten Fusion. Ist χ ein Charakter von G , so ist $\chi \circ f$ der eingeschränkte Charakter von χ auf U (siehe [Isa76], Absatz nach Definition (2.26)). Mittels Fusionen können also aus Charakteren „neue“ Charaktere gebildet werden.

Allerdings können Fusionen nach der bisherigen Definition nur aufgrund eines Homomorphismus zwischen den Gruppen gebildet werden. In der Praxis, so auch in dieser Arbeit, gibt es aber Situationen, in denen man zwar die Charaktertafeln $\text{tbl}(U)$ und $\text{tbl}(G)$ zur Verfügung hat, aber keine explizite Darstellung der Gruppen und somit kein Homomorphismus und keine Fusion angegeben werden kann. Nun ist es wünschenswert, auch unter diesen Umständen eine Abbildung zwischen den Konjugiertenklassen zu kennen, die die Eigenschaften einer Fusion hat.

Es kann auch sein, dass Tafeln $\text{tbl}(H)$ und $\text{tbl}(G)$ zur Verfügung stehen und dass ohne weitere Informationen über die zugehörigen Gruppen entschieden werden soll, ob $H \leq G$ gilt. Bei der dreizehnten maximalen Untergruppe von $O_8^+(2)$, siehe Abschnitt 6.3, kommt es zu so einem Fall.

Dies sind zwei Beweggründe, den Begriff Fusion in der folgenden Definition mit Hilfe von Charaktertafeln zu erweitern.

In der oben angesprochenen Definition treten Strukturkonstanten $c_{XYZ}(G)$ von G mit Konjugiertenklassen X, Y und Z auf. Sie sind definiert durch $\hat{X}\hat{Y} = \sum_{Z \in \text{Cl}(G)} c_{XYZ}(G)\hat{Z}$, wobei $\hat{X} := \sum_{x \in X} x \in \mathbb{C}G$, vergleiche [CR90], Lemma 3.37(a).

(1.28) Definition

Seien H eine endliche Gruppe und $\text{tbl}(G)$ und $\text{tbl}(H)$ die Charaktertafeln von G und H .

- (a) Eine Abbildung

$$\text{fus}_H^G : \text{Cl}(H) \rightarrow \text{Cl}(G)$$

heißt **Untergruppentafelfusion**, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

- (i) Für jeden irreduziblen Charakter χ von G ist die „Einschränkung“ $\chi \circ \text{fus}_H^G$ auf H ein Charakter von H .
- (ii) Die Abbildung fus_H^G vertauscht mit den Potenzabbildungen aus $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(H)$, vergleiche (1.26)(a)(ii).
- (iii) Für jede Konjugiertenklasse K in H gilt: Für jedes $k \in K$ und jedes $l \in \text{fus}_H^G(K)$ gilt: $|C_H(k)|$ teilt $|C_G(l)|$, und die Ordnungen von k und l sind gleich.
- (iv) Die Strukturkonstanten von H sind nicht größer als die zugehörigen Strukturkonstanten in G :
Ist $c_{XYZ}(H)$ eine Strukturkonstante von H zu H -Konjugiertenklassen X, Y und Z , so ist $c_{XYZ}(H) \leq c_{f(X)f(Y)f(Z)}(G)$ für $f := \text{fus}_H^G$.

(b) Eine Abbildung

$$\text{fus}_G^H : \text{Cl}(G) \longrightarrow \text{Cl}(H)$$

heißt **Faktortafelfusion**, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

- (i) Die Abbildung fus_G^H ist surjektiv.
- (ii) Für jeden irreduziblen Charakter χ von H ist $\chi \circ \text{fus}_G^H$ ein irreduzibler Charakter von G .
- (iii) Die Abbildung fus_G^H vertauscht mit den Potenzabbildungen aus $\mathfrak{P}(H)$ und $\mathfrak{P}(G)$, vergleiche (1.26)(a)(ii).

(c) Eine **Tafelfusion** ist eine Untergruppen- oder eine Faktortafelfusion.

Im Gegensatz zu Untergruppentafelfusionen kann bei Faktortafelfusionen in Definition (1.28)(b)(ii) gefordert werden, dass die „eingeschränkten“ irreduziblen Charaktere auf H wieder irreduzibel sind. Grundlage dafür ist das folgende Lemma, das besagt, ist N ein Normalteiler von G , so existiert eine Bijektion zwischen den irreduziblen Charakteren von G/N und denjenigen von G , deren Kerne N enthalten.

(1.29) Lemma

Sei $N \trianglelefteq G$.

- (a) Ist χ ein Charakter von G mit $N \leq \text{Kern}(\chi)$, so ist χ konstant auf den Nebenklassen von N in G und die Abbildung $\hat{\chi} : G/N \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\hat{\chi}(gN) := \chi(g)$ ist ein Charakter von G/N .
- (b) Ist $\hat{\chi}$ ein Charakter von G/N , so ist die Abbildung $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $\chi(g) := \hat{\chi}(gN)$ ein Charakter von G .
In diesem Fall heißt χ die **Inflation** von $\hat{\chi}$ auf G .
- (c) In (a) und (b) gilt: χ ist irreduzibel genau dann, wenn $\hat{\chi}$ irreduzibel ist.
- (d) Ist χ ein Charakter von G , so ist $\text{Kern}(\chi) \trianglelefteq G$.

Beweis.

Für (a) – (c) siehe [Isa76], Lemma 2.22. Aus [Isa76], Lemma 2.19 folgt (d). \square

Der neue Begriff Tafelfusion wird weiter erläutert und es werden Zusammenhänge zu Fusionen aufgezeigt.

(1.30) Bemerkungen

(a) Wie in (1.27) bemerkt, ist die Idee bei Tafelfusionen, Abbildungen zwischen Charaktertafeln ohne Rückgriff auf die Gruppen zu definieren. Insbesondere wird also bei der Definition der Abbildungen in (1.28) keine Beziehung zwischen den Gruppen (Untergruppe – Gruppe oder Gruppe – Faktorgruppe) vorausgesetzt.

(b) Sei $H \leq G$ und $\iota : H \hookrightarrow G$ die Einbettung. Die induzierte Untergruppenfusion ι_* erfüllt die Bedingungen aus (1.28)(a), ist also auch eine Untergruppentafelfusion. Auch im Fall $H \not\leq G$ kann es Tafelfusionen zwischen H und G geben. Ein Beispiel hierzu wird in (1.33) angegeben. „Untergruppentafelfusionen“ sind Kandidaten für „echte“ Fusionen, insofern ist der Name motiviert.

Analoges gilt für Faktorfusionen und Faktortafelfusionen, das heißt die von Epimorphismen induzierten Faktorfusionen sind Faktortafelfusionen, während es umgekehrt Faktortafelfusionen zwischen den Tafeln zweier Gruppen geben kann, zwischen denen kein Epimorphismus existiert.

Dies motiviert folgende Konvention: Soll der Unterschied zwischen den Abbildungen aus Definition (1.18)(d) und (1.28)(c) deutlich gemacht werden, so wird im Weiteren von „echten“ Fusionen beziehungsweise Tafelfusionen gesprochen. Ansonsten wird lediglich von Fusionen gesprochen.

(c) Zu zwei Tafeln kann es durchaus mehrere Untergruppentafelfusionen geben, die sich „mehr oder weniger stark“ unterscheiden. In nachfolgender Bemerkung (1.31) und im nachfolgenden Beispiel (1.33) wird dies erläutert.

In (1.30)(c) deutet sich ein Zusammenhang zwischen Tafelautomorphismen und Fusionen an. In der folgenden Bemerkung wird dies intensiviert und eine Sprechweise eingeführt.

(1.31) Bemerkung

Sei H eine endliche Gruppe und F die Menge der Untergruppentafelfusionen oder die Menge der Faktortafelfusionen von $\text{Cl}(H)$ nach $\text{Cl}(G)$. Dann operiert $\text{TAut}(H) \times \text{TAut}(G)$ auf F durch $(\alpha_H, \alpha_G).f := \alpha_G \circ f \circ \alpha_H^{-1}$ für $f \in F$ und $\alpha_H \in \text{TAut}(H)$ sowie $\alpha_G \in \text{TAut}(G)$. Damit operieren auch $\text{TAut}(H)$ und $\text{TAut}(G)$ durch $\alpha_H.f := (\alpha_H, \text{id}_{\text{Cl}(G)}).f$ beziehungsweise $\alpha_G.f := (\text{id}_{\text{Cl}(H)}, \alpha_G).f$ auf F .

Liegen $f_1, f_2 \in F$ in einer Bahn unter der Operationen von $\text{TAut}(H) \times \text{TAut}(G)$ so sagen wir, dass sich f_1 und f_2 nur durch Tafelautomorphismen unterscheiden. Andernfalls werden f_1 und f_2 wesentlich verschieden genannt.

Bei der Berechnung von Charaktertafeln und Fusionen, die auch Bestandteil dieser Arbeit ist, näheres später dazu in Abschnitt 1.4, sind heutzutage Computer und Computeralgebrasysteme eine große Hilfe. Die Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit werden mit dem

Programm GAP durchgeführt; für Informationen dazu siehe [GAP05]. Um mit Charakteren, Fusionen und Potenzabbildungen effizient rechnen zu können, werden sie als Listen aufgefasst. Dies wird in der folgenden Bemerkung genauer beschrieben.

(1.32) Bemerkung

Sei $\text{tbl}(G)$ die Charaktertafel von G und seien $\text{Irr}(G), \text{Cl}(G)$ und $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ wie in Bemerkung (1.25). Sei H eine endliche Gruppe mit Charaktertafel $\text{tbl}(H)$ und sei F die Menge der Fusionen von $\text{Cl}(H)$ nach $\text{Cl}(G)$. Sei $\text{fus}_H^G \in F$. Die Gruppe H habe m Konjugiertenklassen.

Um die Handhabung der Charaktere, Fusionen und Potenzabbildungen (mit dem Computer) zu erleichtern, werden die Zeilen und Spalten von $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq k}$ von 1 bis k nummeriert und somit wird jedem irreduziblen Charakter und jeder Konjugiertenklasse eine Nummer zugewiesen.

Für χ_i schreiben wir $[\chi_i(C_1), \dots, \chi_i(C_k)]$.

Für fus_H^G schreiben wir $[a_1, \dots, a_m]$ mit $1 \leq a_j \leq k$ für alle $1 \leq j \leq m$. Dabei bedeutet $a_j = i$, dass die j -te Konjugiertenklasse von H unter fus_H^G auf die i -te Konjugiertenklasse von G abgebildet wird.

Für $\text{pow}_{p,G} \in \mathfrak{P}(G)$ schreiben wir $[p_1, \dots, p_k]$ mit analoger Interpretation wie bei fus_H^G .

Nach Bemerkung (1.31) operieren $\text{TAut}(H)$, $\text{TAut}(G)$ und $\text{TAut}(H) \times \text{TAut}(G)$ auf F . Dies kann wie folgt beschrieben werden: Schreibe $\alpha_G \in \text{TAut}(G)$ als Element von \mathcal{S}_k .

Nun ist $\alpha_G \cdot \text{fus}_H^G = \alpha_G \circ \text{fus}_H^G$ gegeben durch $[\alpha_G(a_1), \dots, \alpha_G(a_m)]$. Die Operation von $\text{TAut}(G)$ bewirkt also Permutationen der Spalten von $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq k}$. Entsprechend permutiert $\text{TAut}(H)$ die Spalten der von Θ_H induzierten Matrix: Fasse $\alpha_H \in \text{TAut}(H)$ als Element von \mathcal{S}_m auf, dann ist $\alpha_H \cdot \text{fus}_H^G = \text{fus}_H^G \circ \alpha_H^{-1}$ durch $[a_{\alpha_H^{-1}(1)}, \dots, a_{\alpha_H^{-1}(m)}]$ gegeben.

Bei Rechnungen in GAP ist dabei zu beachten, dass sämtliche Operationen in GAP von rechts durchgeführt werden. In dieser Arbeit sind jedoch lediglich die Bahnen der Operation von Interesse, so dass die Unterscheidung zwischen Links- und Rechtsoperation nachrangig ist. Es wird daher weiterhin die Schreibweise der Linksoperation verwendet.

Sind $\text{tbl}(G)$ und $\text{tbl}(H)$ isomorph, so können nach (1.26) Anordnungen von $\text{Irr}(G)$ und $\text{Cl}(G)$ sowie $\text{Irr}(H)$ und $\text{Cl}(H)$ gewählt werden, so dass die von Θ_G und Θ_H induzierten Matrizen gleich sind und $\mathfrak{P}(G)$ und $\mathfrak{P}(H)$ durch die gleichen Listen dargestellt werden. Somit kann in GAP für isomorphe Tafeln die gleiche Tafel verwendet werden.

Die folgenden Beispiele dienen zur Veranschaulichung.

(1.33) Beispiele

- (a) In Tabelle 1.1 sind die GAP-Bibliothekstafeln der alternierenden Gruppen \mathcal{A}_5 und \mathcal{A}_6 abgebildet. Die Tafeln lassen sich in drei Teile einteilen. Im ersten Teil sind die Primfaktorzerlegungen der Zentralisatorordnungen der Konjugiertenklassenvertreter gegeben. Der zweite Teil enthält die Potenzabbildungen $\mathfrak{P}(\mathcal{A}_5)$ und $\mathfrak{P}(\mathcal{A}_6)$, die nach Bemerkung (1.19)(b) genügen, sämtliche Potenzabbildungen von \mathcal{A}_5 beziehungsweise \mathcal{A}_6 zu bestimmen. Die ersten beiden Teile bilden den „Tafelkopf“. Der dritte Teil enthält die Werte der irreduziblen Charaktere.

Die Gruppe der Tafelautomorphismen der \mathcal{A}_5 wird erzeugt von der Permutation $(4, 5)$. Eine Vertauschung der Spalten 4 und 5 bewirkt eine Vertauschung von A und $*A$.

- (b) Untergruppentafelfusionen zwischen zwei Charaktertafeln können in GAP mit dem

A5						A6									
	2	2	2	.	.	.		2	3	3	.	.	2	.	.
	3	1	.	1	.	.		3	2	.	2	2	.	.	.
	5	1	.	.	1	1		5	1	1	1
		1a	2a	3a	5a	5b			1a	2a	3a	3b	4a	5a	5b
2P	1a	1a	3a	5b	5a		2P	1a	1a	3a	3b	2a	5b	5a	
3P	1a	2a	1a	5b	5a		3P	1a	2a	1a	1a	4a	5b	5a	
5P	1a	2a	3a	1a	1a		5P	1a	2a	3a	3b	4a	1a	1a	
X.1	1	1	1	1	1		X.1	1	1	1	1	1	1	1	
X.2	3	-1	.	A	*A		X.2	5	1	2	-1	-1	.	.	
X.3	3	-1	.	*A	A		X.3	5	1	-1	2	-1	.	.	
X.4	4	.	1	-1	-1		X.4	8	.	-1	-1	.	A	*A	
X.5	5	1	-1	.	.		X.5	8	.	-1	-1	.	*A	A	
							X.6	9	1	.	.	1	-1	-1	
							X.7	10	-2	1	1	.	.	.	

Dabei sind $A = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $*A = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Tabelle 1.1: Charaktertafeln von \mathcal{A}_5 und \mathcal{A}_6

Befehl `PossibleClassFusions` berechnet werden. Beispielsweise liefert dieser Befehl angewandt auf die GAP-Bibliothekstafeln der alternierenden Gruppen \mathcal{A}_5 und \mathcal{A}_6 vier (Untergruppen-)Tafelfusionen: $[[1, 2, 3, 6, 7], [1, 2, 3, 7, 6], [1, 2, 4, 6, 7], [1, 2, 4, 7, 6]]$. Die Tafelautomorphismen von \mathcal{A}_6 sind gegeben durch $\text{TAut}(\mathcal{A}_6) = \langle (3, 4), (6, 7) \rangle$. Die vier Tafelfusionen unterscheiden sich also lediglich durch Operation von $\text{TAut}(\mathcal{A}_6)$. In GAP können mittels der Routine `RepresentativesFusions` Vertreter von Bahnen, die jeweils durch die Operation von $\text{TAut}(\mathcal{A}_5)$, $\text{TAut}(\mathcal{A}_6)$ oder $\text{TAut}(\mathcal{A}_5) \times \text{TAut}(\mathcal{A}_6)$ bewirkt werden, ermittelt werden (vergleiche Bemerkung (1.31)). In diesem Beispiel berechnet GAP die Liste $[[1, 2, 3, 6, 7]]$, womit rechnerisch bestätigt ist, dass alle Tafelfusionen sich lediglich durch Operation von Tafelautomorphismen unterscheiden. Nach [CCN⁺03] enthält die \mathcal{A}_6 jedoch zwei Konjugiertenklassen von Untergruppen des Isomorphietyps \mathcal{A}_5 . Bezeichne Konjugiertenklassenvertreter mit \mathcal{A}_5^1 und \mathcal{A}_5^2 , wobei nach [CCN⁺03] eine von ihnen Elemente der Konjugiertenklasse 3a und die andere Elemente der Konjugiertenklasse 3b enthält. Dies spiegelt sich bei den Fusionen $\text{fus}_{\mathcal{A}_5^1}^{\mathcal{A}_6}$ und $\text{fus}_{\mathcal{A}_5^2}^{\mathcal{A}_6}$ wider: Für $\text{fus}_{\mathcal{A}_5^1}^{\mathcal{A}_6}$ kann eine der obigen vier Tafelfusionen gewählt werden (da sie wie oben gesehen gleichwertig sind), etwa die erste: $[1, 2, 3, 6, 7]$. Dies bedeutet, dass die Konjugiertenklasse mit den Elementen der Ordnung drei auf die Klasse 3a abgebildet wird, das heißt, bei dieser Namensgebung enthält \mathcal{A}_5^1 Elemente der Klasse 3a. Für die Fusion $\text{fus}_{\mathcal{A}_5^2}^{\mathcal{A}_6}$ ist nun festgelegt, dass die Klasse der Elemente der Ordnung drei auf die Klasse 3b abgebildet werden muss, damit kommen als Fusionen lediglich

- $[1, 2, 4, 6, 7]$ und $[1, 2, 4, 7, 6]$ in Frage. Wegen $\text{TAut}(\mathcal{A}_5) = \langle (4, 5) \rangle$ sind beide möglich. Allgemein und detailliert wird das Vorgehen in solch einer Situation in Abschnitt 5.2 geschildert.
- (c) Seien $U, V \leq G$, die in G konjugiert zueinander sind. Nach (1.26)(b) und (1.26)(d) können zugehörige Charaktertafeln $\text{tbl}(U)$ und $\text{tbl}(V)$ gewählt werden, so dass die von Θ_U und Θ_V induzierten Matrizen gleich sind. In dieser Situation kann darüber hinaus mit der Schreibweise aus (1.32) für fus_U^G und fus_V^G die gleiche Fusion gewählt werden.
- (d) Es folgt ein Beispiel, dass Tafelfusionen auch wesentlich verschieden sein können:
Die Darstellungsgruppen der \mathcal{A}_5 und der Jankogruppe J_2 seien mit $2.\mathcal{A}_5$ beziehungsweise $2.J_2$ bezeichnet. Mit Hilfe von [CCN⁺03] und Methoden, die in Kapitel 2 vorgestellt werden, kann man $2.\mathcal{A}_5 \leq 2.J_2$ zeigen.
Zwischen den zugehörigen Tafeln gibt es vier Untergruppentafelfusionen, wobei im Gegensatz zu (b) bei der Operation von $\text{TAut}(2.\mathcal{A}_5) \times \text{TAut}(2.J_2)$ auf den Fusionen zwei Bahnen mit je zwei Fusionen entstehen; es gibt also Fusionen, die wesentlich verschieden sind. Man kann weiter zeigen, dass Vertreter beider Bahnen „echt“ sind; eine wird durch die Einbettung einer maximalen Untergruppe $2.\mathcal{A}_5$ in $2.J_2$ realisiert, die andere stammt von einer nichtmaximalen Untergruppe $2.\mathcal{A}_5$ von $2.J_2$.
Ein weiteres Beispiel liefert die Gruppe $U_6(2)$, die in Abschnitt 6.4 genauer untersucht wird.
- (e) Es kann Untergruppentafelfusionen von H nach G geben, obwohl H keine Untergruppe von G ist:
Rechnungen mit GAP ergeben, dass es zwei Untergruppentafelfusionen von \mathcal{S}_6 in die sporadische einfache Gruppe M_{22} gibt. Allerdings ist $\mathcal{S}_6 \not\leq M_{22}$, da es keine Einbettung von \mathcal{S}_6 in eine maximale Untergruppe von M_{22} gibt.
Ein „prominentes“ Beispiel liefern auch das Monster M und die Jankogruppe J_1 : Die Tafeln dieser Gruppen erlauben eine Untergruppentafelfusion von J_1 nach M , jedoch hat es einige Zeit gedauert, bis bewiesen werden konnte, dass $J_1 \not\leq M$ gilt. Siehe dazu die Bemerkung in [CCN⁺03], Seite 231, und [BN95].

1.3 Gruppen mit exzeptionellem Multiplikator

Für eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, hierzu zählen unter anderem die klassischen Gruppen, das heißt die linearen, unitären, symplektischen und orthogonalen Gruppen (für nähere Informationen siehe Paragraph 47 in [Asc00] und Kapitel 3 in [CCN⁺03]), ist der Schurische Multiplikator das direkte Produkt von Gruppen der Ordnung d („diagonaler Multiplikator“) und e („exzeptioneller Multiplikator“). Dabei sind d und e eindeutig bestimmt und lassen sich durch Parameter der Gruppe berechnen. Somit ist insbesondere die Ordnung des Multiplikators bekannt.

Nur bei endlich vielen Gruppen vom Lie-Typ ist $e \neq 1$. Man sagt, diese endlich vielen Ausnahmegruppen haben einen „exzeptionellen Multiplikator“. Sie sind häufig von besonderem Interesse, so auch in der vorliegenden Arbeit. In der Tabelle 1.2 sind sie zusammengefasst. Es wird die Bezeichnung der Gruppe in der Terminologie der Gruppen vom Lie-Typ und

ihr – wenn vorhanden – „klassischer“ Name, sowie der Wert von e und ihr Multiplikator angegeben.

(1.34) Bemerkungen

- (a) Bis auf die Gruppe $B_2(2) \cong \mathcal{S}_6$ sind alle Gruppen der Tabelle 1.2 einfach.
- (b) Der Multiplikator der alternierenden Gruppen \mathcal{A}_n ist bis auf endlich viele Ausnahmefälle isomorph zu C_2 . Für $n \leq 3$ ist er trivial, und für $n \in \{6, 7\}$ ist er isomorph zu C_6 , siehe dazu Theorem 2.12.5 in [Kar87].
Nach Satz II.2.4 in [Hup67] ist \mathcal{A}_n für $n \geq 5$ einfach.
- (c) Nach [CCN⁺03] ist $O_7(2) \cong S_6(2)$.

1.4 Die Aufgabe

Wie bereits in Abschnitt 1.2 erwähnt, wird das Computeralgebrasystem GAP für diese Arbeit verwendet. Es hat eine Bibliothek mit Charaktertafeln gewisser Gruppen. Sie wird in der vorliegenden Arbeit benutzt und erweitert.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel ist der Atlas of finite groups, siehe [CCN⁺03]. Gruppen, die in [CCN⁺03] beschrieben sind, werden im Folgenden kurz Atlasgruppen genannt.

Gegeben sei das Setup (1.17), wobei G und \mathfrak{G} Atlasgruppen seien. Für die meisten Atlasgruppen und für alle im Rahmen dieser Arbeit auftretenden Gruppen G und \mathfrak{G} sind in der GAP-Bibliothek eine Charaktertafel vorhanden, welche mit $\text{tbl}(G)$ beziehungsweise $\text{tbl}(\mathfrak{G})$ bezeichnet werden. In der Bibliothek ist ebenfalls jeweils eine Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{G}}^G$ gespeichert. In der Regel sind die Charaktertafeln der maximalen Untergruppen von \mathfrak{G} noch nicht in der GAP-Bibliothek vorhanden. Sie zu berechnen, so dass sie in die Bibliothek aufgenommen werden können, ist ein Ziel dieser Diplomarbeit. Im Folgenden wird die Aufgabenstellung präzisiert.

Ein wichtiges Instrument ist der folgende Satz, der eine Bijektion zwischen den maximalen Untergruppen von G und denen von \mathfrak{G} herstellt. Er gilt bereits für beliebige Schursche Erweiterungen von endlichen, nicht notwendig einfachen Gruppen.

Gruppe	e	Multiplikator	Gruppe	e	Multiplikator
$A_1(4) \cong \mathcal{A}_5$	2	C_2	${}^2B_2(8) \cong Sz(8)$	2^2	$C_2 \times C_2$
$A_1(9) \cong \mathcal{A}_6$	3	C_6	$B_3(2) \cong O_7(2)$	2	C_2
$A_2(2) \cong L_3(2)$	2	C_2	$B_3(3) \cong O_7(3)$	3	C_6
$A_2(4) \cong L_3(4)$	4^2	$C_4 \times C_4 \times C_3$	$C_3(2) \cong S_6(2)$	2	C_2
$A_3(2) \cong \mathcal{A}_8$	2	C_2	$D_4(2) \cong O_8^+(2)$	2^2	$C_2 \times C_2$
${}^2A_3(2) \cong U_4(2)$	2	C_2	$G_2(3)$	3	C_3
${}^2A_3(3) \cong U_4(3)$	3^2	$C_4 \times C_3 \times C_3$	$G_2(4)$	2	C_2
${}^2A_5(2) \cong U_6(2)$	2^2	$C_3 \times C_2 \times C_2$	$F_4(2)$	2	C_2
$B_2(2) \cong \mathcal{S}_6$	2	C_2	${}^2E_6(2)$	2^2	$C_3 \times C_2 \times C_2$

Tabelle 1.2: Gruppen mit exzeptionellen Multiplikator; aus [CCN⁺03], Seite xvi

(1.35) Satz

Sei G eine endliche (nicht notwendig einfache) Gruppe und (H, π) eine Schursche Erweiterung von G . Dann ist $Z := \text{Kern}(\pi)$ in jeder maximalen Untergruppe von H enthalten und es gilt für $U \leq G$:

$$U \leq G \text{ maximal} \iff \mathfrak{U} := \pi^{-1}(U) \leq H \text{ maximal.}$$

In diesem Sinne wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit häufig von einem Paar maximaler Untergruppen (U, \mathfrak{U}) oder von korrespondierenden maximalen Untergruppen gesprochen.

Beweis.

Sei $V \leq H$ maximal. Zeige $Z \leq V$. Nimm dazu an, dass dies nicht gilt. Dann ist $W := \langle V, Z \rangle = VZ \not\leq V$. Wegen der Maximalität von V ist also $W = H$. Da Z zentral ist, ist $V \trianglelefteq H$ und es ist $H/V \cong Z/Z \cap V$ abelsch. Also ist $H' \leq V$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, da $Z \leq H'$ ist.

Nun zu der Äquivalenzaussage.

Sei zunächst $U \leq G$ maximal. Sei $\pi^{-1}(U) \not\leq T \leq H$. Es ist $U \not\leq \pi(T) \leq G$. Wegen der Maximalität von U folgt $T/Z = \pi(T) = G = H/Z$, also $T = H$; das heißt $\pi^{-1}(U)$ ist maximal in H .

Nun sei umgekehrt $\pi^{-1}(U) \leq H$ maximal. Sei $U \not\leq S \leq G$. Da π surjektiv ist, ist $\pi^{-1}(U) \not\leq \pi^{-1}(S)$. Wegen der Maximalität von $\pi^{-1}(U)$ ist somit $\pi^{-1}(S) = H$. Wiederum da π surjektiv, folgt schließlich: $S = \pi(\pi^{-1}(S)) = \pi(H) = G$; das heißt U ist maximal in G . \square

Damit kann das Setup (1.17) erweitert werden:

(1.36) Setup

Sei G einfach und (\mathfrak{G}, π) eine Schursche Erweiterung von G mit $M := \text{Kern}(\pi)$, vergleiche (1.17). Weiter sei $U \leq G$ eine maximale Untergruppe von G und $\mathfrak{U} := \pi^{-1}(U)$ die zu U korrespondierende maximale Untergruppe von \mathfrak{G} , gemäß Satz (1.35). Insbesondere ist (\mathfrak{U}, M) eine zentrale Erweiterung von U .

Gegeben sei das Setup (1.36).

Falls die Tafeln für U oder für das Urbild \mathfrak{U} noch nicht Bestandteil der GAP-Bibliothek sind, so sollen diese berechnet und gespeichert werden, so dass sie in die GAP-Bibliothek aufgenommen werden können. Zu den Tafeln von U und \mathfrak{U} „gehören“ Fusionen fus_U^G beziehungsweise $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$ und $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^U$. Diese sollen zueinander passen (kompatibel sein), in dem Sinne, dass folgendes Diagramm (*) kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(U) & \xrightarrow{\text{fus}_U^G} & \text{Cl}(G) \\ \text{fus}_{\mathfrak{U}}^U \uparrow & & \uparrow \text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}} \\ \text{Cl}(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}} & \text{Cl}(\mathfrak{G}) \end{array} \quad (*)$$

Da nach den Beispielen aus (1.33) im Allgemeinen mehrere Tafeln und Fusionen existieren, ist festzulegen, welche Tafeln und Fusionen im Diagramm (*) gemeint sind:

Wenn die Tafeln in der Bibliothek vorhanden sind, so sind die vorhandenen für das Diagramm zu betrachten. Ist eine der Tafeln von U oder \mathfrak{U} noch nicht in der Bibliothek, so ist mit $\text{tbl}(U)$ beziehungsweise $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ die neu „berechnete Tafel“ gemeint. Um die analoge Frage für die Fusionen zu klären, seien $L, K \in \{U, \mathfrak{U}, G, \mathfrak{G}\}$. Ist ein Homomorphismus $L \rightarrow K$ gegeben (zum Beispiel können explizite Darstellungen der Gruppen gegeben sein und der Homomorphismus ist die natürliche Einbettung), so ist dadurch die Fusion zwischen den Tafeln (und somit der zugehörige Pfeil in (*)) eindeutig gegeben. In Kapitel 3 wird darauf näher eingegangen. Ist dies jedoch nicht der Fall, so ist der Pfeil in (*) als eine Tafelfusion im Sinne von Definition (1.28) zu verstehen. Da es nach Beispiel (1.33) sein kann, dass es zu zwei Tafeln mehrere Tafelfusionen gibt, ist es eventuell nötig, eine Wahl unter den möglichen Tafelfusionen zu treffen. Hierbei ist unter anderem auf die Kommutativität des Diagramms (*) zu achten, detailliert wird dieser Frage vor Allem in Kapitel 5 nachgegangen.

Diese „Prozedur“ soll für alle maximalen Untergruppen von G und \mathfrak{G} durchgeführt werden, wobei es nach Beispiel (1.33)(c) ausreicht, sich auf Vertreter der Konjugiertenklassen maximaler Untergruppen zu beschränken. Für diese Arbeit ist daher stets „maximale Untergruppe“ mit „Vertreter einer Konjugiertenklasse maximaler Untergruppen“ gleichzusetzen. Bei Betrachtung mehrerer Untergruppen ist zusätzlich auf Konsistenz zwischen den Tafeln der einzelnen Untergruppen zu achten ist. Dies wurde schon in Beispiel (1.33)(b) deutlich und wird in Abschnitt 5.2 erläutert.

Häufig ist eine Tafel von U bereits in der GAP-Bibliothek vorhanden ist, während eine Tafel für \mathfrak{U} neu zu berechnen ist.

Wie oben schon erwähnt, sollen neu berechnete Tafeln in die GAP-Bibliothek aufgenommen werden. Dazu muss der Tafel ein Name gegeben werden, der die Struktur der zugehörigen Gruppe beschreibt. Bei der Untergruppe U ist dies einfach, es wird der Name von U aus [CCN⁺03] übernommen. Die Gruppe \mathfrak{U} ist von der Form $M.U$, zur Erklärung der Notation siehe Anhang A. Als Name kann somit $M.U$ gewählt werden, jedoch lohnt es sich in einigen Fällen, die Struktur von \mathfrak{U} genauer zu untersuchen. Es kann nämlich sein, dass ein genauerer Name für \mathfrak{U} angegeben werden kann, zum Beispiel falls $\mathfrak{U} = M \times U$ gilt. Dieser Fall des direkten Produktes ist nicht nur besonders „hübsch“, sondern ermöglicht auch eine effiziente Berechnung und Speicherung der Tafel von \mathfrak{U} und ist daher von besonderem Interesse.

Zusammengefasst lautet also das Thema in Kurzform:

Berechnung der Charaktertafeln der maximalen Untergruppen der Darstellungsgruppen ausgewählter einfacher Atlasgruppen (unter anderem Gruppen mit exzeptionellem Multiplikator, vergleiche Abschnitt 1.3) und – falls noch nicht in der GAP-Bibliothek gespeichert – auch der Tafeln der zugehörigen maximalen Untergruppen dieser Atlasgruppen. Weiterhin sollen Fusionen zwischen allen „beteiligten“ Gruppen berechnet werden, so dass das Diagramm (*) kommutiert. Schließlich sollen (möglichst genaue) Namen für die Tafeln der maximalen Untergruppen angegeben werden.

Nachfolgend ein Überblick über die weitere Vorgehensweise und den Inhalt der nächsten Kapitel.

In Kapitel 2 werden mittels Kenntnissen über U und M Aussagen über die Struktur von

\mathcal{U} gemacht. Insbesondere werden hinreichende Bedingungen für den besonders „hübschen“ Spezialfall $\mathcal{U} = M \times U$ angegeben.

In GAP gibt es mit `SchurCover` die Möglichkeit, die Darstellungsgruppe von nicht „allzu großen“ Gruppen zu berechnen. Weiterhin kann man mit GAP die maximalen Untergruppen von nicht „allzu großen“ Gruppen bestimmen. Auf diese Weise kann man also versuchen, über die Gruppen zu den Tafeln und Fusionen zu gelangen, siehe dazu Kapitel 3.

In Kapitel 4 werden Möglichkeiten vorgestellt, Untergruppen in GAP gezielt zu erzeugen, wovon nachfolgend häufig Gebrauch gemacht wird.

In Kapitel 5 werden mittels der Ergebnisse der Kapitel 2 und 4 Methoden entwickelt, die das Berechnen der Tafeln ohne die mächtigen Werkzeuge von Kapitel 3 erlauben. Weiterhin wird erläutert, wie die Tafelfusionen für das Diagramm (*) bestimmt werden können, und zwar ohne Verwendung eines Homomorphismus. Damit können auch „größere“ Gruppen untersucht werden.

Ausgewählte Gruppen werden in Kapitel 6 vorgestellt. Weiterhin werden in Kapitel 6 die in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse zusammengefasst.

Kapitel 2

Struktursätze

Für das gesamte Kapitel sei das Setup (1.36) gegeben.

In diesem Kapitel werden mit Hilfe von Kenntnissen über U und M Aussagen über die Struktur von \mathfrak{U} gemacht, was als ein Ziel dieser Arbeit in Abschnitt 1.4 formuliert wurde. Ein besonders schöner Sonderfall liegt zum Beispiel vor, wenn $\mathfrak{U} \cong M \times U$ gilt; hierfür werden hinreichende Bedingungen angegeben.

2.1 U und M haben teilerfremde Ordnung

Mit dem folgenden Satz kann eine hinreichende Bedingung für $\mathfrak{U} \cong M \times U$ formuliert werden. Der Beweis nutzt wesentlich den *Satz von Schur und Zassenhaus*, der zum Beispiel in [KS98], 6.2.1, zu finden ist.

(2.1) Satz (Schur-Zassenhaus-Argument)

Seien V, Z Gruppen mit $\text{ggT}(|Z|, |V|) = 1$ und (H, Z) eine zentrale Erweiterung von V . Dann ist $H \cong Z \times V$.

Beweis.

Es ist insbesondere $Z \trianglelefteq H$. Wegen $\text{ggT}(|Z|, |H/Z|) = \text{ggT}(|Z|, |V|) = 1$ existiert nach dem *Satz von Schur und Zassenhaus* eine Untergruppe $K \leq H$ mit $H = KZ$ und $K \cap Z = \{1\}$. Damit ist $K \cong H/Z \cong V$.

Da Z zentral ist, vertauscht Z mit K (sogar elementweise). Daraus folgt $K \trianglelefteq H$, und damit die Behauptung. \square

Dies lässt sich direkt auf die Situation in (1.36) anwenden, und es folgt das

(2.2) Korollar

Sei $U \leq G$ mit $\text{ggT}(|M|, |U|) = 1$. Dann ist $\mathfrak{U} \cong M \times U$.

2.2 U ist perfekt

Unter der Voraussetzung, dass U perfekt ist, ist ebenfalls eine Aussage über die Struktur von \mathfrak{U} möglich. Der folgende Satz ist dazu grundlegend.

(2.3) Satz

Sei V perfekt und Z eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung. Weiter sei (H, Z) eine zentrale Erweiterung von V . Dann ist $H \cong V \times Z$ oder (H, Z) ist eine Schursche Erweiterung von V .

Beweis.

Sei (H, Z) keine Schursche Erweiterung von V . Dann ist $Z \not\leq H'$, also $H' \cap Z \neq Z$. Nach Voraussetzung an Z folgt $H' \cap Z = \{1\}$. Weiter ist $H/H'Z \cong (H/Z)/(H'Z/Z)$ eine abelsche Faktorgruppe von V . Da V perfekt ist, ist somit $H/H'Z \cong \{1\}$. Es folgt $H'Z = H$, also $H \cong H' \times Z$ und $H' \cong V$. \square

Auch hier kann man Satz (2.3) sofort auf (1.36) anwenden:

(2.4) Korollar

Sei $U \leq G$ eine perfekte Untergruppe von G und sei M zyklisch von Primzahlordnung. Dann ist $\mathfrak{U} \cong M \times U$ oder (\mathfrak{U}, M) ist eine Schursche Erweiterung von U .

Gegeben seien die Voraussetzungen von Satz (2.3). Ist die Ordnung des Multiplikators von V bekannt, so kann eine hinreichende Bedingung für den Fall des direkten Produktes in (2.3) angegeben werden, die leicht zu überprüfen ist:

(2.5) Satz

Seien V , Z und (H, Z) wie in (2.3). Weiter gelte $|Z| \nmid |M(V)|$. Dann ist $H \cong V \times Z$.

Beweis.

Nach (2.3) genügt es zu zeigen, dass (H, Z) keine Schursche Erweiterung von V ist. Dies folgt aber aus (1.14). \square

2.3 U ist „fast perfekt“

Im vorherigen Abschnitt war die Perfektheit von U eine wichtige Voraussetzung. Dies soll nun so abgeschwächt werden, dass U lediglich die Form $U = S.P$ (Notation im Anhang A erklärt) haben soll, wobei S eine perfekte Gruppe ist und P eine p -Gruppe zur Primzahl p ist. In diesem Sinne ist also U „fast perfekt“. Zunächst aber folgt ein vorbereitender Satz.

(2.6) Satz

Sei V von der Form $S.P$, wobei S eine endliche Gruppe und P eine p -Gruppe zur Primzahl p seien. Sei Q eine abelsche Gruppe mit $\text{ggT}(p, |Q|) = 1$. Weiter sei (H, Q) eine zentrale Erweiterung von V mit zugehörigem Epimorphismus σ . Ferner sei $\sigma^{-1}(S) = Q \times \hat{S}$ und \hat{S} charakteristisch in $Q \times \hat{S}$. Dann ist $H \cong Q \times V$.

Beweis.

Wegen $S \trianglelefteq V$ ist $Q \times \hat{S} \trianglelefteq H$. Da \hat{S} eine charakteristische Untergruppe von $Q \times \hat{S}$ ist, ist \hat{S} ein Normalteiler von H . Der zu Q isomorphe Normalteiler $\hat{Q} := (Q \times \hat{S})/\hat{S}$ von H/\hat{S} besitzt wegen $\text{ggT}(p, |Q|) = 1$ nach dem *Satz von Schur und Zassenhaus* ein Komplement \tilde{S}/\hat{S} . Dieses ist normal in H/\hat{S} , weil \hat{Q} zentral ist. Somit ist auch \tilde{S} normal in H . Wegen $\tilde{S} \cap (Q \times \hat{S}) = \hat{S}$ folgt $\tilde{S} \cap Q = \{1\}$. Aufgrund von $\tilde{S} \cong H/Q \cong V$ folgt die Behauptung. \square

Eine Kombination der Sätze (2.5) und (2.6) liefert eine nützliche Anwendung.

(2.7) Korollar

Sei $U = S.P \leq G$ wobei S eine perfekte Gruppe und P wie in (2.6) seien. Weiter sei M von Primzahlordnung q mit $q \neq p$. Ferner gelte $q \nmid |M(S)|$. Dann ist $\mathfrak{U} \cong M \times U$.

Beweis.

Nach (1.36) ist (\mathfrak{U}, M) eine zentrale Erweiterung von U , folglich ist $(\pi^{-1}(S), M)$ eine zentrale Erweiterung von S . Damit ist $\pi^{-1}(S) \cong M \times S$ nach (2.5). Schließlich ist S charakteristisch in $M \times S$, da S einziger Normalteiler von $M \times S$ der Ordnung $|S|$ ist. Damit folgt die Behauptung aus (2.6). \square

Bei den bisherigen Untersuchungen war eine perfekte Gruppe S Normalteiler in U mit Faktorgruppe P . Nun soll dies umgekehrt sein, das heißt P ist Normalteiler von U mit Faktorgruppe S . Dies ist für die Anwendungen ebenfalls von Interesse und man erhält mit ähnlichen Argumenten ähnliche Ergebnisse. Zunächst folgt ein vorbereitender Satz, analog zu (2.6).

(2.8) Satz

Sei V von der Form $P.S$, wobei S eine endliche Gruppe und P eine p -Gruppe zur Primzahl p seien. Sei Q eine abelsche Gruppe mit $\text{ggT}(p, |Q|) = 1$. Weiter sei (H, Q) eine zentrale Erweiterung von V . Ferner gelte $K = Q \times S$ für jede zentrale Erweiterung (K, Q) von S . Dann ist $H \cong Q \times V$.

Beweis.

Nach Voraussetzung existiert ein Normalteiler $\tilde{Q} \trianglelefteq H$ mit $\tilde{Q}/Q = P$. Da Q in H zentral ist, ist (\tilde{Q}, Q) eine zentrale Erweiterung von P . Aus (2.1) folgt somit $\tilde{Q} = Q \times \hat{P}$. Da \hat{P} eine charakteristische Untergruppe von $Q \times \hat{P}$ ist (\hat{P} ist einziger Normalteiler von $Q \times \hat{P}$ der Ordnung $|P|$), ist \hat{P} normal in H . Somit ist $(H/\hat{P}, \tilde{Q}/\hat{P})$ isomorph zu einer zentralen Erweiterung von S , nach Voraussetzung ist also $H/\hat{P} = \tilde{Q}/\hat{P} \times \tilde{P}/\hat{P}$. Wie im Beweis von (2.6) zeigt man, dass \tilde{P} ein Komplement zu Q in H ist. Da Q zentral in H ist, folgt $H = Q \times \tilde{P}$. Wegen $\tilde{P} \cong H/Q \cong V$ folgt die Behauptung. \square

Nun folgt ein Korollar, das für die Anwendung sehr nützlich ist, analog zu (2.7).

(2.9) Korollar

Sei $U = P.S \leq G$ wobei P eine p -Gruppe zur Primzahl p und S eine perfekte Gruppe sei. Weiter sei M von Primzahlordnung $q \neq p$ und es gelte $q \nmid |M(S)|$. Dann ist $\mathfrak{U} \cong M \times U$.

Beweis.

Ist (K, M) eine zentrale Erweiterung von S , so ist $K \cong M \times S$ nach (2.5). Die Behauptung folgt mit (2.8). \square

2.4 U ist isomorph zu \mathcal{A}_n oder \mathcal{S}_n

In diesem Abschnitt werden die bisherigen Ergebnisse dazu verwendet, Aussagen über die Struktur von \mathfrak{U} zu machen, falls $U \cong \mathcal{A}_n$ oder $U \cong \mathcal{S}_n$ ist.

Dabei wird sich zunächst dem einfachen Fall $U \cong \mathcal{A}_n$ zugewandt. Anschließend wird der Begriff der Isoklinie zwischen Gruppen eingeführt. Dieses Konzept hat eigenständige Bedeutung, dient hier aber vor Allem als Voraussetzung zur Untersuchung des Falls $U \cong \mathcal{S}_n$.

(2.10) Satz

Gegeben sei das Setup (1.36) mit $U \cong \mathcal{A}_n$, $n \geq 5$ und M zyklisch von Primzahlordnung.

(a) $M \cong C_2$.

Dann ist \mathfrak{U} entweder isomorph zu $M \times \mathcal{A}_n$ oder (\mathfrak{U}, M) ist eine Schursche Erweiterung von \mathcal{A}_n , wobei für $n = 5$ und $n \geq 8$ damit bereits \mathfrak{U} die Darstellungsgruppe von \mathcal{A}_n ist.

(b) $M \not\cong C_2$.

(i) Ist $M \cong C_3$ und $n \in \{6, 7\}$, so ist entweder $\mathfrak{U} \cong M \times \mathcal{A}_n$ oder (\mathfrak{U}, M) ist eine Schursche Erweiterung von \mathcal{A}_n .

(ii) Ist $M \cong C_3$ und $n \geq 8$, so ist $\mathfrak{U} \cong M \times \mathcal{A}_n$.

(iii) Ist $M \not\cong C_3$, so ist $\mathfrak{U} \cong M \times \mathcal{A}_n$.

Beweis.

Nach (1.36) ist (\mathfrak{U}, M) eine zentrale Erweiterung von U . Gemäß (1.34)(b) ist \mathcal{A}_n einfach und es gilt $M(\mathcal{A}_n) \cong C_2$ für $n = 5$ und $n \geq 8$ sowie $M(\mathcal{A}_6) \cong M(\mathcal{A}_7) \cong C_6$.

Damit folgen die Behauptungen aus (2.3) und (2.5) sowie aus (1.8) und (1.15) zur Charakterisierung einer Darstellungsgruppe. \square

Nun wird die Isoklinie zweier Gruppen erklärt.

Sei G eine beliebige Gruppe. Der Kommutator $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ von zwei Elementen $x, y \in G$ bleibt unverändert, wenn x oder y mit Zentrums-elementen multipliziert wird. Auf diese Weise wird eine Kommutatorabbildung

$$\kappa_G : G/Z(G) \times G/Z(G) \longrightarrow G', (xZ, yZ) \longmapsto [x, y]$$

induziert. Zwei Gruppen heißen isoklin, wenn sie die „gleiche“ Kommutatorabbildung haben; in der folgenden Definition wird dies präzisiert.

(2.11) Definition

Zwei beliebige Gruppen G und H heißen **isoklin**, falls zwei Isomorphismen

$$\phi : G/Z(G) \longrightarrow H/Z(H) \text{ und } \psi : G' \longrightarrow H'$$

existieren mit der Eigenschaft:

Ist $\phi(xZ(G)) = x'Z(H)$ und $\phi(yZ(G)) = y'Z(H)$, so ist $\psi([x, y]) = [x', y']$.

Mit anderen Worten, folgendes Diagramm soll kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} G/Z(G) \times G/Z(G) & \xrightarrow{\phi \times \phi} & H/Z(H) \times H/Z(H) \\ \kappa_G \downarrow & & \downarrow \kappa_H \\ G' & \xrightarrow{\psi} & H' \end{array}$$

(2.12) Bemerkung

Ein Isomorphismus zwischen G und H induziert Isomorphismen ϕ und ψ , die der Eigenschaft in obiger Definition (2.11) genügen. Somit sind also isomorphe Gruppen insbesondere isoklin.

Im Zusammenhang mit Darstellungsgruppen gilt folgendes wichtige Resultat.

(2.13) Satz

Je zwei Darstellungsgruppen einer endlichen Gruppe sind isoklin.

Beweis.

Siehe 2.13.9 in [Kar87]. □

Die Darstellungsgruppen der symmetrischen Gruppen werden im folgenden Satz beschrieben.

(2.14) Satz

Für $n \geq 4$ ist $M(S_n) \cong C_2$; für $n \leq 3$ ist $M(S_n) \cong \{1\}$.

Die Darstellungsgruppe der S_6 ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Für $n \geq 4, n \neq 6$ gibt es zwei Isomorphieklassen von Darstellungsgruppen der S_n . Je zwei Darstellungsgruppen von S_n sind isoklin.

Beweis.

Die Aussagen über den Multiplikator und die Isomorphieklassen finden sich in [Suz82], 3.2.21. □

Bevor ein Satz formuliert wird, der die zentralen Erweiterungen $(2.S_n, 2)$ von S_n beschreibt, wird ein vorbereitendes Lemma angegeben.

(2.15) Lemma

Sei G perfekt und \hat{G} eine Gruppe mit $G \trianglelefteq \hat{G}$ und $P := \hat{G}/G$ abelsch. Weiter sei (H, π) eine zentrale Erweiterung von \hat{G} mit $Z := \text{Kern}(\pi)$. Schließlich sei $K := \pi^{-1}(G)$. Ist (K, Z) eine Schursche Erweiterung von G , so gilt $H' = K$.

Beweis.

Da G normal in \hat{G} ist, ist K normal in H . Weiter ist $H/K \cong P$ nach Voraussetzung abelsch, also ist $H' \leq K$. Nach (1.6)(b) ist $K' = K$. Damit folgt $K = K' \leq H' \leq K$ und somit die Behauptung. \square

Es folgt die angekündigte Aussage über die zentralen Erweiterungen $(2.\mathcal{S}_n, 2)$ von \mathcal{S}_n .

(2.16) Satz

Es sei (H, Z) eine zentrale Erweiterung von \mathcal{S}_n , $n \geq 5$ und $Z \cong C_2$. Dann ist H isomorph zu einer Darstellungsgruppe von \mathcal{S}_n oder H hat einen Normalteiler der Struktur $Z \times \mathcal{A}_n$.

Beweis.

Sei $\pi : H \rightarrow H/Z \cong \mathcal{S}_n$ der kanonische Epimorphismus und sei $K := \pi^{-1}(\mathcal{A}_n)$. Nach (1.34) ist \mathcal{A}_n einfach, somit ist wegen (2.3) entweder $K \cong Z \times \mathcal{A}_n$ oder (K, Z) ist eine Schursche Erweiterung von \mathcal{A}_n .

Im ersten Fall hat H einen Normalteiler der geforderten Struktur.

Im zweiten Fall ist $H' = K$ nach (2.15), also ist $Z \leq H'$. Damit ist (H, Z) eine Schursche Erweiterung von \mathcal{S}_n . Aus (1.8) und (2.14) folgt daraus die Behauptung. \square

Nun kann auch für $U \cong \mathcal{S}_n$ das Urbild \mathfrak{U} analog zu (2.10) detailliert beschrieben werden.

(2.17) Korollar

Es gelten die Bezeichnungen aus Satz (2.14).

Weiter sei das Setup (1.36) gegeben mit $U \cong \mathcal{S}_n$, $n \geq 5$ und M zyklisch von Primzahlordnung.

(a) $M \cong C_2$.

Dann ist \mathfrak{U} entweder isomorph zu einer Darstellungsgruppe von \mathcal{S}_n oder \mathfrak{U} hat einen Normalteiler der Struktur $M \times \mathcal{A}_n$.

(b) $M \not\cong C_2$.

(i) Ist $M \cong C_3$ und $n \in \{6, 7\}$, so ist entweder $\mathfrak{U} \cong M \times \mathcal{S}_n$ oder \mathfrak{U} enthält einen Normalteiler K , so dass (K, M) eine Schursche Erweiterung von \mathcal{A}_n ist. In diesem Fall ist $\mathfrak{U}' = K$ und (\mathfrak{U}, M) ist eine Schursche Erweiterung von \mathcal{S}_n .

(ii) Ist $M \cong C_3$ und $n \geq 8$ oder $n = 5$, so ist $\mathfrak{U} \cong M \times \mathcal{S}_n$.

(iii) Ist $M \not\cong C_3$, so ist $\mathfrak{U} \cong M \times \mathcal{S}_n$.

Beweis.

Nach (1.36) ist (\mathfrak{U}, M) eine zentrale Erweiterung von U . Gemäß (1.34) ist \mathcal{A}_n einfach und es gilt $M(\mathcal{A}_n) \cong C_2$ für $n = 5$ und $n \geq 8$ sowie $M(\mathcal{A}_6) \cong M(\mathcal{A}_7) \cong C_6$.

Damit folgt (a) aus (2.16) und (b).(ii) und (b).(iii) folgen aus (2.7). Für die Aussage in (b).(i) stelle fest, dass \mathfrak{U} einen Normalteiler K enthält, so dass (K, M) eine zentrale Erweiterung von \mathcal{A}_n ist. Wegen (2.10)(b)(i) ist daher (K, M) eine Schursche Erweiterung von \mathcal{A}_n oder es ist $K \cong M \times \mathcal{A}_n$. Im ersten Fall ist $M \leq K = \mathfrak{U}'$ nach (2.15) und im letzten Fall folgt $\mathfrak{U} \cong M \times \mathcal{S}_n$ aufgrund (2.1). \square

(2.18) Bemerkungen

Die Bedingung „ M zyklisch von Primzahlordnung“ in (2.10) und (2.17) ist für unsere Zwecke kaum einschränkend, wie der Abschnitt 5.3 zeigt.

Von einer Darstellungsgruppe der \mathcal{S}_n ist in GAP eine Tafel gespeichert oder kann für nicht „allzu große“ n in angemessener Zeit berechnet werden. Eine Tafel der dazu isoklinen Gruppe kann mittels des Befehls `CharacterTableIsoclinic` berechnet werden.

Wie nun konkret vorgegangen wird und wie man die Möglichkeiten, die Satz (2.17) liefert, weiter einschränken kann, wird anhand des Beispiels $\mathcal{S}_9 \leq O_7(3)$ in Abschnitt 6.1 geschildert.

Kapitel 3

Brute-Force Verfahren

Gegeben sei das Setup (1.17).

In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, das die Berechnung der Tafeln und Fusionen des Diagramms (*) in Abschnitt 1.4 für einige Gruppen G erlaubt. Es bedient sich sehr rechenintensiver GAP-Routinen, weshalb es im Folgenden „Brute-Force“ Verfahren genannt wird. Damit ist auch schon ein entscheidender Nachteil des „Brute-Force“ Verfahrens genannt: Da es sehr rechenaufwendig ist, ist es nur für „kleinere“ Gruppen praktikabel. Es hat aber dafür den Vorteil, dass die Tafeln und zugehörigen kompatiblen Fusionen direkt über die explizite Darstellungen der Gruppen berechnet werden können. In Abschnitt 3.1 wird es formuliert und erläutert.

Die mittels des „Brute-Force“ Verfahrens gewonnenen Tafeln und Fusionen sind allerdings noch gelöst von eventuell bereits existierenden Tafeln und Fusionen der GAP-Bibliothek und müssen daher mit ihnen verglichen und in Verbindung gebracht werden. Dies ist Gegenstand des Abschnittes 3.2.

3.1 Formulierung des Verfahrens

Gegeben sei das Setup (1.17), wobei G eine „kleine“ Gruppe sei. Was „klein“ bedeutet, wird in nachfolgender Bemerkung (3.2)(b) deutlich.

Nach dem „Brute-Force“ Verfahren können mittels GAP Tafeln für \mathfrak{G} und G sowie für ihre maximalen Untergruppen und zugehörige Fusionen berechnet werden, so dass das Diagramm (*) in Abschnitt 1.4 kommutiert; im Folgendem wird es zunächst formuliert und anschließend kommentiert.

(3.1) Brute-Force

In GAP sei eine Darstellung von G verfügbar. Mit der GAP-Routine `MaximalSubgroupClassReps` werden Vertreter der Konjugiertenklassen maximaler Untergruppen von G berechnet, etwa U_1, \dots, U_n .

Eine Darstellung von \mathfrak{G} sowie ein Epimorphismus auf G seien in GAP bereits verfügbar oder können durch `EpimorphismSchurCover` berechnet werden, näheres hierzu in Bemerkung (3.2)(a). Eine Charaktertafel von \mathfrak{G} wird mit `CharacterTable` berechnet und mit `tbl(\mathfrak{G})`

bezeichnet. Nach Lemma (1.6)(a) ist $\text{Kern}(\pi) \cong Z(\mathfrak{G})$, so dass man eine Tafel $\text{tbl}(G)$ von G erhält, indem die Konjugiertenklassen aus $\text{tbl}(\mathfrak{G})$ herausfaktoriert werden, die das Zentrum von \mathfrak{G} bilden. Dadurch ist die im Sinne von Bemerkung (1.30) „echte“ Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{G}}^G := \pi_* : \text{Cl}(\mathfrak{G}) \rightarrow \text{Cl}(G)$ bestimmt.

Wegen Satz (1.35) sind $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n$ mit $\mathfrak{U}_i := \pi^{-1}(U_i)$ Vertreter der Konjugiertenklassen der maximalen Untergruppen von \mathfrak{G} .

Seien (\mathfrak{U}, U) korrespondierende maximale Untergruppen. Die Untergruppe \mathfrak{U} steht explizit als Teilmenge von \mathfrak{G} zur Verfügung, so dass $\text{id}_{\mathfrak{U}} : \mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{G}$ eine Einbettung von \mathfrak{U} nach \mathfrak{G} ist. Mit `FusionConjugacyClasses(\mathfrak{U} , \mathfrak{G})` werden eine Charaktertafel $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ von \mathfrak{U} sowie die „echte“ Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}} := \text{id}_{\mathfrak{U}*} : \text{Cl}(\mathfrak{U}) \rightarrow \text{Cl}(\mathfrak{G})$ berechnet.

Ähnlich wie aus $\text{tbl}(\mathfrak{G})$ die Tafel $\text{tbl}(G)$ gewonnen wurde, ist eine Tafel von U durch $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ bestimmt. Da jedoch im Allgemeinen M lediglich isomorph zu einer Untergruppe von $Z(\mathfrak{U})$ ist, erhält man eine Tafel $\text{tbl}(U)$ von U , indem die Konjugiertenklassen aus $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ herausfaktoriert werden, die unter der Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$ in das Zentrum von \mathfrak{G} abgebildet werden. Damit ist ebenfalls die Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^U := \pi|_{\mathfrak{U}*} : \text{Cl}(\mathfrak{U}) \rightarrow \text{Cl}(U)$ gefunden.

Es ist $\text{id}_U \circ \pi|_{\mathfrak{U}} = \pi \circ \text{id}_{\mathfrak{U}}$. Mit $\text{fus}_U^G := \text{id}_{U*}$ gilt für die induzierten Fusionen somit $\text{fus}_U^G \circ \text{fus}_{\mathfrak{U}}^U = \text{fus}_{\mathfrak{G}}^G \circ \text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$. Weil $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^U$ surjektiv ist, ist damit fus_U^G eindeutig bestimmt, und kann in GAP mittels der anderen drei Fusionen berechnet werden. Somit sind alle Tafeln und Fusionen für das Diagramm (*) berechnet; die Kommutativität des Diagramms ist nach Konstruktion der Fusionen gewährleistet.

Dieses Vorgehen kann nun für alle korrespondierende Paare maximaler Untergruppen durchgeführt werden.

Die folgenden Bemerkungen dienen zur Erläuterung des Verfahrens (3.1).

(3.2) Bemerkungen

- (a) Für die Berechnung von Charaktertafeln ist meistens eine Permutationsdarstellung von Vorteil, Ausnahmen bilden etwa auflösbare Gruppen, vergleiche die Ausführungen zur fünfzehnten maximalen Untergruppe von $U_6(2)$ in Abschnitt 6.4.2. Daher ist es sinnvoll, von \mathfrak{G} eine Permutationsdarstellung zu erzeugen.

Dazu ist die GAP-Funktion `IsomorphismPermGroup` ein wichtiges Hilfsmittel. Allerdings gibt es auch Gruppen, bei denen dies nicht nötig ist: Nach [CCN⁺03] sind die Darstellungsgruppen der einfachen Gruppen $L_2(q)$ – q eine Primzahlpotenz – isomorph zur speziellen linearen Gruppe $SL_2(q) \subseteq \mathbb{F}_q^{2 \times 2}$. Somit kann in diesem Fall eine Permutationsdarstellung von \mathfrak{G} durch die natürliche Operation von $SL_2(q)$ auf \mathbb{F}_q^2 gewonnen werden.

- (b) Das Verfahren konnte bei folgenden Gruppen erfolgreich benutzt werden: \mathcal{A}_5 , \mathcal{A}_8 und $L_3(2)$ sowie $L_2(q)$ für $q = 11, 13, 17, 19, 23, 25, 27, 29, 31$ und $U_4(2)$. Nähere Informationen zu diesen Gruppen befinden sich in Abschnitt 6.5.

- (c) Ist das „Brute-Force“ Verfahren erfolgreich auf eine Gruppe G und ihre maximalen Untergruppen angewendet worden, so müssen die berechneten Tafeln und Fusionen mit der GAP-Bibliothek verglichen werden. Im folgenden Abschnitt 3.2 wird dies ausgeführt.

3.2 Anpassen an GAP-Bibliothek

Die Bemerkung (3.2)(c) wird aufgegriffen; das Setup (1.17) sei gegeben und das Verfahren (3.1) sei erfolgreich auf G angewendet worden. Sei (\mathfrak{U}, U) ein Paar korrespondierender maximaler Untergruppen von G und \mathfrak{G} . Die berechneten Tabellen von \mathfrak{G} , G sowie \mathfrak{U} und U sind jedoch noch ohne Bezug zu den eventuell bereits vorhandenen Tabellen der GAP-Bibliothek. Gleiches gilt für die zugehörigen Fusionen. Daher werden die durch das Verfahren (3.1) gewonnenen Tabellen und Fusionen im Folgenden mit kleinen Buchstaben bezeichnet; zur Veranschaulichung siehe das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(u) & \xrightarrow{\text{fus}_u^g} & \text{Cl}(g) \\ \text{fus}_u^u \uparrow & & \uparrow \text{fus}_g^g \\ \text{Cl}(\mathfrak{u}) & \xrightarrow{\text{fus}_\mathfrak{u}^g} & \text{Cl}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Die Tabellen $\text{tbl}(\mathfrak{g})$ und $\text{tbl}(g)$ sowie $\text{tbl}(\mathfrak{u})$ und $\text{tbl}(u)$ werden nun mit den Tabellen der GAP-Bibliothek verglichen und gegebenenfalls ersetzt. Analoges gilt für die Fusionen. Im Folgenden wird dies näher erläutert.

Wie eingangs des Abschnittes 1.4 sind in allen betrachteten Fällen Charaktertabellen von G und \mathfrak{G} Charaktertabelle in der GAP-Bibliothek enthalten. Um sie von den berechneten Tabellen zu unterscheiden, werden sie mit $\text{tbl}(\mathfrak{G})$ beziehungsweise $\text{tbl}(G)$ bezeichnet. Ebenso ist eine Bibliotheksfusion $\text{fus}_\mathfrak{G}^G$ gespeichert.

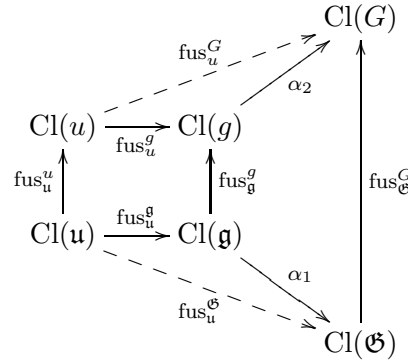
Zwischen $\text{tbl}(\mathfrak{G})$ und $\text{tbl}(\mathfrak{g})$ sowie $\text{tbl}(G)$ und $\text{tbl}(g)$ existieren Tafelisomorphismen. Mittels `TransformingPermutationsCharacterTables` werden Tafelisomorphismen $\alpha_1 : \text{tbl}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{tbl}(\mathfrak{G})$ und $\alpha_2 : \text{tbl}(g) \rightarrow \text{tbl}(G)$ mit der Eigenschaft $\text{fus}_\mathfrak{G}^G \circ \alpha_1 = \alpha_2 \circ \text{fus}_\mathfrak{g}^g$ berechnet.

Dies ist die Ausgangssituation für die anschließenden Untersuchungen zu den Tabellen und Fusionen der Untergruppen U und \mathfrak{U} . Es wird geprüft, ob $\text{tbl}(\mathfrak{u})$ und $\text{tbl}(u)$ in der GAP-Bibliothek gespeichert sind (genau genommen, isomorphe Tabellen von $\text{tbl}(\mathfrak{u})$ beziehungsweise $\text{tbl}(u)$, aber auf diese Unterscheidung wird im Weiteren verzichtet) und ob gegebenenfalls auch Fusionen zwischen etwaigen Bibliothekstabellen in der GAP-Bibliothek archiviert sind. Sämtliche hierbei auftretenden Fälle können prinzipiell gleich behandelt werden, so dass im Folgenden lediglich eine Auswahl eingehend vorgestellt wird.

Als „Faustregel“ kann man sagen, je weniger von U und \mathfrak{U} in der Bibliothek vermerkt ist, desto einfacher ist die Anpassung.

1. Beispiel: Weder von U noch von \mathfrak{U} sind Tabellen (in der Bibliothek) vorhanden.

Dies ist der einfachste Fall. Die Tabellen $\text{tbl}(\mathfrak{u})$ und $\text{tbl}(u)$ sowie die Fusion $\text{fus}_\mathfrak{u}^u$ werden in die Bibliothek aufgenommen und durch $\text{fus}_\mathfrak{u}^\mathfrak{G} := \alpha_1 \circ \text{fus}_\mathfrak{u}^g$ sowie $\text{fus}_u^G := \alpha_2 \circ \text{fus}_u^g$ sind kompatible Fusionen im Sinne der Kommutativität des Diagramm (*) aus Abschnitt 1.4 gegeben. Der Veranschaulichung dient folgendes kommutative Diagramm.

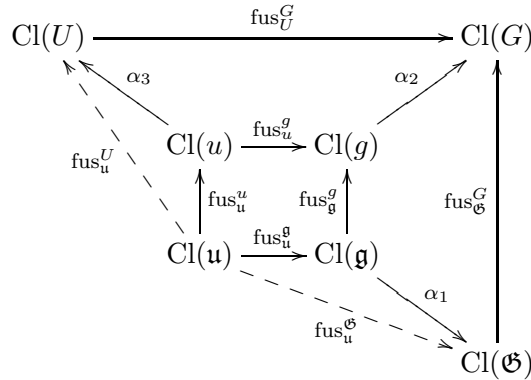


2. Beispiel: Eine Bibliothekstafel $\text{tbl}(U)$ und eine Bibliotheksfusion fus_U^G sind vorhanden, aber keine Tafel von \mathfrak{U} .

Die Tafel $\text{tbl}(u)$ und die Fusion $\text{fus}_u^{\mathfrak{G}} := \alpha_1 \circ \text{fus}_u^g$ werden wie im 1. Beispiel in die Bibliothek aufgenommen. Es fehlt noch eine Fusion $\text{Cl}(u) \rightarrow \text{Cl}(U)$.

Existiert für α_1 und α_2 wie oben ein Tafelisomorphismus $\alpha_3 : \text{Cl}(u) \rightarrow \text{Cl}(U)$ mit der Eigenschaft, dass $\alpha_2 \circ \text{fus}_u^g \circ \alpha_3^{-1}$ und die Bibliotheksfusion fus_U^G in der gleichen Bahn unter der Operation von $\text{TAut}(U) \times \text{TAut}(G)$ liegen, so können und werden wir α_1 und α_2 so wählen, dass $\text{fus}_U^G \circ \alpha_3 = \alpha_2 \circ \text{fus}_u^g$ gilt und damit die Bibliotheksfusion fus_U^G beibehalten werden kann. Andernfalls ist in diesem Sinne fus_U^G ohne Berücksichtigung von \mathfrak{U} und Θ „ungünstig“ gewählt, das heißt, es gibt keinen Tafelisomorphismus $\alpha_3 : \text{Cl}(u) \rightarrow \text{Cl}(U)$ und keine Fusion $f : \text{Cl}(u) \rightarrow \text{Cl}(\Theta)$ mit der Eigenschaft $\text{fus}_\Theta^G \circ f = \text{fus}_U^G \circ \alpha_3 \circ \text{fus}_u^u$. In diesem Fall muss die Bibliotheksfusion fus_U^G ersetzt werden.

Bei den in Bemerkung (3.2)(b) aufgezählten Gruppen treten diese Probleme allerdings nicht auf, das heißt, aus den gewählten α_1 und α_2 ergab sich stets α_3 wie gewünscht. Schließlich ist mit $\text{fus}_u^U := \alpha_3 \circ \text{fus}_u^u$ eine zu den anderen Fusionen kompatible Fusion gefunden; der Veranschaulichung wegen betrachte folgendes kommutative Diagramm.



3. Beispiel: Bibliothekstafeln $\text{tbl}(U)$ und $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ sowie eine Bibliotheksfusion $\text{fus}_\mathfrak{U}^U$ sind vorhanden.

Es sind Fusionen $\text{Cl}(\mathfrak{U}) \rightarrow \text{Cl}(\Theta)$ und $\text{Cl}(U) \rightarrow \text{Cl}(G)$ gesucht. Dazu bestimme Tafelisomorphismen $\alpha_4 : \text{Cl}(\mathfrak{U}) \rightarrow \text{Cl}(u)$ und $\alpha_3 : \text{Cl}(u) \rightarrow \text{Cl}(U)$ mit der Eigenschaft $\text{fus}_\mathfrak{U}^U = \alpha_3 \circ \text{fus}_u^u \circ \alpha_4$. Damit ergibt sich die erste der gesuchten Fusionen durch $\text{fus}_\mathfrak{U}^\Theta := \alpha_1 \circ \text{fus}_u^g \circ \alpha_4$.

Setze weiter $\text{fus}_U^G := \alpha_2 \circ \text{fus}_u^g \circ \alpha_3^{-1}$ und wegen $\text{fus}_U^G \circ \text{fus}_U^U = \alpha_2 \circ \text{fus}_u^g \circ \text{fus}_u^u \circ \alpha_4 = \text{fus}_G^G \circ \text{fus}_U^G$ ist die Kompatibilität der Fusionen gegeben; siehe dazu das folgende kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Cl}(U) & \overset{\text{fus}_U^G}{\dashrightarrow} & & & \text{Cl}(G) \\
 & \swarrow \alpha_3 & & & \nearrow \alpha_2 \\
 & \text{Cl}(u) & \xrightarrow{\text{fus}_u^g} & \text{Cl}(g) & \\
 \text{fus}_U^U \uparrow & \text{fus}_u^u \uparrow & & \text{fus}_g^g \uparrow & \text{fus}_G^G \uparrow \\
 & \text{Cl}(u) & \xrightarrow{\text{fus}_u^g} & \text{Cl}(g) & \\
 & \nearrow \alpha_4 & & \searrow \alpha_1 & \\
 \text{Cl}(U) & \overset{\text{fus}_U^G}{\dashrightarrow} & & & \text{Cl}(G)
 \end{array}$$

Für die praktische Umsetzung mit GAP bedeutet dies, dass wie im Verfahren (3.1) die Fusion fus_U^G durch die Gleichung $\text{fus}_U^G \circ \text{fus}_U^U = \text{fus}_G^G \circ \text{fus}_U^G$ eindeutig bestimmt ist und berechnet werden kann.

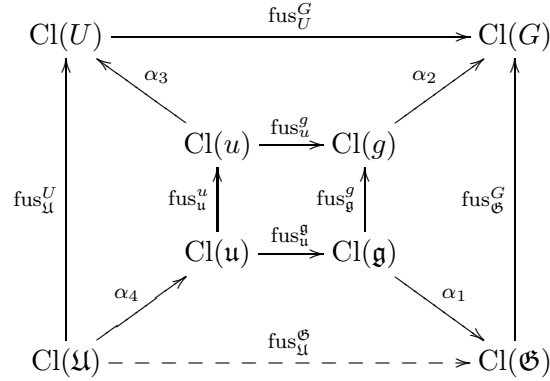
Umgekehrt kann im Allgemeinen aus fus_U^G mittels fus_G^G und fus_U^U keine Fusion $\text{Cl}(U) \rightarrow \text{Cl}(G)$ ermittelt werden, siehe dazu das nächste Beispiel.

4. *Beispiel: Bibliothekstafeln $\text{tbl}(U)$ und $\text{tbl}(U)$ sowie Bibliotheksfusionen fus_U^G und fus_U^U sind vorhanden.*

Es ist eine zu den Bibliotheksfusionen fus_G^G , fus_U^G und fus_U^U passende Fusion fus_U^G zu bestimmen, wobei es sein kann, dass dies nicht möglich, wenn die Bibliotheksfusionen „ungünstig“ gewählt sind:

Gehe zunächst davon aus, dass die Fusionen zueinander passen. Konstruiere zuerst den Isomorphismus $\alpha_3 : \text{tbl}(u) \rightarrow \text{tbl}(U)$ aus dem 2. *Beispiel*. Finde nun einen Tafelisomorphismus $\alpha_4 : \text{tbl}(U) \rightarrow \text{tbl}(u)$ mit $\text{fus}_U^U = \alpha_3 \circ \text{fus}_u^u \circ \alpha_4$. Die gewünschte Fusion ergibt sich damit aus $\text{fus}_U^G := \alpha_1 \circ \text{fus}_u^g \circ \alpha_4$.

Wie im 2. *Beispiel* bemerkt, existiert bei den hier untersuchten Gruppen stets ein Isomorphismus α_3 wie oben. Allerdings kann es sein, dass kein Isomorphismus α_4 existiert, der zu den gegebenen Fusionen passt; bei $S_6 \leq U_4(2)$ tritt dieser Fall ein, so dass eine der Bibliotheksfusionen ersetzt wurde. Die Faktorfusionen fus_G^G und fus_U^U wurden beibehalten und wie im 3. *Beispiel* eine Fusion fus_U^G ermittelt und damit eine neue Fusion fus_U^G . Zum besseren Verständnis dient das folgende kommutative Diagramm.



In den weiteren Fällen ist analog zu den obigen vier Beispielen eine Anpassung an die GAP-Bibliothek möglich; daher werden sie hier nicht näher betrachtet.

Bisher wurden nur ein Paar korrespondierender Untergruppen (U, \mathfrak{U}) betrachtet. Möchte man die berechneten Tafeln von allen maximalen Untergruppen mit den Bibliothekstafeln abgleichen, so sind auch Informationen zwischen den Untergruppen zu berücksichtigen; hier wird folgender besonders wichtige Fall betrachtet, der bei einigen Gruppen vorkommt, die in Bemerkung (3.2)(b) aufgezählt sind:

Seien (U_1, \mathfrak{U}_1) und $(\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2)$ zwei Paare von korrespondierenden maximalen Untergruppen von G und \mathfrak{G} . Die U_i beziehungsweise die \mathfrak{U}_i seien isomorph aber nicht zueinander konjugiert. Damit sind die zugehörigen berechneten Tafeln $\text{tbl}(u_i)$ beziehungsweise $\text{tbl}(\mathfrak{u}_i)$ nach (1.26)(d) isomorph. Weiter seien $\text{tbl}(U)$ und $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ Bibliothekstafeln von U_1 beziehungsweise \mathfrak{U}_1 . Aufgrund der Isomorphie der Tafeln können nach Bemerkung (1.32) für U_2 und \mathfrak{U}_2 in der GAP-Bibliothek ebenfalls die Tafeln $\text{tbl}(U_2) := \text{tbl}(U)$ beziehungsweise $\text{tbl}(\mathfrak{U}_2) := \text{tbl}(\mathfrak{U})$ gespeichert werden. Wie Beispiel (1.33)(b) zeigt, kann es aber sein, dass jeweils zwei verschiedene Fusionen zu den Tafeln archiviert werden müssen. Um dies zu klären gehe wie folgt vor:

Seien $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^G$ und fus_U^U sowie $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$ und fus_U^G kompatible Bibliotheksfusionen beziehungsweise bezüglich der Gruppen U_1 und \mathfrak{U}_1 mit obigen Methoden berechnete Fusionen. Weiter seien $f_i := \text{fus}_{u_i}^g$ die berechneten „echten“ Fusionen. Sei $\beta : \text{Cl}(\mathfrak{U}_1) \rightarrow \text{Cl}(u_1)$ ein Tafelisomorphismus mit $\alpha_1 \circ f_1 \circ \beta = \text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$.

Existiert ein Tafelisomorphismus $\phi : \text{Cl}(u_2) \rightarrow \text{Cl}(u_1)$, so dass $f_2 = f_1 \circ \phi$ gilt, so ist $\gamma := \phi^{-1} \circ \beta$ ein Tafelisomorphismus zwischen $\text{tbl}(\mathfrak{U}_2)$ und $\text{tbl}(u_2)$ mit $\alpha_1 \circ f_2 \circ \gamma = \text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$. Somit kann für die Tafel $\text{tbl}(\mathfrak{U}_2)$ gleichfalls die Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$ archiviert werden. In diesem Fall kann auch für $\text{tbl}(U_2)$ die Fusion fus_U^G verwendet werden, da $\text{fus}_{\mathfrak{U}_2}^{U_2} = \text{fus}_{\mathfrak{U}}^U$ (wegen $\text{tbl}(U_2) = \text{tbl}(U)$ und $\text{tbl}(\mathfrak{U}_2) = \text{tbl}(\mathfrak{U})$) gewählt werden kann.

Existiert ein obiges ϕ nicht, so bestimme wie oben eine Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}_2}^{\mathfrak{G}}$ via der berechneten Fusion f_2 . Diese wird bezüglich der Tafel $\text{tbl}(\mathfrak{U}_2)$ vermerkt. Eine Fusion für $\text{tbl}(U_2)$ ergibt sich wie oben durch die Gleichung $\text{fus}_U^G \circ \text{fus}_{\mathfrak{U}}^U = \text{fus}_{\mathfrak{G}}^G \circ \text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$.

Diese Vorgehensweise ist auf die genannten Gruppen in Bemerkung (3.2)(b) ausgerichtet; allgemeiner wird die Situation in Abschnitt 5.2 behandelt.

Kapitel 4

Erzeugen von Untergruppen in GAP

In diesem Kapitel werden Methoden vorgestellt, die es erlauben, in GAP Darstellungen von Untergruppen in gegebenen Gruppen zu erzeugen. Dies erweist sich als sehr zweckmäßig, wenn es in den nächsten Kapiteln darum geht, Charaktertafeln von Untergruppen zu berechnen.

Die im ersten Abschnitt beschriebenen Methoden beruhen auf Zufallsverfahren. Im zweiten Abschnitt wird ein Verfahren erläutert, das auf Standarderzeugern und Datenbanken von Gruppen beruht.

4.1 Zufallsverfahren

Gegeben sei eine endliche Gruppe G , nicht notwendig einfach.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Methoden zur Erzeugung von Untergruppen von G haben als Grundlage, dass zufällig Elemente aus G ausgesucht werden.

Zu Beginn ein sehr schlichtes Verfahren, das zunächst formuliert und anschließend näher erläutert wird. Es verwendet, dass sehr viele Gruppen von zwei Elementen erzeugt werden.

(4.1) 1. Zufallsverfahren

Ziel: Es soll eine Untergruppe $V \leq G$ der Ordnung n erzeugt vorgehen.

Vorgehen: Es wird solange die von zwei zufällig ausgesuchten Elementen von G erzeugte Untergruppe gebildet, bis eine Gruppe der gewünschten Ordnung n gefunden ist.

Die folgenden Bemerkungen ergänzen obiges Verfahren.

(4.2) Bemerkungen

- (a) Bei Anwendung dieses Verfahrens wird davon ausgegangen, dass tatsächlich eine Untergruppe der gewünschten Ordnung existiert.

- (b) Da das Verfahren auf einem Zufallsprinzip beruht, ist es möglich, dass es nicht zum Ziel führt. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn V nicht von zwei Elementen erzeugt wird. Daher ist nach einer gewissen Zeit das Verfahren gegebenenfalls abbrechen.
- (c) Das Verfahren hat vor allem dann eine hohe Erfolgsquote, wenn der Index von V in G klein ist, da sich dann die „Trefferwahrscheinlichkeit“ von Erzeugern von V erhöht.

In der folgenden Bemerkung wird aufgezeigt, wie das Verfahren (4.1) für diese Arbeit benutzt werden kann.

(4.3) Bemerkung

Gegeben sei das Setup (1.36), wobei G eine Atlasgruppe sei. Wie in 1.4 geschildert, soll von \mathcal{U} – und gegebenenfalls auch von U – eine Charaktertafel berechnet werden. Die Ordnungen von G und \mathcal{G} und aller ihrer maximalen Untergruppen sind durch [CCN⁺03] gegeben. Weiter sei in GAP eine Darstellung von \mathcal{G} verfügbar. Dies ist bei den meisten in dieser Arbeit vorkommenden Beispielen der Fall.

Damit kann versucht werden, mit Verfahren (4.1) eine Untergruppe $V \leq \mathcal{G}$ der Ordnung $|\mathcal{U}|$ zu erzeugen. Falls dies gelingt, bleibt die Frage, ob auch $V \cong \mathcal{U}$ gilt. Im Allgemeinen ist diese Frage nicht ohne weiteres zu beantworten, es gibt jedoch Umstände, unter denen dies möglich ist:

Kann (zum Beispiel) mit Hilfe des *Satzes von Lagrange* geschlossen werden, dass V in keiner anderen maximalen Untergruppe außer \mathcal{U} enthalten ist, so folgt $V \cong \mathcal{U}$. Diese Argumentation ist häufig praktikabel, wenn V eine große Ordnung hat. Dies ergänzt sich gut mit Bemerkung (4.2)(c), so dass das gesamte Vorgehen bei maximalen Untergruppen mit kleinem Index häufig zum Erfolg führt.

Angenommen, es gibt eine maximale Untergruppe $\tilde{\mathcal{U}} \leq \mathcal{G}$, für die aus Ordnungsgründen $V \leq \tilde{\mathcal{U}}$ möglich ist, so sind weiterführende Untersuchungen nötig, um die Frage, ob $V \cong \mathcal{U}$ gilt, beantworten zu können. Es seien zwei Methoden genannt:

In GAP können mit `IntermediateSubgroups` alle Untergruppen von \mathcal{G} ermittelt werden, die V enthalten. Dies ist allerdings sehr rechenaufwendig und nur für nicht „allzu große“ Gruppen \mathcal{G} und keiner „allzu kleinen“ Untergruppe V möglich. Außerdem ist dazu eine Darstellung von \mathcal{G} auf dem Computer nötig, mit der sich „gut“ rechnen lässt; siehe hierzu die Problematik einer Darstellung von $3.O_7(3)$ in Abschnitt 6.1.3.

Falls Charaktertafeln von V und $\tilde{\mathcal{U}}$ zur Verfügung stehen, so besteht eine rechengünstigere Alternative darin, die möglichen Tafelfusionen zwischen V und $\tilde{\mathcal{U}}$ zu berechnen. Gibt es keine, so existiert nach Bemerkung (1.30)(b) auch keine Einbettung $V \hookrightarrow \tilde{\mathcal{U}}$, also ist V keine Untergruppe von $\tilde{\mathcal{U}}$; gibt es Tafelfusionen, so ist keine Aussage möglich.

Falls $V \cong \mathcal{U}$ gilt, bleibt die Frage, ob auch V zu \mathcal{U} konjugiert ist. Dies kann zum Beispiel aus $V \cong \mathcal{U}$ gefolgert werden, wenn es nur eine Konjugiertenklasse des Isomorphityps von \mathcal{U} gibt.

Im Weiteren soll das Verfahren (4.1) ausgebaut werden.

Für den restlichen Abschnitt sei das Setup (1.36) mit einer Atlasgruppe G gegeben. In [CCN⁺03] sind noch weitere Informationen über die maximalen Untergruppen von G vermerkt. So sind manche maximale Untergruppen als Normalisatoren von Untergruppen

oder Elementen ausgewiesen. Um sich dies auch für die Erzeugung der korrespondierenden maximalen Untergruppen in \mathfrak{G} zu Nutze zu machen, dient folgendes Ergebnis.

(4.4) Lemma

Sei $K \leq G$ mit $N_G(K) = U$. Dann gilt: $\mathfrak{U} = N_{\mathfrak{G}}(\pi^{-1}(K))$.

Beweis.

Wegen $K \leq U$ gilt $\pi^{-1}(K) \leq \mathfrak{U}$. Also ist $\mathfrak{U} \leq N_{\mathfrak{G}}(\pi^{-1}(K))$. Angenommen es wäre $N_{\mathfrak{G}}(\pi^{-1}(K)) = \mathfrak{G}$, so wäre $K \leq G$. Daraus folgt $G = N_G(K) = U$ im Widerspruch zur Maximalität von U . \square

Das nächste Zufallsverfahren ist auf den häufig anzutreffenden Fall zugeschnitten, dass U der Normalisator einer Gruppe mit zwei oder drei Elementen ist. Das nachfolgende Lemma ist dazu ein Hilfsmittel.

(4.5) Lemma

Sei $K \leq G$ mit $K = \langle k \rangle$ und $p := |k| \in \mathbb{P}$. Weiter sei $Z := Z(\mathfrak{G})$.

Dann existiert ein $y \in \mathfrak{G}$ mit $|y| = p^l$ für ein $l \in \mathbb{N}$ und $\langle y, Z \rangle = \pi^{-1}(K)$.

Beweis.

Sei $x \in \mathfrak{G}$ mit $\pi(x) = k$ und sei $n = |x|$. Wegen $k^n = \pi(x^n) = 1$ ist $n = mp$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Sei $m = p^b c$ mit $b \in \mathbb{N}_0$ und $\text{ggT}(c, p) = 1$. Also ist $|x| = p^{b+1}c$.

Nun existieren $r, s \in \mathbb{Z}$ mit $1 = rc + sp$. Damit ist $x = x^{rc}x^{sp}$. Setze $y := x^{rc}$ und $z := x^{sp}$. Mit $l := b + 1$ folgt $y^{p^l} = x^{rcp^{b+1}} = 1$ und $\pi(z) = k^{ps} = 1$. Somit ist $z \in \text{Kern}(\pi) \cong Z(\mathfrak{G})$ nach Lemma (1.6)(a).

Aus $\pi(y) = \pi(yzz^{-1}) = \pi(x)\pi(z^{-1}) = k$ folgt die Behauptung. \square

(4.6) 2. Zufallsverfahren

Gegeben: In GAP sei eine Darstellung von \mathfrak{G} verfügbar. Ferner sei $K \leq G$ mit $p := |K| \in \mathbb{P}$ und $U = N_G(K)$. Nach Lemma (4.4) und Lemma (4.5) ist $\mathfrak{U} = N_{\mathfrak{G}}(\langle y, Z(\mathfrak{G}) \rangle)$ für ein p -Element $y \in \mathfrak{G}$.

Ziel: Finde eine Untergruppe $\mathfrak{V} \leq \mathfrak{G}$ mit $|\mathfrak{V}| = |\mathfrak{U}|$. Durch weitere Überlegungen, etwa wie in Bemerkung (4.3), soll dann, wenn möglich, geschlossen werden, dass \mathfrak{V} isomorph zu \mathfrak{U} ist oder dass sie sogar konjugiert zueinander sind.

Vorgehen: Es wird davon ausgegangen, dass K lediglich abstrakt beschrieben ist und keine konkreten Erzeuger zur Verfügung stehen. Daher wird mit Zufallsalgorithmen nach Erzeugern einer zu $\langle y, Z(\mathfrak{G}) \rangle$ konjugierten Gruppe gesucht.

Gehe somit wie folgt vor:

Berechne eine p -Sylowgruppe S und das Zentrum von \mathfrak{G} . Wähle nun ein Zufallselement $y \in S$ und berechne $\mathfrak{V} := N_{\mathfrak{G}}(\langle y, Z(\mathfrak{G}) \rangle)$. Wiederhole dies, bis $|\mathfrak{V}| = |\mathfrak{U}|$ gilt.

Es folgen zwei Bemerkungen zu dem neuen Verfahren.

(4.7) Bemerkungen

- (a) Da auch dieses Verfahren auf einem Zufallsprinzip beruht, führt es unter Umständen nicht zum Ziel und ist daher gegebenenfalls nach einer gewissen Zeit abzubrechen.
- (b) Der Vorteil des zweiten Verfahrens gegenüber dem ersten ergibt sich dadurch, dass lediglich in der kleineren Sylowgruppe zufällig nach Elementen gesucht wird.

Wenn (zum Beispiel) durch [CCN⁺03] weitere Information über die beteiligten Gruppen zur Verfügung stehen, kann folgendes Verfahren formuliert werden:

(4.8) 3. Zufallsverfahren

Gegeben: In GAP sei eine Darstellung von G verfügbar. Es sei $k \in G$ mit $U = N_G(K)$, wobei $K := \langle k \rangle$ und sei $\mathcal{K} \subseteq G$ die Konjugiertenklasse mit $k \in \mathcal{K}$.

Weiter seien Potenzabbildungen von G gegeben, durch die hervorgeht, dass etwa die m -te Potenz eines Elementes $x \in G$ in \mathcal{K} liegt. Zudem sei die Ordnung von x gegeben.

Ziel: Finde eine Untergruppe $V \leq G$ mit $|V| = |U|$. Durch weitere Überlegungen, etwa wie in Bemerkung (4.3), soll dann, wenn möglich, geschlossen werden, dass V isomorph zu U ist oder dass sie sogar konjugiert zueinander sind. Hierbei ist auch Bemerkung (4.9)(c) sehr nützlich.

Vorgehen: Analog zu Verfahren (4.6) wird mit Zufallsalgorithmen nach einer zu K konjugierten Gruppe gesucht:

Wähle ein Zufallselement $y \in G$ mit $|y| = |x|$ und berechne $V := N_G(\langle y^m \rangle)$. Wiederhole dies, bis $|V| = |U|$ gilt.

Zur Erläuterung dienen folgende Bemerkungen.

(4.9) Bemerkungen

- (a) Auch das Verfahren (4.8) basiert auf Zufallselementen, so dass auch hier die Bemerkungen (4.2)(a) und (4.7)(a) zu berücksichtigen sind.
- (b) Der Vorteil, dass nach Elementen der Ordnung $|x|$ gesucht wird und nicht sofort nach Elementen der Ordnung $|k|$, besteht darin, dass der Zentralisator von x im Zentralisator von x^m enthalten ist. Somit hat die Konjugiertenklasse von x mindestens genauso viele Elemente wie \mathcal{K} .
- (c) Besonders effizient ist das Verfahren (4.8), wenn die m -ten Potenzen aller Elemente der Ordnung $|x|$ in \mathcal{K} liegen. In diesem Fall ist die mit (4.8) konstruierte Gruppe V sogar zu U konjugiert und es sind keine weiteren Tests wie in Bemerkung (4.3) nötig.
- (d) Ist in GAP eine Darstellung von \mathfrak{G} und eine Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{G}}^G$ verfügbar, so kann mittels des Lemmas (4.4) das Verfahren (4.8) auch zur Konstruktion von \mathfrak{U} herangezogen werden.

Bei der vierzehnten maximalen Untergruppe von $2.O_7(3)$ wird das Verfahren (4.8) zum Beispiel verwendet werden, näheres dazu in Abschnitt 6.1.2.

4.2 Ein Verfahren basierend auf Datenbanken

Gegeben sei das Setup (1.36). In diesem Abschnitt wird eine weitere Methode zur Erzeugung von Untergruppen einer Gruppe vorgestellt. Im Gegensatz zu den Verfahren aus dem vorherigen Abschnitt 4.1 beruht sie nicht auf Zufallsalgorithmen, jedoch ist sie ebenfalls nicht bei allen Gruppen anwendbar.

(4.10) Verfahren basierend auf Datenbanken

Gesucht ist eine Darstellung von $\mathfrak{U} \leq \mathfrak{G}$. Bei diesem Verfahren ist dabei weder die Maximalität von \mathfrak{U} noch die von U von Bedeutung; es wird lediglich verwendet, dass \mathfrak{U} das Urbild von U in \mathfrak{G} ist.

Für G seien Erzeuger $[g_1, \dots, g_n]$ gegeben. Sei F die freie Gruppe auf $\{x_1, \dots, x_n\}$ und seien $w_1, \dots, w_m \in F$. Weiter sei $\epsilon : F \rightarrow G$ der Gruppenhomomorphismus mit $\epsilon(x_j) = g_j$ für $1 \leq j \leq n$.

Wir nennen das m -Tupel $s = (w_1, \dots, w_m)$ ein Programm bezüglich $[g_1, \dots, g_n]$ und U , wenn $U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ mit $u_i := \epsilon(w_i)$ für $1 \leq i \leq m$. Dafür schreiben wir auch $u_i = w_i(g_1, \dots, g_n)$.

Für \mathfrak{G} seien Erzeuger $[h_1, \dots, h_n]$ verfügbar, die im folgenden Sinne zu den $[g_1, \dots, g_n]$ kompatibel sind: Es existiert ein Isomorphismus $\phi : G \rightarrow G$ mit $\phi(\pi(h_j)) = g_j$ für alle $1 \leq j \leq n$. Dabei sei $\pi : \mathfrak{G} \rightarrow G$ der kanonische Epimorphismus. Weiter sei $\eta : F \rightarrow \mathfrak{G}$ der Gruppenhomomorphismus mit $\eta(x_j) = h_j$ für $1 \leq j \leq n$.

Setze nun $[h_1, \dots, h_n]$ in s ein, das heißt betrachte $v_i := \eta(w_i)$ für $1 \leq i \leq m$. Entsprechend schreiben wir dafür auch $v_i = w_i(h_1, \dots, h_n)$. Mit $\tilde{\pi} := \phi \circ \pi$ und $E := \langle v_1, \dots, v_m, \text{Kern}(\tilde{\pi}) \rangle$ folgt nun

$$E = \tilde{\pi}^{-1}(U) = \mathfrak{U}.$$

Begründung: Es gilt $\tilde{\pi}(v_i) = \tilde{\pi}(w_i(h_1, \dots, h_n)) = w_i(\tilde{\pi}(h_1), \dots, \tilde{\pi}(h_n)) = w_i(g_1, \dots, g_n) = u_i \in U$ für alle $1 \leq i \leq m$. Somit ist $v_i \in \tilde{\pi}^{-1}(U)$ für alle $1 \leq i \leq m$. Also ist $E \leq \tilde{\pi}^{-1}(U)$. Umgekehrt sei $x \in \tilde{\pi}^{-1}(U)$. Es ist $\tilde{\pi}(x)$ ein Wort in den $[u_1, \dots, u_m]$, etwa

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}(x) &= w_0(u_1, \dots, u_m) \\ &= w_0(w_1(g_1, \dots, g_n), \dots, w_m(g_1, \dots, g_n)) \\ &= w_0(w_1(\tilde{\pi}(h_1), \dots, \tilde{\pi}(h_n)), \dots, w_m(\tilde{\pi}(h_1), \dots, \tilde{\pi}(h_n))) =: y. \end{aligned}$$

Es ist $\tilde{\pi}^{-1}(y) \subseteq E$, weil $\tilde{\pi}(v_i) = w_i(\tilde{\pi}(h_1), \dots, \tilde{\pi}(h_n))$ für alle $1 \leq i \leq m$ gilt. Wegen $\tilde{\pi}^{-1}(\tilde{\pi}(x)) = x \in \text{Kern}(\tilde{\pi})$ folgt daraus $x \in E$ und somit $E = \tilde{\pi}^{-1}(U)$.

Sind wie oben kompatible Erzeuger $[g_1, \dots, g_n]$ und $[h_1, \dots, h_n]$ für G und \mathfrak{G} sowie zu U ein Programm s bezüglich $[g_1, \dots, g_n]$ gegeben, so kann wie folgt zur Konstruktion von \mathfrak{U} vorgegangen werden:

Setze die $[h_1, \dots, h_n]$ in s ein und erhalte Erzeuger einer Gruppe \tilde{U} . Nach Lemma (1.6)(a) ist $\text{Kern}(\tilde{\pi}) = Z(\mathfrak{G})$, so dass $\langle \tilde{U}, Z(\mathfrak{G}) \rangle = \mathfrak{U}$ ist.

In vielen Anwendungen, so auch in dieser Arbeit, ist $Z(\mathfrak{G})$ zyklisch von Primzahlordnung,

vergleiche Bemerkung (2.18) und Abschnitt 5.3. In dieser Situation liefert bereits ein Vergleich der Ordnungen von \tilde{U} und \mathfrak{U} entweder $\tilde{U} = \mathfrak{U}$ oder $\tilde{U} \times Z(\mathfrak{G}) = \mathfrak{U}$. Im letzten Fall ist dabei $\tilde{U} \cong \mathfrak{U}/Z(\mathfrak{G}) \cong U$ und folglich gilt $U \times Z(\mathfrak{G}) \cong \mathfrak{U}$.

(4.11) Bemerkung

Es gelten die Bezeichnungen aus (4.10). Wenn für G , U und \mathfrak{G} sowohl $[g_1, \dots, g_n]$ und $[h_1, \dots, h_n]$ als auch s mit den gewünschten Eigenschaften wie in (4.10) verfügbar sind, so ist obiges Verfahren zur Erzeugung von \mathfrak{U} sehr effizient, wie aus dem letzten Teil von (4.10) zu ersehen ist. Das Problem ist allerdings, dass solche Erzeuger mit einem Programm s nicht ohne Weiteres bereit stehen.

Allerdings sind in der Markentafelbibliothek von GAP (das ist eine GAP-Bibliothek zu sogenannten „Markentafeln“) und bei [Wil] für manche einfachen Atlasgruppen G und ihre Schurschen Erweiterungen \mathfrak{G} kompatible Erzeuger $[g_1, \dots, g_n]$ und $[h_1, \dots, h_n]$, sowie für einige oder alle maximalen Untergruppen von G Programme wie s bezüglich $[g_1, \dots, g_n]$ archiviert. Die Erzeuger und Programme können in GAP eingelesen und genutzt werden, dabei ist jedoch darauf zu achten, dass die beiden Datenbanken teilweise nicht aufeinander abgestimmt sind.

In der Markentafelbibliothek und bei [Wil] findet man solche Erzeuger und ein solches Programm s unter den Namen „Standarderzeuger“ beziehungsweise „Straight-Line-Programm“, für weitere Informationen dazu siehe [Wil96].

Bei $O_8^+(2)$ und $U_6(2)$ kommt dieses Verfahren zur Anwendung, siehe die Abschnitte 6.3 und 6.4.

Kapitel 5

Methoden für „größere“ Gruppen

Gegeben sei das Setup (1.36).

Es gibt für die vorliegende Arbeit interessante Gruppen, die so groß sind, dass das „Brute-Force Verfahren“ (3.1) bei ihnen nicht praktikabel ist. In Kapitel 5 werden Verfahren vorgestellt, mit deren Hilfe man auch bei diesen Gruppen die in Abschnitt 1.4 aufgestellten Fragen beantworten kann. Es wird schrittweise vorgegangen. Inhalt des Abschnittes 5.1 ist die Bestimmung von Charaktertafeln von \mathfrak{U} und gegebenenfalls U sowie zugehöriger Fusionen, wobei lediglich die Untergruppen \mathfrak{U} und U betrachtet werden, unabhängig von anderen Untergruppen. Anschließend werden auch Abhängigkeiten zwischen den Untergruppen berücksichtigt. Der interessanteste Fall sind verschiedene Konjugiertenklassen isomorpher Untergruppen; dies ist Gegenstand von Abschnitt 5.2. Schließlich werden in Abschnitt 5.3 Methoden für Gruppen vorgestellt, deren Multiplikator nicht Primzahlordnung hat.

5.1 Bestimmung von Tafel und Fusionen

Die eingangs in Abschnitt 1.4 geschilderte Situation wird aufgegriffen. Gegeben seien die GAP-Bibliothekstafeln $\text{tbl}(\mathfrak{G})$ und $\text{tbl}(G)$ von \mathfrak{G} beziehungsweise G , sowie die GAP-Bibliotheksfusion fus_G^G . Weiter werden – wie oben bereits erwähnt – keine Informationen beziehungsweise Bedingungen von anderen Untergruppen berücksichtigt. Zunächst wird erläutert, wie eine Tafel von \mathfrak{U} bestimmt werden kann. Anschließend gilt es festzustellen, ob diese Tafel (genau genommen, eine zu dieser Tafel isomorphe Tafel, aber auf diese Unterscheidung wird im Weiteren verzichtet) bereits in der GAP-Bibliothek verfügbar ist oder nicht. Schließlich müssen Fusionen zwischen den Tafeln gefunden werden, so dass das Diagramm (*) aus Abschnitt 1.4 kommutiert. Solche Fusionen existieren stets, da Homomorphismen zwischen den den Tafeln zugrunde liegenden Gruppen existieren. Allerdings kann es sein, dass eventuell vorhandene Bibliotheksfusionen ausgetauscht werden müssen, vergleiche Abschnitt 3.2. Auf den folgenden Seiten wird das Vorgehen erörtert.

In Ausnahmefällen kann durch die GAP-Funktionen `Maxes` oder `NamesOfFusionSources` die Arbeit erleichtert werden. Der erste Befehl liefert, falls vorhanden, die Bibliotheksnamen der Tafeln der maximalen Untergruppen von \mathfrak{G} mit den Fusionen nach \mathfrak{G} ; ist allerdings auch nur eine Tafel oder Fusion nicht bekannt („bekannt“ heißt hier und im Folgenden

in der GAP-Bibliothek enthalten), wird keine Ausgabe geliefert. Der letztgenannte Befehl liefert eine Liste der Namen der Tafeln, auf denen eine Fusion in die Gruppe \mathfrak{G} gespeichert ist. Manchmal wird man auf diese Weise für die eine oder andere Gruppe beziehungsweise Untergruppe fündig.

Eine Möglichkeit, die eine höhere Erfolgsquote aufweisen kann, bedient sich der Ergebnisse des zweiten Kapitels: Kann $\mathfrak{U} \cong M \times U$ gefolgert werden, so kann eine Tafel von \mathfrak{U} als direktes Produkt der Tafeln von M und U konstruiert werden, vergleiche Definition 4.20 und Theorem 4.21 in [Isa76]. In GAP ist dies in der Routine `CharacterTableDirectProduct` umgesetzt.

Eine Tafel von M kann leicht berechnet werden, da M als abelsche Gruppe das direkte Produkt von zyklischen Gruppen ist.

Eine Tafel von U ist häufig schon in der GAP-Bibliothek verfügbar. Wenn nicht, so ist immerhin das Problem darauf reduziert worden, lediglich eine Tafel der kleineren Gruppe U zu berechnen. Dabei ist zu bemerken, dass diese Tafel gemäß den Ausführungen in Abschnitt 1.4 ohnehin von Interesse ist.

Sind alle diese Versuche nicht erfolgreich, so wird eine Darstellung der Gruppe \mathfrak{U} erzeugt. Hierbei spielen die in Kapitel 4 vorgestellten Methoden eine nützliche Rolle. Sie führen jedoch nicht bei allen Gruppen zum Erfolg, so dass abhängig von der jeweiligen Gruppe spezielle Maßnahmen durchgeführt werden müssen. Für Beispiele siehe die Ausführungen zu $O_7(3)$ in Abschnitt 6.1, unter anderem zur vierzehnten maximalen Untergruppe von $3.O_7(3)$.

Ist eine Darstellung der Gruppe \mathfrak{U} generiert, so berechne mittels der GAP-Routine `CharacterTable` eine Charaktertafel von \mathfrak{U} (dies ist bei den hier auftretenden Gruppen stets praktikabel). Damit ist die erste Phase, eine Tafel von \mathfrak{U} zu bestimmen, abgeschlossen.

Durch `ClassPositionsOfDirectProductDecompositions` kann abgefragt werden, ob $\mathfrak{U} \cong M \times U$ gilt oder nicht.

Nun prüfe, ob diese Tafel bereits in der GAP-Bibliothek vorhanden ist und wenn ja, prüfe, ob ebenfalls eine Fusion zu $\text{Cl}(\mathfrak{G})$ in der GAP-Bibliothek vorhanden ist; vergleiche das Vorgehen in Abschnitt 3.2, zu dem es viele Parallelen gibt. Allerdings gibt es auch Unterschiede, so werden in diesem Abschnitt keine Tafeln von G und \mathfrak{G} berechnet, sondern es werden ausschließlich die Bibliothekstafeln $\text{tbl}(G)$ und $\text{tbl}(\mathfrak{G})$ verwendet.

Unterscheide die folgenden Möglichkeiten:

- (a) Tafel $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ und Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$ sind bekannt,
- (b) nur die Tafel $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ ist bekannt oder
- (c) weder Tafel noch Fusion sind bekannt.

zu (a): Berechne ausgehend von der Bibliothekstafel $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ eine Tafel von U durch Herausfaktorisieren der Konjugiertenklassen von $\text{tbl}(\mathfrak{U})$, die unter der gegebenen Fusion in das Zentrum von \mathfrak{G} abgebildet werden. Dieser Übergang erfolgt analog wie bereits im Verfahren (3.1) geschildert, und man erhält somit eine Tafel von U , bezeichnet mit $\text{tbl}(U)$. Teste nun, ob auch diese Tafel bereits in der GAP-Bibliothek vorhanden ist und eventuell auch die Fusion zu $\text{Cl}(G)$. Auch hier sind wieder die obigen Fälle möglich:

- (i) Tafel $\text{tbl}(U)$ und Fusion fus_U^G sind bekannt,
- (ii) nur die Tafel $\text{tbl}(U)$ ist bekannt oder
- (iii) weder Tafel noch Fusion sind bekannt.

zu (i): In diesem Fall sind alle Tafeln des Diagramms (*) aus (1.4) bekannt, von den Fusionen fehlt lediglich fus_U^U . Prüfe, ob diese auch schon bekannt ist. Wenn ja, so ist man fertig, andernfalls, berechne diese wie folgt: Durch die oben beschriebene Faktorisierung erhält man eine Fusion fus_U^u , wobei mit dem Kleinbuchstaben die berechnete Tafel von U bezeichnet sei, analog zu der Notation aus Abschnitt 3.2. Die zwischen den Tafeln von u und U existierenden Tafelisomorphismen können mit der GAP-Routine `TransformingPermutationsCharacterTables` berechnet werden. Unter ihnen wähle einen Isomorphismus f aus, so dass die Komposition $f \circ \text{fus}_U^u$ eine Fusion zwischen den Bibliothekstafeln $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ und $\text{tbl}(U)$ ist, so dass das Diagramm (*) kommutiert.

zu (ii): Teste zunächst, ob die Fusion fus_U^U in der GAP-Bibliothek ist. Wenn ja, so sind auch in diesem Fall alle vier Tafeln bekannt und es fehlt lediglich die Fusion fus_U^G . Diese kann wie in Abschnitt 3.2 aufgrund der Beziehung $\text{fus}_U^G \circ \text{fus}_U^U = \text{fus}_U^G \circ \text{fus}_U^G$ berechnet werden. Falls die Fusion fus_U^U nicht bekannt ist, so gehe wie folgt vor: Wie in (i) erhält man eine Fusion fus_U^u . Verkette nun fus_U^u mit einem Tafelisomorphismus zwischen $\text{tbl}(u)$ und $\text{tbl}(U)$ und erhalte so eine Fusion zwischen den Bibliothekstafeln von \mathfrak{U} und U . Berechne analog zu oben die Fusion fus_U^G .

zu (iii): Fasse die berechnete Tafel $\text{tbl}(U)$ und die berechnete Fusion fus_U^U als neue Bibliothekstafel beziehungsweise Bibliotheksfusion auf und berechne die Fusion fus_U^G analog zu (ii).

zu (b): Für den Spezialfall $M \cong Z(\mathfrak{U})$ kann eine Fusion fus_U^U berechnet werden, indem das Zentrum aus $\text{tbl}(\mathfrak{U})$ herausfaktoriert wird.

Im Allgemeinen ist jedoch M lediglich isomorph zu einer Untergruppe von $Z(\mathfrak{U})$. Um eine Fusion fus_U^U analog zu (a) zu konstruieren, wird eine Fusion von $\text{Cl}(\mathfrak{U})$ nach $\text{Cl}(\mathfrak{G})$ benötigt. Im Gegensatz zu Kapitel 3 verfügt man nun jedoch nicht über eine explizite Kenntnis der Gruppen, so dass die hier gesuchte Fusion eine Tafelfusion im Sinne von Definition (1.28) ist. Mittels der GAP-Funktion `PossibleClassFusions` lassen sich alle Tafelfusionen zwischen $\text{Cl}(\mathfrak{U})$ und $\text{Cl}(\mathfrak{G})$ berechnen. Mit `RepresentativesFusions` wird nun geprüft, ob sich die Tafelfusionen nur durch Operation von Tafelautomorphismen auf den Tafeln unterscheiden, oder ob sie wesentlich verschieden sind, vergleiche Beispiel (1.33). Ist ersteres der Fall, so kann eine der Tafelfusionen gewählt werden, welche gegebenenfalls auf Kompatibilität zu einer eventuellen Bibliotheksfusion fus_U^G geprüft wird, vergleiche nachfolgenden Unterpunkt (i).

Gibt es dagegen Tafelfusionen, die wesentlich verschieden sind, so sind weitere Überlegungen aufgrund der konkreten Gruppen erforderlich, wobei unter Umständen keine Entscheidung getroffen werden kann, das heißt keine Fusion ausgewählt werden kann. Beispiele hierzu liefert die Gruppe $U_6(2)$, die in Abschnitt 6.4 näher untersucht wird. Nachdem nun eine Fusion fus_U^G gefunden wurde, kann analog zu dem ersten Teil in (a) eine Tafel von U berechnet werden. Es treten die bereits bekannten Möglichkeiten auf:

- (i) Tafel $\text{tbl}(U)$ und Fusion fus_U^G sind bekannt,
- (ii) nur die Tafel $\text{tbl}(U)$ ist bekannt oder
- (iii) weder Tafel noch Fusion sind bekannt.

Die jetzige Ausgangslage unterscheidet sich zu der in (a) lediglich dadurch, dass die Fusion fus_U^G keine Bibliotheksfusion ist, sondern berechnet und gewählt wurde. Dies bewirkt jedoch, dass das weitere Vorgehen nicht völlig analog zu dem unter (a) ist.

zu (i): Genauso wie in (a) unter (i) erläutert, wird auch in diesem Fall eine Fusion fus_U^G konstruiert, wenn sie nicht schon in der Bibliothek vorhanden ist. Damit stehen wie in (a).(i) alle Tafeln und Fusionen des Diagramms (*) zur Verfügung, jedoch ist nicht klar, dass es auch kommutativ ist, da die berechnete Fusion fus_U^G unter Umständen nicht zu den anderen Fusionen passt. Daher wird **PossibleClassFusions** erneut auf $\text{tbl}(\mathcal{U})$ und $\text{tbl}(\mathcal{G})$ angewendet, diesmal aber unter der Bedingung, dass nur Tafelfusionen $f : \text{Cl}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{G})$ berechnet werden, die der Gleichung $\text{fus}_U^G \circ \text{fus}_U^U = \text{fus}_G^G \circ f$ genügen. Es kann sein, dass es kein solches f gibt; in diesem Fall muss mindestens eine der anderen drei Fusionen ausgetauscht werden.

Somit erhält man – nach eventuellem Austausch von Bibliotheksfusionen – schließlich Tafelfusionen $\text{Cl}(\mathcal{U}) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{G})$, die die Kommutativität des Diagramms gewährleisten. Falls sie sich nicht wesentlich unterscheiden, wähle eine Fusion fus_U^G unter ihnen aus. Sie erfüllt nach Konstruktion alle Anforderungen und wird der GAP-Bibliothek hinzugefügt.

zu (ii) und (iii): Hier kann die Fusion fus_U^G ohne Umschweife als neue Bibliotheksfusion angesehen und analog zu (a).(ii) und (a).(iii) verfahren werden.

zu (c): Die berechnete Tafel wird als neue Bibliothekstafel aufgefasst, und die weitere Vorgehensweise ergibt sich analog zu der in (b).

5.2 Verschiedene Konjugiertenklassen isomorpher Untergruppen

Es kommt vor, dass G maximale Untergruppen enthält, die isomorph sind, aber in verschiedenen Konjugiertenklassen liegen, siehe Beispiel (1.33)(b) und Abschnitt 3.2. Dies erfordert eine Erweiterung der Methoden, die im vorherigen Abschnitt 5.1 vorgestellt wurden. Betrachte dazu folgende Situation:

Seien H eine endliche Gruppe (zum Beispiel $H \in \{G, \mathcal{G}\}$) und $V_1, V_2 \leq H$ Untergruppen von H , die nicht zueinander konjugiert sind. Allerdings existiere ein äußerer Automorphismus α von H (das ist ein Automorphismus, der kein innerer ist, also keine Konjugation ist) mit $\alpha(V_1) = V_2$. Nach (1.26)(d) induziert α einen Tafelautomorphismus $\hat{\alpha} : \text{Cl}(H) \rightarrow \text{Cl}(H), \text{Cl}_H(h) \mapsto \text{Cl}_H(\alpha(h))$.

Sind nun von V_1 und V_2 Charaktertafeln und Fusionen $\text{Cl}(V_i) \rightarrow \text{Cl}(H), i = 1, 2$, gesucht, so kann wie folgt vorgegangen werden:

Nach Bemerkung (1.32) kann für V_1 und V_2 die gleiche Charaktertafel t verwendet werden.

Sie kann wie in Abschnitt 5.1 beschrieben berechnet werden. Die gesuchten Fusionen $\text{fus}_{V_1}^H$ und $\text{fus}_{V_2}^H$ müssen aufeinander abgestimmt werden, vergleiche die Problematik in Beispiel (1.33)(b). Hierbei hilft $\hat{\alpha}$:

Berechne eine Fusion $\text{fus}_{V_1}^H$ wie in Abschnitt 5.1 erläutert. Wir nehmen zunächst an, dass $\text{fus}_{V_1}^H$ eine „echte“ Fusion (siehe Bemerkung (1.30)(b)) ist, und führen den Fall, dass $\text{fus}_{V_1}^H$ eine Tafelfusion ist, anschließend darauf zurück.

Sei also $\iota_1 : V_1 \hookrightarrow H$ eine Einbettung, die $\text{fus}_{V_1}^H$ induziert. Damit ist $\iota_2 : V_2 \hookrightarrow H$, definiert durch $\iota_2 := \alpha \circ \iota_1 \circ \alpha^{-1}|_{V_2}$, eine zu ι_1 kompatible Einbettung von V_2 nach H , das heißt, folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\iota_1} & H \\ \alpha|_{V_1} \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V_2 & \xrightarrow{\iota_2} & H \end{array}$$

Die von ι_2 induzierte Fusion $\hat{\alpha} \circ \text{fus}_{V_1}^H \circ \widehat{\alpha^{-1}|_{V_2}}$ ist daher im analogen Sinne zu oben kompatibel zu $\text{fus}_{V_1}^H$. Für die praktische Anwendung in GAP ist zu beachten, dass für V_1 und V_2 die gleiche Tafel t gespeichert wird, so dass Fusionen für $\text{Cl}(V_1)$ und $\text{Cl}(V_2)$ den gleichen Definitionsbereich haben. Eine zu $\text{fus}_{V_1}^H$ kompatible Fusion ist somit in GAP durch $\text{fus}_{V_2}^H := \hat{\alpha} \circ \text{fus}_{V_1}^H$ gegeben.

Sozusagen wird die Fusion $\text{fus}_{V_1}^H$ durch $\hat{\alpha}$ „korrigiert“. Der Veranschaulichung dient folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(t) & \xrightarrow{\text{fus}_{V_1}^H} & \text{Cl}(H) \\ id \downarrow & & \downarrow \hat{\alpha} \\ \text{Cl}(t) & \xrightarrow{\text{fus}_{V_2}^H} & \text{Cl}(H) \end{array}$$

In den Beispielen, die in dieser Arbeit untersucht wurden, gibt es keine wesentlich verschiedenen Tafelfusionen $\text{Cl}(t) \rightarrow \text{Cl}(H)$. Im Fall, dass $\text{fus}_{V_1}^H$ keine „echte“ sondern eine Tafelfusion ist, unterscheidet sich daher $\text{fus}_{V_1}^H$ von der von der Einbettung $V_1 \hookrightarrow H$ induzierten Fusion nur um Tafelautomorphismen, so dass wir auch in diesem Fall analog zu oben argumentieren können und $\text{fus}_{V_2}^H := \hat{\alpha} \circ \text{fus}_{V_1}^H$ eine zu $\text{fus}_{V_1}^H$ kompatible Fusion ist.

An dieser Stelle sieht man im Übrigen auch, dass für konjugierte Untergruppen die gleiche Fusion gewählt werden kann; ist α ein innerer Automorphismus von H , so lässt $\hat{\alpha}$ die Konjugiertenklassen invariant, das heißt $\text{fus}_{V_2}^H = \text{fus}_{V_1}^H$.

Obige Analyse führt zur Frage, wie man mit GAP in der Praxis einen Tafelautomorphismus $\hat{\alpha}$ wie oben erhalten kann. Im Folgenden wird dies erörtert.

Zuerst stellen wir fest, ist α wie oben mit $\alpha(V_1) = V_2$, so ist $\alpha^{-1}(V_2) = V_1$. Damit können die obigen Überlegungen analog für α^{-1} beziehungsweise $\hat{\alpha}^{-1}$ durchgeführt werden, indem die Rollen von V_1 und V_2 vertauscht werden. Bei der nachfolgenden Suche können also Inverse von Kandidaten für $\hat{\alpha}$ vernachlässigt werden.

Betrachte nun die Gruppen $A := \langle \alpha \rangle$ und $K := H \rtimes A$. Die Bahnen von $\hat{\alpha}$ auf $\text{Cl}(H)$

sind genau die Urbild-Mengen der Fusion $\text{Cl}(H) \longrightarrow \text{Cl}(K)$; ist etwa $\hat{\alpha}$ durch die Permutation $(a_1, \dots, a_{m_1}) \cdots (a_1, \dots, a_{m_l})$ gegeben, so werden genau die H -Konjugiertenklassen a_1, \dots, a_{m_i} , $1 \leq i \leq l$, auf eine Konjugiertenklasse in K abgebildet. In diesem Sinne sprechen wir davon, dass α durch K „realisiert“ wird.

Stehen nun Tafeln von H und K , sowie eine Fusion fus_H^K zur Verfügung, so kann $\hat{\alpha}$ stets daraus bestimmt werden, falls α die Ordnung zwei hat; hat α die Ordnung drei, so ist dies nicht unbedingt möglich. Im Folgenden werden diese beiden Fälle näher betrachtet:

Ist $|\alpha| = 2$, so sind die Bahnen von $\hat{\alpha}$ ein- oder zweielementig. In GAP werden die Urbild-Mengen der Fusion fus_H^K als Liste aufgefasst, vergleiche Bemerkung (1.32). Dabei steht an der i -ten Stelle entweder

die Nummer der Konjugiertenklasse von H , die unter fus_H^K auf die i -te Konjugiertenklasse von K abgebildet wird, oder

eine zweielementige Liste mit den Nummern der beiden Konjugiertenklassen von H , die unter fus_H^K auf die i -te Konjugiertenklasse von K abgebildet werden, oder

die leere Liste, falls die i -te Konjugiertenklasse von K unter fus_H^K kein Urbild in H hat.

Damit kann $\hat{\alpha}$ eindeutig aus fus_H^K bestimmt werden; werden etwa die H -Konjugiertenklassenpaare $[a, b]$ und $[c, d]$ unter fus_H^K auf zwei Konjugiertenklassen in K abgebildet, so ist die zugehörige Permutation $(a, b)(c, d)$ festgelegt.

Ist $|\alpha| = 3$, so sind die Bahnen von $\hat{\alpha}$ ein- oder dreielementig und die Einträge in der die Urbild-Mengen der Fusion fus_H^K repräsentierenden Liste in GAP folglich die leere Liste, eine Zahl oder eine dreielementige Liste. Damit ist $\hat{\alpha}$ im Allgemeinen nicht aus fus_H^K bestimmbar: Werden etwa die H -Konjugiertenklassentripel $[a, b, c]$ und $[d, e, f]$ unter fus_H^K auf zwei Konjugiertenklassen in K abgebildet, so kommen als korrespondierende Permutationen sowohl $(a, b, c)(d, e, f)$ als auch $(a, b, c)(d, f, e)$ in Frage, wobei die beiden inversen Permutationen wie oben erwähnt unberücksichtigt bleiben. In GAP können durch `AutomorphismsOfTable` sämtliche Tafelautomorphismen von `tbl(H)` erzeugt werden. Unter ihnen betrachte solche, die Ordnung drei oder eins haben und deren Bahnen auf $\text{Cl}(H)$ mit den Urbild-Mengen von fus_H^K übereinstimmen. Gibt es von ihnen nur zwei, $\hat{\alpha}$ und $\hat{\alpha}^{-1}$, so kann ein gewünschter Tafelautomorphismus ausgewählt werden. Bleiben jedoch weitere Kandidaten übrig, so ist die Bestimmung von $\hat{\alpha}$ mittels fus_H^K nicht möglich. Bei der in dieser Arbeit auftretenden Gruppen konnte ein geeigneter Tafelautomorphismus stets auf obige Weise ermittelt werden.

Für den interessanten Fall dieser Arbeit $H = \mathfrak{G}$ und $|\alpha| = 2$ oder $|\alpha| = 3$ sowie maximale Untergruppen $V_1 = \mathfrak{U}_1$, $V_2 = \mathfrak{U}_2$ und – falls $|\alpha| = 3$ – \mathfrak{U}_3 gehe somit wie folgt vor:

Die zugehörigen maximalen Untergruppen in G werden mit U_1 , U_2 und U_3 bezeichnet. Da für \mathfrak{U}_1 , \mathfrak{U}_2 und \mathfrak{U}_3 die gleiche Tafel verwendet werden kann, gilt dies auch für U_1 , U_2 und U_3 . Von diesen Gruppen seien Tafeln vorhanden oder mit den Methoden aus 5.1 berechnet, ebenso die Fusionen $\text{fus}_{\mathfrak{U}_1}^{U_1} = \text{fus}_{\mathfrak{U}_2}^{U_2} = \text{fus}_{\mathfrak{U}_3}^{U_3}$ sowie $\text{fus}_{\mathfrak{U}_1}^{\mathfrak{G}}$ und $\text{fus}_{U_1}^G$, so dass das Diagramm (*) aus Abschnitt 1.4 kommutiert.

Mit den oben beschriebenen Methoden sei in GAP ein Tafelautomorphismus $\hat{\alpha} \in \text{TAut}(\mathfrak{G})$ bestimmt wurden, so dass durch $\text{fus}_{\mathfrak{U}_2}^{\mathfrak{G}} := \hat{\alpha} \circ \text{fus}_{\mathfrak{U}_1}^{\mathfrak{G}}$ und – falls $|\alpha| = 3$ – $\text{fus}_{\mathfrak{U}_3}^{\mathfrak{G}} := \hat{\alpha}^2 \circ \text{fus}_{\mathfrak{U}_1}^{\mathfrak{G}}$

Fusionen von \mathfrak{U}_2 nach \mathfrak{G} beziehungsweise von \mathfrak{U}_3 nach \mathfrak{G} gegeben sind. Die noch fehlenden Fusionen $\text{fus}_{U_2}^G$ beziehungsweise $\text{fus}_{U_3}^G$ mit der Eigenschaft, dass das Diagramm (*) kommutiert, können gemäß den Ausführungen unter Abschnitt 5.1(a)(ii) bestimmt werden.

Bei den Gruppen $O_7(3)$, $U_3(5)$ und $L_3(7)$, sowie $O_8^+(2)$ und $U_6(2)$ wird diese Vorgehensweise angewandt und vorgestellt:

Bei ersterer gibt es drei Paare von maximalen Untergruppen, die nicht zueinander konjugiert sind, aber durch einen Automorphismus der Ordnung zwei aufeinander abgebildet werden. Wie oben ausgeführt können die Fusionen vergleichsweise leicht bestimmt werden; in Abschnitt 6.1 wird dies genauer dargelegt.

Bei $U_3(5)$ und $L_3(7)$ gibt es verschiedene Tripel von maximalen Untergruppen, die nicht zueinander konjugiert sind, aber durch einen Automorphismus der Ordnung drei aufeinander abgebildet werden. Wie oben geschildert ist nun die Vorgehensweise etwas komplizierter als bei $O_7(3)$; sie wird in Abschnitt 6.2 näher beleuchtet.

Bei $O_8^+(2)$ und $U_6(2)$ ist das Vorgehen teilweise noch etwas komplizierter als bei $U_3(5)$ und $L_3(7)$, da es nicht immer einen Automorphismus gibt, der die Untergruppen aufeinander abbildet. In den Abschnitten 6.3 und 6.4 werden diese Fälle untersucht.

5.3 Zusammengesetzter Multiplikator

Der Multiplikator der einfachen Atlasgruppen ist häufig ein-, zwei- oder dreielementig. Die Ausnahmen sind in Tabelle 5.1 zusammengefasst. Prinzipiell ist auch bei diesen Gruppen das Vorgehen aus den Abschnitten 5.1 und 5.2 möglich, allerdings wird der Rechenaufwand durch den größeren Multiplikator weiter erhöht.

Unter gewissen Umständen ist in diesen Fällen eine alternative Vorgehensweise möglich, womit der Rechenaufwand reduziert werden kann; dies ist Gegenstand des vorliegenden Abschnittes.

Der Multiplikator $M := M(G)$ von G sei also nichttrivial und nicht von primter Ordnung. Zunächst wird unterschieden, ob M zyklisch ist oder nicht.

Betrachte zuerst einen zyklischen Multiplikator.

$M(A_6) \cong C_6$	$M(O_8^+(3)) \cong C_2 \times C_2$
$M(A_7) \cong C_6$	$M(Sz(8)) \cong C_2 \times C_2$
$M(L_3(4)) \cong C_3 \times C_4 \times C_4$	$M(^2E_6(2)) \cong C_2 \times C_2 \times C_3$
$M(U_4(3)) \cong C_3 \times C_3 \times C_4$	$M(M_{22}) \cong C_{12}$
$M(U_6(2)) \cong C_2 \times C_2 \times C_3$	$M(Suz) \cong C_6$
$M(O_7(3)) \cong C_6$	$M(Fi_{22}) \cong C_6$
$M(O_8^+(2)) \cong C_2 \times C_2$	

Tabelle 5.1: Gruppen, deren Multiplikator nicht Primzahlordnung hat

Gemäß Tabelle 5.1 kommt als Multiplikator fünfmal C_6 vor und einmal C_{12} , als Multiplikator der sporadischen Gruppe M_{22} . Für die Darstellungsgruppe dieser Gruppe sind jedoch bereits die Charaktertafeln aller maximaler Untergruppen mit den entsprechenden Fusionen bekannt, diese Gruppe braucht also nicht weiter betrachtet zu werden. Übrig bleibt nur der Fall $M \cong C_6$.

Ist der Multiplikator $C_6 \cong C_2 \times C_3$, so werden zunächst die Schurschen Erweiterungen (\mathfrak{G}_1, C_2) und (\mathfrak{G}_2, C_3) von G betrachtet. Diese sind zwar nach Satz (1.8) keine Darstellungsgruppen, aber sie genügen der allgemeinen Version des Setups (1.36). Somit sind die Methoden der vorangegangenen Abschnitte dieses Kapitels auch auf diese Erweiterungen anwendbar, und man kann für alle Paare maximaler Untergruppen von G und \mathfrak{G}_1 beziehungsweise \mathfrak{G}_2 die Charaktertafeln mit den entsprechenden Fusionen berechnen.

Aus diesen Tafeln und Fusionen können in vielen Fällen nun die Tafeln der maximalen Untergruppen der Darstellungsgruppe gewonnen werden: Sei dazu U eine maximale Untergruppe von G und seien die zu U korrespondierenden maximalen Untergruppen in \mathfrak{G}_1 beziehungsweise \mathfrak{G}_2 mit $2.U$ beziehungsweise $3.U$ bezeichnet, in Anlehnung an ihre Struktur, vergleiche die Notation aus Anhang A. Die Tafeln dieser Gruppen mit den zugehörigen Fusionen $\text{fus}_{2.U}^2.G$ und $\text{fus}_{3.U}^3.G$ sind bereits in der GAP-Bibliothek gespeichert beziehungsweise seien mit den Methoden aus den Abschnitten 5.1 und 5.2 berechnet.

Die Darstellungsgruppe von G werde hier mit $6.G$ bezeichnet und die darin zu U gehörige maximale Untergruppe mit $6.U$. Von $6.G$ ist eine Tafel in der GAP-Bibliothek vorhanden, die mit $\text{tbl}(6.G)$ bezeichnet wird. Gesucht ist eine Tafel von $6.U$ mit Fusionen $\text{fus}_{6.U}^2.U$ und $\text{fus}_{6.U}^3.U$ sowie $\text{fus}_{6.U}^6.G$.

Nun leistet die GAP-Routine `CharacterTableOfCommonCentralExtension` wertvolle Dienste: Sei $\text{tbl}(U)$ die Charaktertafel einer beliebigen endlichen Gruppe U und seien $\text{tbl}(P.U)$ und $\text{tbl}(Q.U)$ Charaktertafeln von zentralen Erweiterungen $P.U$ und $Q.U$ mit zyklischen Gruppen von Primzahlordnung p beziehungsweise q , wobei $p \neq q$. Weiter seien die Faktorfusionen von $\text{Cl}(P.U)$ beziehungsweise $\text{Cl}(Q.U)$ nach $\text{Cl}(U)$ bereits bekannt und auf den entsprechenden Tafeln gespeichert. Unter diesen Voraussetzungen liefert `CharacterTableOfCommonCentralExtension` „wahrscheinlich“ (darauf wird anschließend eingegangen) eine Charaktertafel der zentralen Erweiterung $PQ.U$ mit Fusionen nach $\text{Cl}(P.U)$ und $\text{Cl}(Q.U)$. Da in der obigen Situation die Voraussetzungen für `CharacterTableOfCommonCentralExtension` gegeben sind, kann man diese Funktion auf $\text{tbl}(2.U)$ und $\text{tbl}(3.U)$ anwenden und man erhält „wahrscheinlich“ eine Tafel von $6.U$ sowie Fusionen $\text{fus}_{6.U}^2.U$ und $\text{fus}_{6.U}^3.U$ mit der Eigenschaft $\text{fus}_{2.U}^U \circ \text{fus}_{6.U}^2.U = \text{fus}_{3.U}^U \circ \text{fus}_{6.U}^3.U$. Eine Fusion $\text{fus}_{6.U}^U : \text{Cl}(6.U) \rightarrow \text{Cl}(U)$ ist daher durch $\text{fus}_{6.U}^U := \text{fus}_{k.U}^U \circ \text{fus}_{6.U}^{k.U}$ für $k \in \{2, 3\}$ gegeben.

Im Folgenden wird auf die Grundlagen von `CharacterTableOfCommonCentralExtension` näher eingegangen, wobei auch obiges „wahrscheinlich“ beleuchtet wird. Anschließend wird der Frage nachgegangen, wie man eine Fusion von $\text{Cl}(6.U)$ nach $\text{Cl}(6.G)$ erhält.

Bei der Routine `CharacterTableOfCommonCentralExtension` wird zunächst der „Tafelkopf“ von $6.U$ berechnet, das heißt es werden die Konjugiertenklassen und die Potenzabbildungen von $6.U$ bestimmt; siehe dazu Abschnitt (1.1) aus [Bre04a]. Anschließend werden die Inflationen der irreduziblen Charaktere von $\text{tbl}(2.U)$ und $\text{tbl}(3.U)$ gebildet, vergleiche Lemma (1.29). Dies sind jedoch nicht alle irreduziblen Charaktere von $6.U$, wie das folgende Lemma zeigt.

Ein Schlüssel zum Beweis des Lemmas liegt darin, dass die Summe aller n -ten Einheits-

wurzeln für $n \neq 1$ Null ist. In dem hier vorgestellten Beweis wird dies charaktertheoretisch formuliert.

(5.1) Lemma

Sei G eine endliche Gruppe mit zyklischem Zentrum $Z(G)$. Dann gibt es einen irreduziblen Charakter von G , der auf $Z(G)$ treu einschränkt.

Beweis.

Sei $\lambda \in \text{Irr}(Z(G))$ treu. Solch ein Charakter existiert, da $Z(G)$ zyklisch ist. Betrachte nun $\psi := \lambda^G$ und $\chi \in \text{Irr}(G)$ mit $(\chi, \psi) \neq 0$. Aufgrund der Frobenius-Reziprozität ist daher $(\chi_{Z(G)}, \lambda)_{Z(G)} \neq 0$. Also ist $\chi_{Z(G)} = \chi(1)\lambda$ treu. \square

Um die übrigen irreduziblen Charaktere zu erhalten, werden Tensorprodukte zwischen den irreduziblen Charakteren von $\text{tbl}(2.U)$ und $\text{tbl}(3.U)$ gebildet, die die zentrale 2 beziehungsweise 3 nicht im Kern haben. Auf diese wird der *LLL-Algorithmus* angewendet, um weitere irreduzible Charaktere von $6.U$ zu erhalten. Es kann jedoch sein – und hier kommt das „wahrscheinlich“ ins Spiel – dass auf diese Weise nicht alle irreduziblen Charaktere von $6.U$ berechnet werden können. In diesem Fall kann mit einem weiteren Algorithmus (dieser benutzt das Konzept der „orthogonalen Einbettungen“) versucht werden, die restlichen irreduziblen Charaktere zu finden.

Mittels `CharacterTableOfCommonCentralExtension` kann für die relevanten Beispiele dieser Arbeit stets die Tafel von $6.U$ konstruiert werden.

Nun zur Frage der Fusion $\text{fus}_{6.U}^{6.G}$:

Sie soll mit den Fusionen $\text{fus}_{2.U}^{2.G}$ und $\text{fus}_{3.U}^{3.G}$ verträglich sein, das heißt, das folgende Diagramm soll für $k = 2, 3$ kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} \text{Cl}(k.U) & \xrightarrow{\text{fus}_{k.U}^{k.G}} & \text{Cl}(k.G) \\ \text{fus}_{6.U}^{k.U} \uparrow & & \uparrow \text{fus}_{6.U}^{k.G} \\ \text{Cl}(6.U) & \xrightarrow{\text{fus}_{6.U}^{6.G}} & \text{Cl}(6.G) \end{array}$$

Mit Hilfe des Abschnittes (1.1) aus [Bre04a] kann gezeigt werden, dass die Kommutativität des obigen Diagramms für $k = 2, 3$ die Fusion $\text{fus}_{6.U}^{6.G}$ eindeutig festlegt, das heißt, es gibt genau eine Fusion $\text{fus}_{6.U}^{6.G}$, die $\text{fus}_{6.U}^{k.G} \circ \text{fus}_{6.U}^{6.G} = \text{fus}_{k.U}^{k.G} \circ \text{fus}_{6.U}^{k.U}$ für $k = 2$ und $k = 3$ genügt, womit sich die Fusion $\text{fus}_{6.U}^{6.G}$ sofort aus den bereits bekannten Fusionen ergibt.

Da die Fusionen $\text{fus}_{k.U}^{k.G}$ für $k = 2, 3$ mit den Verfahren aus den Abschnitten 5.1 und 5.2 gewonnen wurden, passen sie zur Fusion fus_U^G , das heißt, das Diagramm (*) aus Abschnitt 1.4 kommutiert. Wegen der Kommutativität des obigen Diagramms passen somit auch die Fusionen $\text{fus}_{6.U}^{6.G}$ und fus_U^G zusammen, womit diese in Abschnitt 1.4 formulierte Forderung an $\text{fus}_{6.U}^{6.G}$ erfüllt ist.

Betrachte nun den Fall, dass der Multiplikator nichtzyklisch ist.

Für die konkreten Ausführungen werden zunächst zwei Sätze formuliert, die auch eigenständige theoretische Bedeutung haben.

(5.2) Satz

Sei G eine endliche, nicht notwendig einfache, Gruppe. Hat G einen treuen irreduziblen Charakter, dann ist $Z(G)$ zyklisch.

Beweis.

Siehe [Isa76], Theorem 2.32(a). □

Dieser Satz kann verallgemeinert werden:

(5.3) Satz

Sei G eine endliche, nicht notwendig einfache, Gruppe. Ist $Z \leq Z(G)$ nicht zyklisch, so ist $\text{Kern}(\chi) \cap Z \neq \{1\}$ für alle $\chi \in \text{Irr}(G)$.

Beweis.

Sei $\chi \in \text{Irr}(G)$ und $N := \text{Kern}(\chi)$. Nach (1.29)(d) ist $N \triangleleft G$.

Definiere $\hat{\chi} \in \text{Irr}(G/N)$ durch $\hat{\chi}(gN) := \chi(g)$, vergleiche (1.29). Nach Konstruktion ist $\hat{\chi}$ treu. Nach (5.2) ist $ZN/N \leq Z(G/N)$ zyklisch. Weiter ist $ZN/N \cong Z/Z \cap N$, womit nach Voraussetzung $Z \cap N \neq \{1\}$ folgt. □

Zur Untersuchung der Gruppen der Tabelle 5.1 mit nichtzyklischem Multiplikator beschränken wir uns auf den Fall $M \cong C_2 \times C_2$. Wie der Abschnitt 6.4 zeigt, leistet eine kombinierte Anwendung der Fälle $M \cong C_6$ und $M \cong C_2 \times C_2$ wertvolle Dienste bei der Analyse von $U_6(2)$, deren Multiplikator isomorph zu $C_2 \times C_2 \times C_3$ ist. Die Fälle $M \cong C_3 \times C_4 \times C_4$ und $M \cong C_3 \times C_3 \times C_4$ werden genauso wie die Gruppen $L_3(4)$ und $U_4(3)$ nicht untersucht.

Seien also $M = \langle z_1, z_2 \rangle$, $z_3 := z_1 z_2$ und $Z_i := \langle z_i \rangle$ mit $|Z_i| = 2$ für $i = 1, 2, 3$. Sei (U, \mathfrak{U}) ein Paar maximaler Untergruppen von G und \mathfrak{G} . Neben (\mathfrak{G}, M) existieren nach Satz (1.14) noch drei weitere echte Schurische Erweiterungen von G . Bezeichne sie mit $(\mathfrak{G}_i, M/Z_i)$, $i = 1, 2, 3$, wobei $\mathfrak{G}_i = \mathfrak{G}/Z_i$. Die nach Satz (1.35) zu U korrespondierenden Untergruppen in \mathfrak{G}_i werden mit \mathfrak{U}_i bezeichnet. Es ist $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}/Z_i$, für $i = 1, 2, 3$.

Sei nun χ ein irreduzibler Charakter von \mathfrak{U} mit $N := \text{Kern}(\chi)$. Nach Setup (1.36) und Satz (5.3) ist $N \cap M \neq \{1\}$. Dies ist gleichbedeutend mit $Z_i \leq N$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$.

Nach Lemma (1.29) existiert somit ein $\hat{\chi} \in \text{Irr}(\mathfrak{U}/Z_i)$, so dass die Inflation von $\hat{\chi}$ auf \mathfrak{U} gleich χ ist.

Im Gegensatz zu dem vorher betrachteten Fall $M \cong C_6$ sind hier durch Inflationen der irreduziblen Charaktere der \mathfrak{U}_i diejenigen von \mathfrak{U} gegeben. In [Bre04b] ist ausgeführt, wie aus den Tafeln der \mathfrak{U}_i und den Fusionen $\text{fus}_{\mathfrak{U}_i}^U$ auch Fusionen $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{U}_i}$ und Kandidaten für eine Tafel von \mathfrak{U} bestimmt werden können.

In GAP ist dies umgesetzt in der Funktion `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G`.

Eine Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^U$ ergibt sich aus der Hintereinanderausführung der Fusionen $\text{fus}_{\mathfrak{U}_i}^{\mathfrak{U}_i}$ und $\text{fus}_{\mathfrak{U}_i}^U$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$.

Um eine Fusion $\text{fus}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{G}}$ zu bestimmen, die zu den Fusionen $\text{fus}_{\mathfrak{U}_i}^{\mathfrak{G}_i}$ verträglich ist (das heißt, das Diagramm (*) aus Abschnitt 1.4 kommutiert für diese Gruppen), gehe analog zu den Ausführungen in Abschnitt 5.1 vor.

Bei $O_8^+(2)$ werden diese Überlegungen verwendet, näheres in Abschnitt 6.3. Besonders interessant sind die dreizehnte und vierzehnte maximale Untergruppe; bei ihnen liefert `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G` zwei nichtisomorphe Kandidaten für eine Tafel von \mathfrak{U} .

Kapitel 6

Beispiele und Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Methoden und Ergebnisse verwendet, um exemplarisch Tafeln und zugehörige Fusionen der maximalen Untergruppen der Gruppen $O_7(3)$, $U_3(5)$ und $L_3(7)$, sowie $O_8^+(2)$ und $U_6(2)$ und ihrer Schurschen Erweiterungen zu bestimmen.

Abschließend wird eine Übersicht der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Gruppen gegeben.

6.1 $O_7(3)$

In diesem Abschnitt wird dargestellt, wie die in Abschnitt 1.4 formulierten Fragen für die orthogonale Gruppe $O_7(3)$ beantwortet werden können. Die Methoden, die in den Kapiteln 2, 4 und 5 beschrieben wurden, dienen dabei als Anleitung und Rezepte; die konkrete Struktur von $O_7(3)$ und ihrer maximalen Untergruppen wird aber auch benutzt.

Zunächst wird ein Überblick über $O_7(3)$ gegeben, in dem auch das weitere Vorgehen dargestellt wird.

6.1.1 Überblick

Zunächst geben wir einige Daten dieser Gruppe an, vergleiche [CCN⁺03], Seite 108. Es gibt 15 Konjugiertenklassen maximaler Untergruppen in $O_7(3)$ und der Multiplikator von $O_7(3)$ ist isomorph zu C_6 . Gemäß Abschnitt 5.3 werden also zunächst die Erweiterungen $2.O_7(3)$ und $3.O_7(3)$ betrachtet – in den Abschnitten 6.1.2 und 6.1.3 – und anschließend in Abschnitt 6.1.4 die Darstellungsgruppe $6.O_7(3)$; die Notation ist dabei an diejenige in Abschnitt 5.3 angelehnt. Nach Satz (1.35) sind die maximalen Untergruppen dieser Erweiterungen die Urbilder der maximalen Untergruppen von $O_7(3)$ unter dem kanonischen Epimorphismus. Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 1.4 sind für jedes maximale Untergruppenpaar $(U, 2.U)$ beziehungsweise $(U, 3.U)$ die Charaktertafeln und die Fusionen zu bestimmen, so dass folgende Diagramme kommutieren:

Für die Erweiterung mit C_2

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cl}(U) & \xrightarrow{\text{fus}_U^{O_7(3)}} & \text{Cl}(O_7(3)) \\
 \text{fus}_{2,U}^U \uparrow & & \uparrow \text{fus}_{2,O_7(3)}^{O_7(3)} \\
 \text{Cl}(2.U) & \xrightarrow{\text{fus}_{2,U}^{2.O_7(3)}} & \text{Cl}(2.O_7(3))
 \end{array} \tag{D1}$$

und für die Erweiterung mit C_3

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cl}(U) & \xrightarrow{\text{fus}_U^{O_7(3)}} & \text{Cl}(O_7(3)) \\
 \text{fus}_{2,U}^U \uparrow & & \uparrow \text{fus}_{3,O_7(3)}^{O_7(3)} \\
 \text{Cl}(3.U) & \xrightarrow{\text{fus}_{3,U}^{3.O_7(3)}} & \text{Cl}(3.O_7(3))
 \end{array} \tag{D2}$$

für Vertreter U der Konjugiertenklassen von maximalen Untergruppen, welche in Tabelle 6.1 aufgeführt sind.

Die Gruppen werden der Größe nach mit U_1 bis U_{15} bezeichnet, es werden ihre Struktur sowie ihr Index in $O_7(3)$ angegeben. Ebenso werden die Strukturen der korrespondierenden Untergruppen in den Erweiterungen $2.O_7(3)$, $3.O_7(3)$ und $6.O_7(3)$ angegeben. Wie man diese Ergebnisse erhält, wird auf den folgenden Seiten beschrieben.

Die Notation der Gruppen aus Tabelle 6.1 ist in [CCN⁺03], Seiten x – xiii und xx, erklärt. Wie aus Tabelle 6.1 ersichtlich, gibt es drei Untergruppenpaare von verschiedenen Konjugiertenklassen eines Isomphietyps mit Vertretern $G_2(3)$, $S_6(2)$ und S_9 . Nach [CCN⁺03] besitzen $O_7(3)$, die Schurschen Erweiterungen $2.O_7(3)$ und $3.O_7(3)$ und die Darstellungsgruppe $6.O_7(3)$ jeweils einen äußeren Automorphismus der Ordnung zwei, der die oben erwähnten Konjugiertenklassen beziehungsweise ihre Urbilder in den Erweiterungen aufeinander abbildet. Bezeichne die Automorphismen mit α_1 bis α_4 . Diese werden in den Gruppen $O_7(3).2$, $2.O_7(3).2$, $3.O_7(3).2$ und $6.O_7(3).2$ im Sinne von Abschnitt 5.2 realisiert, von denen in der GAP-Bibliothek Charaktertafeln gespeichert sind. Auch stehen Fusionen $\text{fus}_{O_7(3)}^{O_7(3).2}$ und $\text{fus}_{k.O_7(3)}^{k.O_7(3).2}$, $k = 2, 3, 6$, zur Verfügung, so dass gemäß Abschnitt 5.2 die zu den (Gruppen-)Automorphismen gehörigen Tafelautomorphismen $\hat{\alpha}_1$ bis $\hat{\alpha}_4$ leicht bestimmt werden können, da die Automorphismen Ordnung zwei haben.

Nun folgen die konkreten Ausführungen mit GAP.

6.1.2 $2.O_7(3)$

Mit $\text{tbl}(G)$ und $\text{tbl}(2.G)$ seien die GAP-Bibliothekstafeln von $O_7(3)$ und $2.O_7(3)$ bezeichnet. Zunächst wird eine Art Bestandsaufnahme der GAP-Bibliothek vorgenommen und gemäß Abschnitt 5.1 geprüft, welche Arbeit für welche Untergruppe bereits geleistet wurde. Während `Maxes` keinen Erfolg hat, liefert `NamesOfFusionSources` angewandt auf $O_7(3)$ die Namen einiger Untergruppen von $O_7(3)$, deren Tafel und Fusion nach $\text{Cl}(G)$ bekannt ist (dies bedeutet hier wie in 5.1 in der GAP-Bibliothek enthalten). Dies sind folgende Untergruppen: U_1, U_3, U_4, U_7, U_9 und U_{13} .

Name	Struktur	Index	in $2.O_7(3)$	in $3.O_7(3)$	in $6.O_7(3)$
U_1	$2.U_4(3).2_2$	351	$4.U_4(3).2_2$	$6_1.U_4(3).2_2$	$12_1.U_4(3).2_2$
U_2	$3^5 : U_4(2) : 2$	364	$2.U_2$	$3.U_2$	$6.U_2$
U_3	$L_4(3).2_2$	378	$2.L_4(3).2_2$	$3 \times L_4(3).2_2$	$3 \times 2.L_4(3).2_2$
U_4	$G_2(3)$	1080	$2 \times G_2(3)$	$3.G_2(3)$	$2 \times 3.G_2(3)$
U_5	$G_2(3)$	1080	$2 \times G_2(3)$	$3.G_2(3)$	$2 \times 3.G_2(3)$
U_6	$3^{3+3} : L_3(3)$	1120	$2 \times 3^{3+3} : L_3(3)$	$3.U_6$	$2 \times 3.U_6$
U_7	$S_6(2)$	3159	$2.S_6(2)$	$3 \times S_6(2)$	$3 \times 2.S_6(2)$
U_8	$S_6(2)$	3159	$2.S_6(2)$	$3 \times S_6(2)$	$3 \times 2.S_6(2)$
U_9	$3_+^{1+6} : (2\mathcal{A}_4 \times \mathcal{A}_4).2$	3640	$2.U_9$	$3.U_9$	$6.U_9$
U_{10}	\mathcal{S}_9	12636	$IC(2.\mathcal{S}_9)^*$	$3 \times \mathcal{S}_9$	$3 \times IC(2.\mathcal{S}_9)$
U_{11}	\mathcal{S}_9	12636	$IC(2.\mathcal{S}_9)$	$3 \times \mathcal{S}_9$	$3 \times IC(2.\mathcal{S}_9)$
U_{12}	$(2^2 \times U_4(2)) : 2$	22113	$2.U_{12}$	$3 \times U_{12}$	$3 \times 2.U_{12}$
U_{13}	$2^6 : \mathcal{A}_7$	28413	$2.U_{13}$	$3.U_{13}$	$6.U_{13}$
U_{14}	$\mathcal{S}_4 \times \mathcal{S}_6$	265356	$2.U_{14}$	$3 \times \mathcal{S}_4 \times \mathcal{S}_6$	$3 \times 2.U_{14}$
U_{15}	$\mathcal{S}_4 \times 2(\mathcal{A}_4 \times \mathcal{A}_4).2$	331695	$2.U_{15}$	$3.U_{15}$	$6.U_{15}$

* Die Bezeichnung „ $IC(2.\mathcal{S}_9)$ “ wird bei den Ausführungen zu U_{10} , Seite 63, erklärt.

Tabelle 6.1: Maximale Untergruppen von $O_7(3)$ und ihre Erweiterungen

Für $2.O_7(3)$ ergibt die Abfrage `NamesOfFusionSources` jedoch, dass keine Untergruppenfusion in der Bibliothek gespeichert ist.

Bei einigen Untergruppen werden die Methoden des vierten Kapitels verwendet. Diese erfordern eine Darstellung von $2.O_7(3)$, mit der GAP effizient rechnen kann. Mit dem Befehl `DisplayAtlasInfo` kann abgefragt werden, welche Arten von Darstellungen zu einer Gruppe in [Wil] verfügbar sind und in GAP eingelesen werden können. Für $2.O_7(3)$ gibt es eine Permutationsdarstellung auf 2160 Punkten, die Grundlage hier durchgeführter Rechnungen mit $2.O_7(3)$ ist.

Nun werden die Untergruppen untersucht.

Es werden zunächst die obigen Untergruppen betrachtet, von denen bereits eine Tafel mit Fusion nach $O_7(3)$ in der Bibliothek gespeichert ist.

Die erste maximale Untergruppe $2.U_1 \leq 2.O_7(3)$

Sei $\text{tbl}(U_1)$ die Bibliothekstafel von $U_1 \leq O_7(3)$.

Mittels des ersten Zufallsverfahrens (4.1) wird eine Gruppe V der Ordnung $|2.U_1|$ erzeugt. Aus Ordnungsgründen, und da es nur eine Konjugiertenklasse des Isomorphietyps $2.U_1$ gibt, ist V zu $2.U_1$ konjugiert, siehe auch Bemerkung (4.3). Ihre Tafel wird berechnet, und ein Vergleich mit der GAP-Bibliothek zeigt, dass sie unter dem Namen $4.U_4(3).2_2$ bereits in der Bibliothek gespeichert ist; auch ist auf ihr bereits eine Fusion zu $\text{tbl}(U_1)$ vermerkt.

Für das Diagramm (D1) bezogen auf U_1 fehlt also wie oben erwähnt lediglich noch die Fusion $\text{fus}_{2.U_1}^{2.G}$. Die weitere Vorgehensweise beruht auf den allgemeinen Ausführungen unter (b) in 5.1, allerdings kann sie ein wenig abgekürzt werden, da durch die Vorarbeit mittels `NamesOfFusionSources` festgestellt wurde, dass in der GAP-Bibliothek bereits eine Tafel

von U_1 mit Fusion $\text{fus}_{U_1}^G$ nach $\text{Cl}(G)$ existiert. Somit können direkt mittels `PossibleClassFusions` solche Fusionen von $\text{Cl}(2.U_1)$ nach $\text{Cl}(2.G)$ gesucht werden, die zur Kommutativität des Diagramm (D1) führen (vergleiche Ausführungen in (b).(i)). Anschließend stellt man mit `RepresentativesFusions` fest, dass es bis auf Operation von Tafelautomorphismen nur eine Fusion gibt. Diese wird zur Bibliothekstafel $\text{tbl}(2.U_1)$ gespeichert.

Die dritte maximale Untergruppe $2.U_3 \leq 2.O_7(3)$

Das Vorgehen ist analog zu dem bei $(U_1, 2.U_1)$.

Die vierte maximale Untergruppe $2.U_4 \leq 2.O_7(3)$

Hier ist das Verfahren nicht analog zu den obigen Gruppen, da es zwei Konjugiertenklassen des Isomorphietyps $G_2(3)$ gibt, das heißt $U_4 \cong U_5 \cong G_2(3)$. Gemäß den allgemeinen Ausführungen zur $O_7(3)$ in Abschnitt 6.1.1 werden zunächst für das Paar $(U_4, 2.U_4)$ die gesuchten Tafeln und Fusionen berechnet. Weiterhin stehen Tafelautomorphismen $\hat{\alpha}_1 \in \text{TAut}(O_7(3))$ und $\hat{\alpha}_2 \in \text{TAut}(2.O_7(3))$ zur Verfügung, die entsprechend den Ausführungen in 5.2 zur Bestimmung der Fusionen für das Paar $(U_5, 2.U_5)$ herangezogen werden können. Nun konkret: Bei $G_2(3)$ muss man wenig rechnen; es kommen die Ergebnisse des zweiten Kapitels zum Tragen:

Nach [CCN⁺03] ist $G_2(3)$ einfach mit einem Schurschen Multiplikator der Ordnung drei. Nach Satz (2.5) ist daher $2.U_4 \cong C_2 \times G_2(3)$. Damit hat man nicht nur die Gruppe $2.U_4$ näher bestimmt, sondern mittels des GAP-Befehls `CharacterTableDirectProduct` kann aus den Bibliothekstafeln von $G_2(3)$ und C_2 die Tafel von $2.U_4$ berechnet werden. Die Fusion $\text{fus}_{2.U_4}^{U_4} = \text{fus}_{C_2 \times G_2(3)}^{G_2(3)}$ ist durch `CharacterTableDirectProduct` ebenfalls berechnet worden. Das weitere Vorgehen zur Bestimmung der Fusion $\text{fus}_{2.U_4}^{2.G}$ ist wieder analog zu dem bei $2.U_1$.

Nun zu $2.U_5$. Wie oben erwähnt, kann den Ausführungen in Abschnitt 5.2 gefolgt werden. Danach gilt $2.U_5 \cong 2.U_4$ und für die Faktorfusionen wird $\text{fus}_{2.U_5}^{U_5} = \text{fus}_{2.U_4}^{U_4} = \text{fus}_{C_2 \times G_2(3)}^{G_2(3)}$ gewählt. Die Fusionen $\text{fus}_{U_5}^G = \hat{\alpha}_1 \circ \text{fus}_{U_4}^G$ und $\text{fus}_{2.U_5}^{2.G} = \hat{\alpha}_2 \circ \text{fus}_{2.U_4}^{2.G}$ werden durch Anwendung von $\hat{\alpha}_1$ und $\hat{\alpha}_2$ aus den entsprechenden Fusionen für U_4 beziehungsweise $2.U_4$ berechnet.

Die siebte maximale Untergruppe $2.U_7 \leq 2.O_7(3)$

Wie bei der vierten und fünften maximalen Untergruppe gilt auch hier $U_7 \cong U_8$, wobei sich zunächst U_7 zugewandt wird.

Nach [CCN⁺03] ist $U_7 \cong S_6(2)$ einfach mit einem Schurschen Multiplikator der Ordnung zwei. Daher ist im Gegensatz zu oben Satz (2.5) nicht anwendbar, aber immerhin besagt Satz (2.3), dass es nur zwei Möglichkeiten für die Gestalt von $2.U_7$ gibt. Nun kann aber die Möglichkeit $2.U_7 \cong C_2 \times S_6(2)$ wie folgt ausgeschlossen werden: Würde dies gelten, so gäbe es in $2.O_7(3)$ eine Untergruppe isomorph zu $S_6(2)$. Dies kann aber nicht sein, weil mittels `PossibleClassFusions` festgestellt werden kann, dass es keine Fusion von $\text{Cl}(S_6(2))$ nach $\text{Cl}(2.O_7(3))$ gibt, also gibt es auch keine Einbettung $S_6(2) \hookrightarrow 2.O_7(3)$, vergleiche Bemerkung (1.30)(b). Damit ist also $(2.U_7, C_2)$ nach (2.3) eine Schursche Erweiterung von U_7 ; da $M(S_6(2)) \cong C_2$, ist $2.U_7 \cong 2.S_6(2)$ nach Satz (1.8) die Darstellungsgruppe von $S_6(2)$. Die Charaktertafel der Darstellungsgruppe mit Fusion nach $\text{Cl}(S_6(2))$ ist bereits in der GAP-Bibliothek vorhanden. Die Bestimmung der Fusion $\text{fus}_{2.U_7}^{2.G}$ erfolgt wieder analog zu den Ausführungen bei $2.U_1$.

Das Vorgehen bei $2.U_8$ ist analog zu dem bei $2.U_5$.

Die neunte maximale Untergruppe $2.U_9 \leq 2.O_7(3)$

Nach [CCN⁺03] ist U_9 der Normalisator einer zyklischen Gruppe C_3 der Ordnung 3, deren Erzeuger Elemente der Konjugiertenklasse 3A sind (die Tafel in [CCN⁺03] von $O_7(3)$ ist dabei die „Bezugstafel“). Mit Hilfe des zweiten Zufallsverfahrens (4.6) wird eine Gruppe \mathfrak{V} mit Ordnung $|2.U_9|$ erzeugt. Mit der rechenintensiven Funktion `IntermediateSubgroups` kann gezeigt werden, dass die Gruppe \mathfrak{V} auch maximal ist, woraus folgt, dass \mathfrak{V} zu $2.U_9$ konjugiert ist.

Alternativ (mit weniger Rechenaufwand) kann man $2.U_9$ mittels des dritten Zufallsverfahrens (4.8) gewinnen: Nach [CCN⁺03] liegen die sechsten Potenzen aller Elemente der Ordnung 18 von $O_7(3)$ in der Konjugiertenklasse 3A. Weiter ist aus [CCN⁺03] ersichtlich, dass alle Urbilder der 18-Elemente in $2.O_7(3)$ die Ordnung 36 haben; ein solches Element x kann schnell in $2.O_7(3)$ gefunden werden. Damit ist $N_{2.O_7(3)}(\langle x^6 \rangle)$ wegen Lemma (4.4) eine zu $2.U_9$ konjugierte Untergruppe. Diese Methode ist schneller als obige, außerdem ist sofort gewährleistet, dass die konstruierte Gruppe die „richtige“ ist.

Ihre Tafel wird mittels der Funktion `CharacterTable` berechnet. Ein Vergleich mit der GAP-Bibliothek zeigt, dass sie noch nicht archiviert wurde.

Es fehlen also lediglich noch die Fusionen $\text{fus}_{2.U_9}^{2.G}$ und $\text{fus}_{2.U_9}^{U_9}$. Wie unter (c) beziehungsweise (b) in 5.1 beschrieben, wird zunächst die Fusion $\text{fus}_{2.U_9}^{U_9}$ bestimmt und anschließend zu ihr und den Bibliotheksfusionen $\text{fus}_{U_9}^G$ sowie $\text{fus}_{2.G}^G$ eine Fusion von $\text{Cl}(2.U_9)$ nach $\text{Cl}(2.G)$. Die Anwendungen der Funktionen `PossibleClassFusions` und `RepresentativesFusions` zeigen, dass sie bis auf Operation von Tafelautomorphismen eindeutig ist; sie wird in die GAP-Bibliothek aufgenommen.

Die 13. maximale Untergruppe $2.U_{13} \leq 2.O_7(3)$

Die Hauptaufgabe ist es, mit GAP eine Darstellung von $2.U_{13}$ zu gewinnen, um so eine Tafel dieser Gruppe berechnen zu können.

Nach [CCN⁺03] hat $2.U_{13}$ den Index 28431 in $2.O_7(3)$, daher ist es sehr unwahrscheinlich, mit dem ersten Zufallsverfahren (4.1) zum Erfolg zu kommen. Außerdem ist nicht klar, dass eine bei dieser Methode generierte Untergruppe auch maximal ist, siehe Bemerkung (4.3).

Im Folgenden wird beschrieben, wie man, die Struktur von $U_{13} \cong 2^6 : \mathcal{A}_7$ benutzend, vorgehen kann. Eine wichtige Idee ist, eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 64 in $O_7(3)$ zu generieren, und davon das Urbild in $2.O_7(3)$ unter dem kanonischen Epimorphismus zu bilden. In gewisser Weise wird das zweite Zufallsverfahren (4.6) verallgemeinert und auf diese spezielle Situation angewandt. Im einzelnen:

Eine elementar-abelsche Gruppe K der Ordnung 64 ist Normalteiler von U_{13} , aufgrund der Maximalität ist U_{13} bereits der Normalisator von K in $O_7(3)$. Wegen Lemma (4.4) ist daher $2.U_{13} \cong N_{\mathfrak{G}}(\pi^{-1}(K))$, wobei $\pi : 2.G \rightarrow G$ der kanonische Epimorphismus sei.

Mit `SylowSubgroup` wird eine 2-Sylowgruppe in $2.O_7(3)$ berechnet, bezeichne sie mit $\text{Syl}_2(2.G)$. Da alle 2-Sylowgruppen zueinander konjugiert sind und das unter Konjugation invariante Zentrum von $2.O_7(3)$ nach Lemma (1.6)(a) isomorph zu C_2 ist, enthält $\text{Syl}_2(2.G)$ das Zentrum von $2.O_7(3)$. Somit kann π auf $\text{Syl}_2(2.G)$ angewendet werden und man erhält eine 2-Sylowgruppe in $O_7(3)$, bezeichnet mit $\text{Syl}_2(G)$. In $\text{Syl}_2(G)$ werden nun mit einem Zufallsgenerator sechs Elemente der Ordnung zwei erzeugt, bis die von ihnen erzeugte Gruppe eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 64 ist; bezeichne diese mit

\tilde{K} . Berechne nun das Urbild von dieser Gruppe unter π , also $\pi^{-1}(\tilde{K})$, und davon den Normalisator in $2.O_7(3)$, bezeichne diesen mit N . Es können nun zwei Fälle auftreten: Die konstruierte Gruppe \tilde{K} ist die „richtige“ elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 64 in dem Sinne, dass ihr Normalisator die maximale Untergruppe U_{13} ist. Dies muss aber nicht notwendig so sein, da es neben K auch noch weitere elementar-abelsche Gruppen der Ordnung 64 in $\text{Syl}_2(G)$ geben kann, die einen anderen Normalisator haben. Dies wird überprüft, indem die Ordnung von N berechnet wird. Ist diese ungleich der Ordnung von $2.U_{13}$, so wird erneut eine elementar-abelsche Gruppe der Ordnung 64 mit oben beschriebener Zufallsmethode generiert. Bei der durchgeführten Rechnung hatte N beim ersten Versuch die „richtige“ Ordnung.

Um schließlich folgern zu können, dass N und $2.U_{13}$ zueinander konjugiert sind, gehe gemäß Bemerkung (4.3) vor und zeige die Maximalität von N . Nach [CCN⁺03] und dem *Satz von Lagrange* kann N aus Ordnungsgründen außer in $2.U_{13}$ nur in den maximalen Untergruppen $2.U_1$ und $2.U_7$ enthalten sein. Nun wird eine Tafel von N berechnet; Tafeln der zwei möglichen Obergruppen sind bereits in der GAP-Bibliothek gespeichert, wie oben ausgeführt. Unter Verwendung von `PossibleClassFusions` folgt, dass es keine Einbettungen von N in eine dieser zwei Gruppen gibt, vergleiche die analoge Argumentation bei der siebten maximalen Untergruppe. Also ist N maximal. Da es nur eine Konjugiertenklasse des Isomorphietyps $2.U_{13}$ gibt, sind N und $2.U_{13}$ zueinander konjugiert. Die berechnete Tafel kann in die Bibliothek aufgenommen werden und der Rest zur Bestimmung der Fusionen ist analog zu $(U_9, 2.U_9)$.

Nun zu den übrigen Untergruppen, bei denen keine Fusion zu $\text{Cl}(G)$ in der Bibliothek gespeichert ist. Ob von ihnen Charaktertafeln in der Bibliothek enthalten sind, wird im einzelnen zu überprüfen sein. Die konkrete Vorgehensweise beruht wieder auf den allgemeinen Ausführungen in 5.1 und 5.2 für $U_{10} \cong U_{11} \cong S_9$.

Die zweite maximale Untergruppe $2.U_2 \leq 2.O_7(3)$

Analog zu $2.U_1$ wird eine Tafel von $2.U_2$ berechnet. Sie ist noch nicht in der GAP-Bibliothek enthalten. Die Funktionen `PossibleClassFusions` und `RepresentativesFusions` liefern eine bis auf Operation von Tafelautomorphismen eindeutige Fusion $\text{fus}_{2.U_2}^{2.G}$. Sie wird in die Bibliothek aufgenommen, da zu Beginn dieses Unterabschnittes schon geklärt wurde, dass es keine Bibliotheksfusion $\text{fus}_{U_2}^G$ gibt. Im Gegensatz dazu siehe zum Beispiel U_9 .

Wie in 5.2 erläutert, wird nun eine Tafel von U_2 konstruiert. Sie ist ebenfalls noch nicht in der GAP-Bibliothek enthalten. Die Berechnung der Fusion $\text{fus}_{U_2}^G$ ergibt sich wie in 5.2 beschrieben.

Die sechste maximale Untergruppe $2.U_6 \leq 2.O_7(3)$

Nach [CCN⁺03] ist $U_6 \cong 3^{3+3} : L_3(3)$, wobei $L_3(3)$ einfach ist mit trivialem Multiplikator. Nach Korollar (2.9) ist somit $2.U_6 \cong C_2 \times (3^{3+3} : L_3(3))$. Eine Tafel von U_6 ist noch nicht in der GAP-Bibliothek vorhanden. Sie kann analog berechnet werden wie die Tafel von $2.U_1$. Nun kann analog zu $2.U_4$ eine Tafel von $2.U_6$ aufgestellt werden, womit man auch die Fusionen $\text{fus}_{2.U_6}^{U_6}$ erhält. Die übrigen Fusionen ergeben sich wie bei U_2 .

Die zehnte maximale Untergruppe $2.U_{10} \leq 2.O_7(3)$

Es ist $U_{10} \cong U_{11} \cong S_9$, somit ist das prinzipielle Vorgehen wie bei $U_4 \cong U_5$.

Nach Korollar (2.17) ist $2.U_{10}$ isomorph zu einer Darstellungsgruppe von \mathcal{S}_9 oder enthält einen Normalteiler der Struktur $2 \times \mathcal{A}_9$. Mittels des Ausscheideprinzips (analog bei $2.U_7$ angewandt) kann nun der Isomorphietyp mit GAP geklärt werden:

In GAP stellt man fest, dass es keine Tafelfusionen von $\text{Cl}(\mathcal{A}_9)$ nach $\text{Cl}(2.G)$ gibt, somit gibt es keine Einbettung $2 \times \mathcal{A}_9 \hookrightarrow 2.O_7(3)$, also ist $2.U_{10}$ isomorph zu einer Darstellungsgruppe von \mathcal{S}_9 .

Nach Satz (2.14) gibt es bis auf Isomorphie zwei (isokline) Darstellungsgruppen von \mathcal{S}_9 , wobei von einer von ihnen in der GAP-Bibliothek eine Tafeln unter dem Namen `tbl(2.S9)` gespeichert ist. Dies ist ausreichend, denn die Tafel der isoklinen Gruppe lässt sich aus ihr mittels des Befehls `CharacterTableIsoclinic` berechnen; bezeichne sie mit $Ic(2.S_9)$. Da auch keine Fusion $\text{Cl}(2.S_9) \rightarrow \text{Cl}(2.O_7(3))$ existiert, ist $2.U_{10} \cong Ic(2.S_9)$, womit der Isomorphietyp und eine Tafel von $2.U_{10}$ bestimmt sind.

Der Rest ist analog zu $U_4 \cong U_5$.

Die 12. maximale Untergruppe $2.U_{12} \leq 2.O_7(3)$

Nach [CCN⁺03] ist U_{12} der Normalisator einer zyklischen Gruppe C_2 der Ordnung 2, wobei die Involution in der Konjugiertenklasse 2B liegt (die Tafel in [CCN⁺03] von $O_7(3)$ ist dabei die „Bezugstafel“). Analog zum Vorgehen bei U_9 kann eine Tafel von $2.U_{12}$ konstruiert werden.

Der Rest ist analog zu $2.U_2$.

Die 14. maximale Untergruppe $2.U_{14} \leq 2.O_7(3)$

Wie bei $2.U_{13}$ ist die Erzeugung einer Darstellung von $2.U_{14}$ der entscheidende Schritt zur Gewinnung einer Tafel dieser Untergruppe:

Sei $G = O_7(3)$ und sei $H = Z.O_7(3)$ die Schursche Erweiterungsgruppe mit $Z \cong C_2$. Weiter sei $\pi : H \rightarrow G$ der kanonische Epimorphismus. Nach [CCN⁺03] existiert eine Gruppe $\hat{G} \cong \text{Aut}(G)$ mit $G \trianglelefteq \hat{G}$. In [Wil] gibt es eine Darstellung einer Gruppe \hat{H} mit $H \trianglelefteq \hat{H}$ und $\hat{G}/G \cong \hat{H}/H \cong C_2$ und (\hat{H}, Z) ist eine Schursche Erweiterung von \hat{G} . Der kanonische Epimorphismus $\hat{H} \rightarrow \hat{G}$ ist eingeschränkt auf H gleich π , weshalb er im Folgenden ebenfalls mit π bezeichnet wird. Ferner gibt es in [CCN⁺03], Seite 106ff, eine Charaktertafel einer Gruppe, die zu \hat{H} isoklin ist.

Nach [CCN⁺03] (vergleiche auch den Abschnitt Addenda and Corrigenda, Seite xxxvi) ist $U_{14} = N_{\hat{G}}(\langle x \rangle) \cap G$, wobei x ein Element der \hat{G} -Konjugiertenklasse 2F ist. Analog zum Beweis von (4.4) ist damit $2.U_{14} = N_{\hat{H}}(\pi^{-1}(\langle x \rangle)) \cap H$. Somit ist eine Strategie zur Erzeugung von $2.U_{14}$ aufgezeigt: Berechne in \hat{H} den Zentralisator von $\pi^{-1}(x)$ und schneide ihn mit H . Wie dies konkret umgesetzt werden kann, wird im Folgenden erläutert:

Die Darstellung von \hat{H} aus [Wil], eine 8-dimensionale Matrixdarstellung über \mathbb{F}_3 , wird in GAP eingelesen. Bei der natürlichen Matrix-Vektor-Operation auf dem 8-dimensionalen Vektorraum über \mathbb{F}_3 existiert eine Bahn der Länge 2240, auf der \hat{H} treu operiert. Somit kann eine Permutationsdarstellung von \hat{H} auf 2240 Punkten konstruiert werden, die Grundlage der weiteren Rechnungen ist.

Nach Lemma (2.15) ist $\hat{H}' = H$. Diese theoretische Aussage ist für den praktischen Vorgang von Bedeutung, da mit ihr H in \hat{H} mittels des Befehls `DerivedSubgroup` gebildet werden kann.

Bestimme nun ein Element aus $\pi^{-1}(2F)$, indem das dritte Zufallsverfahren (4.8) verwendet wird: Finde in \hat{H} ein Element y der Ordnung 60. Nach [CCN⁺03] ist dies ein Urbild eines

Elementes der 30A-Konjugiertenklasse von \hat{G} , denn es gibt keine Elemente der Ordnung 60 in \hat{G} und alle Elemente der Ordnung 30 in \hat{G} sind zueinander konjugiert. Wiederum nach [CCN⁺03] liegen die 15. Potenzen der Elemente der Klasse 30A in der Klasse 2F. Somit erhalte mit $N_{\hat{H}}(\langle y^{15} \rangle) \cap \hat{H}'$ eine zu $2.U_{14}$ konjugierte Untergruppe.

Mit `CharacterTable` wird eine Tafel von $2.U_{14}$ berechnet, sie ist noch nicht in der Bibliothek enthalten. Da eine Tafel von U_{14} in der Bibliothek gespeichert ist, werden die Fusionen bestimmt wie in Abschnitt 5.1 unter (b)(ii) beschrieben.

Die 15. maximale Untergruppe $2.U_{15} \leq 2.O_7(3)$

Nach [CCN⁺03] ist U_{15} der Normalisator einer zyklischen Gruppe C_2 der Ordnung 2, wobei die Involution in der Konjugiertenklasse 2C liegt (die Tafel in [CCN⁺03] von $O_7(3)$ ist dabei die „Bezugstafel“). Mittels des zweiten Zufallsverfahrens (4.6) kann eine Gruppe \mathfrak{V} der Ordnung $|2.U_{15}|$ konstruiert werden. Aus Ordnungsgründen kann \mathfrak{V} abgesehen von $2.U_{15}$ nur in $2.U_1, 2.U_7$ und $2.U_{12}$ enthalten sein. Die Routine `IntermediateSubgroups` ist hier nicht durchführbar; der Index von \mathfrak{V} in $2.O_7(3)$ beträgt 331695. Allerdings kann analog zur dreizehnten maximalen Untergruppe gezeigt werden, dass \mathfrak{V} maximal und zu $2.U_{15}$ konjugiert ist. Der Rest verläuft analog zu U_{12} .

Damit ist das „Programm“ für $2.O_7(3)$ abgeschlossen, es wird nun für $3.O_7(3)$ durchgeführt. Dabei ist zu beachten, dass von $U_2, U_5, U_6, U_8, U_{10}, U_{11}, U_{12}, U_{14}$ und U_{15} nun auch Tafeln und Fusionen nach $\text{Cl}(O_7(3))$ zur Verfügung stehen, das heißt, sie können und werden als Bibliothekstafeln und -fusionen aufgefasst. Dies ist von Bedeutung bei der Berechnung der Fusionen der Tafeln der maximalen Untergruppen von $3.O_7(3)$ nach $\text{Cl}(3.O_7(3))$.

6.1.3 $3.O_7(3)$

Auch hier folgt zu Beginn eine „Bestandsaufnahme“ von $3.O_7(3)$.

In der GAP-Bibliothek liegt eine Tafel von $3.O_7(3)$ vor, diese sei mit `tbl(3.G)` bezeichnet. Von den Konjugiertenklassen der maximalen Untergruppen von $3.O_7(3)$ ist keine Fusion nach $\text{Cl}(3.G)$ in der Bibliothek gespeichert, wie der Befehl `NamesOfFusionSources` verrät. Wie am Ende des vorherigen Unterabschnitts beschrieben, stehen jedoch von allen maximalen Untergruppen von $O_7(3)$ Tafeln mit Fusion nach $\text{Cl}(G)$ zur Verfügung.

Um die Methoden aus Kapitel 4 verwenden zu können, wird eine Darstellung von $3.O_7(3)$ benötigt. In [Wil] steht aber lediglich eine 27-dimensionale Matrixdarstellung über \mathbb{F}_4 zur Verfügung, mit der die Rechnungen nicht durchgeführt werden können. Daher geht es zunächst darum, eine Permutationsdarstellung von $3.O_7(3)$ auf möglichst wenigen Punkten in GAP zu gewinnen. Wie dies möglich ist, wird im Folgenden beschrieben.

Permutationsdarstellung von $3.O_7(3)$

In [Wil] sind zwei Matrizen A und B mit Ordnung 2 beziehungsweise 7 gespeichert, die die oben erwähnte Matrixdarstellung erzeugen.

Nach [CCN⁺03] gibt es eine 27-dimensionale Matrixdarstellung von $3.O_7(3)$ über $\mathbb{Z}[z_3]$, wobei z_3 eine primitive dritte Einheitswurzel ist. Unter der natürlichen Matrix-Vektor-Operation in der Darstellung über $\mathbb{Z}[z_3]$ existiert eine Bahn der Länge 1134. Der Punktstabilisator $3.O_7(3)_\omega$ jedes Elementes ω dieser Bahn hat Index 1134 in $3.O_7(3)$. Die Darstellung über \mathbb{F}_4 ist die Reduktion der Darstellung über $\mathbb{Z}[z_3]$. Aus Ordnungsgründen –

siehe Tabelle 6.1 – ist $3.O_7(3)_\omega$ eine Untergruppe der dritten maximalen Untergruppe $3.U_3 \cong 3.(L_4(3) : 2_2)$. Nach [CCN⁺03] ist $L_4(3)$ einfach mit Multiplikator C_2 , womit nach Korollar (2.7) zunächst $3.U_3 \cong 3 \times (L_4(3) : 2_2)$ und daraus $3.O_7(3)_\omega \cong L_4(3) : 2_2$ folgt. Weiterhin folgt, dass es bei der natürlichen Operation von $3.O_7(3)$ auf dem 27-dimensionalen Vektorraum über \mathbb{F}_4 eine Bahn \mathcal{B} mit 1134 oder – falls der Punktstabilisator im modularen Fall größer wird – 378 Punkten gibt.

Ziel ist es, \mathcal{B} in GAP zu konstruieren; anschließend können die beiden Erzeuger A und B auf die Elemente von \mathcal{B} angewendet werden und auf diese Weise kann eine Permutationsdarstellung auf 1134 oder 378 Punkten konstruiert werden.

Konstruiere \mathcal{B} wie folgt:

Die Idee ist, einen Fixpunkt der Operation unter $L_4(3) : 2_2$ zu finden; auf diesen kann dann $3.O_7(3)$ angewandt werden, um \mathcal{B} zu erhalten: In GAP kann das Produkt von A und B berechnet werden; es hat Ordnung 39. Da 13 einfacher Primteiler von $|3.O_7(3)|$ ist und 13 die Ordnung von $L_4(3) : 2_2$ teilt, liegt $\langle C \rangle$ in einer Untergruppe vom Typ $L_4(3) : 2_2$, wobei $C := (A \cdot B)^3$ sei. Bestimme nun (durch ein lineares Gleichungssystem) alle Fixpunkte unter C als Kandidaten für Fixpunkte unter $L_4(3) : 2_2$. Berechne nun die Bahnen von diesen Kandidaten unter $3.O_7(3)$, wobei bei der technischen Umsetzung eine Bahn nicht vollständig berechnet wird, falls sie mehr als 1134 Punkte hat. Es stellt sich heraus, dass es keine Bahn der Länge 378 gibt, sondern es wird eine Bahn der Länge 1134 gefunden. Wie oben beschrieben, wird nun eine Permutationsdarstellung von $3.O_7(3)$ auf 1134 Punkten konstruiert, welche Grundlage für die durchgeführten Rechnungen zu $3.O_7(3)$ ist.

Nun werden die maximalen Untergruppen betrachtet.

Die erste maximale Untergruppe $3.U_1 \leq 3.O_7(3)$

Das Vorgehen ist analog zu dem bei $(U_1, 2.U_1)$.

Die zweite maximale Untergruppe $3.U_2 \leq 3.O_7(3)$

Analog zu $(U_1, 2.U_1)$ wird eine Tafel von $3.U_2$ berechnet; sie ist allerdings noch nicht in der GAP-Bibliothek enthalten. Somit werden die Fusionen $\text{fus}_{3.U_2}^{U_2}$ und $\text{fus}_{3.U_2}^{3.G}$ analog wie bei $(U_9, 2.U_9)$ bestimmt.

Die dritte maximale Untergruppe $3.U_3 \leq 3.O_7(3)$

Bei der Konstruktion einer Permutationsdarstellung von $3.O_7(3)$ haben wir bereits gesehen, dass $3.U_3 \cong C_3 \times L_4(3) : 2_2$ gilt. Das weitere Vorgehen ist analog zu dem bei $(U_4, 2.U_4)$.

Die vierte maximale Untergruppe $3.U_4 \leq 3.O_7(3)$

Hier ist wieder $U_4 \cong U_5 \cong G_2(3)$ zu beachten. Wie bei den Beispielen bei der Erweiterung mit C_2 wird sich zunächst der U_4 zugewandt. Die Gruppe $G_2(3)$ ist einfach mit einem Multiplikator der Ordnung drei nach [CCN⁺03]. Analog zu $(U_7, 2.U_7)$ kann geschlossen werden, dass $(3.U_4, C_3)$ eine Schursche Erweiterung von U_4 ist und $3.U_4 \cong 3.G_2(3)$ ist die Darstellungsgruppe von $G_2(3)$.

Die Fusion $\text{fus}_{3.U_4}^{3.G}$ kann ebenfalls analog wie bei $(U_7, 2.U_7)$ bestimmt werden. Die Handhabung von $3.U_5$ erfolgt analog zu den Ausführungen zu $(U_5, 2.U_5)$, wobei der Tafelautomorphismus $\hat{\alpha}_2$ durch $\hat{\alpha}_3 \in \text{TAut}(3.G)$ ersetzt wird.

Die sechste maximale Untergruppe $3.U_6 \leq 3.O_7(3)$

Mittels der ersten Zufallsmethode (4.1) lässt sich eine Gruppe V mit Ordnung $|3.U_6|$ erzeugen. Aus Ordnungsgründen ist V zu $3.U_6$ konjugiert. Allerdings lässt sich von V mit `CharacterTable` keine Charaktertafel berechnen, da im Dixon-Schneider-Algorithmus – der Grundlage dieser Routine ist – versucht wird, die Strukturmatrix für ein Element mit Zentralisator-Ordnung 39 zu berechnen; dies führt zu einem Speicherüberlauf und zum Abbruch der Berechnungen.

Um dieses Problem zu umgehen, wird versucht, eine kleinere Permutationsdarstellung von V zu finden: Als Untergruppe von $3.O_7(3)$ operiert V ebenfalls auf einer Menge Ω mit 1134 Punkten. Durch entsprechende Abfragen in GAP kann festgestellt werden, dass V auf Ω zwei Bahnen der Länge 1053 und 81 bewirkt, auf denen V treu operiert. Somit existiert eine Gruppe \tilde{V} , die isomorph zu V ist, aber lediglich auf 81 Punkten operiert. Von \tilde{V} lässt sich nun mittels `CharacterTable` eine Charaktertafel berechnen.

Die beiden Gruppen sind zudem konjugiert zueinander, da es nur eine Konjugiertenklasse vom Isomorphietyp $3.U_6$ beziehungsweise V gibt. Somit kann `tbl(\tilde{V})` als Tafel für $3.U_6$ betrachtet werden und zur Berechnung der Fusionen verwendet werden, was analog zu $(U_2, 3.U_2)$ geschieht.

Die siebte maximale Untergruppe $3.U_7 \leq 3.O_7(3)$

Nach [CCN⁺03] ist $U_6 \cong U_7 \cong S_6(2)$ einfach mit zweielementigem Multiplikator. Analog zu $(U_4, 2.U_4)$ folgt, $3.U_6 \cong C_3 \times S_6(2)$; auch das weitere Vorgehen ist analog zu $(U_4, 2.U_4)$ beziehungsweise $(U_5, 2.U_5)$.

Die neunte maximale Untergruppe $3.U_9 \leq 3.O_7(3)$

Wie bei $(U_9, 2.U_9)$ wird eine Gruppe V der Ordnung $|3.U_9|$ erzeugt. Wegen des Satzes von Lagrange kann sie außer in $3.U_9$ nur in $3.U_2$ enthalten sein. Es wird eine Tafel von V berechnet. Da es keine Tafelfusionen zwischen $\text{Cl}(V)$ und $\text{Cl}(3.U_9)$ gibt, wird analog wie bei $(U_{15}, 2.U_{15})$ gefolgert, dass V maximal und konjugiert zu $3.U_9$ ist.

Der Rest verläuft analog zu $(U_2, 3.U_2)$.

Die zehnte maximale Untergruppe $3.U_{10} \leq 3.O_7(3)$

Nach [CCN⁺03] ist $U_{10} \cong U_{11} \cong S_9$. Aus Korollar (2.17)(b)(ii) folgt somit $3.U_{10} \cong C_3 \times S_9$. Nun geht es weiter wie bei $(U_4, 3.U_4)$ beziehungsweise $(U_5, 3.U_5)$.

Die 12. maximale Untergruppe $3.U_{12} \leq 3.O_7(3)$

Nach [CCN⁺03] ist $U_4(2)$ einfach mit Multiplikator C_2 . Um die Sätze aus Kapitel 2 anwenden zu können, bedarf es noch ein wenig Vorbereitung:

Sei $U_{12} := H : 2$ mit $H := V_4 \times U_4(2)$, wobei V_4 die Kleinsche Vierergruppe sei. Da V_4 abelsch ist, ist $H' \leq U_4(2)$. Also ist $H' = U_4(2)$, weil $U_4(2)$ einfach ist. Damit ist insbesondere $U_4(2)$ charakteristisch in H und folglich normal in U_{12} .

U_{12} hat somit die Struktur $U_4(2).P$, wobei P eine 2-Gruppe ist. Nun ist Korollar (2.7) anwendbar und es folgt $3.U_{12} \cong C_3 \times ((2^2 \times U_4(2)) : 2)$.

Alles weitere verläuft analog zu $(U_4, 2.U_4)$.

Die 13. maximale Untergruppe $3.U_{13} \leq 3.O_7(3)$

Wie bei $(U_{13}, 2.U_{13})$ ist das Hauptproblem, eine Darstellung von $3.U_{13}$ zu erzeugen. Auch hier wird dabei die Struktur von $U_{13} \cong 2^6 : A_7$ als Normalisator einer elementarabelschen Gruppe K der Ordnung 64 entscheidend genutzt.

Sei $\pi : 3.O_7(3) \longrightarrow O_7(3)$ der kanonische Epimorphismus und $Z := Z(3.O_7(3)) \stackrel{(1.6)}{\cong} \text{Kern}(\pi) \cong C_3$. Nach Lemma (4.4) ist $3.U_{13} \cong N_{3.O_7(3)}(\pi^{-1}(K))$. Nun kann – im Gegensatz zu $(U_{13}, 2.U_{13})$ – die Struktur von $\pi^{-1}(K)$ näher bestimmt werden, was das Vorgehen gegenüber $(U_{13}, 2.U_{13})$ vereinfacht: Da K und Z teilerfremde Ordnungen haben, ist $(\pi^{-1}(K), Z)$ eine zentrale Erweiterung von K , die den Voraussetzungen von Satz (2.1) genügt; damit ist $\pi^{-1}(K) \cong Z \times K$. Erzeuge nun diese Gruppe, um anschließend den Normalisator berechnen zu können. Wie bei $(U_{13}, 2.U_{13})$ ist darauf zu achten, eine passende elementarabelsche Gruppe zu finden:

Es wird in GAP mittels `SylowSubgroup` eine 2-Sylowgruppe von $3.O_7(3)$ berechnet. Analog wie bei $(U_{13}, 2.U_{13})$ wird nun mit einem Zufallsverfahren in der 2-Sylowgruppe eine elementarabelsche Gruppe \tilde{K} der Ordnung 64 generiert. Bestimme die von Z und \tilde{K} erzeugte Untergruppe. Von dieser berechne den Normalisator. Falls der Normalisator nicht die Ordnung $|3.U_{13}|$ hat, wird erneut eine elementarabelsche Gruppe generiert und die obigen Rechnungen wiederholt, siehe auch die Ausführungen bei $(U_{13}, 2.U_{13})$. Bei der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Rechnung hat der Normalisator beim ersten Versuch die „richtige“ Ordnung.

Wie bei $(U_{13}, 2.U_{13})$ kann nun gezeigt werden, dass der gefundene Normalisator auch maximal ist und somit zu $3.U_{13}$ konjugiert ist. Die Bestimmung der Fusionen ist dann ebenfalls analog zu $(U_{13}, 2.U_{13})$.

Die Struktur von $3.U_{13}$ kann bis auf Isomorphie bestimmt werden:

Da es keine Tafelfusionen $\text{fus}_{\mathcal{A}_7}^{3.U_{13}}$ gibt, folgt mit den Sätzen (2.1) und (2.10)(b)(i), dass $3.U_{13} \cong 2^6 : 3.\mathcal{A}_7$, wobei $(3.\mathcal{A}_7, 3)$ eine Schursche Erweiterung von \mathcal{A}_7 ist.

Die 14. maximale Untergruppe $3.U_{14} \leq 3.O_7(3)$

Die Bestimmung einer Tafel von $2.U_{14}$ war relativ aufwendig, wie im vorherigen Abschnitt 6.1.2 gesehen. Ein analoges Vorgehen für $3.U_{14}$ erfordert eine handhabbare Darstellung von $3.O_7(3).2$, die aber nicht zur Verfügung steht.

Das erste Zufallsverfahren (4.1) liefert zwar nach sehr langer Zeit eine Untergruppe V der Ordnung $|3.U_{14}|$, es ist aber unklar, ob dies auch tatsächlich $3.U_{14}$ ist oder eine nicht maximale Untergruppe dieser Ordnung. So gibt es zum Beispiel Tafelfusionen in die Tafeln von $3.U_1$ und $3.U_2$. Bei `IntermediateSubgroups` ist der Rechenaufwand zu groß. Dies führt also auch nicht zum Ziel. Glücklicherweise kann aber theoretisch geschlossen werden, dass $3.U_{14} \cong C_3 \times \mathcal{S}_4 \times \mathcal{S}_6$ gilt, wie im Folgenden ausgeführt wird.

Sei $\pi : 3.O_7(3) \longrightarrow O_7(3)$ der kanonische Epimorphismus und $Z := Z(3.O_7(3)) \stackrel{(1.6)}{\cong} \text{Kern}(\pi) \cong C_3$ und seien $\mathcal{S}_4, \mathcal{S}_6 \leq U_{14}$ mit $U_{14} = \mathcal{S}_6 \times \mathcal{S}_4$.

Zeige zunächst, dass $\pi^{-1}(\mathcal{S}_6) \cong C_3 \times \mathcal{S}_6$: Nach Korollar (2.17)(b)(i) ist entweder $\pi^{-1}(\mathcal{S}_6) \cong Z \times \mathcal{S}_6$ oder $(\pi^{-1}(\mathcal{S}_6), Z)$ ist eine Schursche Erweiterung von \mathcal{S}_6 . Letzteres ist aber wegen Satz (1.14) und $|M(\mathcal{S}_6)| = 2$ (siehe (2.14)) nicht möglich.

Zeige nun $\pi^{-1}(\mathcal{S}_4) \cong C_3 \times \mathcal{S}_4$: Es ist \mathcal{S}_4 von der Form $(V_4.C_3).C_2$, wobei V_4 die Kleinsche Vierergruppe sei. Nach Satz (2.1) ist somit $\pi^{-1}(\mathcal{S}_4)$ von der Form $((C_3 \times V_4).C_3).C_2$. Sei $F := \pi^{-1}(\mathcal{S}_4)/N$ mit $N \cong V_4$. Somit hat F einen Normalteiler der Struktur $C_3.C_3$. Dieser ist entweder eine elementarabelsche Gruppe oder eine zyklische Gruppe der Ordnung neun. Letztere hat ein Element der Ordnung neun. Aus [CCN⁺03] geht jedoch hervor, dass keine der Konjugiertenklassen der Elementordnung drei in $O_7(3)$ zu Konjugiertenklassen mit Elementen der Ordnung neun in $3.O_7(3)$ liften, also ist hier $C_3 \times C_3$ die einzige Gruppe

der Form $C_3.C_3$, womit F von der Struktur $(C_3 \times C_3).C_2$ ist. Die Gruppe $C_3 \times C_3$ enthält vier Untergruppen der Ordnung drei. Da eine von ihnen zentral in $\pi^{-1}(\mathcal{S}_4)$ ist, existiert mindestens eine nichtzentrale Untergruppe $K \leq F$ mit $|K| = 3$, die von der operierenden C_2 in F festgelassen wird. Also ist K normal in F und F/K hat ein nichttriviales Zentrum, so dass $F/K \cong C_6$ und $F \cong C_3 \times \mathcal{S}_3$ folgt. Somit ist $\pi^{-1}(\mathcal{S}_4) \cong C_3 \times \mathcal{S}_4$ und damit ergibt sich insgesamt $3.U_{14} \cong C_3 \times \mathcal{S}_4 \times \mathcal{S}_6$.

Von den Gruppen \mathcal{S}_4 und \mathcal{S}_6 sind in der GAP-Bibliothek Charaktertafeln enthalten. Damit ergibt sich der Rest, auch die Bestimmung der übrigen Fusionen, wie bei $(U_4, 2.U_4)$.

Die 15. maximale Untergruppe $3.U_{15} \leq 3.O_7(3)$

Es kann analog zu $(U_{15}, 2.U_{15})$ verfahren werden.

6.1.4 $6.O_7(3)$

Wie in Abschnitt 6.1.1 erwähnt wurde, können die Tafeln und Fusionen für die maximalen Untergruppen der Darstellungsgruppe $6.O_7(3)$ anhand der allgemeinen Ausführungen in Abschnitt 5.3 bestimmt werden:

Für alle $U \in \{U_1, \dots, U_{15}\}$ und zugehörigen Untergruppen $2.U$ und $3.U$ stehen wie in den vorherigen Abschnitten geschildert Tafeln mit Fusionen zur Verfügung. Wie in Abschnitt 6.1.1 beschrieben können daraus für alle zugehörigen Untergruppen $6.U$ in $6.O_7(3)$ Tafeln und sämtliche Fusionen gewonnen werden; theoretisch mögliche Probleme, vergleiche Abschnitt 6.1.1, treten dabei nicht auf.

Bei den Untergruppen $6.U_5$, $6.U_8$ und $6.U_{11}$ können die Fusionen $\text{fus}_{6.U_i}^{6.O_7(3)}$ für $i = 5, 8, 11$ alternativ durch Anwendung des Tafelautomorphismus $\hat{\alpha}_4 \in \text{TAut}(6.O_7(3))$ aus Abschnitt 6.1.1 bestimmt werden; dies führt zum gleichen Ergebnis, vergleiche Abschnitt 6.1.1 und die Erläuterungen zu den entsprechenden Untergruppen $2.U_i$ und $3.U_i$ in den Abschnitten 6.1.2 beziehungsweise 6.1.3.

Bis auf die Tafel von $6.U_1$ sind alle Tafeln der maximalen Untergruppen von $6.O_7(3)$ noch nicht in der GAP-Bibliothek vorhanden. Auch die Fusion $\text{fus}_{6.U_1}^{6.O_7(3)}$ ist in der Bibliothek gespeichert, wobei es zu folgendem interessanten Fall kommt:

Die Fusionen $\text{fus}_{U_1}^{O_7(3)}$ und $\text{fus}_{6.U_1}^{6.O_7(3)}$ sind Bibliotheksfusionen, während die Fusionen $\text{fus}_{2.U_1}^{2.O_7(3)}$ und $\text{fus}_{3.U_1}^{3.O_7(3)}$ neu berechnet wurden, vergleiche die Abschnitte 6.1.2 und 6.1.3. Allerdings passen die Bibliotheksfusionen nicht zusammen, das heißt, das Diagramm (*) aus Abschnitt 1.4 bezüglich $6.U_1$ kommutiert nicht. Nun ist eine Möglichkeit, die Bibliotheksfusion $\text{fus}_{6.U_1}^{6.O_7(3)}$ durch die berechnete Fusion zu ersetzen, da nach Abschnitt 5.3 sichergestellt ist, dass dann obige Fusionen zueinander passen. Allerdings ist die $\text{fus}_{6.U_1}^{6.O_7(3)}$ in der Bibliothek von alten GAP-Versionen enthalten, während die Fusion $\text{fus}_{U_1}^{O_7(3)}$ nur in der Development-Version GAP4dev vorhanden ist, so dass es wünschenswerter ist, letztere Fusion zu ändern und $\text{fus}_{6.U_1}^{6.O_7(3)}$ beizubehalten. Dies ist möglich, da sich aus $\text{fus}_{6.U_1}^{6.O_7(3)}$ die anderen drei Fusionen $\text{fus}_{U_1}^{O_7(3)}$, $\text{fus}_{2.U_1}^{2.O_7(3)}$ und $\text{fus}_{3.U_1}^{3.O_7(3)}$ analog zu der Vorgehensweise unter (a)(ii) in Abschnitt 5.1 neu berechnen lassen, so dass folgende Diagramme für $k = 1, 2, 3$ kommutieren:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cl}(k.U) & \xrightarrow{\text{fus}_{k.U}^{k.G}} & \text{Cl}(k.G) \\
\text{fus}_{6.U}^{k.U} \uparrow & & \uparrow \text{fus}_{6.G}^{k.G} \\
\text{Cl}(6.U) & \xrightarrow{\text{fus}_{6.U}^{6.G}} & \text{Cl}(6.G)
\end{array} \tag{D}$$

Aus der Kommutativität von (D) und wegen $\text{fus}_{3.K}^K \circ \text{fus}_{6.K}^{3.K} = \text{fus}_{2.K}^K \circ \text{fus}_{6.K}^{2.K}$ für $K \in \{U, G\}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\text{fus}_U^G \circ \text{fus}_{k.U}^U \circ \text{fus}_{6.U}^{k.U} &= \text{fus}_U^G \circ \text{fus}_{6.U}^U \\
&= \text{fus}_{6.G}^{k.G} \circ \text{fus}_{6.U}^{6.G} \\
&= \text{fus}_{k.G}^G \circ \text{fus}_{6.G}^{k.G} \circ \text{fus}_{6.U}^{6.G} \\
&= \text{fus}_{k.G}^G \circ \text{fus}_{k.U}^{k.G} \circ \text{fus}_{6.U}^{k.U}
\end{aligned}$$

für $k = 2, 3$. Da $\text{fus}_{6.U}^{k.U}$ surjektiv ist, folgt daraus auch die Kommutativität der folgenden Diagramme für $k = 2, 3$:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Cl}(U) & \xrightarrow{\text{fus}_U^G} & \text{Cl}(G) \\
\text{fus}_{k.U}^U \uparrow & & \uparrow \text{fus}_{k.G}^G \\
\text{Cl}(k.U) & \xrightarrow{\text{fus}_{k.U}^{k.G}} & \text{Cl}(k.G)
\end{array}$$

Die Fusionen $\text{fus}_{U_1}^{O_7(3)}$, $\text{fus}_{2.U_1}^{2.O_7(3)}$ und $\text{fus}_{3.U_1}^{3.O_7(3)}$ werden daher ausgetauscht und damit sind alle Fragen für alle maximalen Untergruppen beantwortet.

6.2 $U_3(5)$ und $L_3(7)$

Auch für die einfachen Gruppen $U_3(5)$ und $L_3(7)$ konnten die Fragen aus Abschnitt 1.4 beantwortet werden.

Der Multiplikator beider Gruppen ist nach [CCN⁺03] isomorph zu C_3 , insofern ist das Vorgehen einfacher als bei $O_7(3)$. Die Erzeugung von Untergruppen und die Berechnung ihrer Tafeln erfolgt mit Methoden, die bereits bei Untersuchungen zu $O_7(3)$ zur Anwendung kamen und daher hier nicht weiter erläutert werden.

Im Gegensatz zu $O_7(3)$ haben diese Gruppen jedoch Tripel von maximalen Untergruppen eines Isomorphietyps, die nicht zueinander konjugiert sind. Wie in Abschnitt 5.2 erläutert, wird dadurch eine spezielle Vorgehensweise zur Bestimmung kompatibler Fusionen bei diesen maximalen Untergruppen erforderlich, die komplizierter ist als bei $O_7(3)$ und daher im Folgenden genauer untersucht wird.

Die Darstellungsgruppen von $U_3(5)$ und $L_3(7)$ werden mit $3.U_3(5)$ beziehungsweise $3.L_3(7)$ bezeichnet. Nach [CCN⁺03] hat $U_3(5)$ drei Klassen von maximalen Untergruppen des Isomorphietyps A_7 und drei des Typs $M_{10} \cong A_{6.23}$; die Gruppe $L_3(7)$ hat drei Klassen von

maximalen Untergruppen des Isomorphietyps $L_2(7) : 2$. Bezeichne Vertreter von ihnen mit A_7^1 , A_7^2 und A_7^3 und entsprechend ihre Urbilder in $3.U_3(5)$ mit $3.A_7^1$, $3.A_7^2$ und $3.A_7^3$; analog für die anderen Untergruppen.

Sei $G \in \{U_3(5), L_3(7)\}$. Für $3.G$ existiert eine Gruppe $3.G.3$, in der ein äußerer Automorphismus α von $3.G$ der Ordnung drei realisiert ist, der die Erweiterungen $3.A_7^i$ und $3.A_6.2_3^i$ sowie $3.L_2(7) : 2^i$ zyklisch aufeinander abbildet. Von $3.G$ und $3.G.3$ stehen in GAP Charaktertafeln zur Verfügung. Auch ist in der GAP-Bibliothek eine Fusion $\text{fus}_{3.G}^{3.G.3}$ vorhanden.

Nun zu den mit GAP berechneten Ergebnissen bei den einzelnen Gruppen; die Notation ist wie in Abschnitt 5.2. Betrachte zunächst $G = U_3(5)$.

Die $3.G$ -Konjugiertenklassentripel [14, 17, 20], [15, 18, 21] und [16, 19, 22] werden unter der Fusion $\text{fus}_{3.G}^{3.G.3}$ auf die $3.G.3$ -Konjugiertenklassen 5B, 5C und 5D abgebildet.

Der von α induzierte Tafelautomorphismus $\hat{\alpha}$ permutiert also die Konjugiertenklassen $\{14, 17, 20\}$ sowie $\{15, 18, 21\}$ und $\{16, 19, 22\}$, aber es ist noch zu klären auf welche Weise dies geschieht: Mittels `AutomorphismsOfTable` stellt man fest, dass $3.U_3(5)$ nur zwei Tafelautomorphismen der Ordnung drei hat, nämlich $\beta := (14, 17, 20)(15, 18, 21)(16, 19, 22)$ und β^{-1} . Somit kann $\hat{\alpha} := \beta$ gewählt werden, vergleiche Abschnitt 5.2.

Für das weitere Vorgehen betrachte exemplarisch A_7^1 , A_7^2 und A_7^3 und ihre Urbilder $3.A_7^1$, $3.A_7^2$ und $3.A_7^3$ in $3.U_3(5)$. Wie eingangs erwähnt, kann mit den Methoden aus Kapitel 2 und dem Abschnitt 5.1 für $3.A_7^1$ eine Tafel mit Fusion $\text{fus}_{3.A_7^1}^{3.U_3(5)}$ berechnet werden. Nach den Ausführungen in Abschnitt 5.2 haben $3.A_7^1$, $3.A_7^2$ und $3.A_7^3$ die gleiche Charaktertafel, und wir wählen $\text{fus}_{3.A_7^2}^{3.U_3(5)} = \hat{\alpha} \circ \text{fus}_{3.A_7^1}^{3.U_3(5)}$ und $\text{fus}_{3.A_7^3}^{3.U_3(5)} = \hat{\alpha}^2 \circ \text{fus}_{3.A_7^1}^{3.U_3(5)}$. Nun fehlen noch zu diesen Fusionen passende Fusionen $\text{fus}_{A_7^2}^{U_3(5)}$ und $\text{fus}_{A_7^3}^{U_3(5)}$ (sie sind noch nicht in der GAP-Bibliothek enthalten), so dass das Diagramm (*) aus Abschnitt 1.4 kommutiert. Diese können wie in Abschnitt 5.1 (b)(ii) beschrieben berechnet werden.

Für die drei Untergruppen vom Typ M_{10} beziehungsweise $3.M_{10}$ verläuft alles analog.

Untersuche nun $G = L_3(7)$. Die $3.G$ -Konjugiertenklassentripel [17, 20, 23], [18, 21, 24] und [19, 22, 25] werden unter der Fusion $\text{fus}_{3.G}^{3.G.3}$ auf die $3.G.3$ -Konjugiertenklassen 7B, 7C und 7D abgebildet und die übrigen $3.G.3$ -Konjugiertenklassen haben höchstens eine Urbildklasse in $3.G$.

Das weitere Vorgehen ist nun etwas aufwendiger als oben, da $3.L_3(7)$ acht Tafelautomorphismen der Ordnung drei hat. Ist $\hat{\alpha}(17) = 20$, so ist $\hat{\alpha}^{-1}(17) = 23$. Daher genügt es ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur noch solche Tafelautomorphismen zu betrachten, die die 17 auf die 20 abbilden. Diese zusätzliche Bedingung erfüllen noch drei Kandidaten, nämlich $\beta_1 := (17, 20, 23)(18, 21, 24)(19, 22, 25)$,

$$\beta_2 := (17, 20, 23)(18, 21, 24)(19, 22, 25)(47, 53, 59)(48, 54, 60)(49, 55, 61)(50, 56, 62) \\ (51, 57, 63)(52, 58, 64) \text{ und}$$

$$\beta_3 := (17, 20, 23)(18, 21, 24)(19, 22, 25)(47, 59, 53)(48, 60, 54)(49, 61, 55)(50, 62, 56) \\ (51, 63, 57)(52, 64, 58).$$

Da β_2 und β_3 aber zu viele Punkte bewegen, kommt nur $\hat{\alpha} = \beta_1$ in Frage, womit das erste Etappenziel erreicht ist. Die anschließende Bestimmung der Tafeln und Fusionen verläuft

analog wie oben bei $U_3(5)$ geschildert.

Die Tabellen 6.20 und 6.24 in Abschnitt 6.5 enthalten eine Übersicht über die maximalen Untergruppen von $U_3(5)$ beziehungsweise $L_3(7)$.

6.3 $O_8^+(2)$

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie Tafeln und zugehörige Fusionen der maximalen Untergruppen der Schurschen Erweiterungen der einfachen Gruppe $O_8^+(2)$ bestimmt werden können.

Die Vorgehensweise ist dabei analog zu der bei den Untersuchungen zu $O_7(3)$ in Abschnitt 6.1. Es werden zunächst Informationen zur Gruppe gegeben, und anschließend wird beschrieben, wie die Fragen aus Abschnitt 1.4 beantwortet werden können.

6.3.1 Überblick

Informationen zu $O_8^+(2)$ finden sich in [CCN⁺03], Seite 85. Es gibt 17 Konjugiertenklassen maximaler Untergruppen in $O_8^+(2)$, und der Multiplikator M von $O_8^+(2)$ ist eine Kleinsche Vierergruppe, etwa $M = \langle z_1, z_2 \rangle$, setze $z_3 := z_1 z_2$ und $Z_i := \langle z_i \rangle \cong C_2$.

Die folgenden Bezeichnungen sind an die des Abschnittes 5.3 angelehnt:

Sei \mathfrak{G} die Darstellungsgruppe von $O_8^+(2)$. Weiter seien $(\mathfrak{G}_i, M/Z_i)$, $i = 1, 2, 3$, die übrigen Schurschen Erweiterungen von $O_8^+(2)$.

Nach [CCN⁺03] existiert ein äußerer Automorphismus α von \mathfrak{G} , der die Z_i zyklisch permutiert, etwa $\alpha(Z_1) = Z_2$, $\alpha(Z_2) = Z_3$ und $\alpha(Z_3) = Z_1$. Durch α werden Isomorphismen zwischen den \mathfrak{G}_i induziert, so dass es genügt, lediglich eine zyklische Schursche Erweiterung von $O_8^+(2)$ zu betrachten, diese wird wie in [CCN⁺03] und in GAP mit $2.O_8^+(2)$ bezeichnet. Sei (U, \mathfrak{U}) ein Paar maximaler Untergruppen von $O_8^+(2)$ und \mathfrak{G} . Die zugehörigen Untergruppen in \mathfrak{G}_i werden mit \mathfrak{U}_i bezeichnet; es ist $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}/Z_i$, für $i = 1, 2, 3$.

Wie bei $O_7(3)$ sollen Tafeln der \mathfrak{U}_i und von \mathfrak{U} sowie zugehörige kompatible Tafelfusionen bestimmt werden. Wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, kann schrittweise vorgegangen werden, indem zunächst Tafeln der \mathfrak{U}_i und Faktorfusionen $\text{fus}_{\mathfrak{U}_i}^U$ berechnet werden, aus denen anschließend eine Tafel von \mathfrak{U} konstruiert wird. Bevor dies im nächsten Abschnitt konkret ausgeführt wird, werden weitere Informationen zu den Untergruppen gegeben, die für das anschließende Vorgehen von Bedeutung sind.

Die maximalen Untergruppen von $O_8^+(2)$ lassen sich in zwei Typen einteilen: Ist $U \leq O_8^+(2)$ maximal, so

- (a) gibt es nur eine Konjugiertenklasse des Isomorphietyps U oder
- (b) gibt es drei Konjugiertenklassen des Isomorphietyps U , wobei die Urbilder dieser Klassen in \mathfrak{G} durch α aufeinander abgebildet werden.

Im Fall (a) gibt es in \mathfrak{G} ebenfalls nur eine Konjugiertenklasse vom Isomorphietyp \mathfrak{U} , denn es ist $|U^G| = |G|/|N_G(U)| = |G|/|U| = |\mathfrak{G}|/|\mathfrak{U}| = |\mathfrak{G}|/|N_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{U})| = |\mathfrak{U}^{\mathfrak{G}}|$, da U und \mathfrak{U} maximal sind. Für die \mathfrak{U}_i gilt damit $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}/Z_i \cong \alpha(\mathfrak{U})/Z_j = \mathfrak{U}^h/Z_j = (\mathfrak{U}/Z_j)^{hZ_j}$ für ein $h \in \mathfrak{G}$ und

$$Z_j = \alpha(Z_i).$$

Damit sind die \mathfrak{U}_i alle isomorph und es reicht aus, diejenige von ihnen zu betrachten, die Untergruppe der einen gewählten $2.O_8^+(2)$ ist. Entsprechend wird sie mit $2.U$ bezeichnet.

Im Fall (b) seien $\mathfrak{U}^1 := \mathfrak{U}, \mathfrak{U}^2$ und \mathfrak{U}^3 Vertreter der Konjugiertenklassen des Isomorphietyps von \mathfrak{U} , so dass $\alpha(\mathfrak{U}^1) = \mathfrak{U}^2$, $\alpha(\mathfrak{U}^2) = \mathfrak{U}^3$ und $\alpha(\mathfrak{U}^3) = \mathfrak{U}^1$ gilt. Die korrespondierenden Untergruppen in G seien mit $U^1 := U, U^2$ und U^3 bezeichnet.

Zu jedem U^j gibt es die drei zyklischen Erweiterungen mit jedem Z_i ; insgesamt gibt es also neun solche Gruppen. Anders gesagt, aus jedem der \mathfrak{U}^j kann jedes Z_i herausfaktoriert werden. Für die zyklischen Erweiterungen der U^j schreibe daher $\mathfrak{U}_i^j := \mathfrak{U}^j/Z_i \leq \mathfrak{G}_i$.

Wegen $\mathfrak{U}^j/Z_i \cong \alpha(\mathfrak{U}^j)/\alpha(Z_i)$ erhält man bereits alle \mathfrak{U}_i^j , indem aus einem \mathfrak{U}^j für ein festes j , die Z_i herausfaktoriert werden, oder es wird ein Z_i für ein festes i aus den \mathfrak{U}^j herausfaktoriert. Anders betrachtet reicht es aus, sich auf die Schurschen Erweiterungen der drei U^j um ein festes Z_i zu beschränken, etwa diejenigen, die in $2.O_8^+(2)$ enthalten sind. Bezeichne sie entsprechend mit $2.U^1, 2.U^2$ und $2.U^3$.

Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, kann es dabei durchaus vorkommen, dass nicht alle $2.U^i$ isomorph sind.

Ein wichtiger Spezialfall ist das folgende Ergebnis, das wir häufig in Abschnitt 6.3.2 benutzen werden.

(6.1) Lemma

Sei U eine beliebige endliche Gruppe und sei (H, M) eine zentrale Erweiterung von U , wobei M eine Kleinsche Vierergruppe sei mit $M = \langle z_1, z_2 \rangle$, $z_3 := z_1 z_2$ und $Z_i := \langle z_i \rangle \cong C_2$. Weiter seien $K_i := H/Z_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Dann sind $(K_i, M/Z_i)$ für $i = 1, 2, 3$ zentrale Erweiterungen von U .

Sei V ein Komplement von M/Z_1 in K_1 , also $K_1 = M/Z_1 \times V$ (weil M/Z_1 zentral ist), und sei $\sigma : H \rightarrow K_1$ der kanonische Epimorphismus. Dann gilt:

- (a) Es ist H das innere direkte Produkt von $\sigma^{-1}(V)$ und Z mit $Z \in \{Z_2, Z_3\}$.
- (b) Es ist $\sigma^{-1}(V) \cong K_2 \cong K_3$, das heißt $H \cong C_2 \times K$ mit $K \in \{K_2, K_3\}$.
- (c) Hat zusätzlich M/Z_2 ein Komplement in K_2 , so ist $H \cong M \times U$.

Beweis.

Da die Z_i in H zentral sind und wegen $K_i/(M/Z_i) \cong (H/Z_i)/(M/Z_i) \cong U$ für alle i , folgt die erste Aussage über die zentralen Erweiterungen.

Sei $\tilde{V} := \sigma^{-1}(V)$. Weil V normal in $K_1 = \sigma(H)$ ist, ist \tilde{V} normal in H . Es gilt weiterhin $\langle \tilde{V}, M \rangle/Z_1 \cong \langle V, M/Z_1 \rangle = K_1 = H/Z_1$. Folglich ist $\langle \tilde{V}, M \rangle = H$ (*).

Zeige nun $\tilde{V} \cap Z = \{1\}$ für $Z \in \{Z_2, Z_3\}$: Angenommen, dies ist falsch, so ist $Z \leq \tilde{V}$. Da auch $Z_1 \leq \tilde{V}$ gilt, ist somit $M \leq \tilde{V}$. Dies ist ein Widerspruch zu (*), da $\tilde{V} \neq H$. Also ist $\tilde{V} \cap Z = \{1\}$ und es folgt (a).

Wegen (*) und der Voraussetzungen an M folgt $K_2 = H/Z_2 = \langle \tilde{V}, M \rangle/Z_2 = (\tilde{V}Z_1Z_2)/Z_2$. Aufgrund von $Z_1 \leq \tilde{V}$ und $\tilde{V} \cap Z_2 = \{1\}$ folgt daraus $K_2 \cong \tilde{V}$. Die gleiche Rechnung für K_3 und Z_3 liefert $K_3 \cong \tilde{V}$, so dass (b) nachgewiesen ist.

Für (c) sei L ein Komplement von M/Z_2 in K_2 . Da M/Z_2 zentral ist, ist L normal in K_2 . Also ist $K_2 \cong M/Z_2 \times U$ und wegen (b) gilt damit: $H \cong Z_2 \times K_2 \cong Z_2 \times M/Z_2 \times U \cong M \times U$. \square

Die folgende Bemerkung ist in vielen Situationen hilfreich, um Lemma (6.1) anwenden zu können.

(6.2) Bemerkung

Sei S eine beliebige endliche Gruppe und sei $M \leq Z(S)$ eine Kleinsche Vierergruppe mit $M = \langle z_1, z_2 \rangle$, $z_3 := z_1 z_2$ und $Z_i := \langle z_i \rangle \cong C_2$. Sei $H \leq S$ mit $M \leq H$ und sei α ein Automorphismus von S mit $\alpha(z_1) = \alpha(z_2)$, $\alpha(z_2) = \alpha(z_3)$ und $\alpha(z_3) = \alpha(z_1)$. Betrachte die drei Untergruppen H , $\alpha(H)$ und $\alpha^2(H)$ und die neun Faktorgruppen $\alpha^i(H)/Z_j$. Nach den Ausführungen vor Lemma (6.1) entsprechen die Gruppen H/Z_i für $1 \leq i \leq 3$ den Gruppen $\alpha^i(H)/Z_1$ für $1 \leq i \leq 3$, das heißt es gibt eine Bijektion zwischen den Isomorphietypen von $\{H/Z_1, H/Z_2, H/Z_3\}$ und denen von $\{\alpha^1(H)/Z_1, \alpha^2(H)/Z_1, \alpha^3(H)/Z_1\}$. Daher ist das Lemma (6.1) auch auf die Erweiterung (H, M) von H/M anwendbar, wobei anstelle der H/Z_i auch die $\alpha^i(H)/Z_1$ treten können.

Da es in beiden obigen Fällen (a) und (b) genügt, lediglich das Urbild von U in $2.O_8^+(2)$ zu betrachten, ist es nun möglich, wie bei $O_7(3)$ in Tabelle 6.2 Informationen zu den Vertretern der Klassen maximaler Untergruppen von $O_8^+(2)$ bereitzustellen. Die Gruppen werden der Größe nach mit U_1 bis U_{17} bezeichnet. Von ihnen und von den korrespondierenden Untergruppen in den Schurschen Erweiterungen wird die Struktur angegeben, sowie ihr Index in $O_8^+(2)$ beziehungsweise in den entsprechenden Erweiterungen. Die Darstellungsgruppe wird dabei wie in [CCN⁺03] mit $2^2.O_8^+(2)$ bezeichnet.

Auf den nachfolgenden Seiten werden diese Ergebnisse erläutert.

Der folgende Abschnitt befasst sich konkret mit den maximalen Untergruppen.

6.3.2 Die maximalen Untergruppen

Es gelten die Bezeichnungen aus Abschnitt 6.3.1.

Von $G := O_8^+(2)$, von $2.G := 2.O_8^+(2)$, und von $2^2.G := 2^2.O_8^+(2)$ sind in der GAP-Bibliothek Tafeln $\text{tbl}(G)$, $\text{tbl}(2.G)$ und $\text{tbl}(2^2.G)$ und kompatible Faktorfusionen $f_1 : \text{Cl}(2.G) \rightarrow \text{Cl}(G)$, $f_2 : \text{Cl}(2^2.G) \rightarrow \text{Cl}(2.G)$ und $f_3 : \text{Cl}(2^2.G) \rightarrow \text{Cl}(G)$ vorhanden, das heißt, es gilt $f_1 \circ f_2 = f_3$.

Weiterhin sind bei [Wil] im Sinne des Verfahrens (4.10) zueinander kompatible Erzeuger von G und $2.G$ vorhanden, die in GAP eingelesen werden können. In der Markentafelbibliothek gibt es bezüglich der Erzeuger von G Straight-Line-Programme zur Erzeugung aller maximaler Untergruppen von G . Bei [Wil] gibt es von $2^2.G$ hingegen keine Darstellung.

Zur Bestimmung der Tafeln der maximalen Untergruppen von G , $2.G$ und $2^2.G$ kann somit wie folgt vorgegangen werden:

Mittels des Verfahrens (4.10) werden Darstellungen der maximalen Untergruppen von $2.G$ erzeugt. Von diesen werden die Tafeln und zugehörigen Fusionen berechnet, anschließend werden mit der Funktion `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G` wie in Abschnitt 5.3 beschrieben die Tafeln der maximalen Untergruppen von $2^2.G$ bestimmt.

Im Folgenden wird dies ausgeführt.

Zunächst werden die Untergruppen U_{13} und U_{14} vom Typ (a) aus Abschnitt 6.3.1 unter-

Name	Struktur	Index	in $2.O_8^+(2)$	in $2^2.O_8^+(2)$
U_1	$S_6(2)$	120	$2 \times S_6(2)$	$2 \times 2.S_6(2)$
U_2	$S_6(2)$	120	$2.S_6(2)$	$2 \times 2.S_6(2)$
U_3	$S_6(2)$	120	$2.S_6(2)$	$2 \times 2.S_6(2)$
U_4	$2^6 : \mathcal{A}_8$	135	$2^7.\mathcal{A}_8$	$(2 \times 2_+^{1+6}).\mathcal{A}_8$
U_5	$2^6 : \mathcal{A}_8$	135	$2_+^{1+6} : \mathcal{A}_8$	$(2 \times 2_+^{1+6}).\mathcal{A}_8$
U_6	$2^6 : \mathcal{A}_8$	135	$2_+^{1+6} : \mathcal{A}_8$	$(2 \times 2_+^{1+6}).\mathcal{A}_8$
U_7	\mathcal{A}_9	960	$2 \times \mathcal{A}_9$	$2 \times 2.\mathcal{A}_9$
U_8	\mathcal{A}_9	960	$2.\mathcal{A}_9$	$2 \times 2.\mathcal{A}_9$
U_9	\mathcal{A}_9	960	$2.\mathcal{A}_9$	$2 \times 2.\mathcal{A}_9$
U_{10}	$(3 \times U_4(2)) : 2$	1120	$(3 \times 2 \times U_4(2)) : 2$	$(3 \times 2 \times 2.U_4(2)) : 2$
U_{11}	$(3 \times U_4(2)) : 2$	1120	$(3 \times 2.U_4(2)) : 2$	$(3 \times 2 \times 2.U_4(2)) : 2$
U_{12}	$(3 \times U_4(2)) : 2$	1120	$(3 \times 2.U_4(2)) : 2$	$(3 \times 2 \times 2.U_4(2)) : 2$
U_{13}	$2_+^{1+8} : (\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3)$	1575	$2.U_{13}$	$2^2.U_{13}$
U_{14}	$3^4 : 2^3.\mathcal{S}_4$	11200	$2.U_{14}$	nicht eindeutig bestimmt
U_{15}	$(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5) : 2^2$	14400	$(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5).(2 \times 4)$	$(2 \times 2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5)).2^2$
U_{16}	$(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5) : 2^2$	14400	$2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5).2^2$	$(2 \times 2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5)).2^2$
U_{17}	$(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5) : 2^2$	14400	$2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5).2^2$	$(2 \times 2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5)).2^2$

Tabelle 6.2: Maximale Untergruppen von $O_8^+(2)$ und ihre Erweiterungen

sucht.

Die 13. maximale Untergruppe $U_{13} \leq O_8^+(2)$

Erzeuge mit dem Verfahren (4.10) die Untergruppe $V \leq 2.G$, indem die Erzeuger von $2.G$ in das zu $U_{13} \leq G$ gehörige Straight-Line-Programm eingesetzt werden. Da $|V| = 2|U_{13}|$ gilt, ist V das Urbild von $2.U_{13}$ in $2.G$, vergleiche die Erläuterungen zu (4.10).

Mit den Methoden aus Abschnitt 5.1, die auch schon bei einigen Untergruppe von $O_7(3)$ zur Anwendung kamen, können Tafeln $\text{tbl}(2.U_{13})$ und $\text{tbl}(U_{13})$ und Fusionen $\text{fus}_{2.U_{13}}^{U_{13}}$, $\text{fus}_{2.U_{13}}^{2.G}$ und $\text{fus}_{U_{13}}^G$ berechnet werden. Die Tafeln sind noch nicht in der GAP-Bibliothek gespeichert. Nun wird die Funktion `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G` verwendet, um eine Tafel von $2^2.U_{13}$ zu berechnen. Dabei tritt das ein, was bereits in Abschnitt 5.3 bemerkt worden war, es gibt zwei nichtisomorphe Tafeln, die den Anforderungen von `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G` genügen.

Da es allerdings nur von einer der beiden Tafeln eine Tafelfusion nach $\text{Cl}(2^2.G)$ gibt, ist damit eine Tafel von $2^2.U_{13}$ gefunden. Berechne schließlich noch eine Fusion $\text{fus}_{2^2.U_{13}}^{2^2.G}$, die zu den anderen Fusionen kompatibel ist.

Die 14. maximale Untergruppe $U_{14} \leq O_8^+(2)$

Das Vorgehen ist analog zu dem bei U_{13} . Wie oben werden Tafeln $\text{tbl}(U_{14})$ und $\text{tbl}(2.U_{14})$ berechnet, die noch nicht in der Bibliothek enthalten sind. Auch hier erhält man zwei nichtisomorphe Tafeln t_1 und t_2 als Kandidaten für $\text{tbl}(2^2.U_{14})$, jedoch gibt es sowohl Tafelfusionen $\text{Cl}(t_1) \rightarrow \text{Cl}(2^2.G)$ als auch $\text{Cl}(t_2) \rightarrow \text{Cl}(2^2.G)$, so dass hier weitere Überlegungen nötig sind, um eine Auswahl der Tafeln t_1 und t_2 zu treffen. Seien F_1 und F_2 die Menge der Tafelfusionen $\text{Cl}(t_1) \rightarrow \text{Cl}(2^2.G)$ beziehungsweise $\text{Cl}(t_2) \rightarrow \text{Cl}(2^2.G)$.

Mit Hilfe von Brauercharakteren – zur Definition und für nähere Informationen siehe [Isa76, Chapter 15] – kann unter Umständen t_1 oder t_2 als Charaktertafel für $\text{tbl}(2^2.U_{14})$ ausgeschlossen werden; wir wollen hier nur die Idee skizzieren: In der GAP-Bibliothek ist eine 3-modulare Brauercharaktertafel von $s := \text{tbl}(2^2.G)$ archiviert. Von t_1 und t_2 können 3-modulare Brauercharaktertafeln berechnet werden, da $2^2.U_{14}$ nach *Burnside's $p^a q^b$ -Theorem*, siehe [Isa76], Theorem 3.10, auflösbar ist. Die Brauercharaktertafeln induzieren Abbildungen $\iota_s : \text{Cl}_{3'}(2^2.G) \rightarrow \text{Cl}(2^2.G)$ sowie $\iota_{t_1} : \text{Cl}_{3'}(t_1) \rightarrow \text{Cl}(t_1)$ beziehungsweise $\iota_{t_2} : \text{Cl}_{3'}(t_2) \rightarrow \text{Cl}(t_2)$. Dabei ist $\text{Cl}_{p'}(G) := \{C \in \text{Cl}(G) \mid p \text{ teilt nicht } |g|, \text{ wobei } g \in C\}$ für eine Gruppe G und eine Primzahl p . Die Fusionen aus F_1 und F_2 unterscheiden sich nur durch Operation von $\text{TAut}(t_1) \times \text{TAut}(s)$ beziehungsweise $\text{TAut}(t_2) \times \text{TAut}(s)$. Sei daher $f_i \in F_i$ beliebig für $i = 1, 2$. Mit GAP kann nun nachgerechnet werden, dass für $i \in \{1, 2\}$ eine Abbildung $h_{3'}^i : \text{Cl}_{3'}(t_i) \rightarrow \text{Cl}_{3'}(2^2.G)$ mit $\iota_s \circ h_{3'}^i = f_i \circ \iota_{t_i}$ existiert, die die Eigenschaft hat, dass die Einschränkungen der irreduziblen 3-modularen Brauercharaktere von $2^2.G$ vermöge $h_{3'}^i$ irreduzible 3-modulare Brauercharaktere von t_i sind.

Wäre dies für ein $i_0 \in \{1, 2\}$ nicht der Fall gewesen, so wäre t_{i_0} als Kandidat für die Charaktertafel von $2^2.U_{14}$ ausgeschlossen. So aber bleibt die Frage in dieser Arbeit unbeantwortet.

Nun werden die übrigen Untergruppen vom Typ (b) aus Abschnitt 6.3.1 betrachtet: Sie lassen sich einteilen in fünf Tripel von Untergruppen eines Isomorphietyps, die nicht zueinander konjugiert sind; ihre Urbilder in $2^2.O_8^+(2)$ werden durch α aufeinander abgebildet. Von α wird ein Tafelautomorphismus $\hat{\alpha}$ induziert, der zur Bestimmung der Fusionen nützlich ist, vergleiche Abschnitt 5.2. Um $\hat{\alpha}$ rechnerisch zu erzeugen, bestimme mittels `AutomorphismsOfTable` die Tafelautomorphismen von $\text{tbl}(2^2.G)$. Es gibt nur zwei Tafelautomorphismen der Ordnung drei, so dass für $\hat{\alpha}$ einer von diesen ausgewählt werden kann, vergleiche die Situation bei $U_3(5)$ in Abschnitt 6.2.

Für $2.O_8^+(2)$ existiert so ein Gruppenautomorphismus jedoch nicht. Dies kann wie schon erwähnt zur Folge haben, dass die Erweiterungen $2.U, 2.V$ zweier Gruppen U, V eines Tripels unterschiedliche Struktur haben, etwa kann $2.U \cong C_2 \times U$ sein, aber $(2.V, C_2)$ kann eine Schursche Erweiterung von V sein, als Beispiel siehe weiter unten die Erweiterungen von U_1, U_2 und U_3 .

Insofern ist die Situation nicht völlig analog zu der bei $U_3(5)$ und erfordert ein besonderes Vorgehen, wobei wir in Lemma (6.1) ein wichtiges Hilfsmittel haben.

Nun werden die genannten Untergruppen näher untersucht.

$$U_1 \cong U_2 \cong U_3 \leq O_8^+(2)$$

Nach [CCN⁺03] ist $U_1 \cong U_2 \cong U_3 \cong S_6(2)$ einfach mit einem Schurschen Multiplikator der Ordnung zwei. Wegen Satz (2.3) ist $2.U_i$ isomorph zu $C_2 \times S_6(2)$ oder $(2.U_i, C_2)$ ist eine Schursche Erweiterung von $S_6(2)$ für $i = 1, 2, 3$.

Von U_1 ist eine Tafel in der GAP-Bibliothek gespeichert, bezeichne sie mit $\text{tbl}(U_1)$; ebenso ist eine Fusion $\text{fus}_{U_1}^G$ archiviert.

Wende das Verfahren (4.10) auf die Gruppe $2.O_8^+(2)$ und die Untergruppen $U_i \leq O_8^+(2)$ an. Bezüglich der ersten maximalen Untergruppe liefert (4.10) eine Untergruppe $V \leq 2.G$ mit $|V| = |U_1|$. Nach den Erläuterungen in (4.10) ist damit $2.U_1 \cong C_2 \times S_6(2)$.

Bei den anderen beiden Gruppen sind die erzeugten Gruppen die vollen Urbilder $2.U_2$ beziehungsweise $2.U_3$. Von diesen können Tafeln $\text{tbl}(2.U_2)$ und $\text{tbl}(2.U_3)$ berechnet werden; ein Vergleich mit der Bibliothek zeigt, dass es sich um die Tafeln der Darstellungsgruppe

$2.S_6(2)$ handelt, es ist also $2.U_2 \cong 2.U_3 \cong 2.S_6(2)$.

Bevor die Frage der zugehörigen Fusionen geklärt wird, werden zunächst die Urbilder der Gruppen U_i in $2^2.O_8^+(2)$ untersucht. Nach den Ausführungen in Abschnitt 6.3.1 unter (b) und Bemerkung (6.2) ist Lemma (6.1)(b) anwendbar und es folgt $2^2.U \cong 2 \times 2.S_6(2)$. Die Tafeln $\text{tbl}(2^2.U_i)$ können somit als direkte Produkte konstruiert werden, vergleiche die Ausführungen in Abschnitt 5.1.

Nun werden alle nötigen Fusionen bestimmt:

Die Faktorfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{U_i}$ sind für alle i gleich und können wie folgt berechnet werden: Definiere eine Tafel t , indem aus $\text{tbl}(2^2.U)$ die Klassen herausfaktorisiert werden, die das Zentrum $Z(2^2.U)$ bilden. Ein Vergleich mit der Bibliothekstafel $\text{tbl}(U_1)$ zeigt, dass t und $\text{tbl}(U_1)$ nicht nur isomorph, sondern auch gleich sind, so dass für die Faktorfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{U_i} := \text{fus}_{2^2.U}^t$ gewählt wird. Sie wird mit $\text{fus}_{2^2.U}^U$ bezeichnet.

Passend zur Bibliotheksfusion $\text{fus}_{U_1}^G$ berechne eine Fusion $\text{fus}_{2^2.U_1}^{2^2.G}$ wie in Abschnitt 5.1 beschrieben.

Für die beiden anderen Fusionen $\text{fus}_{2^2.U_2}^{2^2.G}$ und $\text{fus}_{2^2.U_3}^{2^2.G}$ verwende nun den oben bestimmten Tafelautomorphismus $\hat{\alpha} \in \text{TAut}(\text{tbl}(2^2.G))$: Setze $\text{fus}_{2^2.U_2}^{2^2.G} := \hat{\alpha} \circ \text{fus}_{2^2.U_1}^{2^2.G}$ und $\text{fus}_{2^2.U_3}^{2^2.G} := \hat{\alpha}^2 \circ \text{fus}_{2^2.U_1}^{2^2.G}$ und erhalte damit die gewünschten Fusionen, vergleiche die allgemeinen Ausführungen in Abschnitt 5.2 und das Vorgehen bei $U_3(5)$ in Abschnitt 6.2.

Wie in Abschnitt 5.1(b)(ii) beschrieben, können aus diesen Fusionen und der Faktorfusion $\text{fus}_{2^2.U}^U$ passende Fusionen $\text{fus}_{U_2}^G$ und $\text{fus}_{U_3}^G$ berechnet werden, so dass die entsprechenden Diagramme (*) aus Abschnitt 1.4 kommutieren.

Berechne nun zu der am Anfang dieses Abschnittes, Seite 73, eingeführten Bibliotheksfusion $f_2 : \text{Cl}(2^2.G) \rightarrow \text{Cl}(2.G)$ und zu $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2^2.G}$ kompatible Faktor- und Untergruppentafelfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2.U_i}$ beziehungsweise $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2^2.G}$ für $i = 1, 2, 3$. Eine Fusion $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2.U_i}$ für ein i ergibt sich durch Herausfaktorieren der Klassen von Z_1, Z_2 oder Z_3 . Das Problem besteht darin, für jedes i das passende Z_j auszuwählen, gehe dazu wie folgt vor.

Die Klassen $[1, 2, 3, 4]$ bilden das Zentrum von $\text{tbl}(2^2.G)$. Die Fusion f_2 entsteht dadurch, dass die Klassen $[1, 2]$ herausfaktorisiert werden. Das Zentrum von $\text{tbl}(2^2.U)$ bilden die Klassen $[1, 2, 44, 45]$. Da α auf $Z(2^2.G)$ operiert, wird jede der Zentrumsklassen 2, 44 und 45 unter genau einer Fusion $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2^2.G}$ auf die Klasse 2 in $\text{Cl}(2^2.G)$ abgebildet. Durch Einsetzen erhält man $\text{fus}_{2^2.U_1}^{2^2.G}(2) = \text{fus}_{2^2.U_2}^{2^2.G}(45) = \text{fus}_{2^2.U_3}^{2^2.G}(44) = 2$. Bilde nun Tafeln $2t_1, 2t_2$ und $2t_3$, indem aus $\text{tbl}(2^2.U)$ die Klassen $[1, 2]$ beziehungsweise $[1, 45]$ und $[1, 44]$ herausfaktorisiert werden. Betrachte weiter die zugehörigen Faktorfusionen $h_i := \text{fus}_{2^2.U_i}^{2t_i}$ für $i = 1, 2, 3$. Nun sind die Tafeln $2t_i$ und $\text{tbl}(2.U_i)$ nicht nur isomorph, sondern auch gleich, so dass für die Fusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2.U_i}$ die h_i gewählt werden können. Nun können wie oben passende Fusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2^2.G}$ für $i = 1, 2, 3$ berechnet werden.

Eine natürliche Faktorfusion $\text{fus}_{2.U_1}^{U_1}$ ergibt sich durch Herausfaktorieren des Zentrums von $2.U_1 \cong 2 \times S_6(2)$. Faktorfusionen $\text{fus}_{2.U_2}^{U_2} = \text{fus}_{2.U_3}^{U_3}$ sind schon in der GAP-Bibliothek gespeichert. Nachrechnen in GAP zeigt, dass die Faktorfusionen für die Erweiterungen der U_i kompatibel sind, das heißt, es gilt $\text{fus}_{2^2.U_i}^{U_i} = \text{fus}_{2.U_i}^{U_i} \circ \text{fus}_{2^2.U_i}^{2.U_i}$ für alle i . Somit können

die Faktorfusionen übernommen werden, und für alle i kommutiert das Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Cl}(U_i) & \xrightarrow{\text{fus}_{U_i}^G} & \text{Cl}(G) \\
 \text{fus}_{2.U_i}^{U_i} \uparrow & & \uparrow f_1 \\
 \text{Cl}(2.U_i) & \xrightarrow{\text{fus}_{2.U_i}^{2.G}} & \text{Cl}(2.G).
 \end{array} \tag{D}$$

Damit sind alle Fragen zum ersten Tripel U_1, U_2, U_3 beantwortet.

Abschließend noch zwei Bemerkungen:

Erstens konnte auf Darstellungen von $2^2.G$ und $2^2.U$ sowie die Funktion `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G` verzichtet werden; die Struktur von $2^2.U$ ergab sich aus theoretischen Überlegungen und der Strukturen der $2.U_i$.

Zweitens wurden zunächst die Tafeln aller Erweiterungen und die Fusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2^2.G}$ bestimmt. Daraus ergeben sich nach passender Wahl der Faktorfusionen die übrigen Untergruppentafelfusionen (außer $\text{fus}_{U_1}^G$, die schon in der Bibliothek enthalten war), und die Kommutativität der Diagramme (*) ist gewährleistet.

$$U_4 \cong U_5 \cong U_6 \leq O_8^+(2)$$

Nach [CCN⁺03] ist $U_4 \cong U_5 \cong U_6 \cong 2^6 : \mathcal{A}_8$. In der Bibliothek sind bereits eine Tafel $\text{tbl}(U_4)$ und eine Fusion $\text{fus}_{U_4}^G$ gespeichert.

Verfahre zunächst wie bei den ersten drei Gruppen und wende das Verfahren (4.10) auf die Gruppen U_i für $i = 4, 5, 6$ an. Man erhält jeweils das volle Urbild und kann somit mittels `CharacterTable` Tafeln $\text{tbl}(2.U_i)$ berechnen. Mit `TransformingPermutationsCharacterTables` stellt man fest, dass $\text{tbl}(2.U_5)$ und $\text{tbl}(2.U_6)$ isomorph sind, aber sie sind nicht isomorph zu $\text{tbl}(2.U_4)$. Die Tafeln $\text{tbl}(2.U_5)$ und $\text{tbl}(2.U_6)$ sind unter $2^{1+6} : \mathcal{A}_8$, die Tafel $\text{tbl}(2.U_4)$ unter dem Namen „P31/G1/L1/V1/ext2“ in der Bibliothek gespeichert. Auch sind Fusionen $\text{fus}_{2.U_4}^{U_4}$ und $\text{fus}_{2.U_5}^{U_4}$ in der Bibliothek vorhanden.

Wie in Abschnitt 6.3.1 formuliert, sind die Urbilder $2^2.U_i$ der U_i in $2^2.G$ isomorph. Nun ist zwar Lemma (6.1) nicht anwendbar, aber es kann eine Tafel der Gruppen $2^2.U_i$ mit Hilfe von `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G` berechnet werden. Im Gegensatz zur Gruppe U_{13} erhält man hier bis auf Isomorphie nur eine Tafel, so dass eine Tafel $\text{tbl}(2^2.U) = \text{tbl}(2^2.U_4) = \text{tbl}(2^2.U_5) = \text{tbl}(2^2.U_6)$ gefunden ist.

Wie beim ersten Tripel werden nun die zugehörigen Fusionen konstruiert. Die Faktorfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{U_i}$ sind für alle i gleich und ergeben sich analog. Damit können ebenfalls analog kompatible Untergruppentafelfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2^2.G}$ für $i = 4, 5, 6$ und $\text{fus}_{U_5}^G$ und $\text{fus}_{U_6}^G$ berechnet werden.

Bestimme nun Faktorfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2.U_i}$:

Zunächst ist das Vorgehen wieder analog. Seien $[1, k_2, k_3, k_4]$ die Klassen, die das Zentrum von $\text{tbl}(2^2.U)$ bilden. Wie eben werden passend zu den Untergruppentafelfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2^2.G}$ und der Bibliotheksfusion $f_2 : \text{Cl}(2^2.G) \rightarrow \text{Cl}(2.G)$ Tafeln $2t_i$ und Faktorfusionen $h_i := \text{fus}_{2^2.U_i}^{2t_i}$ für $i = 4, 5, 6$ gebildet. Die Tafeln $2t_i$ und $\text{tbl}(2.U_i)$ sind isomorph für alle i , im Unterschied zu oben sind sie jedoch nicht gleich, wie die durchgeführten Rechnungen zeigen. Daher ergeben sich Faktorfusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2.U_i}$ nicht unmittelbar aus den h_i , sondern

durch $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2.U_i} := \phi_i \circ h_i$, wobei $\phi_i : 2t_i \rightarrow \text{tbl}(2.U_i)$ Tafelisomorphismen sind. Sie können mittels `TransformingPermutationsCharacterTables` berechnet werden. Passende Fusionen $\text{fus}_{2^2.U_i}^{2.G}$ für $i = 4, 5, 6$ lassen sich nun wieder analog berechnen. Die Fusionen $\text{fus}_{2^2.U_4}^{2.G}$ und $\text{fus}_{2^2.U_5}^{2.G}$ sind bereits in der Bibliothek gespeichert.

Nun zu den Faktorfusionen $\text{fus}_{2.U_i}^{U_i}$:

Die Bibliotheksfusion $\text{fus}_{2.U_5}^{U_5}$ passt zu den Fusionen $\text{fus}_{2^2.U_5}^{2.U_5}$ und $\text{fus}_{2^2.U_5}^{U_5}$, das heißt, es gilt $\text{fus}_{2^2.U_5}^{U_5} = \text{fus}_{2.U_5}^{U_5} \circ \text{fus}_{2^2.U_5}^{2.U_5}$. Diese kann also übernommen werden, und damit kommutiert das obige Diagramm (D) für die U_5 .

Die Bibliotheksfusion $\text{fus}_{2.U_4}^{U_4}$ erfüllt die entsprechende Eigenschaft jedoch nicht, so dass nach einer neuen Fusion gesucht wird. Bilde dazu die Tafel s , indem aus $\text{tbl}(2.U_4)$ die Zentrumsklassen $[1, 5]$ herausfaktoriert werden. Nun ist s isomorph zu $\text{tbl}(U_4)$, jedoch sind die Tafeln nicht gleich. Mittels `TransformingPermutationsCharacterTables` berechne einen Tafelisomorphismus $\phi : s \rightarrow \text{tbl}(U_4)$, so dass $\text{fus}_{2^2.U_4}^{U_4} = \phi \circ \text{fus}_{2.U_4}^s \circ \text{fus}_{2^2.U_4}^{2.U_4}$ gilt. Setze $\text{fus}_{2.U_4}^{U_4} := \phi \circ \text{fus}_{2.U_4}^s$ und erhalte eine Fusion mit der gewünschten Eigenschaft, so dass das Diagramm (D) auch für die U_4 kommutiert.

Eine Faktorfusion $\text{fus}_{2.U_6}^{U_6}$ kann analog zu $\text{fus}_{2.U_4}^{U_4}$ bestimmt werden.

Bestimme nun die Struktur von $2.U_4, 2.U_5$ und $2^2.U_4$:

Aus der Charaktertafel einer Gruppe H lassen sich sämtliche Normalteiler von H als Schnitt von Kernen von Charakteren bestimmen, siehe dazu [Isa76], Absatz nach Lemma (2.21). In GAP wird dies in der Funktion `ClassPositionsOfNormalSubgroups` umgesetzt; mit ihr können die H -Konjugiertenklassen, die einen Normalteiler bilden, berechnet werden.

Damit können die Urbilder von $N := 2^6 \leq U_4$ in $2.U_4, 2.U_5$ und $2^2.U_4$ rechnerisch als Vereinigung von Konjugiertenklassen gefunden werden: In $2.U_4$ und $2.U_5$ gibt es jeweils nur einen Normalteiler der Ordnung 128 und in $2^2.U_4$ gibt es nur einen Normalteiler der Ordnung 256, so dass die Urbilder von N identifiziert sind, bezeichne sie mit $2.N \leq 2.U_4, 2.\tilde{N} \leq 2.U_5$ und $2^2.N \leq 2^2.U_4$, wobei $\tilde{N} \cong N$.

Mittels der Potenzabbildungen einer Gruppe können die Elementordnungen bestimmt werden. Somit kann die Anzahl der Elemente der Ordnung 1, 2 und 4 von $2.\tilde{N}$ ermittelt werden. Ein Vergleich mit den Gruppen der Ordnung 128, die mit einer C_2 eine zentrale Erweiterung einer elementar-abelschen Gruppe der Ordnung 2^6 bilden, zeigt, dass $2.\tilde{N}$ von der Struktur 2_+^{1+6} ist.

Alle Elemente von $2.N \setminus \{1\}$ haben hingegen Ordnung zwei. Also ist $2.N$ elementar-abelsch (siehe zum Beispiel (1.13) in [Asc00]); insgesamt ist daher $2.N \cong 2^7 \cong 2 \times 2^6$. Wegen $2.U_4/2.N \cong U_4/N \cong \mathcal{A}_8$ ist $2.U_4$ von der Struktur $2^7.\mathcal{A}_8$.

Nach Bemerkung (6.2) und Lemma (6.1)(b) ist schließlich $2^2.N \cong 2 \times 2_+^{1+6}$ und folglich hat $2^2.U_4$ die Struktur $(2 \times 2_+^{1+6}).\mathcal{A}_8$.

Damit sind alle Fragen für das Tripel U_4, U_5 und U_6 beantwortet.

Bei dem Tripel U_7, U_8 und U_9 kann wie beim ersten Tripel vorgegangen werden.

Analog zu U_4, U_5, U_6 können die Tafeln und Fusionen bei den Tripeln U_{10}, U_{11}, U_{12} und U_{15}, U_{16}, U_{17} berechnet werden, wobei von diesen Gruppen und ihren Erweiterungen keine Tafeln in der GAP-Bibliothek enthalten sind, so dass keine Anpassung an die Bibliothek nötig ist.

Lediglich die Strukturanalyse ist zugeschnitten auf die jeweiligen Gruppen, so dass sie im Folgenden auch für die letztgenannten Tripel durchgeführt wird, um die Ergebnisse der Tabelle 6.2 zu erhalten.

Betrachte zunächst das Tripel U_{10}, U_{11}, U_{12} .

Seien $V := V_1 := U_4(2) \leq U_{10}$, $V_2 \leq U_{11}$ und $V_3 \leq U_{12}$, wobei $V_2 \cong V_3 \cong V$. Seien $2.V_1$, $2.V_2$ und $2.V_3$ die zugehörigen Urbilder in $2.U_{10}$, $2.U_{11}$ beziehungsweise $2.U_{12}$. Sei $2^2.V$ das Urbild von V in $2^2.G$. Nach [CCN⁺03] ist $M(U_4(2)) \cong C_2$, wegen Satz (2.3) ist demnach $2.V_i \cong 2 \times V$ oder $2.V_i \cong 2.V$, wobei $2.V$ die Darstellungsgruppe von V ist. Nach [CCN⁺03] ist $2.U_{11} \cong 2.U_{12}$. Folglich ist $2.V_2 \cong 2.V_3$. Falls $2.V_2 \cong 2 \times V \cong 2.V_3$ wäre, so wäre $2^2.V \cong 2 \times 2 \times V$ nach Bemerkung (6.2) und Lemma (6.1)(c). Dies ist aber nicht möglich, da es keine Tafelfusionen von $\text{Cl}(V)$ nach $\text{Cl}(2^2.G)$ gibt. Also ist $2.V_2 \cong 2.V \cong 2.V_3$. Es ist jedoch $2.V_1 \cong 2 \times V$, weil keine Tafelfusionen von $\text{Cl}(2.V)$ nach $\text{Cl}(2.U_{10})$ existieren. Nach Bemerkung (6.2) und Lemma (6.1)(b) ist daher $2^2.V \cong 2 \times 2.V$.

Das Urbild von $3 \times V \leq U_{10}$ in $2^2.U_{10}$ ist nach Satz (2.1) isomorph zu $N := 3 \times 2 \times 2.U_4(2)$. Folglich ist $2^2.U_{10}$ von der Struktur $N.2$. Dies kann noch etwas genauer beschrieben werden:

Wie oben erläutert, können alle Normalteiler von $2^2.U_{10}$ der Ordnung $|N|$ in der berechneten Tafel $\text{tbl}(2^2.U_{10})$ identifiziert werden. Es gibt drei solche Normalteiler N_1, N_2 und N_3 . Für N_i gibt es eine Involution $x(i) \in 2^2.U_{10} \setminus N_i$ für alle $i = 1, 2, 3$. Somit haben alle N_i ein Komplement in $2^2.U_{10}$. Insbesondere kann dies auch für N gefolgert werden, ohne den Normalteiler $N_j \in \{N_1, N_2, N_3\}$ mit $N_j = N$ zu bestimmen. In der Notation von [CCN⁺03] drückt sich dies in einem Doppelpunkt aus: Man schreibt $2^2.U_{10}$ ist von der Struktur $N : 2$. Daraus und aus der Struktur der $2.V_i$ folgt, dass die Gruppen $2.U_{11}$ und $2.U_{12}$ die Struktur $(3 \times 2.U_4(2)) : 2$ haben, während $2.U_{10}$ von der Struktur $(3 \times 2 \times U_4(2)) : 2$ ist.

Betrachte nun das letzte Tripel U_{15}, U_{16}, U_{17} .

Nach [CCN⁺03] ist $2.U_{16} \cong 2.U_{17}$. Seien $V := V_1 := \mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5 \leq U_{15}$ und $V_2 \leq U_{16}$ mit $V_2 \cong V$. Seien $2.V_1$ und $2.V_2$ die zugehörigen Urbilder in $2.U_{15}$ beziehungsweise $2.U_{16}$. Wegen Bemerkung (1.34)(b) und Satz (2.3) sind die $2.V_i$ entweder isomorph zu $2 \times \mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$ oder sie sind, falls sie kein direktes Produkt sind, von der Struktur $2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5)$ oder $2.\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$, wobei $2.\mathcal{A}_5$ die Darstellungsgruppe von \mathcal{A}_5 ist. Da es keine Tafelfusionen von $\text{Cl}(2.\mathcal{A}_5)$ nach $\text{Cl}(2.U_{15})$ gibt und Gruppen der Struktur $2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5)$ und $2.\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$ eine Untergruppe der Form $2.\mathcal{A}_5$ haben, ist $2.V_1 \cong 2 \times \mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$. Damit ist $2.U_{15}$ von der Struktur $(2 \times \mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5).2^2$; sie kann aber auch noch anders beschrieben werden:

Wie bei U_4, U_5, U_6 untersucht man $2.U_{15}$ bezüglich Normalteiler und stellt fest, dass es in $2.U_{15}$ nur einen Normalteiler der Ordnung 3600 gibt, womit $\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$ identifiziert ist. Mit GAP kann die Tafel von $2.U_{15}/(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5)$ berechnet werden; sie ist zu der von $C_2 \times C_4$ isomorph. Da es nur eine Gruppe mit dieser Tafel gibt, ist die in Tabelle 6.2 angegebene Struktur von $2.U_{15}$ verifiziert.

In einer Gruppe der obigen Struktur $2.\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$ ist \mathcal{A}_5 eine charakteristische Untergruppe. Ebenfalls ist $\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$ charakteristisch in $2 \times \mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$. Da es in $2.U_{16}$ weder einen Normalteiler der Ordnung 60 noch 3600 gibt, ist $2.V_2$ von der Struktur $2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5)$.

Die Struktur von $2^2.U_{15}$ folgt aus dem Bisherigen und Bemerkung (6.2) sowie Lemma (6.1)(b).

6.4 $U_6(2)$

Dieser Abschnitt erklärt, wie Tafeln und zugehörige Fusionen der maximalen Untergruppen der Schurschen Erweiterungen der einfachen Gruppe $U_6(2)$ bestimmt werden können. Die Vorgehensweise ist dabei analog zu der bei den Untersuchungen zu den Gruppen $O_7(3)$ und $O_8^+(2)$ in den vorangegangenen Abschnitten 6.1 und 6.3. Es werden zunächst Informationen zu $U_6(2)$ gegeben, wobei vor allem Parallelen zu $O_8^+(2)$ offenbar werden. Anschließend wird beschrieben, wie die Fragen aus Abschnitt 1.4 für die einzelnen maximalen Untergruppen beantwortet werden können.

6.4.1 Überblick

Informationen zu $U_6(2)$ finden sich in [CCN⁺03], Seite 115. Es gibt 16 Konjugiertenklassen maximaler Untergruppen in $U_6(2)$. Der Multiplikator M von $U_6(2)$ ist das direkte Produkt einer Kleinschen Vierergruppe und einer zyklischen Gruppe der Ordnung drei, etwa $M = \langle z_1, z_2 \rangle \times C_3$, wobei $z_3 := z_1 z_2$ und $Z_i := \langle z_i \rangle \cong C_2$. Gehe analog zu $O_8^+(2)$ in Abschnitt 6.3.1 vor:

Sei \mathfrak{G} die Darstellungsgruppe von $U_6(2)$. Weiter seien $(\mathfrak{G}_i, M/Z_i)$, $i = 1, 2, 3$, und $(\mathfrak{H}, M/C_3)$ sowie $(\mathfrak{H}_i, M/(C_3 \times Z_i))$, $i = 1, 2, 3$, und $(\mathfrak{K}, M/(Z_1 \times Z_2))$ die übrigen Schurschen Erweiterungen von $U_6(2)$.

Somit kann \mathfrak{G} als eine Schursche Erweiterung von \mathfrak{K} um die Kleinsche Vierergruppe $Z_1 \times Z_2$ aufgefasst werden. Für $O_8^+(2)$ anstelle von \mathfrak{K} und $2^2.O_8^+(2)$ anstelle von \mathfrak{G} entspricht dies der Situation bei $O_8^+(2)$. Analog entstehen die Gruppen \mathfrak{G}_i durch Herausfaktorisieren von Z_i aus \mathfrak{G} . Zusätzlich gibt es die Möglichkeit, Faktorgruppen modulo $C_3 \times Z_i$ zu betrachten, was zu den \mathfrak{H}_i führt.

Man kann dies auch „umgekehrt“ sehen und \mathfrak{G} als eine Schursche Erweiterung von \mathfrak{H} durch C_3 auffassen, während \mathfrak{H} eine Schursche Erweiterung von $U_6(2)$ durch eine zu $Z_1 \times Z_2$ isomorphe Gruppe ist.

Nach [CCN⁺03] existiert wie bei $O_8^+(2)$ ein äußerer Automorphismus α von \mathfrak{G} , der die Z_i zyklisch permutiert, etwa $\alpha(Z_1) = Z_2$, $\alpha(Z_2) = Z_3$ und $\alpha(Z_3) = Z_1$. Durch α wird ein Isomorphismus induziert, der die \mathfrak{G}_i und die \mathfrak{H}_i jeweils aufeinander abbildet, so dass es in beiden Fällen genügt – man vergleiche die Situation zu der bei $O_8^+(2)$ – jeweils nur eine Gruppe der \mathfrak{G}_i beziehungsweise \mathfrak{H}_i zu betrachten. Diese werden wie in [CCN⁺03] und in GAP mit $6.U_6(2)$ beziehungsweise $2.U_6(2)$ bezeichnet. Ebenfalls [CCN⁺03] und GAP folgend werden für \mathfrak{G} sowie \mathfrak{H} und \mathfrak{K} die Schreibweisen $(2^2 \times 3).U_6(2)$ beziehungsweise $2^2.U_6(2)$ und $3.U_6(2)$ verwendet.

Nun wird sich den maximalen Untergruppen zugewandt:

Sei (U, \mathfrak{U}) ein Paar maximaler Untergruppen von $U_6(2)$ und \mathfrak{G} .

Wie bei $O_8^+(2)$ gibt es zwei Sorten von maximalen Untergruppen der $U_6(2)$: Ist $U \leq U_6(2)$ maximal, so gibt es entweder

- (a) nur eine Konjugiertenklasse des Isomorphietyps U oder
- (b) drei Konjugiertenklassen des Isomorphietyps U , wobei die Urbilder dieser Klassen in \mathfrak{G} durch α aufeinander abgebildet werden.

Analog zu $O_8^+(2)$ kann man zeigen, dass es im Fall (a) in $(2^2 \times 3).U_6(2)$, in $2^2.U_6(2)$ und in $3.U_6(2)$ ebenfalls nur eine Konjugiertenklasse vom Isomorphietyp der jeweiligen Erweiterungen von U gibt. Ein Vertreter von ihnen wird mit $(2^2 \times 3).U$, $2^2.U$ beziehungsweise $3.U$ bezeichnet. Weiterhin folgt wie bei $O_8^+(2)$, dass die Urbilder von U in den \mathfrak{G}_i und \mathfrak{H}_i jeweils alle isomorph sind. Daher reicht es aus, jeweils nur das Urbild zu betrachten, das in $6.U_6(2)$ beziehungsweise in $2.U_6(2)$ enthalten ist. Entsprechend werden sie mit $6.U$ beziehungsweise $2.U$ bezeichnet.

Auch im Fall (b) gehe analog zu $O_8^+(2)$ vor und führe die entsprechende Notation ein. Seien $\mathfrak{U}^1 := \mathfrak{U}, \mathfrak{U}^2$ und \mathfrak{U}^3 Vertreter der Konjugiertenklassen des Isomorphietyps von \mathfrak{U} , so dass $\alpha(\mathfrak{U}^1) = \mathfrak{U}^2$, $\alpha(\mathfrak{U}^2) = \mathfrak{U}^3$ und $\alpha(\mathfrak{U}^3) = \mathfrak{U}^1$ gilt. Die korrespondierenden Untergruppen in G seien mit $U^1 := U, U^2$ und U^3 bezeichnet.

Da α die zentralen Untergruppen $C_3 \leq M$ und $Z_1 \times Z_2 \leq M$ invariant lässt, sind ebenfalls die Urbilder der U^j in $2^2.U_6(2)$ beziehungsweise in $3.U_6(2)$ isomorph zueinander.

Wie bei $O_8^+(2)$ gibt es zu jedem U^j die Erweiterungen mit einer der Gruppen $Z_i \times C_3$; beziehungsweise können aus allen \mathfrak{U}^j alle Z_i herausfaktoriert werden. Analog kann gezeigt werden, dass es ausreicht, von diesen neun Erweiterungen lediglich drei zu betrachten, indem aus einem festen \mathfrak{U}^j die Z_i herausfaktoriert werden, oder aus den \mathfrak{U}^j ein festes Z_i herausfaktoriert wird. Oder anders gesehen, genügt es die Schurschen Erweiterungen der drei U^j durch eine feste Gruppe $Z_i \times C_3$ zu betrachten, etwa die Erweiterungen, die in $6.U_6(2)$ enthalten sind. Bezeichne sie entsprechend mit $6.U^1, 6.U^2$ und $6.U^3$. Wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, kann es dabei durchaus vorkommen, dass die $6.U^i$ nicht isomorph sind.

Analoges kann für die Urbilder in $2.U_6(2)$ gezeigt werden, indem die Faktorgruppen der \mathfrak{U}^j nach den $Z_i \times C_3$ analysiert werden. Schreibe für sie daher $2.U^1, 2.U^2$ und $2.U^3$. Auch hier sind die $2.U^i$ im Allgemeinen nicht isomorph.

Wie bei $O_8^+(2)$ genügt es also in beiden Fällen (a) und (b), lediglich das Urbild von U in $2.U_6(2)$ und $6.U_6(2)$ zu betrachten. In der Tabelle 6.3 sind Informationen zu den Vertretern der Klassen maximaler Untergruppen von $U_6(2)$ bereitgestellt. Es werden die Gruppen der Größe nach mit U_1 bis U_{16} bezeichnet. Von ihnen und von den korrespondierenden Untergruppen in den Schurschen Erweiterungen wird die Struktur angegeben, sowie ihr Index in $U_6(2)$ beziehungsweise in den entsprechenden Erweiterungen.

Auf den nachfolgenden Seiten werden diese Ergebnisse erläutert.

6.4.2 Die maximalen Untergruppen

Es gelten die Bezeichnungen aus Abschnitt 6.4.1.

Von $G := U_6(2)$, von $2.G := 2.U_6(2)$, von $3.G := 3.U_6(2)$, von $2^2.G := 2^2.U_6(2)$, von $6.G := 6.U_6(2)$ und von $(2^2 \times 3).G := (2^2 \times 3).U_6(2)$ sind in der GAP-Bibliothek Tafeln $\text{tbl}(G)$, $\text{tbl}(2.G)$ und so weiter enthalten.

Auch sind in der Bibliothek Faktorfusionen zwischen den Tafeln gespeichert, jedoch sind die Fusionen $f_1 : (2^2 \times 3).G \rightarrow 3.G$, $f_2 : (2^2 \times 3).G \rightarrow 6.G$ und $f_3 : 6.G \rightarrow 3.G$ nicht kompatibel, das heißt es ist $f_1 \neq f_3 \circ f_2$. Daher wird f_1 durch $\tilde{f}_1 := f_3 \circ f_2$ ersetzt und insbesondere wird \tilde{f}_1 als Faktorfusion zwischen $\text{Cl}((2^2 \times 3).G)$ und $\text{Cl}(3.G)$ als Grundlage zur Bestimmung der zugehörigen Faktorfusionen der entsprechenden Untergruppen verwendet. Alle übrigen Faktorfusionen sind zueinander und zu \tilde{f}_1 kompatibel.

Name	Struktur	Index	in $2.U_6(2)$	in $3.U_6(2)$
U_1	$U_5(2)$	672	$2 \times U_5(2)$	$3 \times U_5(2)$
U_2	$2_+^{1+8} : U_4(2)$	693	$2.U_2$	$3 \times U_2$
U_3	$2^9 : L_3(4)$	891	$2.U_3$	$3.U_3$
U_4	$U_4(3) : 2_2$	1408	$2 \times U_4(3) : 2_2$	$3_1.U_4(3) : 2_2$
U_5	$U_4(3) : 2_2$	1408	$2.U_4(3) : 2_2$	$3_1.U_4(3) : 2_2$
U_6	$U_4(3) : 2_2$	1408	$2.U_4(3) : 2_2$	$3_1.U_4(3) : 2_2$
U_7	$2^{4+8} : \mathcal{S}_3 \times \mathcal{A}_5$	6237	$2.U_7$	$3 \times 2^{4+8} : \mathcal{S}_3 \times \mathcal{A}_5$
U_8	$S_6(2)$	6336	$2 \times S_6(2)$	$3 \times S_6(2)$
U_9	$S_6(2)$	6336	$2 \times S_6(2)$	$3 \times S_6(2)$
U_{10}	$S_6(2)$	6336	$2 \times S_6(2)$	$3 \times S_6(2)$
U_{11}	M_{22}	20736	$2 \times M_{22}$	$3.M_{22}$
U_{12}	M_{22}	20736	$2.M_{22}$	$3.M_{22}$
U_{13}	M_{22}	20736	$2.M_{22}$	$3.M_{22}$
U_{14}	$\mathcal{S}_3 \times U_4(2)$	59136	$2 \times \mathcal{S}_3 \times U_4(2)$	$3 \times \mathcal{S}_3 \times U_4(2)$
U_{15}	$3^{1+4}.[2^7.3]$	98560	$2.U_{15}$	$3.U_{15}$
U_{16}	$L_3(4) : 2_1$	98560	$2.L_3(4).2_1$	$3.L_3(4).2_1$

Name	in $6.U_6(2)$	in $2^2.U_6(2)$	in $(2^2 \times 3).U_6(2)$
U_1	$6 \times U_5(2)$	$2 \times 2 \times U_5(2)$	$2 \times 2 \times 3 \times U_5(2)$
U_2	$3 \times 2.U_2$	$2^2.U_2$	$3 \times 2^2.U_2$
U_3	$6.U_3$	$2^2.U_3$	$(3 \times 2^2).U_3$
U_4	$2 \times 3_1.U_4(3) : 2_2$	$2 \times 2.U_4(3) : 2_2$	$2 \times 6_1.U_4(3) : 2_2$
U_5	$6_1.U_4(3) : 2_2$	$2 \times 2.U_4(3) : 2_2$	$2 \times 6_1.U_4(3) : 2_2$
U_6	$6_1.U_4(3) : 2_2$	$2 \times 2.U_4(3) : 2_2$	$2 \times 6_1.U_4(3) : 2_2$
U_7	$3 \times 2.U_7$	$2^2.U_7$	$3 \times 2^2.U_7$
U_8	$6 \times S_6(2)$	$2 \times 2 \times S_6(2)$	$2 \times 2 \times 3 \times S_6(2)$
U_9	$6 \times S_6(2)$	$2 \times 2 \times S_6(2)$	$2 \times 2 \times 3 \times S_6(2)$
U_{10}	$6 \times S_6(2)$	$2 \times 2 \times S_6(2)$	$2 \times 2 \times 3 \times S_6(2)$
U_{11}	$2 \times 3.M_{22}$	$2 \times 2.M_{22}$	$2 \times 6.M_{22}$
U_{12}	$6.M_{22}$	$2 \times 2.M_{22}$	$2 \times 6.M_{22}$
U_{13}	$6.M_{22}$	$2 \times 2.M_{22}$	$2 \times 6.M_{22}$
U_{14}	$6 \times \mathcal{S}_3 \times U_4(2)$	$2 \times 2 \times \mathcal{S}_3 \times U_4(2)$	$2 \times 2 \times 3 \times \mathcal{S}_3 \times U_4(2)$
U_{15}	$6.U_{15}$	$2^2.U_{15}$	$(2^2 \times 3).U_{15}$
U_{16}	$6.L_3(4).2_1$	$2^2.L_3(4).2_1$	$(2^2 \times 3).U_{16}$

Tabelle 6.3: Maximale Untergruppen von $U_6(2)$ und ihre Erweiterungen

Weiterhin sind bei [Wil] von G und allen Schurschen Erweiterungen kompatible Erzeuger im Sinne des Verfahrens (4.10) vorhanden, die in GAP eingelesen werden können. Ebenfalls bei [Wil] gibt es bezüglich der Erzeuger von G Straight-Line-Programme zur Erzeuger aller maximalen Untergruppen von G .

Zur Bestimmung der Tafeln der maximalen Untergruppen von G ist nun ein erster Gedanke, mit dem Verfahren (4.10) eine Darstellung von $(2^2 \times 3).U$ zu gewinnen und von ihr mittels `CharacterTable` eine Charaktertafel zu berechnen. Dies ist jedoch sehr rechenaufwendig, so dass rechengünstigere Alternativen gefragt sind. Eine Möglichkeit besteht darin, mittels des Verfahrens (4.10) Darstellungen von $3.U$ und $6.U$ zu erzeugen und zunächst von diesen kleineren Gruppen die Tafeln zu berechnen. Anschließend können auf sie die Funktion `PossibleCharacterTablesOfTypeV4G` angewendet werden, um eine Tafel von $(2^2 \times 3).U$ zu erhalten. Hierbei kommt erneut die Analogie zu $O_8^+(2)$ zum Tragen, vergleiche die Betrachtungsweisen von \mathfrak{G} zu Beginn von Abschnitt 6.4.1 und die Ausführungen zu $O_8^+(2)$ in Abschnitt 6.3.2.

Dabei kann weiterer Rechenaufwand gespart werden, wenn anstatt der Tafel von $6.U$ lediglich eine Tafel von $2.U$ berechnet wird. Eine Tafel von $6.U$ kann dann wie in Abschnitt 5.3 beschrieben bestimmt werden. Siehe dazu auch das Vorgehen bei $O_7(3)$ in Abschnitt 6.1.4.

Oft geht es auch einfacher: Bei vielen Untergruppen – siehe die nachfolgenden konkreten Ausführungen zu den einzelnen Untergruppen oder die Tabelle 6.3 – kann theoretisch oder rechnerisch geschlossen werden, dass $3.U \cong 3 \times U$ gilt. Wegen Satz (2.1) ist dann $(2^2 \times 3).U \cong 3 \times 2^2.U$, und die Tafel kann als direktes Produkt der einzelnen Tafeln konstruiert werden, womit lediglich eine Tafel von $2^2.U$ berechnet werden muss.

Zur Bestimmung der zugehörigen Fusionen werden die Methoden aus Abschnitt 5.1 verwendet; ebenfalls treten Gemeinsamkeiten zu $O_8^+(2)$ und $O_7(3)$ auf. Bei den einzelnen Untergruppen wird der Vorgang erläutert.

Nun werden die konkreten Untergruppen betrachtet, wobei zunächst die vom Typ (a) aus Abschnitt 6.3.1 untersucht werden.

Die erste maximale Untergruppe $U_1 \leq U_6(2)$

Nach [CCN⁺03] ist $U_1 \cong U_5(2)$ einfach mit trivialem Multiplikator, so dass sich wegen Satz (2.5), Lemma (6.1)(b) und Satz (2.1) die Erweiterungen von U_1 wie in Tabelle 6.3 ergeben. Ihre Tafeln können leicht ermittelt werden, da eine Tafel von U_1 bereits in der GAP-Bibliothek archiviert ist, vergleiche die allgemeinen Erläuterungen in Abschnitt 5.1.

Aufwendiger ist es, die zugehörigen Fusionen zu bestimmen.

Eine Fusion $\text{fus}_{U_1}^G$ ist schon in der Bibliothek gespeichert. Aus einer Fusion $\text{Cl}(2 \times 2 \times 3 \times U_1) \longrightarrow \text{Cl}((2^2 \times 3).G)$ und den Faktorfusionen zwischen U_1 und seinen Erweiterungen ergeben sich analog zu den Ausführungen (a)(ii) in Abschnitt 5.1 alle weiteren Untergruppenfusionen, jedoch ist es sehr aufwendig, eine Fusion $\text{Cl}(2^2 \times 3 \times U_1) \longrightarrow \text{Cl}((2^2 \times 3).G)$ zu berechnen.

Daher wird schrittweise vorgegangen: Faktorfusionen $\text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{2 \times 2 \times U_1}$ und $\text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{3 \times U_1}$ ergeben sich durch Herausfaktorisieren der zentralen Untergruppen C_3 beziehungsweise $Z_1 \times Z_2$.

Wie in Abschnitt 5.1 ausgeführt und schon bei den bisherigen Beispielen gesehen, werden zunächst zu $\text{fus}_{U_1}^G$ kompatible Fusionen $\text{fus}_{3 \times U_1}^{3.G}$ und $\text{fus}_{2 \times 2 \times U_1}^{2^2.G}$ berechnet. Dadurch werden weitere Kompatibilitätsbedingungen an eine Fusion $\text{Cl}(2 \times 2 \times 3 \times U_1) \rightarrow \text{Cl}((2^2 \times 3).G)$ gestellt, so dass sie nun ermittelt werden kann. Es kann sogar gezeigt werden, dass sie durch $\text{fus}_{3 \times U_1}^{3.G}$ und $\text{fus}_{2 \times 2 \times U_1}^{2^2.G}$ bereits eindeutig festgelegt ist, vergleiche [Bre04a] und das Vorgehen zu Bestimmung einer Fusion $\text{fus}_{6.U}^{6.G}$ in Abschnitt 5.3, Seite 53.

Für Untergruppenfusionen $\text{Cl}(6 \times U_1) \rightarrow \text{Cl}(6.G)$ und $\text{Cl}(2 \times U_1) \rightarrow \text{Cl}(2.G)$ müssen zunächst Faktorfusionen $\text{Cl}(2 \times 2 \times 3 \times U_1) \rightarrow \text{Cl}(6 \times U_1)$ und $\text{Cl}(2 \times 2 \times 3 \times U_1) \rightarrow \text{Cl}(2 \times U_1)$ bestimmt werden. Dabei ergibt sich wie bei $O_8^+(2)$ das Problem, welche der Gruppen Z_i beziehungsweise $C_3 \times Z_i$ aus $2^2 \times 3 \times U_1$ herausfaktoriert werden soll: Die Bibliotheksfusion $\text{fus}_{(2^2 \times 3).G}^{6.G}$ bildet die beiden $(2^2 \times 3).G$ -Konjugiertenklassen [1, 2] auf die $6.G$ -Konjugiertenklassen mit dem Einselement ab. Ist x die $6.U_1$ -Konjugiertenklasse, die unter $\text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{(2^2 \times 3).G}$ auf die $(2^2 \times 3).G$ -Konjugiertenklasse 2 abgebildet wird, so erhält man die Faktorfusion $\text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{6 \times U_1}$, indem aus $\text{tbl}(2 \times 2 \times 3 \times U_1)$ die Klassen [1, x] herausfaktoriert werden. Damit ist analog zu den Abschnitten 3.1 und 3.2 die Fusion $\text{fus}_{6 \times U_1}^{6.G} : \text{Cl}(6 \times U_1) \rightarrow \text{Cl}(6.G)$ durch die Gleichung $\text{fus}_{6 \times U_1}^{6.G} \circ \text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{6 \times U_1} = \text{fus}_{(2^2 \times 3).G}^{6.G} \circ \text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{(2^2 \times 3).G}$ eindeutig bestimmt.

Eine Faktorfusion $\text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{2 \times U_1}$ ergibt sich aus der Verkettung der bereits ermittelten Fusion $\text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{2 \times 2 \times U_1}$ mit $\text{fus}_{2 \times 2 \times U_1}^{2 \times U_1}$. Letztere erhält man analog zu der Faktorfusion $\text{fus}_{2 \times 2 \times 3 \times U_1}^{6 \times U_1}$. Die übrigen Faktorfusionen ergeben sich ohne Probleme durch Faktorbildung nach den entsprechenden Untergruppen von M .

Damit sind alle Fragen zu U_1 beantwortet.

Die zweite maximale Untergruppe $U_2 \leq U_6(2)$

Nach [CCN⁺03] ist $U_4(2)$ einfach und $M(U_4(2)) \cong C_2$. Wegen Korollar (2.9) und Satz (2.1) ist daher $3.U_2 \cong 3 \times U_2$ beziehungsweise $(2^2 \times 3).U_2 \cong 3 \times 2^2.U_2$.

Mittels des Verfahrens (4.10) lässt sich wie bei vielen Untergruppen von $2.O_8^+(2)$ eine Darstellung von $2^2.U_2$ gewinnen; aus ihr kann eine Charaktertafel $\text{tbl}(2^2.U_2)$ berechnet werden.

Daraus ergibt sich auch eine Tafel von $3 \times 2^2.U_2$. Eine Faktorfusion $\text{fus}_{3 \times 2^2.U_2}^{2^2.U_2}$ kann wie gewohnt berechnet werden, jedoch ist $|Z(U_2)| = 24$, so dass zunächst nicht klar ist, welche der zentralen 2-Elemente von $3 \times 2^2.U_2$ die zu $Z_1 \times Z_2$ isomorphe Untergruppe bilden. Vergleiche hierzu den Punkt (b) in Abschnitt 5.1.

Allerdings genügt bei dieser Untergruppe die Fusion $\text{fus}_{2^2.U_2}^{2^2.G}$ (sie kann mit den Methoden aus 5.1 gewonnen werden), um eine Fusion $\text{fus}_{3 \times 2^2.U_2}^{(2^2 \times 3).G}$ zu berechnen; eine Fusion $\text{Cl}(3 \times U_2) \rightarrow \text{Cl}(3.G)$ ist nicht nötig.

Die $(3 \times 2^2.U_2)$ -Klassen, die unter $\text{fus}_{3 \times 2^2.U_2}^{(2^2 \times 3).G}$ auf diejenigen zentralen $(2^2 \times 3).G$ -Klassen abgebildet werden, deren Elemente Ordnung 2 haben, bilden mit dem Einselement die zu $Z_1 \times Z_2$ isomorphe Untergruppe.

Damit können, wie in Abschnitt 5.1 und wie bei U_1 beschrieben, alle weiteren Fusionen und Tafeln bestimmt werden. Es stellt sich heraus, dass sie alle noch nicht in der GAP-Bibliothek gespeichert sind.

Die dritte maximale Untergruppe $U_3 \leq U_6(2)$

Sämtliche Tafeln und Fusionen sind bereits bestimmt und in der Bibliothek vorhanden.

Die siebte maximale Untergruppe $U_7 \leq U_6(2)$

Mit dem Verfahren (4.10) können Darstellungen von $2^2.U_7$ und $3.U_7$ gewonnen werden, wobei sich $3.U_7 \cong 3 \times U_7$ zeigt. Da auch eine Tafel $\text{tbl}(2^2.U_7)$ berechnet werden kann, liegt die gleiche Situation wie bei U_2 vor. Es wird eine Tafel von $3 \times 2^2.U_7$ konstruiert. Nun ist jedoch $|Z(U_7)| = 12$ und folglich $Z(U_7) \cong M$, so dass beide Faktorfusionen $\text{fus}_{3 \times 2^2.U_7}^{2^2.U_7}$ und $\text{fus}_{3 \times 2^2.U_7}^{3.U_7}$ eindeutig aus $Z(U_7)$ bestimmt sind. Daher kann mit weniger Rechenaufwand als bei U_2 eine Fusion $\text{fus}_{3 \times 2^2.U_7}^{(2^2 \times 3).G}$ bestimmt werden, vergleiche die Ausführungen zu U_1 . Der Rest ist nun wieder analog zu U_2 beziehungsweise U_1 .

Die 14. maximale Untergruppe $U_{14} \leq U_6(2)$

Mit Hilfe von Verfahren (4.10) werden Darstellungen von $2.U_{14}$ und $3.U_{14}$ erzeugt, wobei sich $2.U_{14} \cong 2 \times U_{14}$ und $3.U_{14} \cong 3 \times U_{14}$ herausstellt. Wegen Lemma (6.1)(b) ist daher auch $2^2.U_{14} \cong 2 \times 2 \times U_{14}$. Somit verläuft alles Weitere analog zu U_1 .

Die 15. maximale Untergruppe $U_{15} \leq U_6(2)$

Eine Permutationsdarstellung von $(2^2 \times 3).U_{15}$ lässt sich durch das Verfahren (4.10) erzeugen. Nach *Burnside's $p^a q^b$ -Theorem*, siehe [Isa76], Theorem 3.10, sind U_{15} und die korrespondierenden Untergruppen in allen Erweiterungen von $U_6(2)$ auflösbar. Um für auflösbare Gruppen mittels **CharacterTable** eine Charaktertafel zu ermitteln, ist es vorteilhaft, mit einer polyzyklischen Präsentation der Gruppe zu rechnen. Nähere Informationen finden sich in [GAP05, Reference Manual, Chapter Pc Groups].

Die Permutationsdarstellung von $(2^2 \times 3).U_{15}$ wird daher entsprechend umgewandelt und anschließend kann in kurzer Zeit eine Tafel von $(2^2 \times 3).U_{15}$ berechnet werden. Man stellt fest, dass $(2^2 \times 3).U_{15}$ kein direktes Produkt ist.

Um eine Fusion $\text{Cl}((2^2 \times 3).U_{15}) \longrightarrow \text{Cl}((2^2 \times 3).G)$ zu bestimmen, gehe wieder schrittweise vor und bestimme analog zu oben zunächst Tafeln $\text{tbl}(3.U_{15})$ und $\text{tbl}(2^2.U_{15})$. Eine Fusion $\text{fus}_{3.U_{15}}^{3.G}$ kann ohne Probleme berechnet werden; jedoch gibt es zwei wesentlich verschiedene Fusionen $f_1, f_2 : \text{Cl}(2^2.U_{15}) \longrightarrow \text{Cl}(2^2.G)$.

Ähnlich wie bei der dreizehnten maximalen Untergruppe von $O_8^+(2)$, siehe Seite 75, kann versucht werden, mit Brauercharakteren eine der Fusionen f_1 und f_2 auszuschließen; auch hier wollen wir nur die Idee skizzieren: In der GAP-Bibliothek ist eine 3-modulare Brauercharaktertafel von $s := \text{tbl}(2^2.G)$ archiviert. Von $t := \text{tbl}(2^2.U_{15})$ kann eine 3-modulare Brauercharaktertafel berechnet werden. Die Brauercharaktertafel induzieren Abbildungen $\iota_s : \text{Cl}_{3'}(2^2.G) \longrightarrow \text{Cl}(2^2.G)$ sowie $\iota_t : \text{Cl}_{3'}(2^2.U_{15}) \longrightarrow \text{Cl}(2^2.U_{15})$. Mit GAP kann nun nachgerechnet werden, dass für $i \in \{1, 2\}$ eine Abbildung $f_{3'} : \text{Cl}_{3'}(2^2.U_{15}) \longrightarrow \text{Cl}_{3'}(2^2.G)$ mit $\iota_s \circ f_{3'} = f_i \circ \iota_t$ existiert, die die Eigenschaft hat, dass die Einschränkungen der irreduziblen 3-modularen Brauercharaktere von $2^2.G$ vermöge $f_{3'}$ irreduzible 3-modulare Brauercharaktere von $2^2.U_{15}$ sind.

Wäre dies für ein $i_0 \in \{1, 2\}$ nicht der Fall gewesen, so wäre f_{i_0} als Kandidat für die Fusion $\text{Cl}(2^2.U_{15}) \longrightarrow \text{Cl}(2^2.G)$ ausgeschieden. Mit diesem Ergebnis kann jedoch nicht zwischen f_1 und f_2 entschieden werden.

Ein anderer Versuch, eine Fusion $\text{Cl}(2^2.U_{15}) \longrightarrow \text{Cl}(2^2.G)$ zu bestimmen, verwendet, dass $2^2.U_{15}$ explizit als Untergruppe von $2^2.G$ vorliegt. (Sie kann sowohl über $(2^2 \times 3).U_{15}$ modulo der zentralen Untergruppe C_3 berechnet werden, als auch mit dem Verfahren (4.10) konstruiert werden.) Es können in der Darstellung von $2^2.G$ die Konjugiertenklassen von

$2^2.U_{15}$ und $2^2.G$ berechnet werden. Bestimme anschließend Konjugiertenklassenvertreter von $2^2.U_{15}$ und teste in welcher $2^2.G$ -Konjugiertenklasse sie liegen. Auf diese Weise erhält man eine Fusion f von $\text{Cl}(2^2.U_{15})$ nach $\text{Cl}(2^2.G)$, wobei es aber keine Zuordnung zwischen den Spalten der berechneten Tafel von $2^2.G$ und denen der Bibliothekstafel $\text{tbl}(2^2.G)$ gibt. Eine Idee ist nun, eine Tafel von $2^2.G$ zu berechnen und anschließend einen Tafelisomorphismus ϕ zwischen dieser Tafel und der Bibliothekstafel $\text{tbl}(2^2.G)$. Die Verknüpfung $\phi \circ f$ wäre dann eine gewünschte Fusion in Bezug auf die Bibliothekstafel $\text{tbl}(2^2.G)$. Das Problem ist jedoch, dass keine Tafel von $2^2.G$ berechnet werden konnte, so dass auch dieser Versuch im Rahmen der vorliegenden Arbeit erfolglos blieb und keine Fusion $\text{Cl}(2^2.U_{15}) \rightarrow \text{Cl}(2^2.G)$ ermittelt werden konnte.

Die 16. maximale Untergruppe $U_{16} \leq U_6(2)$

Mittels des Verfahrens (4.10) können von allen Urbildern von U_{16} Darstellungen und daraus Tafeln gewonnen werden. Dabei stellt man fest, dass von allen Erweiterungen außer $(2^2 \times 3).U_{16}$ Tafeln sowie die Fusion $\text{fus}_{U_{16}}^G$ schon in der GAP-Bibliothek enthalten sind; lediglich die übrigen Fusion sind noch zu bestimmen.

Dabei stößt man jedoch auf das gleiche Problem wie bei U_{15} ; während sich eine $\text{fus}_{U_{16}}^{3.G}$ eindeutig bis auf Operation von Tafelautomorphismen berechnen lässt, gibt es zwei wesentlich verschiedene Fusionen $\text{Cl}(2^2.U_{16}) \rightarrow \text{Cl}(2^2.G)$.

Wie bei U_{15} bleiben analoge Untersuchungen mit den in der GAP-Bibliothek archivierten 3-, 5- und 7-modularen Brauercharaktertafeln von $2^2.G$ beziehungsweise $2^2.U_{16}$ zur Auswahl der Fusionen erfolglos. Da wie schon bei U_{15} erwähnt, keine Tafel von $2^2.G$ berechnet werden konnte, konnte auch mit Hilfe der expliziten Darstellungen der Gruppen $2^2.U_{16}$ und $2^2.G$ keine zu der Bibliothekstafel $\text{tbl}(2^2.G)$ passende Fusion bestimmt werden, so dass auch in diesem Fall die Frage der Fusionen nicht entschieden werden konnte.

Betrachte nun die übrigen Untergruppen, die vom Typ (b) aus Abschnitt 6.4.1 sind: Sie lassen sich einteilen in drei Tripel von Untergruppen eines Isomorphietyps, die nicht zueinander konjugiert sind; ihre Urbilder in $(2^2 \times 3).U_6(2)$ werden durch α aufeinander abgebildet. Der von α induzierte Tafelautomorphismus $\hat{\alpha}$ ist nützlich zur Bestimmung der Fusionen, siehe Abschnitt 5.2.

Vergleiche wieder die analoge Situation bei $O_8^+(2)$ in Abschnitt 6.3.2, zu der es viele Parallelen gibt: Um $\hat{\alpha}$ rechnerisch zu erzeugen, bestimme mittels `AutomorphismsOfTable` die Tafelautomorphismen von $\text{tbl}((2^2 \times 3).G)$. Es gibt genau zwei zueinander inverse Tafelautomorphismen der Ordnung drei, so dass für $\hat{\alpha}$ einer von diesen ausgewählt werden kann. Für $6.U_6(2)$ und $2.U_6(2)$ existiert so ein Gruppenautomorphismus jedoch nicht. Dies kann, wie schon in Abschnitt 6.4.1 erwähnt, zur Folge haben, dass analog zu $O_8^+(2)$ die korrespondierenden Untergruppen eines Tripels in $6.U_6(2)$ und $2.U_6(2)$ unterschiedliche Struktur haben.

Der Spezialfall, der in Lemma (6.1) formuliert ist, leistet auch hier wertvolle Dienste.

Die drei Tripel werden nun genauer untersucht. Beginne mit dem mittlerem.

$$U_8 \cong U_9 \cong U_{10} \leq U_6(2)$$

Nach [CCN⁺03] ist $U_8 \cong S_6(2)$ einfach mit $M(S_6(2)) \cong C_2$, so dass $3.U_i \cong 3 \times U_i$ für $i = 8, 9, 10$ nach Satz (2.5) gilt.

Das Verfahren (4.10) benutzend, können wir Darstellungen der $2.U_i$ gewinnen, wobei $2.U_i \cong$

$2 \times U_i$ für $i = 8, 9, 10$ folgt. Wie in Abschnitt 6.4.1 bemerkt, sind die Untergruppen $2^2.U_i$ von $2^2.U_6(2)$ isomorph zueinander. Sei $2^2.U$ eine der Gruppen $2^2.U_i$. Nach Bemerkung (6.2) und Lemma (6.1)(b) sowie Satz (2.1) sind auch die übrigen Erweiterungen der U_i direkte Produkte. Insbesondere sind für alle Erweiterungen k die Tafeln $\text{tbl}(k.U_i)$ für alle $i = 8, 9, 10$ gleich; bezeichne einen Vertreter auch mit $\text{tbl}(k.U)$.

Bevor die zugehörigen Fusionen bestimmt werden, untersuche die Erweiterungen der beiden anderen Tripel.

$$U_{11} \cong U_{12} \cong U_{13} \leq U_6(2)$$

Es ist $U_i \cong M_{22}$ einfach mit $M(M_{22}) \cong C_{12}$ für $i = 11, 12, 13$. Mit Hilfe des Verfahrens (4.10) kann wie bei den vorherigen Beispielen hergeleitet werden, dass $2.U_{11} \cong 2 \times M_{22}$ gilt und die Erweiterungen $2.U_{12} \cong 2.U_{13} \cong 2.M_{22}$ sowie $3.U_i \cong 3.M_{22}$ für $i = 11, 12, 13$ Schursch sind. Daraus ergibt sich $6.U_{11} \cong 2 \times 3.U_{11}$ wie in Satz (2.8) und $6.U_{12} \cong 6.U_{13} \cong 6.M_{22}$ ist ebenfalls Schursch, da die korrespondierenden Erweiterungen in $2.U_6(2)$ und $3.U_6(2)$ Schursch sind. Nach Bemerkung (6.2) und Lemma (6.1)(b) folgt $2^2.U_i \cong 2 \times 2.M_{22}$. Indem Bemerkung (6.2) und Lemma (6.1)(b) auf die $3.U_i$ und $6.U_i$ angewandt wird, kann $(2^2 \times 3).U_i \cong 2 \times 6.M_{22}$ geschlossen werden.

Die Tafeln der Schurschen Erweiterungen sind dabei schon in der GAP-Bibliothek enthalten, während die Tafeln der direkte Produkte aus ihnen konstruiert werden können.

$$U_4 \cong U_5 \cong U_6 \leq U_6(2)$$

Analog zu dem Tripel U_{11}, U_{12}, U_{13} können die Tafeln der Erweiterungen der Gruppen U_4, U_5, U_6 bestimmt werden. Dabei stellt sich heraus, dass alle Tafeln außer $\text{tbl}((2^2 \times 3).U)$ bereits in der GAP-Bibliothek gespeichert sind.

Die zugehörigen Fusionen können bei den obigen drei Tripel prinzipiell nach einem Schema bestimmt werden, das im Folgenden angegeben wird. Dabei ist $U^1 \in \{U_4, U_8, U_{11}\}$, $U^2 \in \{U_5, U_9, U_{12}\}$ und $U^3 \in \{U_6, U_{10}, U_{13}\}$.

Die Fusion $\text{fus}_{U^1}^G$ ist in der Bibliothek gespeichert. Das weitere Vorgehen sieht wie folgt aus:

- (a) Berechne zu $\text{fus}_{U^1}^G$ kompatible Fusionen $\text{fus}_{3.U^1}^{3.G}$ sowie $\text{fus}_{2^2.U^1}^{2^2.G}$.
- (b) Mittels der Fusionen aus (a) bestimme die Fusion $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^1}^{(2^2 \times 3).G}$.
- (c) Wende $\hat{\alpha}$ an auf $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^1}^{(2^2 \times 3).G}$ und erhalte so Fusionen $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^2}^{(2^2 \times 3).G}$ und $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^3}^{(2^2 \times 3).G}$.
Vergleiche hierzu Abschnitt 5.2 und die analoge Situation bei $O_8^+(2)$, etwa Seite 76.
- (d) Die Faktorfusionen $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{2^2.U^i}$ und $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{3.U^i}$ sowie $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{U^i}$ sind für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ gleich, vergleiche die allgemeinen Beschreibungen in Abschnitt 5.2 sowie die entsprechende Lage bei $O_8^+(2)$, Seite 76.
Bestimme sie durch Herausfaktorieren der zugehörigen zentralen Untergruppen; vergleiche mit der Untergruppe U_1 sowie mit den Untergruppen von $O_8^+(2)$.

- (e) Aus $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^2}^{(2^2 \times 3).G}$ und $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^3}^{(2^2 \times 3).G}$, sowie den unter (d) gewonnenen Faktorfusionen, bestimme Untergruppenfusionen $\text{fus}_{k.U^2}^{k.G}$ und $\text{fus}_{k.U^3}^{k.G}$ für $k = 2^2, 3, 1$. Siehe hierzu Abschnitt 5.2.
- (f) Bestimme Untergruppenfusionen $\text{fus}_{6.U^i}^{6.G}$ und zugehörige Faktorfusionen $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{6.U^i}$. Dazu müssen die Klassen der Z_j aus $\text{tbl}((2^2 \times 3).U)$ herausfaktorisiert werden, wobei das Problem, für jedes i das passende Z_j zu finden, zu lösen ist. Vergleiche die analoge Frage mit einem Tripel von $O_8^+(2)$, Seite 76f. Da bei den Ausführungen zur Untergruppe U_1 ermittelt wurde, dass die $(2^2 \times 3).G$ -Konjugiertenklassen $[1, 2]$ unter der Bibliotheksfusion $\text{fus}_{(2^2 \times 3).G}^{6.G}$ auf die $6.G$ -Konjugiertenklassen mit dem Einselement abgebildet werden, kann analog zu $O_8^+(2)$ vorgegangen werden: Seien $[k_1, k_2, k_3]$ die Klassen innerhalb des Zentrums von $\text{tbl}((2^2 \times 3).U)$, deren Elemente Ordnung zwei haben. Da α auf $Z((2^2 \times 3).G)$ operiert, wird jedes k_l für $l \in \{1, 2, 3\}$ unter genau einer Fusion $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{(2^2 \times 3).G}$ auf die Klasse 2 in $\text{Cl}((2^2 \times 3).G)$ abgebildet. Mittels dieser Bijektion zwischen $\{\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{(2^2 \times 3).G}\}$ und $\{k_1, k_2, k_3\}$ definiere Tafeln $6t_i$, indem aus $\text{tbl}((2^2 \times 3).U^i)$ die Klassen $[1, k_l]$ herausfaktorisiert werden. Definiere weiter zugehörige Faktorfusionen $h_i := \text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{6t_i}$.
Gibt es bereits Tafeln $\text{tbl}(6.U^i)$ der Gruppen $6.U^i$, etwa Bibliothekstafeln oder Tafeln die als Konstruktion von direkten Produkten gebildet wurden, so bestimme noch mittels `TransformingPermutationsCharacterTables` Tafelisomorphismen $\phi_i : 6t_i \rightarrow \text{tbl}(6.U^i)$. Damit sind $\text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{6.U^i} := \phi_i \circ h_i$ die gesuchten Faktorfusionen gefunden. Existieren keine Bibliothekstafeln der $6.U^i$, so können die h_i für die Faktorfusionen gewählt werden.
Somit sind durch $\text{fus}_{6.U^i}^{6.G} \circ \text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{6.U^i} = \text{fus}_{(2^2 \times 3).G}^{6.G} \circ \text{fus}_{(2^2 \times 3).U^i}^{(2^2 \times 3).G}$ wie bei der Untergruppe $6.U_1$ die Untergruppenfusionen $\text{fus}_{6.U^i}^{6.G}$ eindeutig bestimmt.
- (g) Bestimme zueinander passende Fusionen $\text{fus}_{2.U^i}^{2.G}$ und $\text{fus}_{2^2.U^i}^{2.U^i}$. Dazu kann analog wie in (f) oder wie bei $O_8^+(2)$, Seite 76, vorgegangen werden.
- (h) Ermittle alle übrigen Faktorfusionen zwischen den Erweiterungen der U^i .

Bei allen Punkten, insbesondere bei (h), ist auf die Kompatibilität der einzelnen Fusionen zu achten. Daher ist gegebenenfalls das Einschalten von Tafelisomorphismen nötig, vergleiche die analoge Situation bei $O_8^+(2)$, etwa Seite 78.

Wie oben erwähnt, können bei allen drei Tripeln gemäß den Schritten (a) – (h) sämtliche Fusionen bestimmt werden, wobei bei den Untergruppen U_4, U_5, U_6 zu bemerken ist, dass viele Fusionen schon in der Bibliothek archiviert sind. Lediglich die Fusionen, die von $\text{Cl}((2^2 \times 3).U)$ ausgehen, sowie die Fusionen $\text{fus}_{2^2.U^i}^{2.G}$ für $i = 4, 5, 6$ sowie $\text{fus}_{k.U^i}^{k.G}$ für $k = 1, 3$ und $i = 5, 6$ und $\text{fus}_{k.U^6}^{k.G}$ für $k = 2, 6$ sind zu bestimmen. Die Rechnungen zeigen, dass nicht alle Bibliotheksfusionen beibehalten werden konnten, vergleiche Abschnitt 3.2. Es wurden die Fusionen $\text{fus}_{3.U_4}^{3.G}$, $\text{fus}_{6.U_5}^{6.G}$ und $\text{fus}_{2.U_5}^{2.G}$ ersetzt.

Damit sind alle Fragen zu den drei Tripeln beantwortet.

6.5 Weitere Gruppen

Zum Abschluss werden die übrigen Gruppen vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit untersucht wurden. Dabei wurden keine Techniken benutzt, die nicht auch schon bei den ausführlich behandelten Gruppen der vorherigen Abschnitte zur Anwendung kamen. Daher werden wie zuvor die erzielten Ergebnisse in Tabellenform präsentiert, jedoch wird auf weitere Erklärungen verzichtet.

Der Multiplikator beziehungsweise die Darstellungsgruppe ist jeweils in der letzten Spalte vermerkt. Für die Bezeichnung „ $\text{Ic}(\mathcal{S}_n)$ “ siehe die Ausführungen zur zehnten maximalen Untergruppe von $O_7(3)$, Seite 63.

Für die Gruppen in den Tabellen 6.4 bis 6.16 konnte das „Brute-Force“ Verfahren aus Abschnitt 3.1 verwendet werden; bei den übrigen Gruppen wurden die in dieser Arbeit vorgestellten weiterführenden Verfahren benutzt.

Tabelle 6.4: Maximale Untergruppen von \mathcal{A}_5 und $2.\mathcal{A}_5$

Untergruppen	Index	in $2.\mathcal{A}_5$
\mathcal{A}_4	5	$2.\mathcal{A}_5$
D_{10}	6	$2.D_{10}$
\mathcal{S}_3	10	$2.\mathcal{S}_3$

Tabelle 6.5: Maximale Untergruppen von $L_3(2)$ und $2.L_3(2)$

Untergruppen	Index	in $2.L_3(2)$
\mathcal{S}_4	7	$\text{Ic}(2.\mathcal{S}_4)$
\mathcal{S}_4	7	$\text{Ic}(2.\mathcal{S}_4)$
$7:3$	8	$2 \times 7:3$

Tabelle 6.6: Maximale Untergruppen von $L_2(11)$ und $2.L_2(11)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(11)$
\mathcal{A}_5	11	$2.\mathcal{A}_5$
\mathcal{A}_5	11	$2.\mathcal{A}_5$
$11:5$	12	$2 \times 11:5$
D_{12}	55	$2.D_{12}$

Tabelle 6.7: Maximale Untergruppen von $L_2(13)$ und $2.L_2(13)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(13)$
$13 : 6$	14	$(2 \times 13).6$
D_{14}	78	$2.D_{14}$
D_{12}	91	$2.D_{12}$
\mathcal{A}_4	91	$2.L_2(3)$

Tabelle 6.8: Maximale Untergruppen von $L_2(17)$ und $2.L_2(17)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(17)$
$17 : 8$	18	$(2 \times 17).8$
\mathcal{S}_4	102	$Ic(2.\mathcal{S}_4)$
\mathcal{S}_4	102	$Ic(2.\mathcal{S}_4)$
D_{18}	136	$2.D_{18}$
D_{16}	153	$2.D_{16}$

Tabelle 6.9: Maximale Untergruppen von $L_2(19)$ und $2.L_2(19)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(19)$
$19 : 9$	20	$2 \times 19 : 9$
\mathcal{A}_5	57	$2.\mathcal{A}_5$
\mathcal{A}_5	57	$2.\mathcal{A}_5$
D_{20}	171	$2.D_{18}$
D_{18}	190	$2.D_{16}$

Tabelle 6.10: Maximale Untergruppen von $L_2(23)$ und $2.L_2(23)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(23)$
$23 : 11$	24	$2 \times 23 : 11$
\mathcal{S}_4	253	$Ic(2.\mathcal{S}_4)$
\mathcal{S}_4	253	$Ic(2.\mathcal{S}_4)$
D_{24}	253	$2.D_{24}$
D_{22}	276	$2.D_{22}$

Tabelle 6.11: Maximale Untergruppen von $L_2(25)$ und $2.L_2(25)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(25)$
$5^2 : 12$	26	$(2 \times 5^2).12$
S_5	65	$Ic(2.S_5)$
S_5	65	$Ic(2.S_5)$
D_{26}	300	$2.D_{26}$
D_{24}	325	$2.D_{24}$

Tabelle 6.12: Maximale Untergruppen von $L_2(27)$ und $2.L_2(27)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(27)$
$3^3 : 13$	28	$2 \times 3^3 : 13$
D_{28}	351	$2.D_{28}$
D_{26}	378	$2.D_{26}$
A_4	819	$2.A_4$

Tabelle 6.13: Maximale Untergruppen von $L_2(29)$ und $2.L_2(29)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(29)$
$29 : 14$	30	$(2 \times 29).14$
A_5	203	$2.A_5$
A_5	203	$2.A_5$
D_{28}	351	$2.D_{28}$
D_{26}	378	$2.D_{26}$

Tabelle 6.14: Maximale Untergruppen von $L_2(31)$ und $2.L_2(31)$

Untergruppen	Index	in $2.L_2(31)$
$31 : 15$	32	$2 \times 31 : 15$
A_5	248	$2.A_5$
A_5	248	$2.A_5$
D_{32}	465	$2.D_{32}$
D_{30}	496	$2.D_{30}$
S_4	620	$Ic(2.S_4)$
S_4	620	$Ic(2.S_4)$

Tabelle 6.15: Maximale Untergruppen von \mathcal{A}_8 und $2.\mathcal{A}_8$

Untergruppen	Index	in $2.\mathcal{A}_8$
\mathcal{A}_7	8	$2.\mathcal{A}_7$
$2^3 : L_3(2)$	15	$2^{1+3} : L_3(2)$
$2^3 : L_3(2)$	15	$2^{1+3} : L_3(2)$
\mathcal{S}_6	28	$2.\mathcal{S}_6$
$2^4 : (\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3)$	35	$2.(2^4 : (\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3))$
$(\mathcal{A}_5 \times 3) : 2$	56	$(2.\mathcal{A}_5 \times 3).2$

Tabelle 6.16: Maximale Untergruppen von $U_4(2)$ und $2.U_4(2)$

Untergruppen	Index	in $2.U_4(2)$
$2^4 : \mathcal{A}_5$	27	$2.(2^4 : \mathcal{A}_5)$
\mathcal{S}_6	36	$2.\mathcal{S}_6$
$3_+^{1+2} : 2.\mathcal{A}_4$	40	$2 \times 3_+^{1+2} : 2.\mathcal{A}_4$
$3^3 : \mathcal{S}_4$	40	$(2 \times 3^3).\mathcal{S}_4$
$2.(\mathcal{A}_4 \times \mathcal{A}_4).2$	45	$2.(2.(\mathcal{A}_4 \times \mathcal{A}_4).2)$

Tabelle 6.17: Maximale Untergruppen von \mathcal{A}_6 , $2.\mathcal{A}_6$, $3.\mathcal{A}_6$ und $6.\mathcal{A}_6$

Untergruppen	Index	in $2.\mathcal{A}_6$	in $3.\mathcal{A}_6$	in $6.\mathcal{A}_6$
\mathcal{A}_5	6	$2.\mathcal{A}_5$	$3 \times \mathcal{A}_5$	$3 \times 2.\mathcal{A}_5$
\mathcal{A}_5	6	$2.\mathcal{A}_5$	$3 \times \mathcal{A}_5$	$3 \times 2.\mathcal{A}_5$
$3^2 : 4$	10	$(2 \times 3^2).4$	$3^{1+2} : 4$	$(2 \times 3^{1+2}).4$
\mathcal{S}_4	15	$Ic(2.\mathcal{S}_4)$	$3 \times \mathcal{S}_4$	$3 \times Ic(2.\mathcal{S}_4)$
\mathcal{S}_4	15	$Ic(2.\mathcal{S}_4)$	$3 \times \mathcal{S}_4$	$3 \times Ic(2.\mathcal{S}_4)$

Tabelle 6.18: Maximale Untergruppen von \mathcal{A}_7 , $2.\mathcal{A}_7$, $3.\mathcal{A}_7$ und $6.\mathcal{A}_7$

Untergruppen	Index	in $2.\mathcal{A}_7$	in $3.\mathcal{A}_7$	in $6.\mathcal{A}_7$
\mathcal{A}_6	7	$2.\mathcal{A}_6$	$3.\mathcal{A}_6$	$6.\mathcal{A}_6$
$L_3(2)$	15	$2.L_3(2)$	$3 \times L_3(2)$	$3 \times 2.L_3(2)$
$L_3(2)$	15	$2.L_3(2)$	$3 \times L_3(2)$	$3 \times 2.L_3(2)$
\mathcal{S}_5	21	$Ic(2.\mathcal{S}_5)$	$3 \times \mathcal{S}_5$	$3 \times Ic(2.\mathcal{S}_5)$
$(\mathcal{A}_4 \times 3) : 2$	35	$2.((\mathcal{A}_4 \times 3) : 2)^*$	$3.((\mathcal{A}_4 \times 3) : 2)^*$	$6.((\mathcal{A}_4 \times 3) : 2)^*$

Bei den Gruppen mit * handelt es sich um Schursche Erweiterungen von $(\mathcal{A}_4 \times 3) : 2$.

Tabelle 6.19: Maximale Untergruppen von $Sz(8)$, $2.Sz(8)$ und $2^2.Sz(8)$

Untergruppen	Index	in $2.Sz(8)$	in $2^2.Sz(8)$
$2^{3+3} : 7$	65	$2.(2^{3+3} : 7)$	$2^2.2^{3+3} : 7$
$13 : 4$	560	$2 \times 13 : 4$	$2^2 \times 13 : 4$
$5 : 4$	1456	$2 \times 5 : 4$	$2^2 \times 5 : 4$
D_{14}	2080	$2 \times D_{14}$	$2^2 \times D_{14}$

Tabelle 6.20: Maximale Untergruppen von $U_3(5)$ und $3.U_3(5)$

Untergruppen	Index	in $3.U_3(5)$
\mathcal{A}_7	50	$3.\mathcal{A}_7$
\mathcal{A}_7	50	$3.\mathcal{A}_7$
\mathcal{A}_7	50	$3.\mathcal{A}_7$
$5_+^{1+2} : 8$	126	$3 \times 5_+^{1+2} : 8$
$\mathcal{A}_6.2_3$	175	$3.\mathcal{A}_6.2_3$
$\mathcal{A}_6.2_3$	175	$3.\mathcal{A}_6.2_3$
$\mathcal{A}_6.2_3$	175	$3.\mathcal{A}_6.2_3$
$2.S_5$	525	$3 \times 2.S_5$

Tabelle 6.21: Maximale Untergruppen von \mathcal{A}_9 und $2.\mathcal{A}_9$

Untergruppen	Index	in $2.\mathcal{A}_9$
\mathcal{A}_8	9	$2.\mathcal{A}_8$
\mathcal{S}_7	36	$Ic(2.\mathcal{S}_7)$
$(\mathcal{A}_6 \times 3).2$	84	$2.(\mathcal{A}_6 \times 3).2$
$L_2(8) : 3$	120	$2 \times L_2(8) : 3$
$L_2(8) : 3$	120	$2 \times L_2(8) : 3$
$(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_4).2$	126	$2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_4).2$
$3^3 : \mathcal{S}_4$	280	$(2 \times 3^3).\mathcal{S}_4$
$3^2 : 2.\mathcal{A}_4$	840	$2 \times 3^2 : 2.\mathcal{A}_4$

Tabelle 6.22: Maximale Untergruppen von $S_6(2)$ und $2.S_6(2)$

Untergruppen	Index	in $2.S_6(2)$
$U_4(2) : 2$	28	$2.U_4(2).2$
\mathcal{S}_8	36	$Ic(2.\mathcal{S}_8)$
$2^5 : \mathcal{S}_6$	63	$2.(2^5 : \mathcal{S}_6)$
$U_3(3) : 2$	120	$2 \times U_3(3) : 2$
$2^6 : L_3(2)$	135	$2.(2^6 : L_3(2))$
$2.[2^6] : (\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3)$	315	$2.(2.[2^6] : (\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_3))$
$\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_6$	336	$2.\mathcal{S}_3 \times \mathcal{S}_6$
$L_2(8) : 3$	960	$2 \times L_2(8) : 3$

Tabelle 6.23: Maximale Untergruppen von \mathcal{A}_{10} und $2.\mathcal{A}_{10}$

Untergruppen	Index	in $2.\mathcal{A}_{10}$
\mathcal{A}_9	10	$2.\mathcal{A}_9$
\mathcal{S}_8	45	$Ic(2.\mathcal{S}_8)$
$(\mathcal{A}_7 \times 3).2$	120	$(2.\mathcal{A}_7 \times 3).2$
$(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5).2$	126	$2.(\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5).2$
$(\mathcal{A}_6 \times \mathcal{A}_4).2$	210	$2.(\mathcal{A}_6 \times \mathcal{A}_4).2$
$2^4 : \mathcal{S}_5$	945	$2^{1+4}.\mathcal{S}_5$
M_{10}	2520	$2 \times M_{10}$

Tabelle 6.24: Maximale Untergruppen von $L_3(7)$ und $3.L_3(7)$

Untergruppen	Index	in $3.L_3(7)$
$7^2 : 2.L_2(7) : 2$	57	$3 \times 7^2 : 2.L_2(7) : 2$
$7^2 : 2.L_2(7) : 2$	57	$3 \times 7^2 : 2.L_2(7) : 2$
$L_2(7) : 2$	5586	$3 \times L_2(7) : 2$
$L_2(7) : 2$	5586	$3 \times L_2(7) : 2$
$L_2(7) : 2$	5586	$3 \times L_2(7) : 2$
$(3 \times \mathcal{A}_4) : 2$	26068	$3.((3 \times \mathcal{A}_4) : 2)$
$3^2 : Q_8$	26068	$3.(3^2 : Q_8)$
$19 : 3$	32928	$3 \times 19 : 3$

Tabelle 6.25: Maximale Untergruppen von $G_2(3)$ und $3.G_2(3)$

Untergruppen	Index	in $3.G_2(3)$
$U_3(3) : 2$	351	$3 \times U_3(3) : 2$
$U_3(3) : 2$	351	$3 \times U_3(3) : 2$
$(3_+^{1+2} \times 3^2) : 2.S_4$	364	$3.(3_+^{1+2} \times 3^2) : 2.S_4$
$(3_+^{1+2} \times 3^2) : 2.S_4$	364	$3.(3_+^{1+2} \times 3^2) : 2.S_4$
$L_3(3) : 2$	378	$3 \times L_3(3) : 2$
$L_3(3) : 2$	378	$3 \times L_3(3) : 2$
$L_2(8) : 3$	2808	$3 \times L_2(8) : 3$
$2^3.L_3(2)$	3159	$3 \times 2^3.L_3(2)$
$L_2(13)$	3888	$3 \times L_2(13)$
$2_+^{1+4} : 3^2.2$	7371	$((3 \times 2_+^{1+4}).3^2).2$

Tabelle 6.26: Maximale Untergruppen von $G_2(4)$ und $2.G_2(4)$

Untergruppen	Index	in $2.G_2(4)$
J_2	416	$2.J_2$
$2^{2+8} : (3 \times \mathcal{A}_5)$	1365	$2.(2^{2+8} : (3 \times \mathcal{A}_5))$
$2^{4+6} : (3 \times \mathcal{A}_5)$	1365	$2.(2^{4+6} : (3 \times \mathcal{A}_5))$
$U_3(4) : 2$	2016	$2.(U_3(4) : 2)$
$3.L_3(4) : 2_3$	2080	$2.(3.L_3(4) : 2_3)$
$U_3(3) : 2$	20800	$2.(U_3(3) : 2)$
$\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$	69888	$2.\mathcal{A}_5 \times \mathcal{A}_5$
$L_2(13)$	230400	$2.L_2(13)$

Anhang A

Symbole

In dieser Arbeit seien

G eine endliche Gruppe,

G' die Kommutatorgruppe von G ,

$Z(G)$ das Zentrum von G ,

$\text{Cl}(G)$ die Menge der Konjugiertenklassen von G ,

$\text{Cl}_G(g)$ die Konjugiertenklasse in G mit dem Element g ,

$C_G(g)$ der Zentralisator des Elements oder der Untergruppe g in G ,

$N_G(H)$ der Normalisator der Untergruppe $H \leq G$ in G ,

$\text{Aut}(G)$ die Gruppe der Automorphismen von G ,

C_n oder einfach nur n die zyklische Gruppe der Ordnung n ,

\mathcal{S}_n die symmetrische Gruppe auf n Punkten,

\mathcal{A}_n die alternierende Gruppe auf n Punkten,

$A.B$ eine Gruppe mit einem Normalteiler isomorph zu A und zugehöriger Faktorgruppe isomorph zu B , wobei A und B beliebige endliche Gruppen seien,

\mathbb{C} die komplexen Zahlen,

\mathbb{N} die natürlichen Zahlen,

\mathbb{Z} die ganzen Zahlen,

\mathbb{P} die Menge der Primzahlen,

\mathbb{F}_q der endliche Körper mit q Elementen.

Literaturverzeichnis

- [Asc00] M. Aschbacher. *Finite group theory*, Band 10 aus *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 2000.
- [BN95] Thomas Breuer und Simon P. Norton. Improvements to the Atlas. *An Atlas of Brauer Characters, London Math. Soc. Monographs*, 11:297–327, 1995.
- [Bre04a] Thomas Breuer. Constructing Character Tables of Central Extensions in GAP. (www.math.rwth-aachen.de/~Thomas.Breuer/ctbllib/htm/ctocenex.htm), 2004.
- [Bre04b] Thomas Breuer. Using Table Automorphisms for Constructing Character Tables in GAP. (www.math.rwth-aachen.de/~Thomas.Breuer/ctbllib/doc/ctblcons.pdf), 2004.
- [CCN⁺03] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker und R. A. Wilson. *Atlas of finite groups (Nachdruck mit Korrekturen)*. Oxford University Press, Eynsham, 2003. Maximal subgroups and ordinary characters for simple groups, With computational assistance from J. G. Thackray.
- [CR90] Charles W. Curtis und Irving Reiner. *Methods of representation theory. Vol. I*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1990. With applications to finite groups and orders, Reprint of the 1981 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [GAP05] The GAP Group. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*, 2005. (www.gap-system.org).
- [Hup67] B. Huppert. *Endliche Gruppen. I*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 134. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [Isa76] I. Martin Isaacs. *Character theory of finite groups*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1976. Pure and Applied Mathematics, No. 69.
- [Kar87] Gregory Karpilovsky. *The Schur multiplier*, Band 2 aus *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1987.

- [KS98] Hans Kurzweil und Bernd Stellmacher. *Theorie der endlichen Gruppen*. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Eine Einführung.
- [Suz82] Michio Suzuki. *Group theory. I*, Band 247 aus *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1982. Translated from the Japanese by the author.
- [Wil] Robert A. Wilson. ATLAS of Finite Group Representations. (www.mat.bham.ac.uk/atlas/).
- [Wil96] Robert A. Wilson. Standard generators for sporadic simple groups. *J. Algebra*, 184(2):505–515, 1996.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.