

# Mögliche Brauer-Bäume

von

Natalie Naehrig

Diplomarbeit in Mathematik

vorgelegt der

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK, INFORMATIK UND  
NATURWISSENSCHAFTEN

der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen

im Juli 2002

angefertigt am

Lehrstuhl D für Mathematik  
Prof. Dr. G. Hiss



# Vorwort

*„Der Weg ist das Ziel.“*

Die vorliegende Arbeit setzt sich mit dem Thema „Mögliche Brauer-Bäume“ auseinander. Im ersten Teil der Arbeit habe ich mittels gruppentheoretischer Zugänge versucht, eine qualitative Einschränkung der möglichen Brauer-Bäume zu finden. Wie bereits in unveröffentlichten Untersuchungen von B. Külshammer hergeleitet, reicht es zur Untersuchung der möglichen Baumstrukturen, Automorphismen-Gruppen von quasi-einfachen Gruppen zu betrachten. Wegweisend für meine Annäherung an dieses Ergebnis war O. Düvels Dissertation.

Ganz zu Beginn untersuchte ich Feits Arbeit [Fei84], welche sich ebenfalls mit qualitativen Einschränkungen der möglichen Brauer-Bäume beschäftigt. Er kommt zu ähnlichen, ja sogar weitreichenderen Ergebnissen als B. Külshammer, wenngleich fast ausschließlich mit charaktertheoretischen Ansätzen. Beim Versuch der Aufarbeitung dieser Arbeit stellte sich allerdings heraus, dass einige Beweise der für die Arbeit wichtigen Lemmas nicht die Zustimmung eines Mathematikers finden können, aber auch nicht mit ähnlichen Ansätzen zu einem befriedigenden Abschluss führen. Dadurch leitete mich das Thema der Arbeit zu O. Düvels Dissertation.

Der zweite Teil der Arbeit ist eher von konstruktiver Natur; zu vorgegebenen Parametern wie beispielsweise der zu Grunde liegenden Primzahl  $l$ , der Anzahl  $f$  der Flügel oder der Anzahl der Kanten  $s$  bzw.  $t$  auf jedem Flügel wird eine Gruppe angegeben, die einen Block mit Brauer-Baum wie in Bild 1 hat.

Bezüglich der genauen Bezeichnungsweise und der Zusammenhänge der Parameter verweise ich auf die entsprechenden Abschnitte.

Abhängig von der Wahl der Parameter werden Erweiterungen von bestimmten klassischen Gruppen konstruiert, die einen Block mit gewünschtem Brauer-Baum haben. Dabei mussten unter anderem die Dimension des zu Grunde liegenden Vektorraums sowie die Charakteristik des zugehörigen Körpers bestimmt werden. Letztere Aufgabe konnte zu meiner Freude mittels des Primzahlsatzes von Dirichlet gelöst werden, verwoben sich hier doch in gewissem Maße verschiedene Gebiete der Mathematik, nämlich die Darstellungs- und Zahlentheorie.

Grundlage der Konstruktion der Gruppe waren vorwiegend Ergebnisse aus der

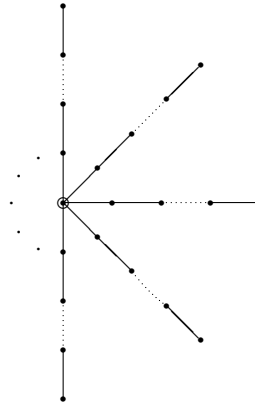


Bild 1

Arbeit [FS1]. Als Erweiterung der Konstruktionsaufgabe sollte nachher zusätzlich die Vielfachheit des exzeptionellen Knotens als weiterer Parameter vorgegeben werden. Diese Erweiterung der Konstruktionsaufgabe sowie deren Lösung wird in einem separaten Unterabschnitt behandelt, um den Weg der eigentlichen Lösung nicht von Beginn an mit weiteren Bedingungen einzuengen.

Der Übersicht wegen füge ich noch an, dass sich die Arbeit in zwei Kapitel, dem theoretischen und dem konstruktiven, gliedert. Dabei unterteilt sich das erste Kapitel nochmals in Abschnitte, das zweite in Abschnitte und zugehörige Unterabschnitte.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. G. Hiss, der mich zur Bearbeitung dieser Themen einlud und ohne dessen - oftmals zeitintensive - Hilfe viele Ansätze meinerseits hätten nicht zu Ende geführt werden können.

Weiterhin danke ich meinem Michael für seine fortwährende Unterstützung, Zuwendung und sein Verständnis, meinen Eltern für ihren steten Einsatz zur Hilfe in jeder Hinsicht, meinen Schwiegereltern für die „mittwöchlichen“ Babysitter-Stunden sowie allen jenen, die uns zur Seite standen. Ich komme zudem nicht umhin, mit einem Augenzwinkern meinem Sohn Lukas für sein intensives Nerven-, Gedulds- und Spieltraining zu danken, das mir nicht selten den Kopf für weitere Lösungsansätze oder Beweisideen frei machte.

Ich versichere, dass ich diese Diplomarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Wörtliche oder sinngemäße Wiedergaben aus diesen Quellen sind als solche kenntlich gemacht und durch Zitate belegt.

# Kapitel 1

## Theoretischer Teil

In diesem Teil der Arbeit werden wir uns mit der qualitativen Untersuchung aller möglichen Brauer-Bäume auseinandersetzen. Wesentliche Grundlage dafür wird Olaf Düvels Dissertation von 1997 bieten, weshalb auch im ersten einleitenden Abschnitt Definitionen und Ergebnisse daraus zusammengetragen werden.

### 1.1 Theoretische Grundlagen

Da sich Düvels Untersuchungen auf Gruppen bzw. Blöcke mit allgemeiner Defektgruppe beziehen, werden sich viele seiner Ergebnisse in unserer speziellen Situation der zyklischen Defektgruppen stark vereinfachen.

Die Grundvoraussetzungen für dieses Kapitel seien - falls nicht anders gesagt - die folgenden:

- (a)  $p \in \mathbb{P}$  sei eine Primzahl,
- (b)  $G$  sei eine endliche Gruppe,
- (c)  $(K, R, k)$  sei ein  $p$ -modulares Zerfällungssystem für  $G$ ,
- (d)  $B$  sei ein  $p$ -Block von  $G$  mit Defektgruppe  $P$ .

Beginnen wir nun mit den für uns relevanten Definitionen und Sätzen.

#### 1.1.1 Definition

- (a) Sind zwei  $p$ -Blöcke  $B_1$  und  $B_2$  (Morita-)äquivalent, so schreiben wir

$$B_1 \sim B_2.$$

- (b) Ein *Blocktripel* ist ein Tripel  $(G, P, B)$  bestehend aus einer endlichen Gruppe  $G$ , einer abelschen  $p$ -Untergruppe  $P$  und einem  $p$ -Block  $B$  mit Defektgruppe  $P$ .

- (c) Zwei Blocktripel  $(G, P, B)$  und  $(\tilde{G}, \tilde{P}, \tilde{B})$  heißen *äquivalent*, falls  $P \cong \tilde{P}$  und  $B \sim \tilde{B}$ .

### 1.1.2 Satz

Es seien  $G_1$  und  $G_2$  endliche Gruppen und  $B_i$  zu  $G_i$  gehörige  $p$ -Blöcke mit isomorphen zyklischen Defektgruppen. Zudem gelte

$$B_1 \sim B_2.$$

Dann sind die Brauer-Bäume von  $B_i$  gleich. Umgekehrt folgt aus der Gleichheit der Brauer-Bäume der beiden Blöcke deren Morita-Äquivalenz.

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus Remark 3.11 in [Li]. □

### 1.1.3 Definition und Bemerkung

- (a) Es sei  $O_{p'}(G) := \prod_{\substack{N \leq G \\ N \text{ ist } p'\text{-Gruppe}}} N$ , das Produkt aller  $p'$ -Normalteiler von  $G$ .
- (b) Den Durchschnitt über alle  $p$ -Sylowgruppen von  $G$  bezeichnen wir mit  $O_p(G)$ . Es gilt:  $O_p(G)$  ist eine charakteristische Untergruppe von  $G$  und der größte  $p$ -Normalteiler von  $G$ .
- (c) Das Produkt  $F(G) := \prod_{p \mid |G|} O_p(G)$  heißt die *Fitting-Gruppe von  $G$* . Sie ist der größte nilpotente Normalteiler von  $G$ . Insbesondere liegt das Zentrum  $Z(G)$  von  $G$  in  $F(G)$ .

### 1.1.4 Definition

- (a) Eine Gruppe  $G$  heißt *quasi-einfach*, falls sie perfekt ist (d.h. falls  $G' = G$  gilt) und falls  $G/Z(G)$  einfach ist.
- (b) Ein quasi-einfacher Subnormalteiler von  $G$  heißt *Komponente von  $G$* .
- (c) Das Produkt aller Komponenten  $L(G) := \prod_{\substack{S \leq G \\ S \text{ ist Komp.}}} S$  heißt der *Layer von  $G$* .
- (d) Die Gruppe  $F^*(G) := L(G)F(G)$  heißt die *verallgemeinerte Fitting-Gruppe von  $G$* .

### 1.1.5 Lemma

Ist  $O_{p'}(G) \leq Z(G)$ , so gilt  $F(G) = O_p(G) \times O_{p'}(G)$ .

**Beweis:** Vgl. [Duv, S. 51, Lemma 4.6]. □

Wir kommen nun zu einer für unsere Untersuchungen entscheidenden Definition.

**1.1.6 Definition**

Sei  $P$  eine abelsche  $p$ -Gruppe.

Mit  $\mathcal{T}(P)$  wird die Klasse von Blocktripeln  $(G, D, B)$  mit  $D \cong P$  und den folgenden Eigenschaften bezeichnet:

- (g1)  $F(G) = Z(G) = O_p(G) \times O_{p'}(G)$ .
- (g2)  $O_{p'}(G) \leq G'$ .
- (g3) Jede Komponente  $S$  von  $L(G)$  ist ein Normalteiler in  $G$ .
- (d1)  $G$  ist von den  $G$ -Konjugierten von  $D$  erzeugt.
- (d2) Für jede Komponente  $S$  von  $L(G)$  gilt

$$D \cap Z(S) \not\cong D \cap S. \quad (1)$$

Wie der folgende Satz zeigt, reicht es für die Untersuchung der möglichen Brauer-Bäume, Blocktripel mit ganz speziellen Eigenschaften zu betrachten.

**1.1.7 Satz**

Seien  $P$  eine abelsche  $p$ -Gruppe und  $(G_0, D_0, B_0)$  ein Blocktripel mit  $D_0 \cong P$ . Dann existiert ein zu  $(G_0, D_0, B_0)$  äquivalentes Blocktripel  $(G, D, B)$ , so dass für  $N := \langle {}^g D \mid g \in G \rangle$  und für einen von  $B$  überdeckten  $kN$ -Block  $b$  die Gruppe  $D$  eine Defektgruppe von  $b$  ist und das Blocktripel  $(N, D, b)$  in der Klasse  $\mathcal{T}(P)$  liegt.

**Beweis:** Vgl. [Duv, S. 58 ff, Satz 4.15]. □

Die wichtigsten Ideen des Beweises werden kurz in folgender Bemerkung beschrieben.

**1.1.8 Bemerkung**

Der Beweis der Existenz des speziellen Blocktripels in Satz 1.1.7 gelingt, indem man unter allen zu  $(G_0, D_0, B_0)$  äquivalenten ein solches Blocktripel  $(G, D, B)$  mit minimalem Index  $|G : O_p(G)Z(G)|$  wählt. Für  $N := \langle {}^g D \mid g \in G \rangle$  gelten dann - mit den Bezeichnungen für  $B$  und  $b$  des Satzes 1.1.7 - die folgenden Eigenschaften:

- (a) Für jedes  $g \in G$  ist  ${}^g D$  eine Defektgruppe von  $b$ , weswegen

$$\{{}^g D \mid g \in G\} = \{{}^n D \mid n \in N\} \text{ gilt.}$$

- (b)  $O_p(G) = O_p(N) \leq Z(N)$ .
- (c)  $O_{p'}(G) \leq Z(G)$ .
- (d)  $O_{p'}(N) \leq Z(N) \cap N'$ .
- (e)  $F(N) = O_p(N) \times O_{p'}(N)$  und  $F(G) = O_p(G) \times O_{p'}(G)$ .

(f)  $L(G) = L(N)$  und jede Komponente von  $N$  ist ein Normalteiler von  $N$ .

**Beweis:**

(a) Vgl. [Duv, S. 60, Beweispunkt b.).

(b) Vgl. [Duv, S. 60, Beweispunkt c.).

(c) Vgl. [Duv, S. 60, Beweis zu d.).

(d) Vgl. [Duv, S. 60, Beweispunkt d.).

(e) Vgl. [Duv, S. 60 f, Beweispunkt e.) und zugehöriger Beweis].

(f) Folgt mit (c), (d) und [Duv, S. 51, Lemma 4.6].

(g) Vgl. [Duv, S. 60, Beweispunkt g.). □

## 1.2 Mögliche Brauer-Bäume

Die Grundvoraussetzungen seien die gleichen wie im letzten Abschnitt. Zudem sei die betrachtete Defektgruppe  $P$  von nun an stets zyklisch.

Wir fixieren ein beliebiges Blocktripel  $(G_0, D_0, B_0)$  mit  $D_0 \cong P$  und wählen ein dazu äquivalentes Blocktripel  $(G, D, B)$ , das die Eigenschaften von Satz 1.1.7 erfüllt und für das der Index  $|G : O_p(G)Z(G)|$  minimal ist. Auch hier bezeichnen wir - wie im vorherigen Abschnitt - mit  $N$  den Normalteiler

$$N := \langle {}^g D \mid g \in G \rangle$$

und mit  $(N, D, b)$  ein Blocktripel in der Klasse  $\mathcal{T}(P)$ . Den Normalteiler  $N$  wollen wir im Folgenden näher untersuchen und einige seiner gruppentheoretischen Eigenschaften ableiten.

### 1.2.1 Lemma

Für jede Komponente  $S$  von  $N$  gilt:

$$O_p(S) \leq O_p(N) \leq D.$$

Insbesondere sind auch  $O_p(S)$  und  $O_p(N)$  zyklische  $p$ -Gruppen.

**Beweis:** Die Untergruppe  $O_p(S)$  ist charakteristisch in  $S$ ; letztere ist wiederum nach Bemerkung 1.1.8 (f) ein Normalteiler in  $N$ . Damit ist  $O_p(S)$  ein (nilpotenter) Normalteiler in  $N$  und muss folglich in der Fitting-Gruppe  $F(N)$  enthalten sein. Dann folgt aber aus Bemerkung 1.1.8(e)

$$O_p(S) \leq O_p(N).$$

Da  $D$  eine Defektgruppe eines  $kN$ -Blockes ist, muss sie den Normalteiler  $O_p(N)$  enthalten, so dass die gewünschte Inklusion gilt. □



**1.2.2 Lemma**

Für jede Komponente  $S$  von  $N$  gilt:

$$O_p(N) \cap S \leq D \cap Z(S).$$

Wegen der Eigenschaft (d2) in Definition 1.1.6 gilt damit insbesondere

$$O_p(N) \cap S \leq D \cap S.$$

**Beweis:** Betrachte die folgenden Inklusionen

$$\begin{aligned} S \cap O_p(N) &\stackrel{\text{La 1.2.1}}{=} S \cap (O_p(N) \cap D) \\ &= S \cap O_p(N) \cap D \\ &\stackrel{(g1) \text{ in Def 1.1.6}}{\leq} (S \cap Z(N)) \cap D \\ &\leq Z(S) \cap D \\ &\stackrel{(d2) \text{ in Def 1.1.6}}{\leq} S \cap D. \end{aligned}$$

□

**1.2.3 Lemma**

Für jede Komponente  $S$  von  $N$  gilt:

$$Z(N) \not\leq D \cap Z(N)S.$$

**Beweis:** Sei  $x \in (D \cap S) \setminus (O_p(N) \cap S)$  (dieses Element existiert nach Lemma 1.2.2). Insbesondere gilt  $x \in D \cap Z(N)S$  und  $x$  ist ein  $p$ -Element.

Jedoch liegt  $x$  nicht in  $Z(N)$ ; dazu nehmen wir an

$$x \in Z(N) \stackrel{(g1) \text{ in Def 1.1.6}}{=} O_p(N) \times O_{p'}(N).$$

Da  $Z(N)$  eine abelsche Gruppe ist und damit  $O_p(N)$  aus den  $p$ -Elementen von  $Z(N)$  besteht, gilt:

$$x \in O_p(N). \tag{2}$$

Andererseits liegt  $x$  nach Wahl in  $S$ , aber nicht in  $O_p(N) \cap S$ , was aber ein Widerspruch zu (2) ist. □

Mit dem vorausgehenden Lemma haben wir die nötigen Hilfsmittel bereitgestellt, um ein wichtiges Strukturmerkmal von  $N$  zu beweisen:

**1.2.4 Satz**

Die Gruppe  $N$  besitzt nur eine Komponente, die wir im Folgenden mit  $S$  bezeichnen.

**Beweis:** Seien  $S_1, \dots, S_l$  die verschiedenen Komponenten von  $N$  und

$$x_i \in (D \cap Z(N)S_i) \setminus Z(N) \text{ f\"ur } 1 \leq i \leq l$$

(diese Elemente existieren nach Lemma 1.2.3).

Betrachte nun

$$\bar{1} \neq \bar{x}_i := x_i Z(N) \in N/Z(N) \text{ f\"ur } 1 \leq i \leq l.$$

Nach Wahl gilt zudem:

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &\in DZ(N)/Z(N) =: \bar{D} \\ \text{und } \bar{x}_i &\in S_i Z(N)/Z(N) =: \bar{S}_i. \end{aligned} \quad (3)$$

Beachte au\sserdem, dass  $\bar{D}$  eine zyklische  $p$ -Gruppe ist. Andererseits gilt:

$$F^*(N)/Z(N) = \bar{S}_1 \times \dots \times \bar{S}_l.$$

(Die letzte Beziehung findet man zum Beispiel in [Duv, S. 58, Beweis zu Lemma 4.13(ii)].)

Da  $\bar{D}$  eine zyklische Gruppe ist, folgt  $l = 1$  und damit die Behauptung.  $\square$

Mit dem Ergebnis des letzten Satzes erhalten wir schlie\sslich eine weitere strukturelle Eigenschaft von  $N$ .

### 1.2.5 Satz

Es gilt  $O_p(N) \leq S$ .

**Beweis:** Wir nehmen an, dass

$$O_p(N) \cap S \not\leq O_p(N) \quad (4)$$

gilt.

Nach Lemma 1.2.2 gilt zudem:

$$O_p(N) \cap S \leq D \cap S \leq D. \quad (5)$$

Betrachte nun die zyklische  $p$ -Gruppe

$$\{\bar{1}\} \neq \bar{D} := D/O_p(N) \cap S.$$

Da die Gruppe  $O_p(N)/O_p(N) \cap S \leq \bar{D}$  nach (4) nicht die triviale Gruppe ist, existiert ein Element

$$x \in O_p(N) \setminus (O_p(N) \cap S) = O_p(N) \setminus S, \quad (6)$$

so dass  $\bar{x} := x(O_p(N) \cap S) \in \bar{D}$  die eindeutig bestimmte Untergruppe  $\bar{U} \leq \bar{D}$  der Ordnung  $p$  erzeugt. Beachte: Wegen (6) gilt

$$x \notin S. \quad (7)$$

Wegen (5) ist auch  $D \cap S/O_p(N) \cap S$  eine nichttriviale Untergruppe von  $\bar{D}$ , so dass

$$\bar{U} \leq D \cap S/O_p(N) \cap S$$

gilt und folglich  $\bar{x}$  in  $D \cap S/O_p(N) \cap S$  liegt. Damit liegt  $x$  in  $D \cap S$ , insbesondere also in  $S$ , was in Widerspruch zu (7) steht.  $\square$

Wir haben gezeigt, dass  $O_p(N)$  in der einzigen Komponente  $S$  von  $N$  liegt, so dass  $O_p(N) = O_p(S) \leq S$  wegen Bemerkung 1.1.8(f) gilt. Nach 1.1.8(b) ist  $O_p(G) = O_p(N)$ , also können wir einen wichtigen Schluß von  $S$  auf  $G$  ziehen:

$$O_p(G) = O_p(N) = O_p(S) \leq S. \quad (8)$$

Wir finden noch weitere Verknüpfungen zwischen  $G$  und  $S$ , wie der folgende Satz zeigt:

### 1.2.6 Satz

Es gilt:

- (a)  $F^*(G) = SO_{p'}(G)$ .
- (b)  $C_G(S) = C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$ .
- (c)  $C_G(S) = Z(G)Z(S)$ .

**Beweis:** Es gilt nach Bemerkung 1.1.8(c) und (e):

$$\begin{aligned} O_{p'}(G) &\leq Z(G), \\ F(G) &= O_p(G) \times O_{p'}(G). \end{aligned} \quad (9)$$

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} F^*(G) &= F(G)L(G) \\ &= F(G)S \\ &\stackrel{(9)}{=} O_p(G)O_{p'}(G)S \\ &\stackrel{(8)}{=} O_{p'}(G)S. \end{aligned}$$

(b) Die Komponente  $S$  ist nach Definition eine Untergruppe von  $F^*(G)$ , so dass die Inklusion

$$C_G(F^*(G)) \leq C_G(S)$$

sofort folgt. Seien nun  $g \in C_G(S)$  und  $y \in F^*(G)$  beliebig. Nach Teil (a) dieses Satzes existieren ein  $s \in S$  und  $\rho \in O_{p'}(G)$  mit  $y = s\rho$ . Wir zeigen nun, dass  $g$  das Element  $y$  zentralisiert:

$$\begin{aligned} gyg^{-1} &= gs\rho g^{-1} \\ &\stackrel{\rho \in Z(G)}{=} gsg^{-1}\rho \\ &\stackrel{g \in C_G(S)}{=} s\rho = y. \end{aligned}$$

Die Inklusion  $C_G(F^*(G)) \leq F^*(G)$  ist allgemeingültig; einen Beweis dazu findet man beispielsweise in [KSt, S. 130, Satz 6.5.8].

- (c) Berücksichtigt man, dass jeweils  $Z(G)$  in  $F(G)$  und nach (9)  $O_{p'}(G)$  in  $Z(G)$  liegt, so können wir Teil (a) dieses Satzes auch in der Form

$$F^*(G) = Z(G)S$$

schreiben. Also können wir mit Teil (b) folgern:

$$C_G(S) \leq F^*(G) = Z(G)S.$$

Das bedeutet, dass jedes Element  $x$  aus dem Zentralisator von  $S$  in  $G$  von der Form  $x = zs$  für ein  $z \in Z(G)$  und ein  $s \in S$  ist. Jetzt überprüfen wir in der anderen Richtung, wann ein Element der Form  $zs \in Z(G)S$  im Zentralisator von  $S$  in  $G$  liegt:

$$\begin{aligned} (zs)x(zs)^{-1} &= x \text{ für alle } x \in S \\ \iff zsx s^{-1} z^{-1} &= x \text{ für alle } x \in S \\ \iff sxs^{-1} &= x \text{ für alle } x \in S \\ \iff s &\in C_S(S) = Z(S). \end{aligned}$$

□

Nach all diesen strukturellen Untersuchungen lenken wir den Blick nun in eine andere Richtung und schauen uns die kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow Z(G) \rightarrow G \rightarrow G/Z(G) \rightarrow 1$$

an. Wegen des letzten Satzes 1.2.6 hat der Epimorphismus

$$\begin{aligned} \pi : G/Z(G) &\rightarrow G/C_G(S) \\ gZ(G) &\mapsto gC_G(S) \end{aligned}$$

den Kern

$$C_G(S)/Z(G).$$

Wegen Satz 1.2.6(c) ist der Kern folglich  $Z(G)Z(S)/Z(G)$ , was isomorph zu  $Z(S)/Z(G) \cap Z(S)$  ist.

Nun ist leicht zu sehen, dass  $S$  als charakteristische Untergruppe von  $N$  ein Normalteiler in  $G$  ist, so dass  $G = N_G(S)$  gilt. Damit finden wir letztlich die Einbettung

$$N_G(S)/C_G(S) = G/C_G(S) \hookrightarrow \text{Aut}(S).$$

Zusammengefasst haben wir also

$$G/Z(G) \xrightarrow{\pi} G/C_G(S) \hookrightarrow \text{Aut}(S). \quad (10)$$

Kommen wir nun zurück auf das Thema unseres ursprünglichen Interesses: Welche Brauer-Bäume sind möglich? Erinnern wir uns: Wir haben mit einem beliebigen Blocktripel  $(G_0, D_0, B_0)$  begonnen, also mit einem Block und bekanntem Brauer-Baum. Unter allen Blocktripeln haben wir ein ganz spezielles ausgewählt, ohne den Brauer-Baum oder die zum entsprechenden Block gehörige Defektgruppe (bis auf Isomorphie) zu verändern. Schließlich haben wir in (10) festgestellt, dass ein bedeutender struktureller Zusammenhang zwischen  $G$  und der Automorphismengruppe seiner (einzigen) quasi-einfachen Gruppe besteht. Was müssen wir folglich tun, um Aussagen über die möglichen Brauer-Bäume treffen zu wollen? Wir schauen uns die Brauer-Bäume der Blöcke von Automorphismen-Gruppen von quasi-einfachen Gruppen an. Einschränkungen in den Möglichkeiten für diese Gruppen bedeuten dann auch Einschränkungen für Brauer-Bäume der Blöcke in beliebigen Gruppen.

An dieser Stelle möchte ich bemerken, dass dieses Ergebnis bereits in unveröffentlichten Arbeiten von B. Külshammer hergeleitet wurde. Auch Feit beschäftigt sich in der Arbeit [Fei84] mit der Frage der möglichen Brauer-Bäume, wenngleich seine Ansätze nicht gruppen- sondern charaktertheoretisch sind. Damit versucht er die Anzahl der möglichen Kanten eines beliebigen Brauer-Baums, der nicht eine Entfaltung eines reellen Stamms ist, auf 248 zu beschränken. Allerdings finden einige Beweisschlüsse in den vorbereitenden Lemmas nicht meine Zustimmung.



# Kapitel 2

## Konstruktiver Teil

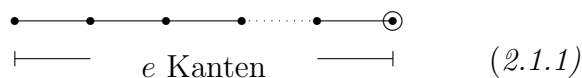
### 2.1 Der gleichmäßige Stern

#### 2.1.1 Konstruktionsaufgabe

Ziel dieses Kapitels ist die Konstruktion einer Gruppe, die zu gegebener Primzahl  $l$  einen  $l$ -Block mit Brauer-Baum in Sternform mit gleich vielen Kanten auf jedem Strahl hat. Dabei sollen die Anzahl der Strahlen  $f$  und die Anzahl  $e$  der Kanten auf jedem Strahl natürliche Zahlen sein, die der einzigen Bedingung  $e \cdot f \mid l - 1$  genügen müssen.

Ohne Einschränkung sei  $l$  stets ungerade, da wir sonst nur Bäume in Hantel-Form mit einer Kante und einem Flügel betrachten können (die Anzahl der Kanten eines Brauer-Baums teilt nach [Fei82, S. 270] den Term  $l - 1$ ).

Die Idee zur Lösung ist, zunächst eine passende Gruppe zu suchen, die einen  $l$ -Block mit zugehörigem Brauer-Baum von folgender Gestalt hat:



Dabei sitzt an einem (hier dem rechten) Ende der exzeptionelle Knoten.

Anschließend konstruieren wir eine passende semidirekte Erweiterung der Gruppe, so dass der reelle Stamm wie in Bild (2.1.1) am exzeptionellen Knoten zu einem Stern aufklappt.

Aus der Arbeit von Fong und Srinivasan [FS2] wissen wir, dass der Hauptblock von  $GL(V)$  mit einem  $e$ -dimensionalen  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraum  $V$  einen Brauer-Baum von der Gestalt (2.1.1) hat.

Bevor wir dieses Ergebnis weiter verfolgen, müssen wir im nächsten Unterabschnitt die nötige theoretische Grundlage schaffen und zitieren dazu wichtige Ergebnisse aus der Darstellungstheorie.

## 2.1.2 Theoretische Grundlagen

### 2.1.1 Satz (Erster Hauptsatz der Blocktheorie, Brauer-Korrespondenz)

Seien  $\tilde{G}$  eine endliche Gruppe,  $l \in \mathbb{P}$  eine Primzahl und  $D$  eine  $l$ -Untergruppe von  $\tilde{G}$ . Dann existiert eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller  $l$ -Blöcke von  $\tilde{G}$  mit Defektgruppe  $D$  und der Menge aller  $l$ -Blöcke des Normalisators  $N_{\tilde{G}}(D)$  von  $D$  in  $\tilde{G}$  mit Defektgruppe  $D$ :

$$\begin{array}{c} \{B \mid B \text{ ist } l\text{-Block von } \tilde{G} \text{ mit Defektgruppe } D\} \\ \uparrow 1 - 1 \\ \{b \mid b \text{ ist } l\text{-Block von } N_{\tilde{G}}(D) \text{ mit Defektgruppe } D\}. \end{array}$$

**Beweis:** Vgl. [Fei82, S. 137]. □

In Anlehnung an die Bezeichnung aus [BBB, S. 37] werden wir den Begriff der Trägheitsgruppe einführen.

### 2.1.2 Definition

Sei  $N$  ein Normalteiler in  $G$ . Dann operiert  $G$  auf den Blöcken  $b$  von  $N$  durch Konjugation. Die Untergruppe  $T_G(b) := \{g \in G \mid b^g = b\}$  von  $G$  heißt die *Trägheitsgruppe von  $b$* .

### 2.1.3 Definition und Bemerkung

Seien  $G$  eine endliche Gruppe,  $D$  eine  $l$ -Gruppe in  $G$ , so dass bereits  $G = DC_G(D)$  gelte. Weiterhin sei  $B$  ein  $l$ -Block von  $G$  mit Defektgruppe  $D$ . Dann liegt in  $B$  genau ein irreduzibler gewöhnlicher Charakter  $\chi_k$ , dessen Kern die Gruppe  $D$  enthält. Dieser Charakter  $\chi_k$  heißt *kanonischer Charakter von  $B$* .

**Beweis:** Vgl. [Fei82, S. 204 ff, Cor V 4.6]. □

Spezialisierungen in obigem Satz erlauben uns die Formulierung des erweiterten ersten Hauptsatzes der Brauer-Korrespondenz.

### 2.1.4 Satz

Seien  $\tilde{G}$  eine endliche Gruppe,  $D$  eine abelsche  $l$ -Untergruppe von  $\tilde{G}$  mit  $D \trianglelefteq \tilde{G}$  (damit ist  $D$  eine Untergruppe des Zentralisators  $C_{\tilde{G}}(D)$  von  $D$  in  $\tilde{G}$ ). Es gelte außerdem  $l \nmid |C_{\tilde{G}}(D)/D|$ . Dann gelten folgende Aussagen.

- (a) Die Gruppe  $D$  ist eine Defektgruppe von jedem  $l$ -Block von  $C_{\tilde{G}}(D)$ .
- (b) Die Gruppe  $\tilde{G}$  operiert auf der Menge aller  $l$ -Blöcke von  $C_{\tilde{G}}(D)$  durch Konjugation.



- (c) Die Menge aller  $l$ -Blöcke von  $C_{\tilde{G}}(D)$  steht in Bijektion zu der Menge aller gewöhnlichen Charaktere von  $C_{\tilde{G}}(D)/D$ :

$$\{\beta \mid \beta \text{ ist ein } l\text{-Block von } C_{\tilde{G}}(D)\} \xrightarrow{1-1} \text{Irr}(C_{\tilde{G}}(D)/D).$$

Die Bijektion ist gegeben durch die Abbildung, die  $\beta$  auf den (eindeutig bestimmten) kanonischen Charakter von  $\beta$  abbildet.

- (d) Die Menge aller  $l$ -Blöcke von  $\tilde{G}$  steht in Bijektion zu der Menge aller Bahnen von  $\tilde{G}$  auf  $\text{Irr}(C_{\tilde{G}}(D)/D)$ :

$$\{B \mid B \text{ ist } l\text{-Block von } \tilde{G}\} \xrightarrow{1-1} \{\text{Bahnen von } \tilde{G} \text{ auf } \text{Irr}(C_{\tilde{G}}(D)/D)\}.$$

**Beweis:**

- (a) Wegen  $l \nmid |C_{\tilde{G}}(D)/D|$  kann die betrachtete Defektgruppe nicht größer sein. Andererseits ist  $D$  nach Voraussetzung ein Normalteiler in  $\tilde{G}$ , insbesondere also auch in  $C_{\tilde{G}}(D) \leq \tilde{G}$ . Nach [Fei82, S. 127, Cor III 6.9] ist  $D$  in jeder  $l$ -Defektgruppe von  $C_{\tilde{G}}(D)$  enthalten.
- (b) Klar, da unter obigen Voraussetzungen  $C_{\tilde{G}}(D)$  ein Normalteiler in  $\tilde{G}$  ist.
- (c) Vgl. [Fei82, S. 204, Lemma V 4.5].
- (d) Mit (b), (c) und Theorem 15.1 (5) in [Alp] folgt die Behauptung.  $\square$

Wir fixieren nun eine beliebige endliche Gruppe  $G$ . Im Folgenden betrachten wir im Zusammenhang mit dem Hauptsatz weitere Spezialisierungen; wir fügen nämlich die Voraussetzung  $D \leq G$  sei zyklisch und eine  $l$ -Sylowgruppe von  $G$  hinzu. Insbesondere sind dann die Voraussetzungen des erweiterten Hauptsatzes 2.1.4 mit  $\tilde{G} = N_G(D)$  erfüllt. Wir können also den Hauptsatz anwenden und erhalten folgende Situation:

- Nach Definition ist  $D$  ein Normalteiler in  $\tilde{G}$ .
- Ebenso klar sind folgende Mengengleichheiten:

$$N_{\tilde{G}}(D) = N_G(D)$$

und

$$C_{\tilde{G}}(D) = C_G(D).$$

- Wegen des Satzes von Schur-Zassenhaus (vgl. zum Beispiel [KSt, S. 112 f, Satz 6.2.1] besitzt  $D$  ein Komplement  $L$  in  $C_G(D)$ :

$$C_G(D) = D \times L. \tag{1}$$

Es gilt also die Isomorphie

$$L \cong C_G(D)/D.$$

- Des Weiteren ist  $C_G(D)$  ein Normalteiler in  $N_G(D)$  und wir bezeichnen die Gruppe  $N_G(D)/C_G(D)$  mit  $E$ .
- Schauen wir nun zurück auf den erweiterten Hauptsatz 2.1.4, so erhalten wir mit  $\tilde{G} = N_G(D)$ :

(a)

$$\{\beta \mid \beta \text{ ist ein } l\text{-Block von } C_G(D)\} \xrightarrow{1-1} \text{Irr}(L).$$

Wie oben bereits bemerkt liefert zum Beispiel die Zuordnung eines Blockes  $\beta$  zum kanonischen Charakter von  $\beta$  die gewünschte Bijektion.

(b)

$$\begin{array}{c} \{\tilde{b} \mid \tilde{b} \text{ ist ein } l\text{-Block von } N_G(D)\} \\ \updownarrow 1-1 \\ \{\text{Bahnen von } N_G(D) \text{ auf } \text{Irr}(L)\}. \end{array}$$

Insbesondere kann man jedem irreduziblen Charakter von  $L$  einen  $l$ -Block von  $N_G(D)$  zuordnen.

(c) Wir haben somit die Kette von Zuordnungen vorliegen:

$$\begin{array}{ll} \text{kan. Charakter} & \lambda_0 \in \text{Irr}(L) \\ & \mapsto \tilde{b}_{\lambda_0} \text{ } l\text{-Block von } N_G(D) \\ & \mapsto B \text{ } l\text{-Block von } G \text{ mit Defektgruppe } D. \end{array} \quad (2)$$

Bezeichnen wir mit  $e := |T_{N_G(D)}(\lambda_0) : C_G(D)|$  den Index von  $C_G(D)$  in der Trägheitsgruppe  $T_{N_G(D)}(\lambda_0)$ , so hat der Brauer-Baum des Blocks  $B$  in (2) genau  $e$  Kanten (vgl. zum Beispiel [Fei82, S. 272, Theorem VII 1.3]).

### 2.1.3 Der Coxeter Torus in der linearen Gruppe

Kommen wir nun zum ursprünglichen Problem zurück; wir haben jetzt die nötigen theoretischen Hilfsmittel bereit gestellt, um eine Gruppe zu konstruieren, die einen  $l$ -Block mit dem Brauer-Baum in gewünschter Sternform hat. Beginnen wir also mit der Konstruktion.

In diesem Paragraphen seien die Grundvoraussetzungen - wenn nicht anders gesagt - wie folgt festgelegt: Es seien  $l$  eine ungerade und  $p$  eine von  $l$  verschiedene Primzahl, sowie  $e, f$  natürliche Zahlen mit  $f > 1$ , so dass mit der Bezeichnung  $q := p^f$  folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{array}{ll} e \cdot f & \mid l - 1, \\ l & \nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq e \cdot f - 1 \text{ und} \\ l & \mid q^e - 1. \end{array} \quad (3)$$

Zur Bedeutung dieser Bedingungen werde ich im Anschluss an diesen Abschnitt einige Anmerkungen machen.

Der Körper  $\bar{\mathbb{F}}_p$  bezeichne den algebraischen Abschluss von  $\mathbb{F}_p$ . Weiter sei  $\bar{\alpha}$  der Frobenius-Automorphismus  $\bar{\alpha} : \bar{\mathbb{F}}_p \rightarrow \bar{\mathbb{F}}_p$ ,  $x \mapsto x^p$ . Dann ist der Körper mit  $p^i$  Elementen gerade die Menge der Fixpunkte unter der  $i$ -ten Potenz des Frobenius-Automorphismus  $\mathbb{F}_{p^i} = \{x \in \bar{\mathbb{F}}_p \mid \bar{\alpha}^i(x) = x\}$ .

Wir wollen nun den Körper  $\mathbb{F}_{q^e} = \mathbb{F}_{(p^f)^e}$  näher untersuchen. Neben obiger Interpretation als Fixpunktmenge einer bestimmten (nämlich der  $e \cdot f$ -ten) Potenz des Frobenius-Automorphismus können wir  $\mathbb{F}_{q^e} =: V$  auch als  $e$ -dimensionalen  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraum verstehen. Im Zusammenhang mit Vektorräumen wiederum liegt der Gedanke an die Gruppe der linearen und invertierbaren Abbildungen von  $V$  nach  $V$  nicht fern. Diese ist zwar noch nicht die zum Ziel führende Gruppe, aber fast. Bevor wir allerdings eine Gruppe angeben können, die den Forderungen der Konstruktionsaufgabe genügt, müssen noch weitere Hilfsmittel bereit gestellt und ein bestimmter Untergruppentyp in der  $GL(V)$  eingeführt werden. Von nun an bezeichnen wir die Gruppe  $GL(V)$  auch mit  $G$ .

### 2.1.5 Lemma

Es seien  $\tilde{q} = p^r$  eine beliebige Potenz einer Primzahl  $p$  (hier sind wir nicht an die Grundvoraussetzungen (3) gebunden) sowie  $\mathbb{F}_{\tilde{q}^n}$  eine endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{F}_{\tilde{q}}$  vom Grad  $n$ . Bezeichnet  $\alpha$  die Einschränkung des Frobenius-Automorphismus auf  $\mathbb{F}_{\tilde{q}^n}$ , dann ist die Automorphismen-Gruppe  $\text{Aut}_{\mathbb{F}_{\tilde{q}}}(\mathbb{F}_{\tilde{q}^n})$  zyklisch von der Ordnung  $n$  und wird von der  $r$ -ten Potenz von  $\alpha$  erzeugt:

$$\text{Aut}_{\mathbb{F}_{\tilde{q}}}(\mathbb{F}_{\tilde{q}^n}) = \langle \alpha^r \rangle,$$

wobei mit  $\text{Aut}_{\mathbb{F}_{\tilde{q}}}(\mathbb{F}_{\tilde{q}^n})$  die  $\mathbb{F}_{\tilde{q}}$ -Automorphismen von  $\mathbb{F}_{\tilde{q}^n}$  gemeint sind.

**Beweis:** Vgl. zum Beispiel [Bo, S. 125, Satz 6].  $\square$

Im folgenden Satz erbringen wir den Nachweis der Existenz eines bestimmten (zyklischen) Untergruppentyps in der Gruppe  $GL(V)$ .

### 2.1.6 Satz

Sei  $V := \mathbb{F}_{q^e}$ . Dann existiert eine Untergruppe  $T \leq GL(V)$  in der Gruppe der linearen  $\mathbb{F}_q$ -Vektorraum-Automorphismen von  $V$  mit den Eigenschaften

- (a) Die Ordnung von  $T$  ist  $|T| = q^e - 1$  und
- (b)  $T$  ist zyklisch.

Jede solche Gruppe  $T$  heißt ein Coxeter-Torus oder ein Singer-Zyklus von  $GL(V)$ .

**Beweis:** Sei  $a \in (\mathbb{F}_{q^e})^*$  ein Element der multiplikativen Gruppe von  $\mathbb{F}_{q^e}$ . Betrachte die Abbildung der Linksmultiplikation mit  $a$ :

$$\begin{aligned} \lambda_a : \mathbb{F}_{q^e} &\rightarrow \mathbb{F}_{q^e} \\ v &\mapsto a \cdot v. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist dies ein  $\mathbb{F}_q$ -linearer Automorphismus von  $V$  und somit ein Element von  $GL(V)$ .

Ebenso klar ist, dass für die Ordnung von  $\lambda_a$

$$|\lambda_a|_{GL(V)} = |a|_{(\mathbb{F}_{q^e})^*}$$

gilt, wobei die linke Seite der Gleichung die Ordnung des Automorphismus in  $GL(V)$  und die rechte Seite die Ordnung des Elementes  $a$  in  $(\mathbb{F}_{q^e})^*$  beschreibt.

Da jede multiplikative Gruppe eines endlichen Körpers zyklisch ist, können wir insbesondere für  $a$  ein erzeugendes Element von  $(\mathbb{F}_{q^e})^*$  nehmen. Dann ist

$$|a|_{(\mathbb{F}_{q^e})^*} = q^e - 1$$

und entsprechend gilt für die Ordnung von  $\lambda_a$ :

$$|\lambda_a|_{GL(V)} = q^e - 1.$$

Die von diesem  $\lambda_a$  erzeugte Untergruppe  $\langle \lambda_a \rangle$  in  $GL(V)$  hat somit die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

Dieser Zugang zu Coxeter-Tori geschieht mit elementaren Mitteln. Der sonst übliche Zugang findet in einem weiten Themenkomplex über maximale Tori von Gruppen vom Lie-Typ Platz und wird beispielsweise im Abschnitt 3 in [Ca] behandelt.

### 2.1.7 Bemerkung

Sei  $T$  ein Coxeter-Torus von  $G$ . Nach dem Beweis des letzten Satzes finden wir eine den Voraussetzungen des erweiterten Hauptsatzes entsprechende zyklische  $l$ -Sylowgruppe  $D$  von  $G$  sogar im Coxeter-Torus  $T$ . Zudem beachte man, dass  $T$  eine zyklische Gruppe ist (vgl. Satz 2.1.6); in zyklischen Gruppen ist jede Untergruppe eine charakteristische Untergruppe, so dass wir Bezug nehmend zu  $D$  von „der“  $l$ -Sylowgruppe von  $T$  sprechen können.

**Beweis:** Die Ordnung von  $GL(V)$  ist

$$\begin{aligned} |G| &= \prod_{i=0}^{e-1} (q^e - q^i) \\ &= q^{\frac{e(e-1)}{2}} \prod_{i=1}^e (q^i - 1). \end{aligned}$$

Der Coxeter-Torus  $T$  hat nach Definition die Ordnung  $|T| = q^e - 1$ . Jetzt müssen wir nur noch auf die Bedingung (3) schauen, um festzustellen, dass  $l$  zwar die Ordnung von  $T$ , aber nicht die des Index  $|GL(V) : T|$  teilt, woraus genau die Behauptung folgt.  $\square$

### 2.1.8 Bemerkung

Die Coxeter-Tori der Gruppe  $GL(V)$  sind untereinander in  $GL(V)$  konjugiert.

**Beweis:** Die  $l$ -Sylowgruppen von  $G$  liegen, wie wir in Bemerkung 2.1.7 festgestellt haben, in Coxeter-Tori von  $G$ , so dass uns die Sylowsätze die behauptete Konjugiertheit garantieren.  $\square$

Wir fixieren von nun ab ein erzeugendes Element  $a$  der multiplikativen Gruppe von  $\mathbb{F}_{q^e}$  und bezeichnen den von der Linksmultiplikation  $\lambda_a$  erzeugten Coxeter-Torus mit  $T$  (vgl. Beweis zu Satz 2.1.6).

### 2.1.9 Bemerkung

Es sei  $\alpha := \bar{\alpha}|_{\mathbb{F}_q}$  der eingeschränkte Frobenius-Automorphismus. Dann operiert  $\langle \alpha \rangle$  auf folgende Weise auf  $GL(V)$ : Wir wählen eine Basis von  $GL(V)$ . Für  $g \in GL(V)$  sei dann  $[g_{k,j}]_{1 \leq k,j \leq e} \in GL_e(q)$  das zu  $g$  korrespondierende Element bezüglich obiger Basis. Die Operation definiert sich dann durch  $\alpha^i \cdot g =: g'$ , wobei  $g' \in GL(V)$  dem Element  $[\alpha^i(g_{k,j})]_{1 \leq k,j \leq e} \in GL_e(q)$  entspricht.  $\square$

Jetzt sind wir zur entscheidenden Definition bereit:

### 2.1.10 Definition und Bemerkung

Seien  $G, T$  und  $\alpha$  wie oben.

- (a) Mit  $\alpha$  bezeichnen wir auch den gemäß Bemerkung 2.1.9 bewirkten Automorphismus von  $G$ . Dann ist die Ordnung  $|\alpha| = f$  in  $\text{Aut}(G)$ .
- (b) Wir setzen  $\hat{G} := G \rtimes \langle \alpha \rangle$ . Dann ist die Ordnung  $|\hat{G}| = |G| \cdot f$ .
- (c) Es ist  $\alpha(T)$  ebenfalls ein Coxeter-Torus von  $G$ . Nach Bemerkung 2.1.8 existiert folglich ein  $g_0 \in G$  mit

$$\alpha(T) = g_0^{-1} T g_0.$$

- (d) Setze  $\sigma := (g_0, \alpha) \in \hat{G}$ . Dann ist  $T$  (eingebettet in  $\hat{G}$ ) invariant unter  $\sigma$ . Zudem gilt

$$\hat{G} = G \langle \sigma \rangle,$$

wenn wir auch hier  $G$  als Untergruppe von  $\hat{G}$  verstehen.

### Beweis:

- (c) Da  $\alpha$  ein Automorphismus von  $G$  ist, hat auch die Gruppe  $\alpha(T)$  die Eigenschaft, zyklisch und von der Ordnung  $q^e - 1$ , also ein Coxeter-Torus von  $G$  zu sein.
- (d) Wir zeigen zuerst, dass  $\sigma(T, 1) = (T, 1)\sigma$  gilt. Nun ist

$$\begin{aligned} (T, 1)\sigma &= (T, 1)(g_0, \alpha) \\ &= (Tg_0, \alpha). \end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\sigma(T, 1) &= (g_0, \alpha)(T, 1) \\ &= (g_0\alpha(T), \alpha) \\ &\stackrel{(c)}{=} (g_0g_0^{-1}Tg_0, \alpha) \\ &= (Tg_0, \alpha),\end{aligned}$$

woraus die behauptete Invarianz von  $T$  unter  $\sigma$  folgt.

Es ist offensichtlich  $G\langle\sigma\rangle$  in  $\hat{G}$  enthalten. Für die andere Inklusion halten wir zunächst die Darstellung der  $i$ -ten Potenz von  $\sigma$  (für eine natürliche Zahl  $i$ ) fest:

$$\sigma^i = (g_0\alpha(g_0) \cdots \alpha^{i-1}(g_0), \alpha^i).$$

Sei also  $(x, \alpha^i) \in G \rtimes \langle\alpha\rangle$  beliebig. Setze  $y := x(g_0\alpha(g_0) \cdots \alpha^{i-1}(g_0))^{-1} \in G$ . Dann ist

$$(x, \alpha^i) = (y, 1)(g_0\alpha(g_0) \cdots \alpha^{i-1}(g_0), \alpha^i) = (y, 1)\sigma^i$$

ein Element von  $G\langle\sigma\rangle$ , so dass die Behauptung folgt.  $\square$

Wie wir bis zum Ende dieses Abschnitts sehen werden, haben wir mit  $\hat{G}$  eine Gruppe gefunden, deren Hauptblock einen Brauer-Baum mit gewünschter Stern-Form hat.

Zuvor halten wir jedoch in der nächsten Bemerkung einige strukturelle Merkmale von  $\hat{G}$  fest.

### 2.1.11 Bemerkung

- (a) Es sei  $D$  die  $l$ -Sylowgruppe von  $T$ . Für den Index der Normalisatoren von  $D$  in  $\hat{G}$  bzw.  $G$  gilt dann:

$$[N_{\hat{G}}(D) : N_G(D)] = f.$$

- (b) Die  $l$ -Sylowgruppe  $D$  von  $G$  (vergleiche Bemerkung 2.1.7) ist auch eine  $l$ -Sylowgruppe von  $\hat{G}$ .

### Beweis:

- (a) Nach Definition und Bemerkung 2.1.10(d) ist  $\sigma$  ein Element von  $N_{\hat{G}}(T)$ , also gilt (nach Einbettung von  $N_G(T)$  in  $\hat{G}$ )

$$N_G(T)\langle\sigma\rangle \leq N_{\hat{G}}(T).$$

Schauen wir nun auf die folgende Ungleichungskette:

$$\begin{aligned}|\hat{G} : N_{\hat{G}}(T)| &= |G\langle\sigma\rangle : N_{\hat{G}}(T)| \\ &\leq |G\langle\sigma\rangle : N_G(T)\langle\sigma\rangle| \\ &= |G : N_G(T)| \\ &\leq |\hat{G} : N_{\hat{G}}(T)|;\end{aligned}$$

die letzte Ungleichung gilt, da die Länge der Bahn von  $T$  unter Konjugation in  $\hat{G}$  nicht kleiner als die Länge der Bahn von  $T$  unter Konjugation in  $G$  ist. Folglich gilt in obiger Abschätzung überall Gleichheit, insbesondere

$$|G\langle\sigma\rangle : N_{\hat{G}}(T)| = |G\langle\sigma\rangle : N_G(T)\langle\sigma\rangle|.$$

Damit ist  $|N_G(T)\langle\sigma\rangle| = |N_{\hat{G}}(T)|$ , so dass die Behauptung folgt.

- (b) Nach Definition beträgt der Index  $[\hat{G} : G]$  gerade  $f$ . Nach der ersten Bedingung in (3) teilt jedoch  $l$  nicht  $f$ , so dass die Ordnung einer  $l$ -Sylowgruppe von  $\hat{G}$  nicht größer als die Ordnung einer  $l$ -Sylowgruppe von  $G$  werden kann.  $\square$

Im erweiterten Hauptsatz spielen gewisse Normalisatoren eine entscheidende Rolle, mit deren Untersuchung wir uns im Folgenden auseinander setzen wollen.

Auf dem Weg zur Anwendung des Hauptsatzes müssen wir noch den Zentralisator  $C_{\hat{G}}(D)$  und den Normalisator  $N_{\hat{G}}(D)$  „zähmen“. Dies geschieht in zwei Stufen; zuerst betrachten wir für beide die entsprechenden Normalisatoren bzw. Zentralisatoren in  $G$ , dann erst steigen wir die Stufe hinauf zu  $\hat{G}$ .

#### 2.1.12 Lemma

Seien  $l, p \in \mathbb{P}$  wie in den Grundvoraussetzungen auf Seite 16,  $G = GL(V)$  und  $T \leq G$  der Coxeter-Torus wie oben beschrieben. Weiterhin bezeichne  $D \leq T \leq G$  die (zyklische)  $l$ -Sylowgruppe von  $T$ . Dann gilt:

$$N_G(D) = N_G(T).$$

**Beweis:** Man vergleiche zum Beispiel [Hup1, S. 187 ff, Satz 7.3(a)].  $\square$

#### 2.1.13 Lemma

Mit den Bezeichnungen für  $G, T$  und  $D$  wie in Lemma 2.1.12 gilt für den Zentralisator von  $T$  in  $G$ :

$$C_G(T) = T.$$

**Beweis:** Zum Beweis sei auf [Hup1, S. 187 f, Satz 7.3] verwiesen.  $\square$

#### 2.1.14 Bemerkung

Wir haben nun folgende Kette von Inklusionen vorliegen:

$$T = C_G(T) \leq C_G(D) \leq N_G(D) = N_G(T).$$

#### 2.1.15 Lemma

Sei  $z_0 \in D$  ein Element der Ordnung  $|z_0| = l$ . Dann hat  $z_0$  paarweise verschiedene Eigenwerte.

**Beweis:** Wie man aus [Hup1, S. 187 f] schließen kann, hat  $z_0$  die Eigenwerte  $\zeta, \zeta^q, \dots, \zeta^{q^{e-1}}$ , wobei  $\zeta \in \mathbb{F}_{q^e}$  die Ordnung  $|\zeta| = l$  hat. Wären zwei dieser Eigenwerte gleich, also  $\zeta^{q^j - q^i} = 1$  für  $1 \leq i < j \leq e - 1$ , so müsste  $l$  den Term  $q^i(q^{j-i} - 1)$  teilen, was den Grundvoraussetzungen auf Seite 16 widerspricht.  $\square$   
Wie angedeutet, untersuchen wir nun den Zentralisator von  $D$  in  $G$ .

### 2.1.16 Satz

Mit den gleichen Bezeichnungen wie in den vorhergehenden Lemmas gilt für den Zentralisator von  $D$  in  $G$ :

$$C_G(D) = T.$$

**Beweis:** Nach [Hup1, S. 188] wissen wir, dass der Erzeuger  $\lambda_a$  von  $T$  die Eigenwerte  $a, a^q, \dots, a^{q^{e-1}}$  (in  $\mathbb{F}_{q^e}$ ) hat. Alle diese Eigenwerte sind paarweise verschieden. Nach Wahl einer Basis  $\mathcal{B}$  von  $V$  finden wir also in  $GL_e(q^e)$  eine Transformationsmatrix  $t$ , so dass die zu  $\lambda_a$  gehörige Abbildungsmatrix  $A$  bezüglich  $\mathcal{B}$  durch  $t^{-1}At$  auf Diagonalgestalt transformiert wird.

Sei nun  $\lambda_a^d$  ein Erzeuger der  $l$ -Sylowgruppe  $D$  von  $T$ . Offensichtlich hat dann auch  $t^{-1}A^d t$  Diagonalgestalt, wenn  $A^d$  die zu  $\lambda_a^d$  gehörige Abbildungsmatrix bezüglich  $\mathcal{B}$  bezeichnet.

Sei  $x \in C_G(D)$ , es gelte also

$$xd = dx \text{ für alle } d \in D. \quad (4)$$

Insbesondere zentralisiert  $x$  auch ein Element  $z_0 \in D$  der Ordnung  $l$ , welches nach Lemma 2.1.15  $e$  paarweise verschiedene Eigenwerte hat. Nach Überlegungen aus der linearen Algebra muss dann  $t^{-1}M_x t$  wegen (4) ebenfalls Diagonalgestalt haben, wenn  $M_x$  die Abbildungsmatrix von  $x$  bezüglich  $\mathcal{B}$  bezeichnet.

Beachten wir noch, dass Diagonalmatrizen untereinander vertauschbar sind, so gilt folgende Gleichheit:

$$(t^{-1}M_x t)(t^{-1}At)(t^{-1}M_x t)^{-1} = t^{-1}At.$$

Dies formen wir wie folgt um:

$$\begin{aligned} & (t^{-1}M_x t)(t^{-1}At)(t^{-1}M_x t)^{-1} = t^{-1}At \\ \iff & t^{-1}M_x t t^{-1} A t t^{-1} M_x^{-1} t = t^{-1}At \\ \iff & t^{-1}M_x A M_x^{-1} t = t^{-1}At \\ \iff & M_x A M_x^{-1} = A. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung zeigt nun, dass ein beliebiges Element  $x$  aus dem Zentralisator von  $D$  in  $G$  auch  $\lambda_a$ , also den gesamten Torus  $T$ , zentralisiert.

Da  $C_G(T)$  nach Lemma 2.1.13 gleich dem Torus  $T$  ist, muss  $x$  ein Element in  $T$  sein.  $\square$



Wir können nun unsere spezielle Situation auf den Hauptsatz anwenden. Dazu sei zunächst mit der Wahl der Bezeichnungen aus den vorhergehenden Sätzen und Lemmas an die Beziehung

$$T = D \times L$$

erinnert (vgl. (1)). Bezeichnen wir mit  $\lambda_0 := 1_D \otimes 1_L$  den kanonischen Charakter des Hauptblocks von  $T$ , so ist  $\lambda_0$  offensichtlich invariant in  $N_G(D)$ . Damit gilt für die Trägheitsgruppe  $T_{N_G(D)}(\lambda_0)$ :

$$\begin{aligned} T_{N_G(D)}(\lambda_0) &= N_G(D) \\ &= N_G(T) =: N. \end{aligned} \tag{5}$$

Folglich erhalten wir für den Trägheitsindex:

$$e := |T_{N_G(D)}(\lambda_0) : C_G(D)| = |N_G(D) : C_G(D)|. \tag{6}$$

Mit  $b_{N,0}$  bezeichnen wir gemäß (5) den Hauptblock von  $N_G(D) = N_G(T) = N$ . Sei  $B_0$  der Hauptblock von  $\hat{G}$ ; nach Wahl von  $b_{N,0}$  ist jener (also  $B_0$ ) der Brauer-Korrespondent von  $b_{N,0}$  (vergleiche zum Beispiel [Alp, S. 112 f, Theorem 1]). Dann ist eine Defektgruppe von  $B_0$  ebenfalls  $D$ , da  $D$  nach Bemerkung 2.1.11 auch eine  $l$ -Sylowgruppe von  $\hat{G}$  ist.

Es sei daran erinnert, dass die Primzahl  $p$  so gewählt ist, dass

$$\begin{aligned} l &\nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq ef - 1 \text{ und} \\ l &\mid (p^f)^e - 1 \text{ gilt.} \end{aligned}$$

Nun untersuchen wir im nächsten Schritt den Zentralisator  $C_{\hat{G}}(D)$  von  $D$  in  $\hat{G}$ .

### 2.1.17 Satz

Mit den obigen Bezeichnungen für  $\hat{G}$ ,  $D$  und  $T$  gilt für den Zentralisator  $C_{\hat{G}}(D)$  von  $D$  in  $\hat{G}$ :

$$C_{\hat{G}}(D) = T. \tag{7}$$

**Beweis:** Nach Satz 2.1.16, in welchem wir bereits die Beziehung

$$C_G(D) = T$$

bewiesen haben, müssen wir nur noch nachweisen, dass es ein Element in  $D$  gibt, das nicht von  $(y, \alpha^i) \in \hat{G}$  für alle  $1 \leq i \leq f - 1$  und für alle  $y \in G$  zentralisiert wird; in diesem Fall wird nämlich der Zentralisator von  $D$  beim Übergang von  $G$  zu  $\hat{G}$  nicht größer. Fixieren wir dazu ein Element  $z_0 \in D$  mit der Ordnung  $|z_0| = l$ . Zunächst stellen wir fest, dass die Eigenwerte von  $z_0$  genau  $\zeta, \zeta^q, \dots, \zeta^{q^{e-1}}$  sind, wobei  $\zeta$  eine  $l$ -te Einheitswurzel in  $\overline{\mathbb{F}}_p$  ist (vgl. [Hup1, S. 188 f]). Alle zu  $z_0$  in  $G$  konjugierten Elemente haben ebenfalls diese Eigenwerte.

Die Ausführung der Multiplikation im semidirekten Produkt zeigt, dass das inverse Element zu  $(y, \alpha^i) \in \hat{G}$  gerade  $(\alpha^{-i}(y^{-1}), \alpha^{-i})$  ist.

Zum Beweis der ursprünglichen Aussage nehmen wir an, ein Element  $(y, \alpha^i) \in \hat{G}$  zentralisiere  $z_0$ , was äquivalent ist mit der Aussage

$$\alpha^i(z_0) = y^{-1}z_0y, \quad (8)$$

wie einfaches Nachrechnen zeigt. Dann sind einerseits die Eigenwerte des Elementes  $\alpha^i(z_0)$  genau  $\zeta^{p^i}, (\zeta^{p^i})^q, \dots, (\zeta^{p^i})^{q^{e-1}}$ . Andererseits muss nach Annahme und damit nach Gleichung (8) eine natürliche Zahl  $0 \leq k_0 \leq e-1$  existieren, so dass

$$(\zeta^{p^i})^{q^{k_0}} = \zeta \quad (9)$$

erfüllt ist. Mit der Bezeichnung  $q = p^f$  formen wir (9) um:

$$\begin{aligned} (\zeta^{p^i})^{q^{k_0}} &= \zeta \\ \iff \zeta^{p^{i+f \cdot k_0} - 1} &= 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Da  $\zeta$  eine  $l$ -te Einheitswurzel in  $\bar{\mathbb{F}}_p$  ist, folgt mit (10)

$$l \mid p^{i+f \cdot k_0} - 1. \quad (11)$$

Beachten wir noch die Grenzen für  $i$  und  $k_0$ , so ergibt sich als höchstmögliche Potenz in (11) genau

$$(f-1) + f(e-1).$$

Dies formen wir um zu

$$\begin{aligned} f-1 + f(e-1) &= f-1 + ef - f \\ &= ef - 1 < ef. \end{aligned} \quad (12)$$

Die letzte Ungleichung (12) bedeutet zusammen mit (11), dass

$$l \mid p^j - 1 \text{ für ein } 1 \leq j < ef,$$

was einen Widerspruch zu unserer Grundvoraussetzung (3) darstellt. Damit kann der Zentralisator der gesamten Gruppe  $D$  nicht größer als  $T$  werden.  $\square$

### 2.1.4 Die Bedingungen an $p$ , $e$ und $f$

An dieser Stelle wollen wir noch einmal zu den Bedingungen (3) zurückkehren. Zwei Fragen drängen sich dabei in den Vordergrund:

- (a) Woher kommen die Bedingungen?
- (b) Gibt es Zahlen, die diese Bedingungen erfüllen?

Rufen wir uns in Erinnerung, welches Ziel ursprünglich formuliert wurde. Besonders bezüglich der Frage der Existenz der Zahlen müssen wir zunächst nochmals ganz genau festhalten, was gegeben und wessen Existenz nachzuweisen ist. In unserer Konstruktionsaufgabe geben wir uns zunächst eine beliebige ungerade Primzahl  $l$  vor und betrachten im Folgenden stets  $l$ -Blöcke. Weiterhin sind  $e$  und  $f > 1$  beliebige natürliche Zahlen, die einzig an die Bedingung

$$e \cdot f \mid l - 1$$

gebunden sind. Dabei interpretieren wir  $e$  als die Anzahl der Kanten des betrachteten Brauer-Baums des Hauptblocks von  $GL_e(q)$  und  $f$  als die Anzahl der Flügel des entfalteten Sterns. Insgesamt hat der Stern somit  $e \cdot f$  Kanten. Nach dem Satz von Brauer-Dade (vgl. [Fei82, S. 270]), muss aber die Anzahl der Kanten eines Brauer-Baums gerade  $l - 1$  teilen, woraus obige Bedingung resultiert. Kurz gesprochen müssen wir obige Bedingung auf Grund von darstellungstheoretischen Ergebnissen fordern.

Die beiden anderen Bedingungen ergeben sich, wie wir im vorherigen Unterabschnitt gesehen haben, aus den (gruppentheoretischen) Notwendigkeiten, die aus den Ordnungen für die Defektgruppe  $D$ , der Darstellung des Zentralisators von  $D$  in  $G$  oder in  $\hat{G}$  usw. resultierten; man vergleiche zum Beispiel die Beweise zu Lemma 2.1.15 und zu Satz 2.1.17.

Die verbleibende Frage ist diejenige nach der Existenz von  $p$ , wenn  $l$ ,  $e$  und  $f$  bereits wie gewünscht vorgegeben sind. Eine Antwort auf diese Frage finden wir im Satz von Dirichlet:

### 2.1.18 Satz (Primzahlsatz von Dirichlet)

In jeder arithmetischen Progression  $(a + km)_{k \in \mathbb{N}_0}$  mit  $a \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  und  $\text{ggT}(a, m) = 1$  gibt es unendlich viele Primzahlen.

**Beweis:** Vgl. [Has, S. 176]. □

Um zu sehen, wie dieser Satz unsere Frage klären kann, werden zuvor die Bedingungen an  $p$  umformuliert. Denn

$$\begin{aligned} l &\nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq e \cdot f - 1 \\ l &\mid p^{e \cdot f} - 1 \end{aligned}$$

übersetzt sich mit  $\bar{p} := p + l\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  in:

$$|\bar{p}|_l = e \cdot f.$$

Dabei benutzen wir die Schreibweise  $|\bar{p}|_l$  für die Ordnung des Elementes  $\bar{p} \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ . Da  $l$  eine Primzahl ist, ist  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  ein Körper, dessen multiplikative Gruppe zyklisch und von Ordnung  $l - 1$  ist. Andererseits gilt  $e \cdot f \mid l - 1$ , so dass wir in  $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$  genau eine Untergruppe der Ordnung  $e \cdot f$  finden. Diese sei von  $x \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  erzeugt.

Nun wenden wir den Primzahlsatz von Dirichlet auf unsere Situation mit  $m = l$  und  $a \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\bar{a} = x$  gilt, an. Sei ein  $k_p \in \mathbb{N}$  fixiert, so dass

$$a + k_p \cdot l =: p$$

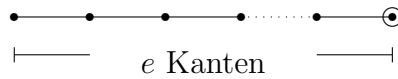
eine Primzahl ist. Dann gilt offensichtlich

$$\bar{p} = \bar{a} = x,$$

und nach Wahl von  $x$  hat die Primzahl  $p$  in  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  die gewünschte Ordnung.

### 2.1.5 Die Entfaltung

Wir sind nun an einen Punkt gelangt, an dem wir  $G$  und  $\hat{G}$  darstellungstheoretisch verknüpfen können. Aus der Arbeit [FS2] wissen wir, dass der zum  $l$ -Hauptblock korrespondierende Brauer-Baum der vollen linearen Gruppe  $GL_e(q)$  von der Form



ist. Dabei sitzt der exzeptionelle Knoten an einem (hier am rechten) Ende. Mit den Vorleistungen des vorhergehenden Unterabschnitts wollen wir nun von obigem Brauer-Baum auf denjenigen des  $l$ -Hauptblocks von  $\hat{G}$  schließen. Dabei erwarten wir ein  $f$ -faches Aufklappen des Baums am exzeptionellen Knoten. Um Aussagen über die Anzahl der Kanten des Brauer-Baums von  $\hat{G}$  treffen zu können, betrachten wir den Trägheitsindex:

$$\begin{aligned}
 e_{\hat{G}} &:= |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : C_{\hat{G}}(D)| \\
 &= |N_{\hat{G}}(D) : C_{\hat{G}}(D)| \\
 &\stackrel{\text{Satz 2.1.17}}{=} |N_{\hat{G}}(D) : C_G(D)| \\
 &= |N_{\hat{G}}(D) : N_G(D)| \cdot |N_G(D) : C_G(D)| \\
 &\stackrel{\text{Bem. 2.1.11}}{=} f \cdot |N_G(D) : C_G(D)| \\
 &\stackrel{(6)}{=} f \cdot e. \tag{13}
 \end{aligned}$$

Wir erkennen, dass der betrachtete Brauer-Baum die gewünschte Anzahl von Kanten hat.

Bleibt im Folgenden zu zeigen, dass sich die Kanten in der gewünschten Sternform verteilen. Dazu benutzen wir Ergebnisse aus der Arbeit „Possible Brauer Trees“ von Walter Feit (vgl. [Fei84]); Lemma 3.2 dieser Arbeit sagt uns, dass sich unter den gegebenen Voraussetzungen der reelle Stamm des Brauer-Baums von  $G$  unter der semidirekten Erweiterung  $G \rtimes \langle \sigma \rangle$  am exzeptionellen Knoten öffnet und zu einem Brauer-Baum mit gewünschter Sternform entfaltet.

### 2.1.6 Die erweiterte Konstruktionsaufgabe

Die Konstruktionsaufgabe lässt sich erweitern, indem die Vielfachheit  $m$  des exceptionellen Knotens zusätzlich vorgegeben wird. Nach dem Satz von Brauer-Dade (vergleiche [Fei82, S. 276, Theorem 2.11]) berechnet sich diese Vielfachheit mit der obigen Wahl der Parameter  $l, e$  und  $f$  zu

$$m = \frac{l^d - 1}{ef};$$

dabei ist  $l^d$  die Ordnung der Defektgruppe des zugehörigen Blockes, also hier die Ordnung der  $l$ -Sylogruppe von  $G$ . Wollen wir als erweiterte Konstruktionsaufgabe die Vielfachheit vorgeben, so ist das gleichbedeutend mit der Vorgabe von  $d$ .

Erinnern wir uns: Aufgabe war letztlich, eine Primzahl  $p$  zu finden, so dass der Hauptblock von  $G = GL_e(p^f)$  den reellen Stamm (2.1.1) auf Seite 13 als Brauer-Baum hat. Eine Defektgruppe  $D$  des Hauptblocks fanden wir in einem Coxeter-Torus von  $G$  mit Ordnung  $q^e - 1$ .

Die Aufgabe wird somit durch die Bedingung erweitert, eine Primzahl  $p$  zu finden, die zum einen weiterhin die Bedingungen (3) und zum anderen

$$\begin{array}{l} l^d \mid p^{ef} - 1 \\ l^{d+1} \nmid p^{ef} - 1 \end{array} \quad (14)$$

erfüllt.

Zuerst suchen wir, ganz genau wie im vorletzten Unterabschnitt eine Zahl  $a' \in \mathbb{Z}$ , so dass  $\bar{a}' = x \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  ein Erzeuger der Untergruppe der Ordnung  $ef$  von  $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$  ist. Dieses Element  $a'$  passen wir in den folgenden Schritten geeignet an:

Zunächst überprüfen wir, ob  $l^1$  die höchste Potenz ist, die  $(a')^{ef} - 1$  teilt. In diesem Fall verändern wir nichts und setzen  $a'' := a'$ .

Falls jedoch auch  $l^2$  den Term  $(a')^{ef} - 1$  teilt, so betrachten wir  $a'' := a' + l$ . Man beachte, dass sich beim Übergang von  $a'$  zu  $a''$  nicht die Ordnung modulo  $l$  ändert. Wir zeigen nun, dass  $l$  die höchste Potenz ist, die das Element  $(a'')^{ef} - 1$  teilt:

$$\begin{aligned} (a'')^{ef} - 1 &= (a' + l)^{ef} - 1 \\ &= (a')^{ef} - 1 + \binom{ef}{ef-1} (a')^{ef-1} l + \sum_{i=0}^{ef-2} \binom{ef}{i} (a')^i l^{ef-i} \\ &= (a')^{ef} - 1 + ef(a')^{ef-1} l + \sum_{i=0}^{ef-2} \binom{ef}{i} (a')^i l^{ef-i} \end{aligned}$$

Nach Annahme bzw. Darstellung der Summe teilt  $l^2$  den Term  $(a')^{ef} - 1$  bzw.  $\sum_{i=0}^{ef-2} \binom{ef}{i} (a')^i l^{ef-i}$ . Bleibt noch zu zeigen, dass  $l^2$  nicht den verbleibenden Term

$ef(a')^{ef-1}l$  teilt. Da  $ef$  nach den Grundvoraussetzungen  $l-1$  teilt, insbesondere also kleiner als  $l$  ist, kann  $l$  kein Teiler von  $ef$  sein. Weiterhin teilt  $l$  den Term  $(a')^{ef} - 1$  und somit nicht den Term  $(a')^{ef}$ , also auch nicht  $(a')^{ef-1}$ . Insgesamt ist - wie gewünscht -  $l$  die höchste Potenz, die  $(a'')^{ef} - 1$  teilt.

Lemma 8.1 aus [Hup2, S. 503 f] weist den Weg der nächsten Anpassung:

### 2.1.19 Lemma

Seien  $l$  eine Primzahl,  $x$  eine ganze Zahl, die nicht von  $l$  geteilt wird, und  $m$  die Ordnung von  $\bar{x}$  in  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ . Weiterhin sei  $\nu_l$  die  $l$ -adische Bewertung. Dann gilt für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , das von  $m$  geteilt wird:

$$\nu_l(x^n - 1) = \nu_l(x^m - 1) + \nu_l(n).$$

□

Wir setzen schließlich  $a := (a'')^{l^{d-1}}$ . Nach dem oben zitierten Lemma 2.1.19 ist dann

$$\begin{aligned} \nu_l(a^{ef} - 1) &= \nu_l(((a'')^{l^{d-1}})^{ef} - 1) \\ &= \nu_l((a'')^{ef} - 1) + \nu_l(efl^{d-1}) \\ &= 1 + (d-1) = d. \end{aligned}$$

Da  $\text{ggT}(l^{d-1}, ef) = 1$  ist, hat auch das Element  $a$  die Ordnung  $ef$  in  $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ , so dass wir jetzt auf  $a$  und  $l$  den Satz von Dirichlet wie auf Seite 25 anwenden und eine geeignete Primzahl  $p$  finden.

## 2.1.7 Zusammenfassung

Das Ergebnis der letzten Unterabschnitte wollen wir nochmals festhalten.

### 2.1.20 Satz

Seien  $l$  eine ungerade Primzahl und  $e, f, d \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen mit

$$ef \mid l - 1.$$

Dann existieren unendlich viele Primzahlen  $p$ , die die Bedingungen

$$\begin{aligned} l &\nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq e \cdot f - 1 \text{ und} \\ l &\mid (p^f)^e - 1 \end{aligned}$$

erfüllen. Die Primzahl lässt sich sogar so wählen, dass zusätzlich noch

$$l^d \parallel p^{ef} - 1$$

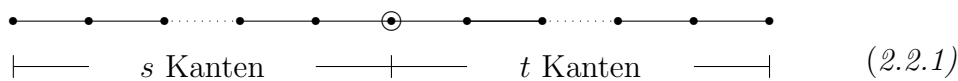
erfüllt ist.

Für alle diese Primzahlen gilt mit den Bezeichnungen für  $\alpha$  von Seite 19: Der Brauer-Charakter des Hauptblocks von  $GL_e(p^f) \rtimes \langle \alpha \rangle$  ist ein Stern mit Flügeln der Kantlänge  $e$  und exzeptionellem Knoten im Zentrum des Sterns mit Vielfachheit  $\frac{l^d-1}{ef}$ . □

## 2.2 Der erste Typ des ungleichmäßigen Sterns

### 2.2.1 Konstruktionsaufgabe

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Konstruktion einer Gruppe, die zu gegebener ungerader Primzahl  $l$  einen Brauer-Baum der Form „ungleichmäßiger Stern, erster Typ“ hat, d.h. der durch Aufklappen eines reellen Stamms - ähnlich der Konstruktion im vorhergehenden Abschnitt - der folgenden Form entsteht:



Die Bezeichnung „erster Typ“ bezieht sich auf die Summe  $s + t$ , die hier eine ungerade Zahl ergeben muss.

Unsere Konstruktionsaufgabe liest sich dann wie folgt: Gegeben sei eine beliebige ungerade Primzahl  $l$ . Zudem seien natürliche Zahlen  $s$  und  $t$ , deren Summe  $s+t =: e$  eine ungerade Zahl ergibt, und  $f > 1$  gegeben, die die Bedingung

$$2ef \mid l - 1$$

erfüllen. Konstruiere eine Gruppe  $G$ , die einen  $l$ -Block hat, dessen zugehöriger Brauer-Baum vom ersten Sternform-Typ ist, d.h.  $f$  Flügel mit je  $s$  Kanten und weitere  $f$  Flügel mit je  $t$  Kanten hat. Man beachte, dass jeweils  $s$  und  $t$  von Null verschiedene Zahlen sind. (Diese Fälle sind mit dem vorhergehenden Abschnitt abgedeckt.)

Eine Lösung dieser Konstruktionsaufgabe werden wir in semidirekten Erweiterungen von unitären Gruppen finden.

Es sei bereits an dieser Stelle bemerkt, dass die Bedingung an  $e$  und  $f$  jetzt nicht mehr aus dem Satz von Brauer-Dade resultiert, nach welchem die Anzahl der Kanten (also  $e \cdot f$ ) den Term  $l - 1$  teilen muss, sondern sich aus dem zu Grunde liegenden Körper der Form  $\mathbb{F}_{q^2}$  bei unitären Gruppen und der Anwendung des Primzahlsatzes von Dirichlet ergibt.

Auch hier können wir als erweiterte Aufgabe die Vielfachheit des exzeptionellen Knotens vorgeben. (Dies übersetzt sich genau wie oben in eine Bedingung an die Charakteristik  $p$  des zu Grunde liegenden Körpers der unitären Gruppe; bei beliebig vorgegebenem  $d$  soll  $l^d$  die höchste Potenz von  $l$  sein, die  $p^{2ef} - 1$  teilt.) Die Vorgehensweise entspricht genau der, die wir im Unterabschnitt 2.1.6 vorgeführt haben. Daher werden wir diese Erweiterung der Konstruktionsaufgabe in den folgenden Unterabschnitten nicht aufgreifen, um nicht durch die zusätzlichen Bedingungen die Übersicht zu verlieren.

### 2.2.2 Hilfsmittel

Wir beginnen mit einer ganzen Menge von Definitionen, die dann im nachfolgenden Unterabschnitt als Hilfsmittel bei der Lösung des eigentlichen Problems eingesetzt werden.

#### 2.2.1 Definition

Sei  $m \in \mathbb{N}$ .

- (a) Eine *Partition* ist eine endliche Folge  $\lambda := (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{N}_0^k$  für ein  $k \in \mathbb{N}$  mit der Eigenschaft:  $a_i \leq a_{i+1}$  für alle  $1 \leq i \leq k-1$ . Wir sagen  $\lambda$  ist eine *Partition von  $m$* , falls  $\sum_{i=1}^k a_i = m$  ist und verwenden dafür die Schreibweise:  $\lambda \vdash m$ .
- (b) Zwei Partitionen  $\lambda, \lambda' \vdash m$  heißen *äquivalent*, falls ihre von Null verschiedenen Einträge gleich sind.

#### 2.2.2 Definition

Seien  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subset \mathbb{N}_0$  mit  $x_1 < x_2 < \dots < x_l$  sowie  $\lambda = (a_1, \dots, a_k)$  eine Partition von  $m \in \mathbb{N}$ .

- (a) Dann heißt  $X$  eine  $\beta$ -Menge von  $\lambda$ , falls eine zu  $\lambda$  äquivalente Partition  $\lambda' = (a'_1, \dots, a'_l)$  existiert mit:

$$x_i = a'_i + (i - 1) \text{ für alle } 1 \leq i \leq l.$$

- (b) Zwei  $\beta$ -Mengen  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_l\}$  und  $X' = \{x'_1, x'_2, \dots, x'_{l'}\}$  heißen *äquivalent*, falls mit  $d := l' - l$  (ohne Einschränkung sei  $d \geq 0$ ) gilt:

$$X' = [0, d-1] \cup (X + d) := \{0, 1, \dots, d-1\} \cup \{x_1 + d, \dots, x_k + d\}.$$

Wir sagen dann,  $X'$  ist ein  $d$ -Shift von  $X$ .

#### 2.2.3 Definition

- (a) Ein *Haken*  $\nu$  einer  $\beta$ -Menge  $X$  ist ein Paar  $(y, x) \in \mathbb{N}_0^2$  mit

$$0 \leq y < x \text{ und } y \notin X, x \in X.$$

- (b) Die *Länge* eines Hakens  $\nu = (y, x)$  ist die Differenz  $e := x - y$ . Dabei verwenden wir die Sprechweise:  $\nu$  ist ein  $e$ -Haken.

#### 2.2.4 Definition

Seien  $\lambda \vdash n$  eine Partition von  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X$  eine  $\beta$ -Menge für  $\lambda$  und  $e \in \mathbb{N}$ . Betrachte nun das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & e-1 & \\ e & e+1 & e+2 & \dots & 2e-1 & \\ 2e & 2e+1 & 2e+2 & \dots & 3e-1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \end{array}$$



Dieses Diagramm stellen wir uns als Abakus mit Zählketten vor. Dabei seien die Zählketten von links nach rechts und die Zeilen von oben nach unten, beginnend bei 0, nummeriert. Platziert man für jedes  $x \in X$  auf die korrespondierende Position im obigen Diagramm eine Perle, so erhält man das *(e-)Abakus-Diagramm von X*.

Im Folgenden wollen wir die Perlen auf einem Abakus-Diagramm mit ihrer Positionsnummer bezeichnen.

### 2.2.5 Definition und Bemerkung

Seien  $n, e \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda \vdash n$  eine Partition von  $n$ ,  $X$  eine  $\beta$ -Menge von  $\lambda$  und  $\nu = (y, x)$  ein  $e$ -Haken.

- (a) Die Menge  $X_1 := \{y\} \cup X \setminus \{x\}$  entsteht aus  $X$  durch *Wegnehmen von  $\nu$* . Analog entsteht  $X$  aus  $X_1$  durch *Hinzufügen von  $\nu$* . Die Menge  $X_1$  ist dann eine  $\beta$ -Menge für eine Partition  $\lambda_1$  von  $n - e$ .
- (b) Nimmt man von  $X_1$  in (a) einen weiteren  $e$ -Haken  $\nu_2$  weg, bezeichnet die neu entstandene Menge mit  $X_2$  und führt dieses Verfahren sukzessive fort, bis die zuletzt entstandene Menge keine  $e$ -Haken mehr hat, so erhält man eine endliche Folge  $X = X_0, X_1, \dots, X_h = X_\infty$  von  $\beta$ -Mengen. Das letzte Folgenglied  $X_\infty$  heißt *der  $e$ -Kern von  $X$* , und dieser ist eindeutig durch  $X$  bestimmt. Die zu  $X_\infty$  gehörige Partition  $\lambda_\infty$  heißt *der  $e$ -Kern von  $\lambda$* , und dieser ist ebenfalls durch  $\lambda$  eindeutig bestimmt.

### 2.2.6 Bemerkung

Dem Wegnehmen bzw. Hinzufügen eines  $e$ -Hakens  $\nu = (y, x)$  von einer  $\beta$ -Menge  $X$  entspricht auf dem zugehörigen  $e$ -Abakus-Diagramm das Hinauf- bzw. Hinunterschieben der Perle  $x$  auf die darüber bzw. darunter liegende freie Position.

### 2.2.7 Beispiel

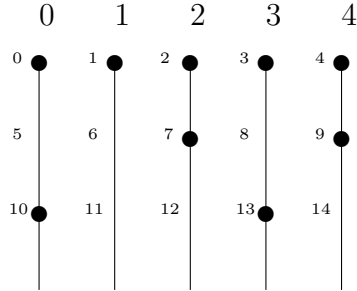
Sei  $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 13\}$ . Dann ist die zu  $X$  gehörige Partition  $\lambda$  gegeben durch:

$$\lambda = (0, 0, 0, 0, 0, 2, 3, 3, 5) \vdash 13.$$

Zudem haben wir folgende Haken-Typen vorliegen:

$$\begin{array}{llll} e = 1 & (6, 7) & (8, 9) & (12, 13) \\ e = 2 & (5, 7) & (8, 10) & (11, 13) \\ e = 3 & (6, 9) & & \\ e = 4 & (5, 9) & (6, 10) & \\ e = 5 & (5, 10) & (8, 13) & \\ e = 7 & (6, 13) & & \\ e = 8 & (5, 13) & & \end{array}$$

Fixieren wir nun  $e = 5$  und betrachten das 5-Abakus-Diagramm von  $X$ :



Wir erkennen sofort, dass die Perlen 10 und 13 um jeweils eine Position nach oben verschoben werden können, was einem Wegnehmen der 5-Haken  $(5, 10)$  und  $(8, 13)$  entspricht.

Der 5-Kern von  $X$  ist also  $X_\infty = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$ , was der Partition  $\lambda_\infty = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1) \vdash 3$  entspricht.

### 2.2.8 Definition

Die unterste Perle auf einer Zählkette eines Abakus-Diagramms nennen wir *Indikator-Perle*.

Wir haben jetzt die nötigen Hilfsmittel bereitgestellt, um uns im Folgenden mit einigen Ergebnissen aus der Arbeit [FS1] von Fong und Srinivasan auseinander zu setzen.

## 2.2.3 Theoretische Grundlagen

Im ersten Schritt der Lösung der Konstruktionsaufgabe müssen wir eine Gruppe suchen, die einen Block mit einem Brauer-Baum der Form (2.2.1) auf Seite 29 hat. Wie bereits angedeutet, helfen uns dabei wichtige Ergebnisse aus der Arbeit [FS1].

Halten wir zunächst die Grundvoraussetzungen für die folgenden Unterabschnitte dieses Abschnitts fest. Es sei  $l$  eine beliebige ungerade Primzahl. Seien  $p \neq l$  eine Primzahl und  $q = p^r$  für ein  $r \in \mathbb{N}$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Weiter seien  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{F}_{q^2}$  und  $\beta$  eine nicht-degenerierte hermitesche Form auf  $V$ . Dann existiert nach [Hup1, S. 235 f, Satz 10.4] eine Orthonormalbasis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  bezüglich  $\beta$ . Die Isometrie-Gruppe  $I(V, \beta) =: G_n(q)$  ist dann isomorph zur allgemeinen unitären Gruppe  $GU_n(q) =: G$  über  $\mathbb{F}_{q^2}$ , d.h. zur Matrix-Gruppe

$$GU_n(q) = \{x \in GL_n(q^2) \mid x\bar{x}^t = E_n\}.$$

(Dabei sind  $\bar{x}$  die Matrix, die aus  $x$  entsteht, indem jeder Eintrag in die  $q$ -te Potenz erhoben wird, und  $E_n$  die  $n \times n$ -Einheitsmatrix.) Weiterhin seien  $d \in \mathbb{N}$

die Ordnung von  $\bar{q} \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  und  $e \in \mathbb{N}$  die Ordnung von  $-\bar{q} \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ . Nach [HiKe, S. 400] gilt dann:

$$e = \begin{cases} 2d, & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ d/2, & \text{falls } d \text{ gerade und } d/2 \text{ gerade} \\ d, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Falle  $e = d/2$  ist  $l$  *unitär* für  $G$ , sonst *linear* für  $G$ . Wir betrachten in diesem und den folgenden Unterabschnitten nur solche Tupel  $(l, q)$ , für die  $l$  unitär für  $G$  ist. Diese Einschränkung alleine reicht aber nicht aus, um später die Sternform zu garantieren; allerdings werden wir diese Verschärfung erst im nächsten Unterabschnitt formulieren, da zur Bereitstellung der theoretischen Grundlagen obige Bedingungen von ausreichender Stärke sind.

Anders als im vorhergehenden Kapitel, reicht es hier nicht mehr, ausschließlich Hauptblöcke und deren Brauer-Bäume zu betrachten. Wir müssen so genannte *unipotente Blöcke* und deren *unipotente Charaktere* untersuchen. Selbige finden ihre Herleitung in Arbeiten von Deligne und Lusztig. Eine Beschreibung dergleichen wird beispielsweise in [FS1] auf den Seiten 8 und folgende oder in [Lu1] oder [Lu2] gegeben. Wir begnügen uns an dieser Stelle mit der Bemerkung, dass die Menge der unipotenten Charaktere einer Gruppe  $H$  vom Lie-Typ eine Teilmenge der irreduziblen Charaktere von  $H$  ist und wählen als Bezeichnung für die Menge der unipotenten Charaktere  $\text{Irr}_{\text{unipot}}(H)$ .

Schauen wir uns die wichtigen Ergebnisse an.

### 2.2.9 Satz

Die Menge der unipotenten Charaktere von  $G_n(q)$  steht in Bijektion zu der Menge aller Partitionen von  $n$ , d.h.

$$\{\text{Irr}_{\text{unipot}}(G_n(q))\} = \{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}.$$

**Beweis:** Vgl. [FS3]. □

### 2.2.10 Satz

Seien  $\chi_\lambda, \chi_\mu$  zwei unipotente Charaktere von  $G_n(q)$ , die zu den Partitionen  $\lambda \vdash n$  bzw.  $\mu \vdash n$  korrespondieren. Dann gilt:

Genau dann liegen  $\chi_\lambda$  und  $\chi_\mu$  im selben  $l$ -Block, wenn  $\lambda$  und  $\mu$  den gleichen  $e$ -Kern haben.

**Beweis:** Vgl. [FS3]. □

### 2.2.11 Satz

Die unipotenten Blöcke von  $G_n(q)$  korrespondieren zur Menge aller  $e$ -Kerne  $\kappa \vdash m$  mit  $m \leq n$ .

**Beweis:** Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.2.9 und 2.2.10. □

**2.2.12 Satz**

Seien  $B_\kappa$  ein unipotenter Block von  $G_n(q)$  mit zyklischer Defektgruppe und korrespondierendem  $e$ -Kern  $\kappa \vdash n - e$ .

Betrachte nun die zu  $\kappa$  korrespondierende  $\beta$ -Menge  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  und den  $e$ -Abakus von  $X$ . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei jede Zählkette mit einer Perle besetzt; man gehe sonst zu einer äquivalenten  $\beta$ -Menge über. Die Indikatorperlen ordnen wir und bezeichnen sie mit  $\rho_1 > \dots > \rho_e$ .

Die Partitionen  $\lambda_{\rho_i}$ , die wir erhalten, indem wir jeweils die Haken  $(\rho_i, \rho_i + e)$  zu  $\kappa$  hinzufügen, nummerieren dann die nicht-exzeptionellen Charaktere des unipotenten Blockes  $B$ .

**Beweis:** Vgl. [FS1, S. 10]. □

**2.2.13 Bemerkung**

Veranschaulichen wir obiges Verfahren auf dem zu  $\kappa$  gehörigen Abakus-Diagramm, so müssen wir je eine Indikatorperle um eine Position hinunterschieben, die zugehörige Partition des vorliegenden Diagrammes bestimmen und dieselbe Indikatorperle wieder hochschieben, bevor wir dasselbe Verfahren mit der nächsten Indikatorperle wiederholen.

Kommen wir nun zur entscheidenden theoretischen Aussage, was die Lösung der Konstruktionsaufgabe betrifft.

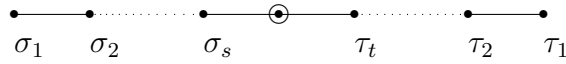
**2.2.14 Satz**

Seien  $V$  ein  $n$ -dimensionaler unitärer Vektorraum (mit einer nicht-degenerierten Sesquilinearform) über einem Körper der Ordnung  $|K| = q^2$ , so dass für  $-\bar{q} \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  die Ordnung  $|\bar{q}|_l =: e$  ungerade ist, also  $l$  unitär für  $G_n(q)$ , die zugehörige unitäre Gruppe von  $V$ , ist. Seien  $B_\kappa$  ein unipotenter Block mit zyklischer Defektgruppe von  $G$  mit  $e$ -Kern  $\kappa \vdash n - e$  und  $X = \{x_1, \dots, x_k\}$  die dazu korrespondierende  $\beta$ -Menge. Das Abakus-Diagramm habe - wieder ohne Einschränkung - auf jeder Zählkette mindestens eine Perle; die Indikatorperlen seien mit  $\rho_1 > \dots > \rho_e$  bezeichnet. Nun sei  $(\sigma_1, \dots, \sigma_s)$  die Teilfolge von  $(\rho_1, \dots, \rho_e)$  mit geraden Nummern und  $(\tau_1, \dots, \tau_t)$  entsprechend die Teilfolge mit ungeraden Nummern; dabei betrachten wir nur die Fälle, bei denen  $s$  und  $t$  von Null verschieden sind.

Aus dem Verfahren in Satz 2.2.12 (jeweiliges Hinzufügen eines  $e$ -Hakens zu  $\lambda$ ) erhalten wir zwei Typen von Partitionen:

- (a)  $\lambda_{\sigma_1, \dots, \sigma_s}$  (Perle  $\sigma_i$  wurde jeweils verschoben)
- (b)  $\lambda_{\tau_1, \dots, \tau_t}$  (Perle  $\tau_i$  wurde jeweils verschoben).

Dann ist der Brauer-Baum von  $B_\kappa$  von der Gestalt



Dabei ist der Knoten zwischen  $\sigma_s$  und  $\tau_t$  der exzeptionelle Knoten des Baums.

**Beweis:** Vgl. [FS1, S. 21]. □

### 2.2.4 Die Bedingungen an $e$ , $f$ und $p$

Denken wir nochmal zurück an unser eigentliches Ziel, so stellt sich die Situation darin anders dar als die Voraussetzungen im letzten Satz gegeben sind. In beiden Fällen ist  $l$  gegeben. Allerdings besteht unsere Aufgabe noch darin, bei gegebenem (ungeradem)  $e$  die „richtige“ Gruppe zu finden, insbesondere die Parameter  $q$  bzw.  $p$  und  $n$ . Neben der Bedingung, dass  $q$  so gewählt sein muss, dass  $l$  unitär für  $G$  ist, müssen wir eine noch weitreichendere formulieren, die bei der Entfaltung, genauer bei der Betrachtung des Zentralisators einer Defektgruppe nötig ist.

Die Primzahl  $p$  sei so gewählt, dass

$$\begin{aligned} l &\nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq 2ef - 1 \text{ und} \\ l &\mid p^{2ef} - 1 \end{aligned} \tag{15}$$

gilt.

Mit  $q = p^f$  lässt sich die letzte dieser Teilbarkeitsbedingungen umformen zu

$$l \mid q^{2e} - 1 = (q^e - 1)(q^e + 1).$$

Da  $ef \leq 2ef - 1$  ist, muss  $l$  wegen der ersten (verneinenden) Teilbarkeitsbedingung in (15) den Term  $q^e + 1$  teilen. Da auch  $2if \leq 2ef - 1$  für alle  $1 \leq i \leq e - 1$  ist, folgt ebenfalls aus der ersten Teilbarkeitsbedingung in (15), dass  $l$  nicht den Term  $p^{2if} - 1 = (q^i - 1)(q^i + 1)$  für alle  $1 \leq i \leq e - 1$  teilt. Insbesondere teilt  $l$  nicht Terme der Form  $q^i - 1$  für gerades bzw.  $q^i + 1$  für ungerades  $1 \leq i \leq e - 1$ . Dies steht im Einklang mit der Forderung nach unitärem  $l$  für  $G$  in den Grundvoraussetzungen auf Seite 33, wonach insbesondere  $|\bar{q}|_l = e$  erfüllt sein muss. Insgesamt ist die Konsistenz zwischen den Bedingungen des vorherigen und dieses Unterabschnitts gewahrt.

Die Existenz solcher Primzahlen  $p$  sichern wir mit dem Primzahlsatz von Dirichlet (Satz 2.1.18), indem wir in der dortigen Formulierung zu  $m = l$  und  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $|\bar{a}|_l = 2ef$  ein  $k_p$  fixieren, das dann eine in unserem Sinne geeignete Primzahl  $p := a + lk_p$  liefert.

Ich weise an dieser Stelle nochmals darauf hin, dass die Bedingung  $2ef \mid l - 1$ , wie wir sie schon in der Konstruktionsaufgabe formuliert haben, aus der Forderung

nach der Existenz einer Untergruppe der Ordnung  $2ef$  in  $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^*$  und nicht aus dem Satz von Brauer-Dade resultiert, nach welchem  $ef \mid l - 1$  genügen würde. Um alle Bedingungen nochmals in einer Übersicht festzuhalten, schauen wir auf die folgenden Teilbarkeitsbedingungen:  $e, f$  und  $p(\neq l)$  seien so gewählt, dass

$$\begin{aligned} 2ef & \mid l - 1, \\ l & \nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq 2ef - 1, \\ l & \mid p^{2ef} - 1 = q^{2e} - 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Mit den im letzten Unterabschnitt zitierten Sätzen können wir jetzt ein geeignetes  $n$  bestimmen.

### 2.2.15 Satz

Seien  $e \in \mathbb{N}$  eine ungerade und  $s$  eine natürliche Zahl mit  $1 \leq s \leq e - 1$ . Dann existieren ein  $n \in \mathbb{N}$  und ein  $e$ -Kern  $\kappa \vdash n - e$ , so dass der zugehörige Abakus Perlen auf jeder Position der ersten Zeile und genau  $s$  gerade sowie  $t := e - s$  ungerade Indikatorperlen hat und dass die zugehörige  $\beta$ -Menge zusätzlich ein 2-Kern ist.

**Beweis:** Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir  $1 \leq s \leq \frac{e-1}{2}$  annehmen (betrachte sonst  $t = e - s$ ).

Beachte, dass zwei untereinander liegende Positionen des Abakus von verschiedener Parität sind.

Zunächst stecken wir auf jede Position der ersten Zeile eine Perle. Anschließend belegen bei Zählkette 0 beginnend  $2s + 1$  (nebeneinander liegende) Ketten mit jeweils einer Perle. Damit erreichen wir bis zu dieser Stelle ein Bestecken von genau  $s$  gerade Indikatorperlen. Danach wird jede zweite Kette - deren Position dann auf der 2. Zeile ungerade ist - mit einer weiteren Perle besteckt.

Wir erreichen dadurch, dass einerseits keine ungerade Position der zweiten Zeile unbesteckt bleibt und andererseits die geraden Indikatorperlen so früh wie möglich aufgesteckt werden.

Auf diese Weise erhalten wir einen Abakus mit der gewünschten Anzahl von geraden bzw. ungeraden Indikatorperlen, dessen korrespondierende  $\beta$ -Menge gleichzeitig ein  $e$ -Kern und ein 2-Kern ist. Zum Abschluss des Beweises müssen wir noch beschreiben, wie wir die eigentlichen Parameter  $\lambda$  und  $n$  finden. Dazu seien die verwendeten Perlen mit  $x_1 < x_2 \cdots < x_k$  nummeriert; dann ergeben sich die gesuchte Partition und  $n$  (mittels Satz 2.2.12) zu:

$$\begin{aligned} \kappa & = (x_1 - 0, x_2 - 1, \dots, x_e - (e - 1), x_{e+1} - e, \dots, x_k - (k - 1)) \\ & = (0, \dots, 0, 1, 2, \dots, \frac{e - (2s + 1)}{2}) \vdash \sum_{i=0}^{\frac{e - (2s + 1)}{2}} i =: n - e. \end{aligned}$$

(Die ersten Nullen ergeben sich, da wir die gesamte 1. Zeile und die ersten  $2s + 2$  Zählketten in der zweiten Zeile lückenlos mit Perlen besetzt haben.)  $\square$

Die zusätzliche Forderung nach dem 2-Kern hängt mit der späteren Forderung zusammen, dass ein bestimmter unipotenter Charakter im zu  $\kappa$  korrespondierenden Block  $B_\kappa$  invariant unter einem gewissen, später definierten Automorphismus sein soll.

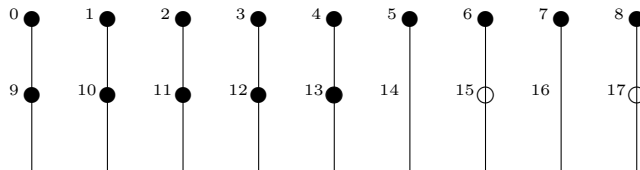
### 2.2.16 Bemerkung

Die Fälle  $s = 0$  und  $s = e$  sind hier ohne Interesse, da sie in den Fall „gleichmäßiger Stern“ fallen und mit dem vorherigen Abschnitt abgedeckt wurden.

### 2.2.17 Beispiel

Seien  $e = 9$  und  $s = 2$ . Dann ist  $t = 7$ . Um die unterschiedlichen Schritte im Beweis zu Satz 2.2.15 unterscheiden zu können, seien

- Die Perlen der 1. Zeile grundsätzlich ausgefüllt,
- die Perlen der 2. Zeile der Zählketten 0 bis  $2s + 1$  ebenfalls ausgefüllt und
- die Perlen der 2. Zeile der Zählketten  $2s + 2$  bis  $e$  unausgefüllt.



Obiges Diagramm zeigt den nach Satz 2.2.15 konstruierten Abakus. Wir haben 12, 10 als gerade und 17, 15, 13, 11, 9, 7, 5 als ungerade Indikatorperlen. Dabei berechnet sich die korrespondierende Partition zu:

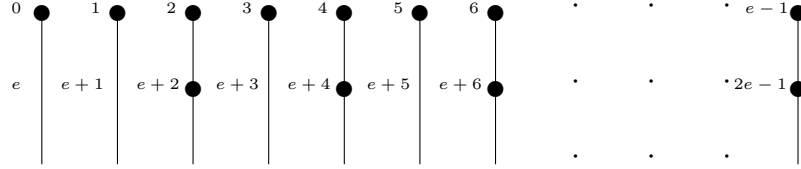
$$\kappa = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 2) \vdash 3 \text{ und}$$

$n$  zu  $n = 3 + 9 = 12$ .

Ohne Beweis möchte ich bemerken, dass obige Methode sogar ein minimales  $n$  findet.

### 2.2.18 Bemerkung

Betrachten wir ein ganz spezielles Paar  $(s, t)$ , nämlich  $(1, e-1)$ . Ohne näheren Beweis stellen wir fest, dass obige Methode ein minimales  $n_{min}$  herausgibt, während das Bestecken nach folgender Art ein maximales  $n_{max}$  liefert (da uns später nur die Mengen  $\{s, t\}$  und nicht die geordneten Paare interessieren, können wir die Rollen von  $s$  und  $t$  vertauschen):



Dabei ist die zu  $n_{max}$  gehörige Partition von der Form:

$$\lambda_{max} = (2, 3, 4, \dots, \frac{e-1}{2} + 1),$$

während sich die zu  $n_{min}$  korrespondierende Partition zu

$$\lambda_{min} = (1, 2, 3, \dots, \frac{e-1}{2} - 1)$$

ergibt. Uns zeigt diese Wahl der Parameter  $s$  und  $t$ , dass im Allgemeinen  $n$  von der Ordnung  $e^2$  ist.  $\square$

Nach Berücksichtigung der Bedingungen für  $q$  in (16), deren Begründung sich teilweise erst aus dem Entfalten ergibt (siehe nächster Unterabschnitt), finden wir nun die Gruppe  $GU_n(q)$ , die einen Block mit gewünschtem (reellen) Stamm hat.

## 2.2.5 Der Coxeter-Torus in der unitären Gruppe

Nach Satz 2.2.15 haben wir ein geeignetes  $n \in \mathbb{N}$  gefunden, so dass  $G = GU_n(q)$  fixiert werden kann. Wir müssen allerdings noch sicher stellen, dass  $G$  einen unipotenten  $l$ -Block mit zyklischer Defektgruppe besitzt. Den Schlüssel dazu finden wir wieder in maximalen zyklischen irreduziblen Untergruppen, also in Coxeter-Tori von  $G$ .

Beginnen wir mit der Theorie. Im nächsten Satz formulieren wir eine Verallgemeinerung von Satz 2.1.4, die in diesem Abschnitt nötig ist.

### 2.2.19 Satz

*Es gibt eine Bijektion zwischen der Menge der Blöcke einer Gruppe  $H$  mit Defektgruppe  $D$  und der Menge von Konjugiertenklassen in  $N_H(D)$  von Blöcken  $\beta$  von  $DC_H(D)/D$  mit Defekt 0, so dass  $|Stab_{N_H(D)}(\beta) : DC_H(D)|$  nicht durch  $l$  teilbar ist.*

**Beweis:** Vgl. [Alp, S. 109 f, Theorem 4].  $\square$



**2.2.20 Lemma**

- (a) Ist  $m$  eine ungerade natürliche Zahl, so hat  $GU_m(q) \leq GL_m(q^2)$  irreduzible zyklische Untergruppen der Ordnung  $q^m + 1$ , und jede irreduzible zyklische Untergruppe von  $GU_m(q)$  hat eine Ordnung, die  $q^m + 1$  teilt.
- (b) Ist  $m$  eine gerade natürliche Zahl, so hat  $GU_m(q)$  keine irreduziblen zyklischen Untergruppen.

**Beweis:** Vgl. [Hup2, S. 149]. □

Teil (b) des letzten Lemmas deutet auf den Grund, warum wir verschiedene Typen des ungleichmäßigen Sterns, d.h. gerades und ungerades  $e$  unterscheiden. Bevor wir Näheres über die Defektgruppen erfahren, schauen wir auf ein weiteres Lemma, das strukturelle Aufschlüsse von  $G$  zulässt.

**2.2.21 Lemma**

Für eine natürliche Zahl  $e \leq n$  gilt:

$$GU_e(q) \times GU_{n-e}(q) \leq GU_n(q) = G.$$

Insbesondere gilt: Die Gruppe  $G'$  ist genau die Gruppe aller Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

mit  $A_1 \in GU_e(q)$  und  $A_2 \in GU_{n-e}(q)$ .

**Beweis:** Sei die Orthonormalbasis  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$  von  $V$  wie in den Grundvoraussetzungen auf Seite 32. Dann liefert die Zerlegung von  $V$  in den Teilraum

$$V' := \langle v_1, \dots, v_e \rangle \oplus \langle v_{e+1}, \dots, v_n \rangle$$

die gewünschte Untergruppe von  $G$ . □

**2.2.22 Satz**

Seien  $G = GU_n(q)$  und  $e$  wie oben und  $B_\kappa$  ein unipotenter Block mit  $e$ -Kern  $\kappa \vdash n - e$ . Dann ist eine  $l$ -Sylowgruppe von  $GU_e(q)$  eine Defektgruppe von  $B_\kappa$ .

**Beweis:** Vgl. [CaEn]. □

**2.2.23 Bemerkung**

Die  $l$ -Sylowgruppe einer maximalen zyklischen irreduziblen Untergruppe  $T$  von  $GU_e(q)$  ist auch eine  $l$ -Sylowgruppe von  $GU_e(q)$ . Insbesondere sind nach Satz 2.2.22 die Defektgruppen von  $B_\kappa$  zyklisch.

**Beweis:** Nach Wahl der Parameter  $e$  und  $q$  teilt  $l$  zwar  $q^e + 1$ , also die Ordnung des (fixierten) Coxeter-Torus, nicht jedoch Terme der Form  $q^i - (-1)^i$  für  $1 \leq$

$i \leq e - 1$  (man vergleiche die Diskussion auf Seite 35 rund um die Gleichungen (16)). Andererseits ist die Ordnung von  $GU_e(q)$  gegeben durch

$$|GU_e(q)| = q^{\frac{e(e+1)}{2}} \prod_{i=1}^e (q^i - (-1)^i).$$

Mit der Vorüberlegung und der Grundvoraussetzung  $l \neq p$  folgt die Behauptung.  $\square$

Fixieren wir von nun an zu gegebenem unipotenten Block  $B_\kappa$  eine Defektgruppe  $D$  von  $B_\kappa$  und einen Coxeter-Torus  $T =: \langle t \rangle$  von  $GU_e(q)$ , in dem  $D$  liegt (vergleiche auch Lemma 2.2.20).

Dann können wir  $T$  mittels Lemma 2.2.21 in  $G$  einbetten, indem wir  $t \in T$  der Matrix

$$\tilde{t} := \begin{bmatrix} t & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ 0 & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

zuordnen. Den auf diese Weise eingebetteten Coxeter-Torus von  $GU_e(q)$  bezeichnen wir - unter Missbrauch der doppelten Bezeichnung - ebenfalls mit  $T$ .

Bevor wir eine im Sinne der Konstruktionsaufgabe geeignete Erweiterung von  $G$  vorstellen, schauen wir auf einige strukturelle Eigenschaften von  $T$ .

### 2.2.24 Lemma

Seien  $GU_e(q)$  und  $T$  wie oben. Dann gilt:

$$C_{GU_e(q)}(T) = T.$$

**Beweis:** Fassen wir  $GU_e(q)$  als Untergruppe der linearen Gruppe  $GL_e(q^2)$  auf. Der Beweis des Satzes 3.10 in [Hup1, S. 165 f] zeigt, dass jede zyklische, irreduzible Untergruppe von  $GL_e(q^2)$  in einem Coxeter-Torus von  $GL_e(q^2)$  liegt; insbesondere existiert ein Coxeter-Torus  $T_1$  von  $GL_e(q^2)$ , in welchem  $T$  liegt. Nun ist einerseits  $T_1 \cap GU_e(q)$  eine zyklische und irreduzible Untergruppe von  $GU_e(q)$ , andererseits ist  $T$  eine maximale zyklische irreduzible Untergruppe von  $GU_e(q)$ , so dass sogar Gleichheit gilt:

$$T = T_1 \cap GU_e(q).$$

Da  $l$  die Ordnung von  $T$  teilt, liegt darin ein Element  $z_0$  der Ordnung  $l$ . Wegen der Voraussetzung (16) schließen wir genau wie im Beweis zu Lemma 2.1.15, dass  $z_0$   $e$  paarweise verschiedene Eigenwerte hat. Nun können wir mit derselben Argumentation wie im Beweis zu Satz 2.1.16 (hier für  $T$  statt  $D$  und für  $T_1$  statt  $T$ ) folgern:

$$C_{GL_e(q^2)}(T) = T_1.$$

Daraus folgt aber sofort

$$\begin{aligned} C_{GU_e(q)}(T) &= C_{GL_e(q^2)}(T) \cap GU_e(q) \\ &= T_1 \cap GU_e(q) \\ &= T. \end{aligned}$$

□

Auch in diesem Abschnitt untersuchen wir den Normalisator und den Zentralisator von  $T$  in  $G$ .

### 2.2.25 Lemma

Mit den Bezeichnungen für  $G$ ,  $e$ ,  $n$  und  $T$  von oben gilt:

- (a)  $C_G(T) = T \times GU_{n-e}(q)$ .
- (b)  $N_G(T) = N_{GU_e(q)}(T) \times GU_{n-e}(q) = T \rtimes C_e \times GU_{n-e}(q)$ , wobei  $C_e$  eine zyklische Gruppe der Ordnung  $e$  ist.

**Beweis:**

- (a) Wir zeigen die Behauptung an dem  $T$  erzeugenden Element

$$\tilde{t} = \begin{bmatrix} t & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ 0 & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Betrachten wir zum Beweis die Matrix-Gleichung

$$\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & E_{n-e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & E_{n-e} \end{bmatrix}$$

mit entsprechend der Matrix  $\tilde{t}$  dimensionierten Matrizen  $a, b, c, d$ , so dass

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ein Element von  $GU_n(q)$  ist.

Es gilt

$$\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & E_{n-e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix}$$

sowie

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & E_{n-e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at & b \\ ct & d \end{bmatrix}.$$

Ist

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ein Element des Zentralisators von  $T$  in  $G$ , so muss folglich gelten:

$$\begin{bmatrix} ta & tb \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at & b \\ ct & d \end{bmatrix},$$

also

$$ta = at \text{ und} \tag{17}$$

$$tb = b \text{ und} \tag{18}$$

$$ct = c \text{ und} \tag{19}$$

$$d = d. \tag{20}$$

Wir diskutieren zunächst die Gleichungen (18) und (19). Gleichung (18) zeigt, dass eine von 0 verschiedene Spalte von  $b$  ein Eigenvektor von  $t$  zum Eigenwert 1 ist. Da  $t$  als Erzeuger des Coxeter-Torus  $T$  keinen Eigenwert 1 hat folgt, dass  $b$  die Nullmatrix ist.

Eine völlig analoge Argumentation mit Zeilen statt Spalten zeigt, dass auch  $c$  die Nullmatrix sein muss. Damit sind aber  $a$  und  $d$  invertierbare Matrizen, so dass Gleichung (17) äquivalent mit  $a \in C_{GU_e(q)}(T)$  und Gleichung (20) äquivalent mit  $d \in GU_{n-e}(q)$  ist.

Somit ist  $C_G(T) = C_{GU_e(q)}(T) \times GU_{n-e}(q)$ . Aus Lemma 2.2.24 folgt nun die Behauptung.

(b) Sei

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in N_G(T)$$

mit der Matrix  $\tilde{t}$  entsprechenden Dimensionen für  $a, b, c, d$ ; da  $T$  zyklisch ist, muss eine natürliche Zahl  $r \leq q^e + 1$  existieren mit  $\text{ggT}(q^e + 1, r) = 1$  und

$$\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & E_{n-e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^r & 0 \\ 0 & E_{n-e} \end{bmatrix}.$$

Eine dem ersten Teil des Beweises analoge Rechnung liefert die folgenden Matrixgleichungen:

$$ta = at^r \text{ und} \tag{21}$$

$$tb = b \text{ und} \tag{22}$$

$$c = ct^r \text{ und} \tag{23}$$

$$d = d. \tag{24}$$

Gleichung (22) behandeln wir genauso wie Gleichung (18) aus dem ersten Teil des Beweises, so dass wir bereits schließen können, dass  $b$  die Nullmatrix ist. Gleichung (23) zeigt, dass eine von 0 verschiedene Zeile von  $c$  ein Eigenvektor von  $t^r$  zum Eigenwert 1 ist. Auch  $t^r$  erzeugt  $T$ , hat also keinen Eigenwert 1. Somit ist  $c$  die Nullmatrix.

Damit sind  $a$  und  $d$  invertierbare Matrizen, so dass Gleichung (21) äquivalent mit  $a \in N_{GU_e(q)}(T)$  und Gleichung (24) äquivalent mit  $d \in GU_{n-e}(q)$  ist. Der Beweis der zweiten Gleichheit kommt nicht mehr mit den bisher gewohnt elementaren Mitteln aus. Statt dessen müssen wir Ergebnisse aus dem Gebiet der maximalen Tori zitieren. Die entscheidenden Aussagen finden wir in [Ca, S. 87, Prop. 3.3.6] sowie [Ca, S. 97, Cor. 3.6.5]. Zur Sicherstellung der nötigen Voraussetzungen vergleiche man beispielsweise [Ve].  $\square$

An dieser Stelle möchte ich bemerken, dass der einfache Zugang der Coxeter-Tori in ein weitaus komplexeres Gebiet eingebettet werden kann, wie es beispielsweise im dritten Abschnitt in [Ca] geschieht. So findet man in [Ca, S. 86, Prop. 3.3.5] insbesondere Formeln zur Herleitung der Ordnung eines Coxeter-Torus, die wir hier als vorher gegeben behandelt haben. Auch die Konjugiertheit aller Coxeter-Tori, wie wir in Bemerkung 2.2.29 formulieren und mit elementaren Mitteln alleine wegen der Bedingungen (16) an  $p$  beweisen können, lässt sich in dieser allgemeinen Betrachtungsweise auf direktem Wege beweisen.

### 2.2.26 Lemma

Seien  $G$  und  $T$  wie oben. Zudem sei  $D$  die  $l$ -Sylowgruppe von  $T$ . Dann gilt:

$$(a) \quad C_G(D) = T \times GU_{n-e}(q).$$

$$(b) \quad N_G(D) = N_G(T).$$

#### Beweis:

- (a) Analog dem Beweis zu Lemma 2.2.25 werden die entsprechenden Matrixgleichungen aufgestellt und diskutiert. Mit der gleichen Argumentation kann sofort

$$C_G(D) = C_{GU_e(q)}(D) \times GU_{n-e}(q)$$

gefolgert werden. Bleibt nur noch der Beweis der Aussage  $C_{GU_e(q)}(D) = T$ . Wir bezeichnen auch hier, wie im Beweis zu Lemma 2.2.24, den Coxeter-Torus in  $GL_e(q^2)$ , in dem  $T$  liegt, mit  $T_1$ . Dann wissen wir bereits nach Lemma 2.1.13, dass  $C_{GL_e(q^2)}(D) \geq T_1$  ist. Jetzt folgen wir genau den Argumenten des Beweises zu Satz 2.1.16 (mit  $T_1$  statt  $T$ ), um  $C_{GL_e(q^2)}(D) = T_1$  schließen zu können. Wir benutzen abermals Ergebnisse aus dem Beweis zu

Lemma 2.2.24, indem wir folgern:

$$\begin{aligned} C_{GU_e(q)}(D) &= C_{GL_e(q^2)(D)} \cap GU_e(q) \\ &= T_1 \cap GU_e(q) \\ &= T. \end{aligned}$$

Man beachte auch hier, dass wegen der Bedingungen (16) wie im Beweis zu Satz 2.1.16 vorgegangen werden kann.

- (b) Wir können die gleiche Argumentation führen wie im Beweis zu [Hup1, S. 187 ff, Satz 7.3 (a)], nachdem wir dortiges  $\mathcal{T}$  bzw.  $\langle T \rangle$  durch unseren fixierten Coxeter-Torus  $T$  bzw.  $D$  ersetzt haben. Wegen der Teilbarkeitsbedingungen (16) sind dann die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, so dass dieser Teil des Beweises für unsere Zwecke verfolgt werden kann.  $\square$

### 2.2.27 Bemerkung

Ähnlich wie im letzten Abschnitt sei  $\alpha := \bar{\alpha}|_{\mathbb{F}_{q^2}}$  der eingeschränkte Frobenius-Automorphismus.

Dann operiert  $\langle \alpha \rangle$  gemäß Bemerkung 2.1.9 auf  $GL_n(q^2)$ .

Da wir Blöcke von  $GU_n(q)$  anschauen, müssen wir die Operation so anpassen, dass zum einen  $GU_n(q)$  und der oben fixierte Coxeter-Torus  $T$  von  $GU_e(q)$  invariant bleiben und zum anderen die daraus resultierende semidirekte Erweiterung von geeigneter Ordnung ist.

### 2.2.28 Bemerkung

Mit den Bezeichnungen von oben gilt:

$$\alpha(GU_n(q)) = GU_n(q).$$

**Beweis:** Sei  $x \in GU_n(q)$ , d.h. es gilt

$$x\bar{x}^t = E_n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} [\alpha(x)\alpha(\bar{x})^t]_{i,j} &= \sum_{k=1}^n [\alpha(x)]_{i,k} [\alpha(\bar{x})]_{j,k} \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha([x]_{i,k} [\bar{x}]_{j,k}) \\ &= \alpha\left(\sum_{k=1}^n ([x]_{i,k} [\bar{x}]_{j,k})\right) \\ &= \alpha([E_n]_{i,j}) \\ &= [E_n]_{i,j}. \end{aligned}$$

Damit ist  $\alpha(x)$  ein Element von  $GU_e(q)$ .  $\square$

Wie der Beweis zeigt, gelten entsprechende Aussagen auch für andere Potenzen von  $\alpha$ . Um später Erweiterungen von geeigneter Ordnung zu finden, wird für uns  $\alpha^2$  von Interesse sein.

### 2.2.29 Bemerkung

Die Coxeter-Tori von  $GU_e(q)$  sind in  $GU_e(q)$  konjugiert.

**Beweis:** Nach den Sylowsätzen sind die  $l$ -Sylowgruppen von  $GU_e(q)$  darin konjugiert. Zudem sind die Coxeter-Tori von  $GU_e(q)$  zyklische Gruppen, in denen nach Lemma 2.2.23 die  $l$ -Sylowgruppen von  $GU_e(q)$  liegen, was die Konjugiertheit derselben erzwingt.  $\square$

Man beachte, dass diese elementare Beweismethode hier nur wegen der starken Bedingungen möglich ist, die wir an  $p$  stellen.

Wir haben jetzt die nötige Theorie hergeleitet, um die zum Ziel führende Operation auf  $G$  zu formulieren.

### 2.2.30 Definition und Bemerkung

Seien  $G = GU_n(q)$ ,  $\alpha$  und  $T$  wie oben.

- (a) Mit  $\alpha^2$  bezeichnen wir auch den gemäß Bemerkung 2.2.28 bewirkten Automorphismus von  $G$ . Dann ist  $|\alpha^2| = f$  in  $\text{Aut}(G)$ .  
Der Automorphismus  $\alpha^2$  lässt auch die Untergruppen  $GU_e(q)$  und  $GU_{n-e}(q)$  von  $G$  fest.
- (b) Wir setzen  $\hat{G} := G \rtimes \langle \alpha \rangle$ . Dann ist  $|\hat{G}| = |G| \cdot f$ . Nach den Grundvoraussetzungen von Seite 32 teilt  $l$  insbesondere nicht den Grad  $f$  der Erweiterung.
- (c) Es ist  $\alpha^2(T)$  ebenfalls ein Coxeter-Torus von  $GU_e(q)$ . Nach Bemerkung 2.2.29 existiert folglich ein Element  $g_0 \in GU_e(q)$ , so dass  $g_0[\alpha^2(T)]g_0^{-1} = T$  ist.
- (d) Setze  $\sigma := (g_0, \alpha^2) \in \hat{G}$ . Dann ist  $T$  invariant unter  $\sigma$ . Zudem gilt

$$\hat{G} = G\langle \sigma \rangle.$$

### Beweis:

- (a) Die Behauptung über den Erweiterungsgrad ist klar. Auch die behauptete Invarianz der Untergruppen ist offensichtlich, sobald man die Einbettungen

$$\begin{aligned} \iota_1 : GU_e(q) &\longrightarrow GU_n(q) \\ g &\mapsto \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & E_{n-e} \end{bmatrix}, \\ \iota_2 : GU_{n-e}(q) &\longrightarrow GU_n(q) \\ g &\mapsto \begin{bmatrix} E_e & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \end{aligned}$$

betrachtet.

- (c) Da  $\alpha^2$  ein Automorphismus von  $GU_n(q)$  ist und  $GU_e(q)$  invariant lässt, ist  $\alpha^2(T)$  ebenfalls eine irreduzible zyklische Gruppe der Ordnung  $q^e + 1$ , also ein Coxeter-Torus von  $GU_e(q)$ .
- (d) Wir folgen analog dem Beweis zu Definition und Bemerkung 2.1.10(d), indem wir dort  $\alpha$  durch  $\alpha^2$  ersetzen.  $\square$

An dieser Stelle ist es nötig, einen kleinen Exkurs zu machen, um in kurzer Form ganz bestimmte unipotente Charaktere hervorzuheben. Ich habe bereits oben angedeutet, dass sich viele Elemente der Beweise dieser Arbeit in einem viel größeren Themenkomplex, wie er beispielsweise in [Ca] behandelt wird, verstehen lassen. Auch die unitäre Gruppe hat dort eine andere Beschreibung, als wir sie in dieser Arbeit finden. So lässt sich  $GU_k(q)$  (für eine natürliche Zahl  $k$ ) als Menge der Fixpunkte von  $GL_k(\overline{\mathbb{F}}_q)$  unter einem sogenannten Frobeniusmorphismus  $F$  verstehen, der in diesem Fall  $x \in GL_k(\overline{\mathbb{F}}_q)$  auf  $(\bar{x}^{-1})^t$  abbildet.

Weiter finden wir im Abschnitt 7.2 in [Ca] eine Einführung der so genannten *verallgemeinerten Charaktere von Deligne-Lusztig*, wie wir sie in einem späteren Beweis benötigen werden. Wir übernehmen die Schreibweise aus [Ca] und bezeichnen einen solchen verallgemeinerten Charakter mit  $R_{T,\theta}^{GU_k(q)}$  für einen  $F$ -stabilen maximalen Torus  $T$  von  $GU_k(q)$  und einen irreduziblen Charakter  $\theta$  von  $T$ . Aus diesem Kontext heraus findet sich übrigens auch die Definition für unipotente Charaktere, die wir oben nur als besondere Teilmenge der gewöhnlichen Charaktere eingeführt haben. Für weitere Einzelheiten verweise ich auf den entsprechenden Abschnitt in [Ca].

Nach Einführung dieser Terminologie können wir jetzt die eigentliche, für uns wesentliche Definition einfügen:

### 2.2.31 Definition

Ein Charakter  $\chi \in \text{Irr}(GU_k(q))$  heisst *kuspidal*, falls für alle echten Levi-Untergruppen  $L$  von  $GU_k(q)$  gilt:

$$R_{L,\chi}^{GU_k(q)} = 0.$$

Die Existenz von kuspidalen unipotenten Charakteren behandelt der nächste Satz:

### 2.2.32 Satz

Die Gruppe  $GU_k(q)$  hat genau dann einen kuspidalen unipotenten Charakter, wenn  $k$  von der Form  $\frac{r(r+1)}{2}$  für eine natürliche Zahl  $r$  ist. In diesem Fall hat  $GU_k(q)$  genau einen kuspidalen unipotenten Charakter, der durch eine Partition  $\kappa$  parametrisiert wird, die äquivalent ist zur Partition  $\kappa' \vdash (1, 2, \dots, r)$ . Die Partition  $\kappa$  ist dann ein 2-Kern.

**Beweis:** Man vergleiche [HiKe, S. 395 f, Abschnitt 5.2].  $\square$

Kommen wir zur darstellungstheoretischen Diskussion von  $\hat{G}$ . Nach Festlegen der Parameter  $n$  und  $q$  (unter Berücksichtigung aller Bedingungen) finden wir



einen unipotenten  $l$ -Block  $B_\kappa$  von  $G$  mit zyklischer Defektgruppe, so dass der zugehörige Brauer-Baum ein reeller Stamm mit  $e$  Kanten wie in Bild (2.2.1) ist. Erinnern wir uns:  $B_\kappa$  ist ein zyklischer Block von  $G$ , dessen Defektgruppe  $D$  in  $GU_e(q)$  liegt und der durch den  $e$ -Kern  $\kappa \vdash n - e$  charakterisiert ist. Zum anderen finden wir in  $G$  die Untergruppe

$$GU_e(q) \times GU_{n-e}(q) \leq G.$$

In  $GU_{n-e}(q)$  fixieren wir den unipotenten, kusalen Charakter  $\chi_\kappa$  vom Defekt 0 (vergleiche Satz 2.2.19). Dies ist möglich, da nach der Steck-Methode in 2.2.15  $n - e$  genau von der Form  $r(r + 1)/2$  für ein geeignetes  $r \in \mathbb{N}$  ist. Völlig analog zum linearen Fall ist  $C_{GU_e(q)}(D)/D = T/D =: L$ , also  $T = D \times L$ , so dass der kanonische Charakter von  $B_\kappa$  gleich  $\lambda_0 := 1_T \otimes \chi_\kappa$  ist. Wir wissen bereits, wie der zugehörige Brauer-Baum aussieht, insbesondere dass  $|T_{N_G(D)}(\lambda_0) : C_G(D)| = |N_G(D) : C_G(D)| = e$  gilt. Analysieren wir jetzt die erweiterte Gruppe  $\hat{G}$  genauer.

### 2.2.33 Lemma

Mit den Bezeichnungen von oben gilt:

$$C_{\hat{G}}(D) = C_G(D) = C_{GU_e(q)}(D) \times GU_{n-e}(q).$$

**Beweis:** Nach Ersetzen von  $\alpha$  durch  $\alpha^2$  folge man dem Beweis von Satz 2.1.17, indem wir auch hier annehmen, der Zentralisator von  $D$  werde beim Übergang von  $G$  zu  $\hat{G}$  größer. Dann erhält man analog zum obigen Beweis die Bedingung:

$$l \mid p^{2i+f \cdot k_0} \text{ für ein } 1 \leq i \leq f - 1 \text{ und ein } 0 \leq k_0 \leq e - 1. \quad (25)$$

Als höchstmögliche Potenzen von  $p$  ergeben sich somit

$$2(f - 1) + f(e - 1).$$

Dies formen wir um zu

$$\begin{aligned} 2(f - 1) + f(e - 1) &= 2f - 2 + ef - f \\ &= f + ef - 2 \\ &< f + ef - 1 \leq 2ef - 1. \end{aligned}$$

Dies zeigt uns, dass Gleichung (25) im Widerspruch zu den Voraussetzungen in (16) steht, die  $p$  erfüllt. Damit finden wir in  $D$  ein Element, das von keinem Element aus  $\hat{G} \setminus G$  zentralisiert wird.  $\square$

### 2.2.34 Bemerkung

Mit den Bezeichnungen von oben gibt es genau einen Block  $\hat{B}$  von  $\hat{G}$ , der  $B_\kappa$  überdeckt; es gilt sogar  $\hat{B} = (B_\kappa)^{\hat{G}}$ .

**Beweis:** Vgl. [Alp, S. 106, Theorem 1 (5)].  $\square$

Zum Nachweis, dass  $\hat{B}$  von der in der Konstruktionsaufgabe gegebenen Gestalt ist, müssen wir für den Trägheitsindex

$$\hat{e} := |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : C_{\hat{G}}(D)| = e \cdot f$$

nachweisen. Um dies zu zeigen, muss nach dem letzten Lemma 2.2.33 nur noch der Index  $|T_{N_{\hat{G}}(D)}(\chi_0) : T_{N_G(D)}(\chi_0)|$  bestimmt werden. Der Übersicht wegen führen wir nochmals alle relevanten Invarianzen auf:

### 2.2.35 Bemerkung

Seien  $G, T, D$  und  $\sigma$  wie oben. Dann gilt:

- (a) Das Element  $\sigma$  lässt  $D$  invariant.
- (b) Das Element  $\sigma$  lässt  $GU_e(q)$  invariant.
- (c) Das Element  $\sigma$  lässt  $GU_{n-e}(q)$  invariant.
- (d) Das Element  $\sigma$  lässt  $C_G(D)$  invariant.
- (e) Das Element  $\sigma$  lässt  $N_G(D)$  invariant.

**Beweis:**

- (a) Die Behauptung folgt aus der Invarianz von  $T$  unter  $\sigma$  und der Eigenschaft von  $D$ , charakteristische Untergruppe von  $T$  zu sein.
- (b) Man vergleiche Definition und Bemerkung 2.2.30(a).
- (c) Auch hier vergleiche man Definition und Bemerkung 2.2.30(a).
- (d) Diese Invarianz folgt aus derjenigen von  $D$ .
- (e) Dies folgt direkt aus der Invarianz von  $D$  unter  $\sigma$ .  $\square$

### 2.2.36 Lemma

Der kuspide unipotente Charakter  $\chi_\kappa$  ist invariant unter  $\sigma|_{GU_{n-e}(q)}$ .

**Beweis:** Wir müssen diese Behauptung nur für den Automorphismus  $\alpha' := \alpha|_{GU_{n-e}(q)}$  zeigen. Dies geschieht in zwei Schritten. Zuerst zeigen wir, dass  $\alpha'$  die unipotenten Charaktere von  $GU_{n-e}(q)$  permutiert:

Die Deligne-Lusztig-Varietäten  $\mathcal{B}_w$ , definiert im Abschnitt 7.7 in [Ca], werden durch  $\alpha'$  permutiert, so dass wir mittels [Ca, S. 202, Property 7.1.5] und [Ca, S. 250 f, Theorem 7.7.11] auf

$$R_{T_w,1}^{GU_{n-e}(q)}((\alpha')^{-1}g) = R_{T_{\alpha'(w)},1}^{GU_{n-e}(q)}(g) \text{ für alle } g \in G_{n-e}(q),$$

also auf

$$\alpha'(R_{T_w,1}^{GU_{n-e}(q)}) = R_{T_{\alpha'(w)},1}^{GU_{n-e}(q)}$$

schließen können. Mittels der Verknüpfung von unipotenten Charakteren und verallgemeinerten Charakteren, wie wir sie beispielsweise in Kapitel 12 in [Ca] finden, folgt die erste Behauptung.

Jetzt zeigen wir, dass  $\alpha'$  kuspidaale Charaktere auf kuspidaale abbildet, so dass nach der Eindeutigkeit des unipotenten kuspidaalen Charakters in Satz 2.2.32  $\alpha'(\chi_\kappa) = \chi_\kappa$  und folglich die behauptete Invarianz folgt. Zunächst stellen wir fest, dass es ein  $\alpha'$ -stabiles  $(B, N)$ -Paar gibt, so dass für alle Levi-Untergruppen  $L$  von  $GU_{n-e}(q)$

$$\alpha'(R_L^{GU_{n-e}(q)}(\chi_\kappa)) = R_L^{GU_{n-e}(q)}(\alpha'(\chi_\kappa))$$

gilt. Da die  $\chi_\kappa$  kuspidal ist, folgt aus der oberen Gleichung

$$0 = R_L^{GU_{n-e}(q)}(\alpha'(\chi_\kappa))$$

für alle Levi-Untergruppen  $L$  von  $GU_{n-e}(q)$ , was die Kuspidalität des Charakters  $\alpha'(\chi_\kappa)$  beweist. Nach dem ersten Schritt ist jedoch  $\alpha'(\chi_\kappa)$  ein unipotenter Charakter, so dass insgesamt die Behauptung folgt.  $\square$

### 2.2.37 Lemma

Für die Trägheitsgruppe von  $\lambda_0$  gilt:

$$T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) = N_{\hat{G}}(D).$$

**Beweis:** Nach Bemerkung 2.2.35(a) ist  $N_{\hat{G}}(D) = \langle N_G(D), \sigma \rangle$ . Darüber hinaus ist  $1_T \otimes \chi_\kappa$  invariant unter  $N_G(D)$  und nach Lemma 2.2.36 unter  $\sigma$ . Insgesamt folgt damit die Behauptung.  $\square$

Nach dem letzten Lemma folgt schließlich:

$$\begin{aligned} |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : T_{N_G(D)}(\lambda_0)| &= |N_{\hat{G}}(D) : N_G(D)| \\ &= |\langle \sigma \rangle| = f. \end{aligned}$$

Zum Abschluss der Indexbetrachtungen fassen wir zusammen:

$$\begin{aligned} \hat{e} := |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : C_{\hat{G}}(D)| &= |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : C_G(D)| \\ &= |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : N_G(D)| \cdot |N_G(D) : C_G(D)| \\ &= |N_{\hat{G}}(D) : N_G(D)| \cdot e \\ &= f \cdot e. \end{aligned}$$

Wieder machen wir von Lemma 3.2 in [Fei84] Gebrauch und wissen, dass der reelle Stamm der Form (2.2.1) am exzeptionellen Knoten zu einem Stern der gewünschten Form aufklappt. Die auf diese Weise gefundene Gruppe  $\hat{G}$  ist folglich eine Lösung der Konstruktionsaufgabe.

## 2.2.6 Zusammenfassung

### 2.2.38 Satz

Seien  $l$  eine ungerade Primzahl sowie  $s, t, f, d \in \mathbb{N}$  natürliche Zahlen, so dass zum einen  $s + t =: e$  ungerade ist und zum anderen

$$2ef \mid l - 1$$

gilt.

Dann existieren unendlich viele Primzahlen  $p$ , die die Bedingungen

$$\begin{aligned} l &\nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq 2ef - 1, \\ l &\mid p^{2ef} - 1 \end{aligned}$$

erfüllen. Die Primzahl kann sogar so gewählt werden, dass zusätzlich

$$l^d \parallel p^{2ef} - 1$$

gilt.

Für alle diese Primzahlen gilt mit der Bezeichnung für  $\alpha$  auf Seite 44:

Es gibt eine natürliche Zahl  $n$  und einen  $e$ -Kern  $\kappa$ , so dass der Brauer-Baum des Brauer-Korrespondenten des zu  $\kappa$  korrespondierenden unipotenten Blocks von  $GU_n(p^f)$  in der Gruppe  $GU_n(p^f) \rtimes \langle \alpha^2 \rangle$  ein Stern mit  $f$  Flügeln der Kantenlänge  $s$  und  $f$  Flügeln der Kantenlänge  $t$  ist. Im Zentrum dieses Sterns sitzt der exzeptionelle Knoten der Vielfachheit  $\frac{l^d - 1}{ef}$ .  $\square$

## 2.3 Der zweite Typ des ungleichmäßigen Sterns

### 2.3.1 Konstruktionsaufgabe

Wir werden in diesem Abschnitt eine Gruppe konstruieren, die zu gegebener ungerader Primzahl  $l$  einen  $l$ -Block mit einem Brauer-Baum von der Form „ungleichmäßiger Stern, zweiter Typ“ hat. Analog den Vorgehensweisen der letzten beiden Abschnitte schauen wir uns dazu erst Gruppen mit einem  $l$ -Block mit Brauer-Baum der folgenden Form an:

The diagram shows a horizontal line with a central node marked with a circle containing a dot. To the left of the center, there are  $s$  nodes connected by a line, with a bracket underneath labeled "s Kanten". To the right of the center, there are  $t$  nodes connected by a line, with a bracket underneath labeled "t Kanten". The entire diagram is labeled (2.3.1) on the right.

Die Bezeichnung „zweiter Typ“ bezieht sich auf die Summe  $s + t$ , die jetzt eine gerade Zahl ergeben muss. Die Konstruktionsaufgabe lautet nun: Gegeben sei eine beliebige ungerade Primzahl  $l$ . Zudem seien natürliche Zahlen  $s$  und  $t$ , deren Summe  $s + t =: 2e$  eine gerade Zahl ergibt. Zudem sei  $f > 1$  gegeben, so dass die Bedingung

$$2ef \mid l - 1$$

erfüllt ist. Konstruiere eine Gruppe  $\hat{G}$ , die einen  $l$ -Block hat, dessen zugehöriger Brauer-Baum vom zweiten Sterntyp ist, d.h.  $f$  Flügel mit je  $s$  Kanten und weitere  $f$  Flügel mit je  $t$  Kanten hat.

Wir werden zur Lösung der Konstruktionsaufgabe semidirekte Erweiterungen von symplektischen oder speziellen orthogonalen Gruppen betrachten, je nachdem zu welchen Hilfsparametern uns  $l, e$  und  $f$  führen.

Auch hier kann die Konstruktionsaufgabe durch Vorgabe der Vielfachheit des exceptionellen Knotens erweitert werden. Eine Lösung dieser Erweiterung knüpft an die Lösung der obigen Konstruktionsaufgabe an, indem die gleichen Schritte wie in Unterabschnitt 2.1.6 durchgeführt werden. Für die Herleitung der eigentlichen Lösung verzichten wir daher auf diese Erweiterung der Aufgabe.

### 2.3.2 Hilfsmittel

Auch hier führen wir zuerst technische Hilfsmittel ein, die uns bei der eigentlichen Konstruktion zu einer gewissen Übersicht verhelfen.

#### 2.3.1 Definition

- (a) Ein *Symbol*  $\Lambda = \{X, Y\}$  ist eine Menge von Teilmengen  $X, Y \subseteq \mathbb{N}_0$  der natürlichen Zahlen.
- (b) Ein Symbol heißt *degeneriert*, falls  $X = Y$  gilt.
- (c) Zwei Symbole  $\Lambda_1 = \{X_1, Y_1\}$  und  $\Lambda_2 = \{X_2, Y_2\}$  heißen *äquivalent*, falls ein  $d \in \mathbb{N}_0$  existiert mit

$$\begin{aligned} X_2 &= [0, d - 1] \cup (X_1 + d) \text{ und } Y_2 = [0, d - 1] \cup (Y_1 + d) \\ \text{oder } X_1 &= [0, d - 1] \cup (X_2 + d) \text{ und } Y_1 = [0, d - 1] \cup (Y_2 + d). \end{aligned}$$

#### 2.3.2 Definition

Sei  $\Lambda = \{X, Y\}$  ein Symbol.

- (a) Der *Defekt*  $\text{def}(\Lambda)$  von  $\Lambda$  ist die Differenz

$$\text{def}(\Lambda) = \left| |X| - |Y| \right|.$$

- (b) Der *Rang*  $\text{rg}(\Lambda)$  von  $\Lambda$  ist definiert durch:

$$\text{rg}(\Lambda) = \sum_{x \in X} x + \sum_{y \in Y} y - \left( \frac{|X| + |Y| - 1}{2} \right)^2.$$

(c) Ein *Kohaken*  $\nu$  von  $\Lambda$  ist ein Paar  $(y, x) \in \mathbb{N}_0^2$  mit  $0 \leq y < x$  und

$$\begin{aligned} & y \notin Y \text{ und } x \in X \\ \text{oder } & y \notin X \text{ und } x \in Y. \end{aligned}$$

Die Differenz  $x - y := m$  heißt die *Länge* des Kohakens  $\nu$  und wir nennen dann  $\nu$  einen  $m$ -Kohaken.

Wir werden im späteren Verlauf das Prinzip der Kohaken zu Hilfe nehmen und dahin gehend weiter führende Definitionen vorstellen.

### 2.3.3 Definition und Bemerkung

Seien  $\Lambda = \{X, Y\}$  ein Symbol und  $e \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl. Sei  $\nu = (y, x)$  ein Kohaken von  $\Lambda$ , wobei  $x \in X$  [bzw.  $x \in Y$ ] ist. Das Symbol  $\Lambda' = \{X', Y'\}$  mit

$$\begin{aligned} X' &= X \setminus \{x\} \text{ und } Y' = Y \cup \{y\} \\ \text{[bzw. } & Y' = Y \setminus \{x\} \text{ und } X' = X \cup \{y\}] \end{aligned}$$

erhalten wir durch *Wegnehmen von*  $\nu$ . Analog erhält man  $\Lambda$  aus  $\Lambda'$  durch *Hinzufügen von*  $\nu$ .

Der *e-Kokern*  $\Lambda_\infty$  von  $\Lambda$  entsteht durch sukzessives Wegnehmen von  $e$ -Kohaken, bis das zuletzt entstandene Symbol  $\Lambda_\infty$  keinen  $e$ -Kohaken mehr enthält. Der  $e$ -Kokern von  $\Lambda$  ist durch  $\Lambda$  eindeutig bestimmt.

Ist  $\Lambda_\infty$  degeneriert und  $\Lambda \neq \Lambda_\infty$ , so werden beide Kopien von  $\Lambda_\infty$  als  $e$ -Kokern verstanden.

Ähnlich wie im letzten Abschnitt können wir das Hinzufügen oder Wegnehmen von Kohaken eines Symbols an Hand von Abakus-Diagrammen visualisieren.

### 2.3.4 Definition

Seien  $e \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl und  $\Lambda = \{X, Y\}$  ein Symbol.

(a) Ein *2e-Abakus-Diagramm* ist ein Abakus mit  $2e$  Zählketten, die man von links beginnend wie folgt nummeriert:

$$\begin{array}{cccccccc} 0_l & & 1_l & \dots & (e-1)_l & 0_r & & 1_r & \dots & (e-1)_r \\ e_l & (e+1)_l & \dots & (2e-1)_l & e_r & (e+1)_r & \dots & (2e-1)_r & & \\ (2e)_l & (2e+1)_l & \dots & (3e-1)_l & (2e)_r & (2e+1)_r & \dots & (3e-1)_r & & \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & & \cdot & \dots & \cdot \end{array}$$

Die Zeilen werden bei 0 beginnend von oben nach unten nummeriert.

(b) Ein *2e-Abakus* heißt ein *zu*  $\Lambda$  *gehöriges 2e-unitäres Diagramm*, falls es auf folgende Weise mit Perlen besteckt wurde:

Die Mengen  $X$  und  $Y$  werden mit  $l$  oder  $r$  identifiziert, z.B.  $X$  mit  $l$  und

$Y$  mit  $r$ . Für  $t \in \mathbb{N}_0$  und  $0 \leq i \leq e - 1$  stecken wir eine Perle auf die  $i_l$ -te Kette und Reihe  $t$ , falls  $t$  eine gerade Zahl und  $i + t \cdot e =: x'$  ein Element von  $X$  ist, oder falls  $t$  eine ungerade Zahl und  $x'$  ein Element von  $Y$  ist. Analog wird eine Perle auf die  $i_r$ -te Kette und Reihe  $t$  gesteckt, falls  $t$  gerade und  $i + t \cdot e =: y'$  ein Element von  $Y$  ist, oder falls  $t$  ungerade und  $y'$  ein Element von  $X$  ist.

Kurz gesprochen werden Perlen für Elemente aus  $X$  in der linken Abakus-Hälfte auf geraden Reihennummern und in der rechten Abakus-Hälfte auf ungeraden Reihennummern positioniert (entsprechend umgekehrt für Elemente aus  $Y$ ).

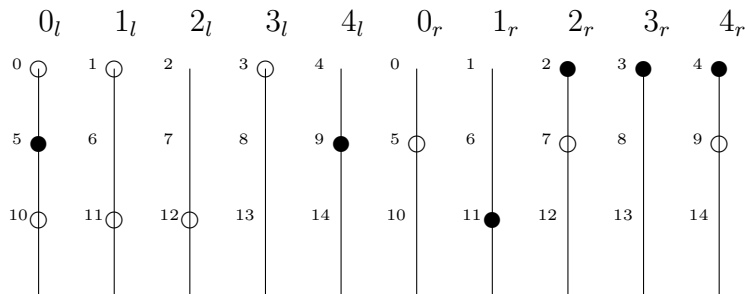
Wir nennen eine Perle  $x$ , falls sie auf der Positionsnummer  $x$  steckt.

### 2.3.5 Beispiel

Seien  $e = 5$  und  $\Lambda = \{X, Y\}$  mit

$$\begin{aligned} X &= \{0, 1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12\} \\ Y &= \{2, 3, 4, 5, 9, 11\} \end{aligned}$$

Als zugehöriges 10-unitäres Diagramm erhält man:



Dabei entsprechen die nicht-ausgefüllten Perlen den Elementen aus  $X$ , die ausgefüllten Perlen den Elementen aus  $Y$ .

Die 5-Kohaken  $(y, x)$  von  $\Lambda$  sind die folgenden:

$$\begin{aligned} x \in X & \quad (0,5) \quad (6,11) \quad (7,12) \\ x \in Y & \quad (4,9) \quad (6,11) \end{aligned}$$

Nach Entfernen dieser Kohaken erhalten wir ein Symbol  $\Lambda' = \{X', Y'\}$  mit

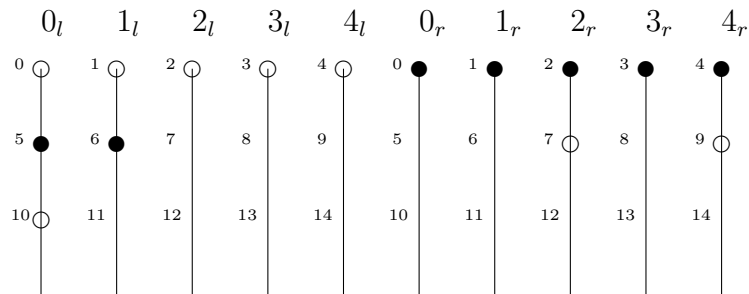
$$\begin{aligned} X' &= \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10\} \\ Y' &= \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}. \end{aligned}$$

Man sieht, dass  $\Lambda'$  noch zwei weitere Kohaken, nämlich  $\nu = (1, 6)$  und  $\nu = (2, 7)$ , besitzt. Nach Wegnehmen dieser Haken erhalten wir den 5-Kokern  $\Lambda_\infty =$

$\{X_\infty, Y_\infty\}$  mit

$$\begin{aligned} X_\infty &= \{0, 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10\} \\ Y_\infty &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Das korrespondierende 10-unitäre Diagramm von  $\Lambda_\infty$  sieht dann wie folgt aus:



### 2.3.6 Bemerkung

Das Wegnehmen eines  $e$ -Kohakens  $\nu = (y, x)$  von einem Symbol  $\Lambda$  entspricht dem Hinaufschieben der Perle  $x$  auf die darüber liegende (freie) Position  $y$ .

### 2.3.7 Definition

Gegeben seien ein Symbol  $\Lambda = \{X, Y\}$ ,  $e \in \mathbb{N}$  und das zu  $\Lambda$  gehörige  $2e$ -unitäre Diagramm. Dann heißt die Perle, die auf der untersten Position einer Kette steckt, *Indikatorperle des Diagramms*.

## 2.3.3 Theoretische Grundlagen

Ganz analog zum letzten Abschnitt werden wir zunächst Gruppen suchen, die einen Block mit Brauer-Baum der Form (2.3.1) haben. Auch hier werden uns die Ergebnisse aus der Arbeit [FS1] von Fong und Srinivasan die nötige Grundlage bieten.

Fixieren wir zunächst die Grundvoraussetzungen für die folgenden Unterabschnitte:

Wie immer sei  $l$  eine fest gewählte ungerade Primzahl. Weiterhin seien  $p$  eine ungerade, von  $l$  verschiedene Primzahl,  $q = p^r$  mit  $r \in \mathbb{N}$  eine Potenz von  $p$  sowie  $n = 2m \in \mathbb{N}$  eine gerade natürliche Zahl.

Wie sich später (vgl. Bemerkung 2.3.15) herausstellt, müssen für diese Sternform drei verschiedene Gruppentypen in Betracht gezogen werden. Zur Einführung derselben folgen wir im Wesentlichen [HiKe]: Mit  $G_n(q)$  bezeichnen wir eine der folgenden Gruppen:



- (a) Die symplektische Gruppe  $Sp_n(q)$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums über  $\mathbb{F}_q$  mit einer nicht-degenerierten symplektischen Form und einer geraden Zahl  $n = 2m$ .
- (b) Die spezielle orthogonale Gruppe  $SO_n^+(q)$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums über  $\mathbb{F}_q$  mit einer quadratischen Form mit maximalem Witt-Index und gerader Zahl  $n = 2m$ .
- (c) Die spezielle orthogonale Gruppe  $SO_n^-(q)$  eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums über  $\mathbb{F}_q$  für gerades  $n = 2m$  mit einer quadratischen Form, deren Witt-Index  $n/2 - 1$  ist.

Weiter seien  $d$  und  $e \in \mathbb{N}$  definiert durch

$$d := |\bar{q}|_l \text{ und } e := |\bar{q}^2|_l,$$

die Ordnung von  $\bar{q} \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$  bzw. von  $\bar{q}^2 \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ .

Es gilt dann

$$e = \begin{cases} d, & \text{falls } d \text{ ungerade} \\ d/2, & \text{falls } d \text{ gerade.} \end{cases}$$

(Man vergleiche zum Beispiel [HiKe, S. 400]). Im ersten Fall nennt man  $l$  *linear* für  $G_n(q)$ , im zweiten Fall *unitär* für  $G_n(q)$ .

Auf dem Weg zur Konstruktion wird uns vor allem die Theorie der Symbole und deren Kohaken beschäftigen, die mit den unitären Primzahlen für  $G_n(q)$  zusammenhängt. Schauen wir uns daher die Bedeutung von unitären Primzahlen näher an:

Es ist also  $e \in \mathbb{N}$  definiert durch  $e := |q^2|_l$  und es gelte  $|q|_l = 2e$ , d.h.  $l$  sei unitär für  $G_n(q)$ . Diese Voraussetzung übersetzt sich dann folgendermaßen in Teilbarkeitsbedingungen:

$$\begin{aligned} & l \mid (q^2)^e - 1 \text{ und } l \nmid (q^2)^i - 1, \text{ für alle } 0 \leq i \leq e - 1 \\ \text{sowie } & l \mid q^{2e} - 1 \text{ und } l \nmid q^j - 1, \text{ für alle } 0 \leq j \leq 2e - 1. \end{aligned} \quad (26)$$

Die erste Teilbarkeitsbedingung zeigt, dass

$$l \mid q^e - 1 \text{ oder } l \mid q^e + 1$$

gilt, während die (verneinende) Teilbarkeitsbedingung der zweiten Zeile aus (26)  $l \mid q^e - 1$  ausschließt.

Für unitäre Primzahlen  $l$  für  $G_n(q)$  muss  $q$  also eine Primzahlpotenz sein, die sowohl  $l \mid (q^2)^e - 1$  als auch  $l \mid q^e + 1$  erfüllt. Diese Bedingungen reichen alleine nicht aus, um die spätere Sternform zu garantieren. Wir benötigen aber erst im nächsten Unterabschnitt die Formulierung der stärkeren Bedingungen an  $p$ , da zur Bereitstellung der theoretischen Grundlagen diese genügen, so dass wir jetzt nur (26) voraussetzen.

Sei daher von nun an  $l$  unitär für  $G_n(q)$ .

Weiter sei  $B_\Lambda$  ein unipotenter  $l$ -Block von  $G$  mit zyklischer Defektgruppe, der durch den  $e$ -Kokern  $\Lambda = \{X, Y\}$  charakterisiert ist (bzgl. der theoretischen Hintergründe der unipotenten Blöcke vergleiche man beispielsweise [FS1] oder [HiKe]).

### 2.3.8 Bemerkung

Einige Eigenschaften der oben aufgeführten Gruppen können mittels ihrer Matrix-Darstellungen besser überschaubar werden. Auch hier folgen wir [HiKe].

Seien  $\bar{\mathbb{F}}_q$  ein algebraischer Abschluss von  $\mathbb{F}_q$ ,  $n = 2m$  und  $\bar{\alpha}^q$  der Standard-Frobenius-Automorphismus von  $GL_n(\bar{\mathbb{F}}_q)$ , der jeden Eintrag in die  $q$ -te Potenz erhebt.

Nach Wahl einer Basis kann diese Notation auf  $GL(V)$  für einen  $n$ -dimensionalen Vektorraum  $V$  über  $\bar{\mathbb{F}}_q$  ausgeweitet werden.

Sei zudem  $V$  versehen mit einer nicht-degenerierten symplektischen bzw. quadratischen Form  $\beta$  bzw.  $Q$ . Dann bezeichnen wir mit  $I(V, \beta)$  die Isometriegruppe von  $(V, \beta)$  und mit  $I_0(V, \beta)$  den Durchschnitt von  $I(V, \beta)$  und  $SL(V)$ . Der Vektorraum  $V$  habe die (geordnete) Basis  $(v_1, \dots, v_m, v'_1, \dots, v'_m)$ . Mit  $\mathbf{J}_m$  bezeichnen wir die  $m \times m$ -Matrix

$$\mathbf{J}_m = \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & 0 & \cdot & \\ & \cdot & \cdot & \\ & \cdot & 0 & \\ 1 & & & \end{bmatrix}.$$

- (a) Sei  $\beta : V \times V \rightarrow \bar{\mathbb{F}}_q$  die nicht-degenerierte symplektische Form, definiert durch:

$$\beta(v_i, v_j) = 0 = \beta(v'_i, v'_j) \text{ und } \beta(v_i, v'_j) = \delta_{i,j} \text{ für alle } 1 \leq i, j \leq m.$$

Dann ist die Menge der  $\bar{\alpha}^q$ -Fixpunkte  $G := (I(V, \beta))^{\bar{\alpha}^q}$  von  $I(V, \beta)$  isomorph zu  $Sp_{2m}(q)$ . Mit

$$\tilde{\mathbf{J}}_{2m} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J}_m \\ -\mathbf{J}_m & 0 \end{bmatrix}$$

gilt insbesondere:

$$G \cong \{x \in GL_{2m}(q) \mid x^t \tilde{\mathbf{J}}_{2m} x = \tilde{\mathbf{J}}_{2m}\}.$$

- (b) Sei  $Q : V \rightarrow \bar{\mathbb{F}}_q$  die quadratische Form, definiert durch:

$$Q\left(\sum_{i=1}^m x_i v_i + x'_i v'_i\right) := \sum_{i=1}^m x_i x'_i. \quad (27)$$

Dann ist die Menge der  $\bar{\alpha}^q$ -Fixpunkte  $G := (I_0(V, Q))^{\bar{\alpha}^q}$  von  $I_0(V, Q)$  isomorph zu  $SO_{2m}^+(q)$ . Insbesondere ist

$$G \cong \{x \in GL_{2m}(q) \mid x^t \mathbf{J}_{2m} x = \mathbf{J}_{2m}\}.$$

- (c) Seien  $V$  und  $Q$  wie in (b) und  $m \geq 1$ . Zudem sei  $\delta$  der Automorphismus von  $V$ , der  $v_m$  und  $v'_m$  vertauscht, während alle anderen Basis-Vektoren fest bleiben. Mit  $F := \bar{\alpha}^q \circ \text{ad } \delta$  ist dann die Menge der  $F$ -Fixpunkte  $(I_0(V, Q))^F$  von  $I_0(V, Q)$  isomorph zur speziellen orthogonalen Gruppe  $SO_{2m}^-(q)$ .

Für die Ordnungen gilt jeweils mit  $\epsilon = \pm 1$ :

- (a)  $|Sp_{2m}(q)| = q^{m^2} \prod_{i=1}^m (q^{2i} - 1)$  und  
 (b)  $|SO_{2m}^\epsilon(q)| = q^{m(m-1)} (q^m - \epsilon) \prod_{i=1}^{m-1} (q^{2i} - 1)$ .

**Beweis:** Man vergleiche [HiKe, S. 389 ff] sowie [Tay, S. 70 und S. 141].  $\square$   
 Schauen wir uns nun Sätze und Ergebnisse bezüglich der unipotenten Charaktere von  $G_n(q)$  an.

### 2.3.9 Definition

Seien  $V$  und  $G_n(q)$  wie in den Grundvoraussetzungen.

Die unipotenten Charaktere von  $G_n(q)$  werden (unabhängig von  $q$ ) durch Äquivalenzklassen von Symbolen parametrisiert. Einen unipotenten Charakter, der durch das Symbol  $\Lambda$  parametrisiert wird, bezeichnen wir mit  $\chi_\Lambda$ . Die genaue Parametrisierung in der Gruppe  $G_n(q)$  erfahren wir im nächsten Satz.

### 2.3.10 Satz

Seien  $V$  und  $G_n(q)$  wie in den Grundvoraussetzungen,  $n = 2m \geq 2$  und  $\mathcal{A}$  eine Menge von Repräsentanten von Äquivalenzklassen von Symbolen. Dann gilt in den einzelnen Fällen für  $G_n(q)$ :

(a)

$$\text{Irr}_{\text{unipot}}(Sp_{2m}(q)) = \{\chi_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{A}, \text{rg}(\Lambda) = m \text{ und } \text{def}(\Lambda) \text{ ungerade}\}.$$

(b)

$$\text{Irr}_{\text{unipot}}(SO_{2m}^+(q)) = \{\chi_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{A}, \text{rg}(\Lambda) = m \text{ und } \text{def}(\Lambda) \equiv 0 \pmod{4}\}.$$

(c)

$$\text{Irr}_{\text{unipot}}(SO_{2m}^-(q)) = \{\chi_\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{A}, \text{rg}(\Lambda) = m \text{ und } \text{def}(\Lambda) \equiv 2 \pmod{4}\}.$$

**Beweis:** Man vergleiche z.B. [HiKe, S. 396 ff].  $\square$   
 Die folgenden Sätze verknüpfen die Theorie der Symbole und deren Abakus-Diagramme mit Charakteren und Brauer-Bäumen.

**2.3.11 Satz**

Seien  $l, V$  und  $G_n(q)$  wie in den Grundvoraussetzungen, so dass  $l$  unitär für  $G_n(q)$  ist. Weiter sei  $B_\Lambda$  ein unipotenter Block mit einem  $e$ -Kokern  $\Lambda = \{X, Y\}$  wie in den Grundvoraussetzungen beschrieben. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $\text{def}(\Lambda) = |X| - |Y| \geq 0$  gelte und dass auf jeder Position der Reihe 0 des zu  $\Lambda$  gehörigen  $2e$ -unitären Abakus eine Perle stecke. Die Menge der Indikatorperlen wird auf folgende Weise geordnet:

$\sigma_1 > \sigma_2 > \cdots > \sigma_s$  seien die der Größe nach geordneten Indikatorperlen, die  $X$  zuzuordnen sind, während

$\tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_t$  die der Größe nach sortierten Indikatorperlen bezeichnen, die  $Y$  zuzuordnen sind.

Dann parametrisieren die Symbole  $\Lambda_{\sigma_i}$  und  $\Lambda_{\tau_j}$ , die aus  $\Lambda$  durch jeweiliges Zufügen des  $e$ -Kohakens  $(\sigma_i, \sigma_i + e)$  für  $1 \leq i \leq s$  bzw.  $(\tau_j, \tau_j + e)$  für  $1 \leq j \leq t$  entstehen, die nicht-exzeptionellen Charaktere von  $B_\Lambda$ .

Die so parametrisierten Charaktere bezeichnen wir fortan mit  $\chi_{\sigma_i}$  bzw. mit  $\chi_{\tau_j}$ .

**Beweis:** Man vergleiche [FS1, S. 13].  $\square$

**2.3.12 Satz**

Die Menge aller unipotenten  $l$ -Blöcke von  $G_n(q)$  (mit  $n = 2m$ ), die eine zyklische Defektgruppe haben, stehen in Korrespondenz zur Menge aller  $e$ -Kokerne  $\Lambda$  mit  $\text{rg}(\Lambda) = m - e$ , d.h.

$$\begin{array}{c} \{B \mid B \text{ ist ein unipotenter } l\text{-Block von } G_n(q)\} \\ \uparrow 1 - 1 \\ \{\Lambda \mid \Lambda \in \mathcal{A} \text{ ist ein } e\text{-Kokern mit } \text{rg}(\Lambda) = m - e\}. \end{array}$$

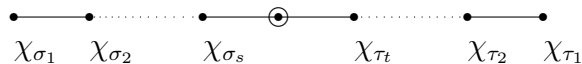
**Beweis:** Die Behauptung folgt aus den Sätzen 2.3.10 und 2.3.11.  $\square$

**2.3.13 Satz**

Seien  $B_\Lambda$  und  $\Lambda$  wie in den Grundvoraussetzungen und  $s, t$  wie in Satz 2.3.11. Zudem sei  $\Lambda$  nicht-degeneriert.

(a) Es ist  $s = e + \text{def}(\Lambda)$  und  $t = e - \text{def}(\Lambda)$ .

(b) Der Brauer-Baum von  $B_\Lambda$  ist von der Gestalt:



Dabei ist der Knoten zwischen  $\sigma_s$  und  $\tau_t$  der exzeptionelle Knoten des Baumes.

**Beweis:** Man vergleiche [FS1, S. 21 ff].  $\square$

An dieser Stelle möchte ich bemerken, dass wir Gruppen mit Brauer-Bäumen konstruieren wollen, die einer Entfaltung eines reellen Stammes von obiger Gestalt entstammen. Dabei ist jetzt nur der Fall  $s \neq t$  von Interesse, da der andere im vorletzten Abschnitt („Der gleichmäßige Stern“) abgehandelt wurde. Wir benötigen daher nicht die Theorie der degenerierten Symbole.

Auch hier liefern uns die oben zitierten Sätze einen Brauer-Baum in gewünschter (Vor-)Form, allerdings bei vorher gegebener Gruppe. Unsere Aufgabe besteht aber genau in der Konstruktion derselben, auf die erst dann die Theorie angewendet werden kann.

### 2.3.4 Die Bedingungen an $e, f$ und $p$

Mit obigen Ergebnissen vor Augen schauen wir auf die auf Seite 54 beschriebenen Gruppen  $G_n(q)$ , für die wir bis jetzt weder den Parameter  $n$  noch den zu Grunde liegenden Körper  $\mathbb{F}_q$  kennen. Die einzigen Parameter, die feststehen, sind  $l, e, s$ , und  $t$  (vergleiche Konstruktionsaufgabe). Nach Festlegung der Primzahl  $p$  setzen wir  $q := p^f$ . Aus dem letzten Unterabschnitt wissen wir bereits, dass  $p$  so gewählt sein muss, dass  $l$  unitär für  $G_n(q)$  ist. In der Anwendung des Primzahlsatzes von Dirichlet und der Darstellung von Normalisatoren und Zentralisatoren von Defektgruppen, werden wir allerdings stärkere Forderungen an  $p$  stellen müssen. Lösen wir das Geheimnis und formulieren alle nötigen Bedingungen:

$$\begin{aligned} 2ef & \mid l - 1, \\ l & \nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq 2ef - 1, \\ l & \mid p^{2ef} - 1 = q^{2e} - 1. \end{aligned} \tag{28}$$

Die Existenz von  $p$  ist wieder durch den Primzahlsatz von Dirichlet (Satz 2.1.18) gesichert; mit  $m = l$  und  $a \in \mathbb{Z}$ , so dass  $|\bar{a}|_l = 2ef$  gilt, finden wir ein geeignetes  $k_p \in \mathbb{N}$ , so dass  $a + lk_p =: p (\neq 2)$  eine Primzahl ist und somit die Theorie des letzten Abschnitts angewendet werden kann. Eine solche Primzahl  $p$  wollen wir von nun an fixieren. Man beachte, dass durch die Bedingungen (28) auch weiterhin  $l$  unitär für  $G_n(q)$  ist.

Es ist jetzt - losgelöst von der speziellen Theorie der klassischen Gruppen  $G_n(q)$  - möglich, ein Symbol  $\Lambda = \{X, Y\}$  zu finden, das mittels Satz 2.3.10 auf einen in unserem Sinne geeigneten Wert für  $n$  führt:

#### 2.3.14 Satz

Seien  $e$  und  $s \neq t$  natürliche Zahlen, die  $s + t = 2e$  erfüllen. Dann existiert ein Symbol  $\Lambda = \{X, Y\}$ , so dass auf dem korrespondierenden  $2e$ -unitären Diagramm genau  $s$  zu  $X$  gehörige und  $t$  zu  $Y$  gehörige Indikatorperlen stecken und dessen gesamte erste Zeile mit Perlen besetzt ist.

**Beweis:** Der Beweis gibt eine Methode an, die ein Symbol in  $e$ -Kokern-Form herausgibt.

Sei ohne Einschränkung  $0 < t < e$  (beachte  $s \neq t$ ); vertausche sonst die Zuordnung von  $X$  bzw.  $Y$  zu  $l$  bzw.  $r$  im Abakus-Diagramm und betrachte  $s$ . Unter dieser Voraussetzung für  $t$  beginnen wir mit der Zuordnung der Perlen für  $X$  bei  $0_l$ , für  $Y$  bei  $0_r$ .

Wir stecken zunächst auf jede Position der ersten Zeile Perlen. Anschließend belegen wir eine Zählkette  $i$  der Reihe 1 auf der rechten Abakushälfte mit einer Perle, falls  $0_r \leq i \leq (e - 1 + t)_r$  gilt. Dadurch lassen wir auf der rechten Abakushälfte der Reihe 1 so viele Zählketten unbesteckt, wie  $t$  vorgibt. Die linke Abakushälfte legt bereits zu  $X$  gehörige Indikatorperlen vor.  $\square$

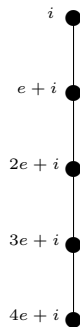
### 2.3.15 Bemerkung

Es ist nicht möglich, für alle Kombinationen der Parameter  $e, s$  und  $t$  mit nur einem der Gruppentypen  $G_n(q)$  auszukommen, die in den Grundvoraussetzungen eingeführt wurden. Es stellt sich sogar heraus, dass alle drei nötig sind, da im Allgemeinen jeder der drei Fälle in Satz 2.3.10 auftritt.

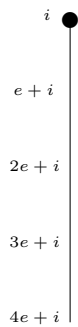
**Beweis:** Um nicht alle Varianten von passenden Abaki betrachten zu müssen, wollen wir zunächst die Untersuchung auf möglichst „einfach besteckte“ Abaki reduzieren, wie es in den folgenden Punkten stufenweise geschieht.

- Da wir von  $e$ -Kokernen sprechen, können auf einer Zählkette zwischen zwei Perlen keine freien Positionen sein.
- Wir brauchen nur Abaki zu untersuchen, die Perlen auf den ersten beiden Reihen haben:

Eine Zählkette von der Form



habe eine Indikatorperle, die (ohne Einschränkung) zu  $X$  gehöre. Dann hat aber der Abakus, der diese Zählkette gegen die Zählkette



austauscht, dort ebenfalls eine Indikatorperle, die zu  $X$  gehört, und dessen zugehöriges Symbol den gleichen Defekt hat, wie das Symbol, das zu erstem Abakus korrespondierte. (Auf einer Zählkette muss man eine gerade Anzahl von Perlen wegnehmen, damit sich an der Zugehörigkeit der entsprechenden Indikatorperle nichts ändert.)

- Ist  $A_1$  ein Abakus mit einer bestimmten Aufteilung der Indikatorperlen nach  $X$  und  $Y$ , so auch der folgende Abakus  $A_2$ :

$A_2$  ist bezüglich  $A_1$  nur in der Reihe 1 verändert; überall wo  $A_1$  eine Perle in Reihe 1 der linken [rechten] Hälfte hat, soll  $A_2$  auf der entsprechenden Zählkette der rechten [linken] Hälfte keine haben und umgekehrt. Wir nennen  $A_2$  das *Negativ zu  $A_1$* .

Der Grund, dass  $A_2$  ein Abakus mit gleicher Indikatorperlenverteilung wie  $A_1$  ist, liegt schlichtweg am Transport der „linken“ Indikatorperlen auf die rechte Hälfte und umgekehrt.

- Wir können ohne Einschränkung einen Abakus betrachten, der durch Bestecken nach der Methode im Beweis zu Satz 2.3.14 entsteht, da allenfalls (unter Berücksichtigung der oberen Punkte) Negative betrachtet und Zählketten vertauscht werden müssen.

Damit ist klar, dass zum einen der Defekt und zum anderen der Rang (modulo 4) durch die Vorgabe von  $e$ ,  $s$  und  $t$  eindeutig festgelegt ist.  $\square$

### 2.3.16 Bemerkung

Mit der Methode aus dem Beweis von Satz 2.3.14 können wir jetzt, wie oben angedeutet, ein geeignetes  $n$  bestimmen. Dazu berechnen wir einfach den Rang  $rg(\Lambda)$  des Symbols  $\Lambda$ , das diese „Besteck-Weise“ herausgibt. Unter Beachtung der Sätze 2.3.12, 2.3.10 sowie 2.3.11 müssen wir zu  $rg(\Lambda)$  noch  $e$  addieren, das Ergebnis mit 2 multiplizieren und erhalten ein geeignetes  $n$ , welches von nun an ebenfalls bis zum Ende fixiert sein soll. Schließlich bestimmen wir den Defekt von  $\Lambda$  und fixieren eine Satz 2.3.10 entsprechend geeignete klassische Gruppe  $G_n(q)$ . Man beachte zudem, dass  $rg(\Lambda) \geq 2$  und somit  $m \geq e - 1$  ist.

### 2.3.5 Der Coxeter-Torus in den übrigen klassischen Gruppen

Die Vorgehensweise in diesem Unterabschnitt läuft parallel zum entsprechenden im vorhergehenden Abschnitt, der die unitäre Gruppe und deren Eigenschaften analysierte. Daher werden wir auch zuerst Coxeter-Tori, deren Zusammenhang mit Defektgruppen sowie zugehörige Normalisatoren und Zentralisatoren der in den Grundvoraussetzungen eingeführten übrigen klassischen Gruppen.

( $\star$ ) Es seien  $l, s, t$  bzw.  $e, f, p, q, n = 2m$  wie in den Grundvoraussetzungen (vergleiche Seite 54) bzw. wie im letzten Unterabschnitt (vergleiche (28)) festgelegt.

#### 2.3.17 Lemma

Sei  $k \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl.

- (a) Die symplektische Gruppe  $Sp_{2k}(q)$  hat irreduzible zyklische Untergruppen der Ordnung  $q^k + 1$ , und jede irreduzible zyklische Untergruppe von  $Sp_{2k}(q)$  hat eine Ordnung, die  $q^k + 1$  teilt.
- (b) Die spezielle orthogonale Gruppe  $SO_{2k}^+(q)$  hat keine irreduzible zyklische Untergruppe.
- (c) Die spezielle orthogonale Gruppe  $SO_{2k}^-(q)$  hat irreduzible zyklische Untergruppen der Ordnung  $q^k + 1$ , und jede irreduzible zyklische Untergruppe von  $SO_{2k}^-(q)$  hat eine Ordnung, die  $q^k + 1$  teilt.

**Beweis:** Vgl. [Hup2, S. 147 und S. 150]. □

Nach dem vorhergehenden Lemma sehen wir, dass die Existenz eines „geeigneten Coxeter-Torus“ in der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO_{2m}^+(q)$  nicht offensichtlich ist. Die Lösung liegt in einer geeigneten (orthogonalen) Zerlegung des zu Grunde liegenden Vektorraums.

Auch hier komme ich nicht umhin anzudeuten, dass die Theorie der Coxeter-Tori in einem viel allgemeineren Themenkomplex anzusiedeln ist, wie man im Abschnitt 3 in [Ca] nachlesen kann. Bis auf einen Beweis in einem nachfolgenden Lemma bedarf es allerdings nicht dieses Zugangs, so dass wir auf obige elementare Beschreibung zurückgreifen können.

#### 2.3.18 Lemma

In der Gruppe  $SO_{2m}^+(q)$  gibt es eine Untergruppe der Form  $SO_{2\epsilon}^-(q) \times SO_{2(m-\epsilon)}^\epsilon(q)$  mit  $\epsilon \in \{+, -\}$ .

**Beweis:** Die dem Vektorraum  $V$  zu Grunde liegende quadratische Form sei gemäß Bemerkung 2.3.8 mit  $Q$  bezeichnet. Zuerst wählen wir eine orthogonale Zerlegung von  $V$  in hyperbolische Ebenen  $H_i$ :

$$\begin{aligned} V &= H_1 \oplus \dots \oplus H_m \\ &= \langle v_1, v'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_m, v'_m \rangle \end{aligned}$$



Setze nun:

$$\begin{aligned}\tilde{v}_1 &:= v_{e-1} + v'_{e-1} + \frac{1-2x}{y}v'_e \text{ und} \\ \tilde{v}_2 &:= x(v_{e-1} + v'_{e-1}) + y(v_e + v'_e),\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $x, y \in \mathbb{F}_q$  Folgendes erfüllen: Ist  $w \in \mathbb{F}_q$  so, dass  $X^2 + X + w \in \mathbb{F}_q[X]$  irreduzibel ist, dann seien  $y \neq 0$  und  $x$  so gewählt, dass  $w - y^2 = x^2$  erfüllt ist (die Existenz ist zum Beispiel nach [Tay, S. 138, Lemma 11.1] gesichert). Schauen wir uns nun an, worauf  $Q$  die Vektoren  $a\tilde{v}_1 + b\tilde{v}_2$  für beliebige Körperelemente  $a$  und  $b$  abbildet:

$$\begin{aligned}Q(a\tilde{v}_1 + b\tilde{v}_2) &= Q\left(a(v_{e-1} + v'_{e-1} + \frac{1-2x}{y}v'_e) + b(xv_{e-1} + xv'_{e-1} + yv_e + yv'_e)\right) \\ &= (a + bx)^2 + by\left(a\frac{1-2x}{y} + by\right) \\ &= a^2 + ab + b^2x^2 + b^2y^2 \\ &= a^2 + ab + b^2(x^2 + y^2) \\ &= a^2 + ab + b^2w.\end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüfen kann, ist  $Q(\tilde{v}_1) = 1$  und  $\beta(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = 1$ , wenn  $\beta$  die zu  $Q$  gehörige Polarform bezeichnet. Daher ist die Einschränkung von  $Q$  auf

$$V' := \langle v_1, v'_1, \dots, v_{e-1}, v'_{e-1}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \rangle$$

eine quadratische Form vom Witt-Index  $e - 1$ .

Setze

$$V'' := (V')^\perp,$$

so dass die Einschränkung von  $Q$  auf  $V''$  eine nicht-degenerierte quadratische Form ist. Dann ist  $V' \oplus V''$  ein Teilraum von  $V$  und die dazu korrespondierenden Gruppen sind isomorph zu der gewünschten Untergruppe.  $\square$

### 2.3.19 Lemma

Mit obigen Bezeichnungen gilt:

- (a) In der symplektischen Gruppe  $Sp_{2m}(q)$  gibt es eine Untergruppe der Form:  $Sp_{2e}(q) \times Sp_{2(m-e)}(q)$ .
- (b) In der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO_{2m}^-(q)$  gibt es eine Untergruppe der Form  $SO_{2e}^-(q) \times SO_{2(m-e)}^+(q)$ .

**Beweis:**

- (a) Betrachte eine Zerlegung des zu Grunde liegenden Vektorraums  $V$  in hyperbolische Ebenen

$$\begin{aligned} V &=: H_1 \oplus \dots \oplus H_m \\ &=: \langle v_1, v'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_m, v'_m \rangle \end{aligned}$$

und die symplektischen Gruppen, die aus der auf

$$\langle v_1, v'_1, \dots, v_e, v'_e \rangle \oplus \langle v_{e+1}, v'_{e+1}, \dots, v_m, v'_m \rangle$$

eingeschränkten symplektischen Form  $\beta$  entstehen.

- (b) Betrachte eine orthogonale Zerlegung des zu Grunde liegenden Vektorraumes der Form:

$$\begin{aligned} V &=: H_1 \oplus \dots \oplus H_{m-1} \oplus W \\ &=: \langle v_1, v'_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_{m-1}, v'_{m-1} \rangle \oplus \langle v_m, v'_m \rangle; \end{aligned}$$

dabei seien  $H_i$  hyperbolische Ebenen und  $W$  ein anisotroper Raum von  $V$ . Dann liefert die Einschränkung der quadratischen Form von  $V$  auf den Unterraum  $\langle v_1, v'_1, \dots, v_{e-1}, v'_{e-1}, v_m, v'_m \rangle \oplus \langle v_e, v'_e, \dots, v_{m-1}, v'_{m-1} \rangle$  eine Untergruppe der gewünschten Form.  $\square$

Von nun an bezeichnen wir die in Lemma 2.3.18 bzw. in Lemma 2.3.19 (je nach zu Grunde liegender Gruppe  $G_n(q)$ ) gefundenen Untergruppen mit  $G_{2e}(q)$ ,  $G_{2(m-e)}(q)$  oder  $G_{2e}(q) \times G_{2(m-e)}(q)$  und fixieren eine nach Lemma 2.3.17 existierende zyklische irreduzible Untergruppe  $T$  in  $G_{2e}(q)$  sowie die  $l$ -Sylowgruppe  $D$  in  $T$ .

Mit Lemma 2.3.17 und den passenden Zerlegungen der vorangehenden Lemmas können wir jetzt auf die Defektgruppen schauen.

### 2.3.20 Satz

Seien  $n, e, q$  wie in  $(\star)$  und  $l, G_n(q), B_\Lambda$  wie in den Grundvoraussetzungen. Dann ist eine  $l$ -Sylowgruppe von  $G_{2e}(q) \leq G_n(q)$  eine Defektgruppe von  $B_\Lambda$ .

**Beweis:** Dies folgt aus Theorem 4.4(ii) in [CaEn].  $\square$

### 2.3.21 Bemerkung

Die  $l$ -Sylowgruppe von  $T$  ist eine  $l$ -Sylowgruppe von  $G_{2e}(q)$ . Insbesondere sind nach Satz 2.3.20 die Defektgruppen von  $B_\Lambda$  zyklisch.

**Beweis:** Nach Definition von  $e$  teilt  $l$  zwar die Ordnung des (fixierten) Coxeter-Torus, nicht jedoch Terme der Form  $q^e - 1$  oder  $q^{2i} - 1$  für  $1 \leq i \leq e - 1$  (vergleiche die Diskussion nach den Gleichungen (26)). Mit den Ordnungsformeln der Gruppen  $G_n(q)$  in Bemerkung 2.3.8 folgt die Behauptung.  $\square$

**2.3.22 Lemma**

Seien  $G_{2e}(q)$  und  $T$  wie oben. Dann gilt:

$$C_{G_{2e}(q)}(T) = T.$$

**Beweis:** Man bette  $G_{2e}(q)$  in  $GL_{2e}(q)$  ein. Wie im Beweis zu Lemma 2.2.24 des vorherigen Abschnitts finden wir einen Coxeter-Torus  $T_1$  von  $GL_{2e}(q)$ , so dass

$$T = T_1 \cap G_{2e}(q)$$

gilt. Da  $l$  die Ordnung von  $T$  teilt, liegt darin ein Element  $z_0$  der Ordnung  $l$ . Wegen der Voraussetzungen ( $\star$ ) (bzw. (28)) schließen wir genau wie im Beweis zu Lemma 2.1.15, dass  $z_0$   $e$  paarweise verschiedene Eigenwerte hat. Mit derselben Argumentation wie in Satz 2.1.16 (hier für  $T$  statt  $D$  und für  $T_1$  statt  $T$ ) folgt:

$$C_{GL_{2e}}(T) = T_1.$$

Dann erhalten wir aber die Behauptung durch:

$$\begin{aligned} C_{G_{2e}(q)}(T) &= C_{G_{2e}(q)}(T) \cap G_{2e}(q) \\ &= T_1 \cap G_{2e}(q) \\ &= T. \end{aligned}$$

□

Wegen der Analogie der Vorgehensweisen in den einzelnen Gruppentypen können wir auch jetzt, parallel zum unitären Fall, die Zentralisatoren und Normalisatoren von  $T$  in  $G_n(q)$  untersuchen.

**2.3.23 Lemma**

Mit der Bezeichnungen für  $T$  auf Seite 64 gilt:

$$(a) \quad C_{G_n(q)}(T) = T \times G_{2(m-e)}(q).$$

$$(b) \quad N_{G_n(q)}(T) = N_{G_{2e}(q)}(T) \times G_{2(m-e)}(q) = T \rtimes C_{2e} \times G_{2(m-e)}(q), \text{ wobei } C_{2e} \text{ eine zyklische Gruppe der Ordnung } 2e \text{ ist.}$$

**Beweis:** Um nicht ständig dieselben Beweisargumente auszuführen, verweise ich hier nur auf die entsprechenden Beweise aus dem vorherigen Abschnitt. Für die Aussage (a) und den ersten Teil der Aussage (b) folgen wir (nach Anpassung der Dimensionen) genau dem Beweis zu Lemma 2.2.25. Für die zweite Aussage von Teil (b) zitieren wir erneut [Ca, S. 87, Prop. 3.3.6] sowie [Ca, S. 97, Cor. 3.6.5]. □

**2.3.24 Bemerkung**

Die Coxeter-Tori von  $G_{2e}(q)$  sind in  $G_{2e}(q)$  konjugiert.

**Beweis:** Nach Bemerkung 2.3.21 liegen die  $l$ -Sylowgruppen von  $G_{2e}(q)$  in den Coxeter-Tori von  $G_{2e}(q)$ . Da diese zyklisch sind und wir wegen der Sylowsätze bereits die Konjugiertheit der  $l$ -Sylowgruppen in  $G_{2e}(q)$  haben, müssen auch die Coxeter-Tori von  $G_{2e}(q)$  in  $G_{2e}(q)$  konjugiert sein.  $\square$

Auch hier ist obiger Beweis mit elementaren Mitteln möglich, da starke Bedingungen an  $p$  in (28) vorausgesetzt sind, so dass wir schon Aussagen wie Bemerkung 2.3.21 zur Verfügung haben.

Um später Aussagen über den Trägheitsindex machen zu können, sind für uns Zentralisatoren und Normalisatoren von Defektgruppen, nach Lemma 2.3.20 also von  $l$ -Sylowgruppen von  $G_{2e}(q)$ , von herausragender Bedeutung. Schauen wir also auf das nachfolgende Lemma:

### 2.3.25 Lemma

Mit den Bezeichnungen für  $T$  und  $D$  auf Seite 64 gilt:

- (a)  $C_{G_n(q)}(D) = T \times G_{2(m-e)}(q)$ .
- (b)  $N_{G_n(q)}(D) = N_{G_n(q)}(T)$ .

**Beweis:**

- (a) Auch hier wollen wir den Beweis nicht explizit ausführen, sondern lediglich darauf hinweisen, dass exakt dieselbe Argumentation (nach Anpassung der Gruppen und mit entsprechender Referenz zu Lemma 2.3.22) wie im Beweis zu 2.2.26 zur Behauptung führt. Man beachte noch, dass wegen der Bedingungen in (28) alle nötigen Voraussetzungen erfüllt sind.
- (b) Mit der gleichen Begründung wie im Beweis zu Lemma 2.2.26(b) und den Voraussetzungen in (28) können wir dem Beweis zu [Hup1, S. 187 ff, Satz 7.3(b)] folgen.  $\square$

Wir können uns nach den obigen vorbereitenden Sätzen und Lemmas nun mit geeigneten Erweiterungen beschäftigen, die für ein Aufklappen des reellen Stammes zu einem Stern des zweiten Typs Sorge tragen.

### 2.3.26 Bemerkung

Es sei  $\alpha := \bar{\alpha}|_{\mathbb{F}_q}$  der eingeschränkte Frobenius-Automorphismus. Dann operiert  $\langle \alpha \rangle$  auf  $Sp_{2m}(q)$  und  $SO_{2m}^+(q)$ .

**Beweis:**

- (a) Sei  $G_n(q) = Sp_{2m}(q)$ . Dann gilt für  $g \in G_n(q)$ :

$$g^t \tilde{\mathbf{J}}_{2m} g = \tilde{\mathbf{J}}_{2m}.$$

Für das Element der Form  $\alpha(g) \in GL_n(q)$  folgt dann:

$$\begin{aligned} [\alpha(g)^t \tilde{\mathbf{J}}_{2m} \alpha(g)]_{i,j} &= [\alpha(g)^t \alpha(\tilde{\mathbf{J}}_{2m}) \alpha(g)]_{i,j} \\ &= [\alpha(g^t \tilde{\mathbf{J}}_{2m} g)]_{i,j} \\ &= [\alpha(\tilde{\mathbf{J}}_{2m})]_{i,j} \\ &= [\tilde{\mathbf{J}}_{2m}]_{i,j}. \end{aligned}$$

(b) Sei  $G_n(q) = SO_{2m}^+(q)$ . Dann gilt für  $g \in G_n(q)$ :

$$g^t \mathbf{J}_{2m} g = \mathbf{J}_{2m}.$$

Betrachten wir nun das Element der Form  $\alpha(g) \in GL_n(q)$ :

$$\begin{aligned} [\alpha(g)^t \mathbf{J}_{2m} \alpha(g)]_{i,j} &= [\alpha(g)^t \alpha(\mathbf{J}_{2m}) \alpha(g)]_{i,j} \\ &= [\alpha(g^t \mathbf{J}_{2m} g)]_{i,j} \\ &= [\alpha(\mathbf{J}_{2m})]_{i,j} \\ &= [\mathbf{J}_{2m}]_{i,j}. \end{aligned}$$

□

Nun fehlt nur noch eine geeignete Operation auf der speziellen orthogonalen Gruppe  $SO_{2m}^-(q)$ .

### 2.3.27 Bemerkung

Seien  $(V, Q)$ , wie in Bemerkung 2.3.8 beschrieben, ein Vektorraum mit nicht-degenerierter quadratischer Form  $Q$  mit Witt-Index  $m - 1$  und  $SO_{2m}^-(q)$  die zugehörige orthogonale Gruppe. Auch die Basis  $v_1, \dots, v_m, v'_m, \dots, v'_1$  sei wie in Bemerkung 2.3.8.

Für  $g \in SO_{2m}^-(q)$  gilt nach Wahl der Bezeichnungen in den Grundvoraussetzungen

$$g\left(\sum_{i=1}^{2m} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m-1} x_i x_{2m+1-i} + x_m^2 + x_m x_{m+1} + a x_{m+1}^2.$$

Dabei ist  $a \in \mathbb{F}_q$ , so dass  $X^2 + X + a \in \mathbb{F}_q[X]$  irreduzibel ist; somit ist auch  $X^2 + X + \alpha^{-i}(a) \in \mathbb{F}_q[X]$  für  $0 \leq i \leq f - 1$  irreduzibel, wenn  $\alpha$ , wie oben, den eingeschränkten Frobenius-Automorphismus  $\bar{\alpha}|_{\mathbb{F}_q}$  bezeichnet. Dann ist die wie folgt definierte Abbildung  $Q'$  eine zu  $Q$  isometrische quadratische Form von  $V$ :

$$Q'\left(\sum_{i=1}^{2m} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m-1} x_i x_{m+1-i} + x_m^2 + x_m x_{m+1} + \alpha^{-i}(a) x_{m+1}^2.$$

Folglich existiert zu jedem  $0 \leq i \leq f - 1$  ein Automorphismus  $\psi_i \in \text{Aut}(V)$ , so dass mittels  $\psi_i$  der Isometrie der Räume  $(V, Q)$  und  $(V, Q')$  Rechnung getragen wird.

Schauen wir nun auf die Gruppe, die durch das Paar  $(\alpha, \psi) =: \alpha^*$  erzeugt wird; diese operiert auf  $SO_{2m}^-(q)$  wie folgt (unter Missbrauch der Bezeichnung  $\psi$  für den Automorphismus auf  $GL_{2m}(q)$ , der zu  $\psi \in \text{Aut}(V)$  korrespondiert):

$$\alpha^*([g_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m}) := \alpha(\psi([g_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 2m})).$$

**Beweis:** Betrachten wir die  $2m \times 2m$ -Matrizen

$$\mathbf{J}_{2m}^* := \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & 1 \\ & \cdot & & & & & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdot & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & a & & & & \\ & & & \cdot & & & 0 & & & \\ & & \cdot & & & & & \cdot & & \\ & \cdot & & & & & & & \cdot & \\ 1 & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

und

$$\mathbf{J}'_{2m} := \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & 1 \\ & \cdot & & & & & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & & & & & \\ & & & 0 & & \cdot & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & & & \\ & & & & 1 & \alpha^{-1}(a) & & & & \\ & & & \cdot & & & 0 & & & \\ & & \cdot & & & & & \cdot & & \\ & \cdot & & & & & & & \cdot & \\ 1 & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann ist genau dann  $x \in SO_{2m}^-(q)$ , wenn

$$x^t \mathbf{J}_{2m}^* x = \mathbf{J}_{2m}^*$$

gilt (vergleiche zum Beispiel [Tay, S. 137]). Betrachte also  $y := \alpha^*(g)$  für ein  $g \in SO_{2m}^-(q)$  und überprüfe, ob  $y$  wieder ein Element der speziellen orthogonalen Gruppe ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \alpha^*([g_{i,j}])^t \mathbf{J}_{2m}^* \alpha^*([g_{i,j}]) &= (\alpha(\psi([g_{i,j}])))^t \mathbf{J}_{2m}^* \alpha(\psi([g_{i,j}])) \\ &= \alpha(\psi([g_{i,j}]) \mathbf{J}'_{2m} \psi([g_{i,j}])) \\ &= \alpha(\mathbf{J}'_{2m}) \\ &= \mathbf{J}_{2m}^*. \end{aligned}$$

□

**2.3.28 Definition und Bemerkung**

Seien  $G = GU_n(q)$ ,  $\alpha$  bzw.  $\alpha^*$  und  $T$  wie oben.

- (a) Mit  $\alpha$  bzw.  $\alpha^*$  bezeichnen wir auch den gemäß Bemerkung 2.3.26 und 2.3.27 bewirkten Automorphismus von  $G_n(q)$ . Dann ist  $|\alpha| = f$  in  $\text{Aut}(G_n(q))$ . Der Automorphismus  $\alpha$  bzw.  $\alpha^*$  lässt auch die Untergruppen  $G_{2e}(q)$  und  $G_{2(m-e)}(q)$  von  $G_n(q)$  fest.
- (b) Wir setzen  $\hat{G} := G_n(q) \rtimes \langle \alpha \rangle$  bzw.  $\hat{G} := G_n(q) \rtimes \langle \alpha^* \rangle$ . Dann ist  $|\hat{G}| = |G_n(q)| \cdot f$ . Nach den Grundvoraussetzungen von Seite 54 teilt  $l$  insbesondere nicht den Grad  $f$  der Erweiterung.
- (c) Es ist  $\alpha(T)$  bzw.  $\alpha^*(T)$  ebenfalls ein Coxeter-Torus von  $G_{2e}(q)$ . Nach Bemerkung 2.3.24 existiert ein Element  $g_0 \in G_{2e}(q) (\leq G_n(q))$ , so dass

$$\begin{aligned} g_0[\alpha(T)]g_0^{-1} &= T \text{ bzw.} \\ g_0[\alpha^*(T)]g_0^{-1} &= T \end{aligned}$$

ist.

- (d) Setze  $\sigma := (g_0, \alpha)$  bzw.  $\sigma := (g_0, \alpha^*) \in \hat{G}$ . Dann ist  $T$  (eingebettet in  $\hat{G}$ ) invariant unter  $\sigma$ . Zudem gilt

$$\hat{G} = G\langle \sigma \rangle.$$

**Beweis:**

- (a) Die Behauptung über den Erweiterungsgrad ist klar. Die nach Lemma 2.3.18 und Lemma 2.3.19 zu Grunde liegenden Teilräume von  $V$  für  $G_{2e}(q)$  bzw.  $G_{2(m-e)}(q)$  zeigen eine geeignete Einbettung dieser Untergruppen, so dass die behauptete Invarianz direkt folgt.
- (c) Da  $\alpha$  bzw.  $\alpha^*$  ein Automorphismus von  $G_n(q)$  ist, der  $G_{2e}(q)$  invariant lässt, ist  $\alpha(T)$  bzw.  $\alpha^*(T)$  ebenfalls eine irreduzible zyklische Untergruppe der Ordnung  $q^e + 1$ , also ein Coxeter-Torus von  $G_{2e}(q)$ .
- (d) Wir folgen analog dem Beweis zu Definition und Bemerkung 2.1.10(d), indem wir dort gegebenenfalls  $\alpha$  durch  $\alpha^*$  ersetzen.  $\square$

Auch hier fügen wir - genau wie auf Seite 46 - eine kurze Passage über verallgemeinerte Deligne-Lusztig Charaktere und kuspitale Charaktere ein. Die in diesem Abschnitt beschriebenen Gruppen gehören ebenso wie  $GU_k(q)$  zu den klassischen Gruppen, die sich jeweils als Fixpunktmenge unter einem geeigneten Frobeniusmorphismus  $F$  verstehen lassen (man vergleiche die Abschnitte 1.17 und folgende in [Ca]). So werden dann analog wie für  $GU_k(q)$  auf Seite 46 die *verallgemeinerten Charaktere von Deligne-Lusztig* auch für diese Gruppen in Abschnitt 7.2 in [Ca]

eingeführt und entsprechend mit  $R_{T,\theta}^{G_k(q)}$  für einen maximalen  $F$ -stabilen Torus  $T$  und einen irreduziblen Charakter  $\theta$  von  $T$  bezeichnet. Auch die Definition der *kuspidalen Charaktere* überträgt sich wie in Definition 2.2.31 von der unitären Gruppe auf die in diesem Abschnitt vorgestellten anderen klassischen Gruppen. Für die Existenz der kuspidalen unipotenten Charaktere wird auch hier ein entsprechender Satz bereitgestellt.

### 2.3.29 Satz

Sei  $G_k(q)$  eine der klassischen Gruppen, wie sie auf Seite 54 vorgestellt wurden. Dann hat  $G_k(q)$  in den einzelnen Fällen genau dann einen kuspidalen unipotenten Charakter, wenn

- (a) im Falle  $G_k(q) = Sp_k(q)$  der Term  $k/2$  darstellbar ist als  $r^2 + r$  für eine natürliche Zahl  $r$ ,
- (b) im Falle  $G_k(q) = SO_k^\epsilon(q)$  für  $\epsilon \in \{+, -\}$  der Term  $k/2$  darstellbar ist als  $r^2$  für eine natürliche Zahl  $r$ .

In diesem Fall hat  $G_k(q)$  genau einen kuspidalen unipotenten Charakter, der zu einem Symbol korrespondiert, welches äquivalent ist zu  $\{\{0, 1, \dots, 2r\}, \{\}\}$  im Falle  $G_k(q) = Sp_k(q)$  bzw. zu  $\{\{0, 1, \dots, 2r-1\}\}$  in den beiden anderen Fällen.

**Beweis:** Man vergleiche [HiKe, S. 396 f, Abschnitt 5.2]. □

Es bleibt nur noch zu zeigen, dass  $\hat{G}$  einen  $l$ -Block mit gewünschter Brauer-Baum-Form hat. Wir können auch hier der Argumentation der unitären Gruppen folgen. Halten wir nochmals alle Voraussetzungen fest: Nach geeigneter Festlegung der Parameter  $n$  und  $q$  finden wir nach Satz 2.3.12 einen unipotenten Block  $B_\Lambda$  von  $G_n(q)$ , dessen Defektgruppen zyklisch sind und in Coxeter-Tori von  $G_{2e}(q) \leq G_n(q)$  liegen. Außerdem sind die Defektgruppen genau die  $l$ -Sylowgruppen von  $G_{2e}(q)$ . Wir fixieren eine Defektgruppe  $D$ , die im Coxeter-Torus  $T$  liege. Zudem finden wir nach Satz 2.2.19 in  $G_{2(m-e)}(q)$  einen kuspidalen unipotenten Charakter  $\chi_\kappa$  vom Defekt 0. Die Kuspidalität ist gegeben, da wir die Methode des Besteckens in Satz 2.3.14 genau so angepasst haben, dass das resultierende Symbol äquivalent zu einem solchen wie in Satz 2.3.29 beschrieben ist. Genau wie im Fall der unitären Gruppen ist dann  $\lambda_0 := 1_T \otimes \chi_\kappa$  der kanonische Charakter von  $B_\Lambda$ , der offensichtlich in  $N_{G_n(q)}(D)$  invariant ist. Wegen Satz 2.3.13(b) gilt dann  $|T_{N_{G_n(q)}(D)}(\lambda_0) : C_{G_n(q)}(D)| = |N_{G_n(q)}(D) : C_{G_n(q)}(D)| = s + t = 2e$ . Bleibt jetzt nur noch die Untersuchung der semidirekten Erweiterung.

### 2.3.30 Lemma

Mit den Bezeichnungen von oben gilt:

$$C_{\hat{G}}(D) = C_{G_n(q)}(D) = T \times G_{2(m-e)}(q).$$

**Beweis:** Auch hier folgen wir wie im entsprechenden Lemma des vorherigen Abschnitts Satz 2.1.17, indem wir annehmen, dass der Zentralisator von  $D$  beim



Übergang von  $G$  zu  $\hat{G}$  größer wird. Wir erhalten dann mit denselben Überlegungen die Bedingung

$$l \mid p^{i+f \cdot k_0} - 1$$

für ein  $1 \leq i \leq f-1$  und ein  $0 \leq k_0 \leq e-1$ . Die Betrachtung der höchstmöglichen Potenzen zeigt, dass somit

$$l \mid p^j - 1$$

für ein  $1 \leq j \leq ef$  gelten müsste, was aber im Widerspruch zu den Voraussetzungen (28) steht.  $\square$

### 2.3.31 Bemerkung

Mit den obigen Bezeichnungen gibt es genau einen  $l$ -Block  $\hat{B}$  von  $\hat{G}$ , der  $B_\Lambda$  überdeckt; es gilt sogar  $\hat{B} = (B_\Lambda)^{\hat{G}}$ .

**Beweis:** Vgl. [Alp, S. 106, Theorem 1 (5)].  $\square$

Bleibt nur noch zu überprüfen, ob für den Trägheitsindex  $|T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : C_{\hat{G}}(D)| = f$  gilt. Zum Nachweis dieser Aussage wollen wir zuerst nochmals wichtige Invarianzen festhalten.

### 2.3.32 Bemerkung

Seien  $G_n(q), T, D$  und  $\sigma$  wie oben. Dann gilt:

- (a) Das Element  $\sigma$  lässt  $D$  invariant.
- (b) Das Element  $\sigma$  lässt  $G_{2e}(q)$  invariant.
- (c) Das Element  $\sigma$  lässt  $G_{2(m-e)}(q)$  invariant.
- (d) Das Element  $\sigma$  lässt  $C_{G_n(q)}(D)$  invariant.
- (e) Das Element  $\sigma$  lässt  $N_{G_n(q)}(D)$  invariant.

**Beweis:**

- (a) Die Behauptung folgt aus der Invarianz der zyklischen Gruppe  $T$  unter  $\sigma$ , in der  $D$  liegt.
- (b) Man vergleiche Definition und Bemerkung 2.3.28(a).
- (c) Auch hier vergleiche man Definition und Bemerkung 2.3.28(a).
- (d) Diese Invarianz folgt aus derjenigen für  $D$ .
- (e) Dies folgt direkt aus der Invarianz von  $D$  unter  $\sigma$ .  $\square$

### 2.3.33 Lemma

Der kuspide unipotente Charakter  $\chi_\kappa$  ist invariant unter  $\sigma|_{G_{2(m-e)}(q)}$ .

**Beweis:** Wir folgen exakt dem Beweis zu Lemma 2.2.36, nachdem wir dort  $GU_{n-e}(q)$  durch  $G_{2(m-e)}(q)$  ersetzt haben.  $\square$

### 2.3.34 Lemma

Für die Trägheitsgruppe von  $\lambda_0$  in  $\hat{G}$  gilt:

$$T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) = N_{\hat{G}}(D).$$

**Beweis:** Nach Bemerkung 2.3.32(a) ist  $N_{\hat{G}}(D) = \langle N_{G_n(q)}(D), \sigma \rangle$ . Darüber hinaus ist  $1_T \otimes \chi_\kappa$  invariant unter  $N_{G_n(q)}(D)$  und nach Lemma 2.3.33 unter  $\sigma$ . Insgesamt folgt damit die Behauptung.  $\square$

Wir haben jetzt alle nötigen Aussagen bereitgestellt, um die letzte Diskussion des Trägheitsindex zu führen:

$$\begin{aligned} |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : C_{\hat{G}}(D)| &= |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : C_{G_n(q)}(D)| \\ &= |T_{N_{\hat{G}}(D)}(\lambda_0) : T_{N_{G_n(q)}(D)}(\lambda_0)| \cdot |T_{N_{G_n(q)}(D)}(\lambda_0) : C_{G_n(q)}(D)| \\ &= |N_{\hat{G}}(D) : N_{G_n(q)}(D)| \cdot |N_{G_n(q)}(D) : C_{G_n(q)}(D)| \\ &= |\langle \sigma \rangle| \cdot 2e \\ &= f \cdot 2e. \end{aligned}$$

Der betrachtete Block von  $\hat{G}$  hat also einen Brauer-Baum mit  $2ef$  Kanten. Dieser ist nach Lemma 3.2 in [Fei84] von der gewünschten Form.

## 2.3.6 Zusammenfassung

Die Zusammenfassung des letzten Abschnitts können wir in folgendem Satz formulieren:

### 2.3.35 Satz

Sei  $l$  eine ungerade Primzahl. Weiter seien  $s$  und  $t$  natürliche Zahlen, deren Summe  $s + t =: 2e$  gerade ist, und  $f > 1$  und  $d$  natürliche Zahlen, so dass die Bedingung

$$2ef \mid l - 1$$

erfüllt wird.

Dann existieren unendlich viele Primzahlen  $p$ , die die Bedingungen

$$\begin{aligned} l &\nmid p^i - 1 \text{ für alle } 1 \leq i \leq 2ef - 1, \\ l &\mid p^{2ef} - 1 = q^{2e} - 1 \end{aligned}$$

erfüllen. Die Primzahl kann sogar so gewählt werden, dass zusätzlich

$$l^d \parallel p^{2ef} - 1$$

gilt.

Für alle diese Primzahlen  $p$  mit der Bezeichnung für  $\alpha$  bzw.  $\alpha^*$  auf den Seiten 66

und folgende gilt:

Es gibt eine natürliche gerade Zahl  $n = 2m$  und einen Kokern  $\Lambda$  mit  $rg(\Lambda) = m - e$ , so dass der Brauer-Baum des Brauer-Korrespondenten des zu  $\Lambda$  korrespondierenden unipotenten Blocks von  $G_n(q)$  in der Gruppe  $G_n(q) \rtimes \langle \alpha \rangle$  bzw.  $G_n(q) \rtimes \langle \alpha^* \rangle$  ein Stern mit  $f$  Flügeln der Kantenlänge  $s$  und  $f$  Flügeln der Kantenlänge  $t$  ist. Dabei hängt die Gruppe  $G_n(q)$  vom Defekt von  $\Lambda$  ab:

Falls der Defekt  $\text{def}(\Lambda)$  ungerade ist, ist  $G_n(q) = Sp_{2m}(p^f)$ , falls der Defekt  $\text{def}(\Lambda) \equiv 0 \pmod{4}$  ist, ist  $G_n(q) = SO_{2m}^+(p^f)$  und falls der Defekt  $\text{def}(\Lambda) \equiv 2 \pmod{4}$  ist, so ist  $G_n(p^f) = SO_{2m}^-(p^f)$ . Im Zentrum dieses Sterns sitzt der exzeptionelle Knoten der Vielfachheit  $\frac{l^d - 1}{2ef}$ .



# Literaturverzeichnis

- [Alp] J. L. Alperin, Local representation theory, Cambridge University Press, 1. Paperback edition, New York 1993.
- [Be] D. J. Benson, Representations and cohomology, Cambridge University Press, 1. Paperback edition, New York 1998.
- [Bo] S. Bosch, Algebra, Springer-Verlag 2. Auflage, Berlin 1996.
- [CaEn] M. Cabanes und M. Enguehard, On unipotent blocks and their ordinary characters, *Invent. Math.* **117** (1994), 149-164.
- [Ca] R. W. Carter, Finite groups of Lie type, John Wiley & Sons Ltd. 1. Auflage, Chichester 1985.
- [Duv] O. Düvel, Untersuchungen zu Donovans Vermutung, Dissertation, Univ. Heidelberg 1997.
- [FS1] P. Fong und B. Srinivasan, Brauer trees in classical groups, *J. Algebra* **131**(1990), 179-225.
- [FS2] P. Fong und B. Srinivasan, Brauer trees in  $GL(n, q)$ , *Math. Z.* **187** (1984), 81-88.
- [FS3] P. Fong und B. Srinivasan, The blocks of finite general linear and unitary groups, *Invent. Math.* **69** (1982), 109-153.
- [Fei84] W. Feit, Possible Brauer trees, *Illionois J. Math.* **28** (1984), 43-54.
- [Fei82] W. Feit, Representation theory of finite groups, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1982.
- [Has] H. Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, Springer-Verlag, 2. Auflage, Berlin 1964.
- [HiKe] G. Hiß und R. Kessar, Scopes reduction and Morita equivalence classes of blocks in finite classical groups, *J. Algebra* **230** (2000), 378-423.

- [BBB] G. Hiß und K. Lux, Brauer trees of sporadic groups, Oxford University Press, New York 1989.
- [Hup1] B. Huppert, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Heidelberg 1967.
- [Hup2] B. Huppert, Singer-Zyklen in klassischen Gruppen, *Math. Z.* **117** (1970), 141-150.
- [KSt] H. Kurzweil und B. Stellmacher, Theorie der endlichen Gruppen, Springer-Verlag, Heidelberg 1998.
- [Li] M. Linckelmann, Derived equivalence for cyclic blocks over a  $p$ -adic ring, *Math. Z.* **207** 1991, 293-304.
- [Lu1] G. Lusztig, Representations of finite classical groups, *Invent. Math.* **43** (1977), 125-175.
- [Lu2] G. Lusztig, Characters of reductive groups over a finite field, *Ann. Math. Stud.* **107**(1984), Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- [Tay] D. E. Taylor, The geometry of the classical groups, Heldermann Verlag, Berlin 1992.
- [Ve] F. D. Veldkamp, Regular elements in anisotropic tori, *Contrib. to Algebra, Collected Pap. dedic. E. Kolchin* (1977), 389-424.