

# Invariant Theory live! 1

---

GAP4, Version: 4.3fix5 of June, 2003

```
gap> tbl:=CharacterTable("A5");
CharacterTable( "A5" )
```

```
gap> Display(tbl);
```

A5

2	2	2	.	.	.
3	1	.	1	.	.
5	1	.	.	1	1

	1a	2a	3a	5a	5b
2P	1a	1a	3a	5b	5a
3P	1a	2a	1a	5b	5a
5P	1a	2a	3a	1a	1a

X.1	1	1	1	1	1
X.2	3	-1	.	A	*A
X.3	3	-1	.	*A	A
X.4	4	.	1	-1	-1
X.5	5	1	-1	.	.

A = -E(5)-E(5)^4  
= (1-ER(5))/2 = -b5

## Invariant Theory live! 2

---

```
gap> Irr(tbl)[2];
```

```
Character( CharacterTable( "A5" ),  
          [ 3, -1, 0, -E(5)-E(5)^4, -E(5)^2-E(5)^3 ] )
```

```
gap> hs:=MolienSeries(tbl,Irr(tbl)[2]);
```

```
( 1-z^2-z^3+z^6+z^7-z^9 ) / ( (1-z^5)*(1-z^3)*(1-z^2)^2 )
```

```
gap> MolienSeriesWithGivenDenominator(hs,[2,6,10]);
```

```
( 1+z^15 ) / ( (1-z^10)*(1-z^6)*(1-z^2) )
```

## Invariant Theory live! 3

---

```
gap> z:=E(5)+E(5)^4;;
gap> rep:=
> # representation of A5 over Z[z], on (2,3,5)-triple
> [ [ [ 0, 1, 0 ], [ 1, 0, 0 ], [ 0, 0,-1 ] ],
>   [ [ 0, 0, 1 ], [ z, 1,-1 ], [-1, 0,-1 ] ],
>   [ [ z, 1,-1 ], [ 0, 0, 1 ], [ 1, 0, 1 ] ] ];;
gap> h:=Group(rep);
<matrix group with 3 generators>
gap> Display(h.1);
[ [  0,  1,  0 ],
  [  1,  0,  0 ],
  [  0,  0, -1 ] ]
gap> Display(h.2);
[ [          0,          0,          1 ],
  [ E(5)+E(5)^4,          1,         -1 ],
  [          -1,          0,         -1 ] ]
gap> Display(h.3);
[ [ E(5)+E(5)^4,          1,         -1 ],
  [          0,          0,          1 ],
  [          1,          0,          1 ] ]
gap> List(GeneratorsOfGroup(h),Order);
[ 2, 3, 5 ]
gap> Size(h);
60
```

## Invariant Theory live! 4

---

```
gap> polring:=PolynomialRing(Cyclotomics,  
> ["X_1","X_2","X_3"]);  
PolynomialRing(..., [ X_1, X_2, X_3 ])  
  
gap> indets:=IndeterminatesOfPolynomialRing(polring);  
[ X_1, X_2, X_3 ]  
  
gap> x1:=indets[1];;  
gap> x2:=indets[2];;  
gap> x3:=indets[3];;  
  
gap> x:=[x1,x2,x3];  
[ X_1, X_2, X_3 ]
```

## Invariant Theory live! 5

---

```
gap> f:= # the A5-invariant scalar product
```

```
> [ [ 1,          1/2*(-1-z), -1/2 ],
>   [ 1/2*(-1-z),          1,  1/2 ],
>   [          -1/2,          1/2,   1 ] ];;
```

```
gap> Display(f);
```

```
[ [          1, 1/2*E(5)^2+1/2*E(5)^3, -1/2 ],
  [ 1/2*E(5)^2+1/2*E(5)^3,          1,  1/2 ],
  [          -1/2,          1/2,   1 ] ]
```

```
gap> f1:=x*f^(-1)*x; # invariant of degree 2
```

```
3*X_1^2
+(2*E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3+2*E(5)^4)*X_1*X_2
+(-4*E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-4*E(5)^4)*X_1*X_3
+3*X_2^2
+(4*E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+4*E(5)^4)*X_2*X_3
+(-3*E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-3*E(5)^4)*X_3^2
```

```
gap> v:=NullspaceMat(rep[3]-rep[3]^0)[1];
[ -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4,
  -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4, 1 ]
```

```
gap> vorb:=Orbit(h,v);
[ [ -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4,
    -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4, 1 ],
  [ -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4,
    -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4, -1 ],
  [ E(5)+E(5)^4, -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4, -1 ],
  [ -E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-E(5)^4, E(5)+E(5)^4, 1 ],
  [ -E(5)-E(5)^4, E(5)+E(5)^4, 1 ],
  [ E(5)+E(5)^4, -E(5)-E(5)^4, -1 ],
  [ -E(5)-E(5)^4, E(5)+E(5)^4,
    -E(5)+E(5)^2+E(5)^3-E(5)^4 ],
  [ E(5)+E(5)^4, -E(5)-E(5)^4,
    E(5)-E(5)^2-E(5)^3+E(5)^4 ],
  [ E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+E(5)^4, -E(5)-E(5)^4, -1 ],
  [ -E(5)-E(5)^4, E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+E(5)^4, 1 ],
  [ E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+E(5)^4,
    E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+E(5)^4, 1 ],
  [ E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+E(5)^4,
    E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+E(5)^4, -1 ] ]
```

## Invariant Theory live! 7

---

```
gap> PermList(List(vorb,x->Position(vorb,-x)));  
(1,12)(2,11)(3,10)(4,9)(5,6)(7,8)
```

```
gap> vvecs:=vorb{[1,2,3,4,5,7]};;
```

```
gap> f2:=Product(List(vvecs,i->x*i));  
> # invariant of degree 6
```

...

$$\begin{aligned}
 & (-E(5) - 3E(5)^2 - 3E(5)^3 - E(5)^4) * X_1^6 \\
 & + (-6E(5) - 14E(5)^2 - 14E(5)^3 - 6E(5)^4) * X_1^5 * X_2 \\
 & + (-2E(5)^2 - 2E(5)^3) * X_1^5 * X_3 \\
 & + (E(5) + 3E(5)^2 + 3E(5)^3 + E(5)^4) * X_1^4 * X_2^2 \\
 & + (-16E(5) - 38E(5)^2 - 38E(5)^3 - 16E(5)^4) * X_1^4 * X_2 * X_3 \\
 & + (11E(5) + 28E(5)^2 + 28E(5)^3 + 11E(5)^4) * X_1^4 * X_3^2 \\
 & + (12E(5) + 28E(5)^2 + 28E(5)^3 + 12E(5)^4) * X_1^3 * X_2^3 \\
 & + (-16E(5) - 36E(5)^2 - 36E(5)^3 - 16E(5)^4) * X_1^3 * X_2^2 * X_3 \\
 & + (52E(5) + 120E(5)^2 + 120E(5)^3 + 52E(5)^4) * X_1^3 * X_2 * X_3^2 \\
 & + (-12E(5) - 20E(5)^2 - 20E(5)^3 - 12E(5)^4) * X_1^3 * X_3^3 \\
 & + (E(5) + 3E(5)^2 + 3E(5)^3 + E(5)^4) * X_1^2 * X_2^4 \\
 & + (16E(5) + 36E(5)^2 + 36E(5)^3 + 16E(5)^4) * X_1^2 * X_2^3 * X_3 \\
 & + (50E(5) + 168E(5)^2 + 168E(5)^3 + 50E(5)^4) * X_1^2 * X_2^2 * X_3^2 \\
 & + (20E(5) - 4E(5)^2 - 4E(5)^3 + 20E(5)^4) * X_1^2 * X_2 * X_3^3 \\
 & + (-16E(5) - 19E(5)^2 - 19E(5)^3 - 16E(5)^4) * X_1^2 * X_3^4 \\
 & + (-6E(5) - 14E(5)^2 - 14E(5)^3 - 6E(5)^4) * X_1 * X_2^5 \\
 & + (16E(5) + 38E(5)^2 + 38E(5)^3 + 16E(5)^4) * X_1 * X_2^4 * X_3 \\
 & + (52E(5) + 120E(5)^2 + 120E(5)^3 + 52E(5)^4) * X_1 * X_2^3 * X_3^2 \\
 & + (-20E(5) + 4E(5)^2 + 4E(5)^3 - 20E(5)^4) * X_1 * X_2^2 * X_3^3 \\
 & + (12E(5) - 22E(5)^2 - 22E(5)^3 + 12E(5)^4) * X_1 * X_2 * X_3^4 \\
 & + (-6E(5) - 6E(5)^4) * X_1 * X_3^5 \\
 & + (-E(5) - 3E(5)^2 - 3E(5)^3 - E(5)^4) * X_2^6 \\
 & + (2E(5)^2 + 2E(5)^3) * X_2^5 * X_3 \\
 & + (11E(5) + 28E(5)^2 + 28E(5)^3 + 11E(5)^4) * X_2^4 * X_3^2 \\
 & + (12E(5) + 20E(5)^2 + 20E(5)^3 + 12E(5)^4) * X_2^3 * X_3^3 \\
 & + (-16E(5) - 19E(5)^2 - 19E(5)^3 - 16E(5)^4) * X_2^2 * X_3^4 \\
 & + (6E(5) + 6E(5)^4) * X_2 * X_3^5 \\
 & + (-E(5) + E(5)^2 + E(5)^3 - E(5)^4) * X_3^6
 \end{aligned}$$

## Invariant Theory live! 9

---

```
gap> w:=NullspaceMat(rep[2]-rep[2]^0)[1];  
[ E(5)+4*E(5)^2+4*E(5)^3+E(5)^4,  
  3*E(5)+6*E(5)^2+6*E(5)^3+3*E(5)^4, 1 ]
```

```
gap> worb:=Orbit(h,w);;
```

```
gap> PermList(List(worb,x->Position(worb,-x)));  
(1,20)(2,19)(3,17)(4,14)(5,18)  
  (6,15)(7,16)(8,11)(9,12)(10,13)
```

```
gap> wvecs:=worb{[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]};;
```

```
gap> f3:=Product(List(wvecs,i->x*i));  
> # invariant of degree 10
```

...

$(-140235 \cdot E(5) - 367140 \cdot E(5)^2 - 367140 \cdot E(5)^3 - 140235 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^{10} + (-1045250 \cdot E(5) \setminus$   
 $- 2736500 \cdot E(5)^2 - 2736500 \cdot E(5)^3 - 1045250 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^9 \cdot X_2 + (-178550 \cdot E(5) - 467450 \cdot$   
 $E(5)^2 - 467450 \cdot E(5)^3 - 178550 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^8 \cdot X_2^2 + (-1983066 \cdot E(5) - 5191734 \cdot E(5)^2 - 5191734 \setminus$   
 $\cdot E(5)^3 - 1983066 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^8 \cdot X_2 \cdot X_3 + (683016 \cdot E(5) + 1788159 \cdot E(5)^2 + 1788159 \cdot E(5) \setminus$   
 $\cdot E(5)^3 + 683016 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^7 \cdot X_2^3 + (-2107224 \cdot E(5) - 5516784 \cdot E(5)^2 - 5516784 \cdot E(5)^3 - 210 \setminus$   
 $7224 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^7 \cdot X_2^2 \cdot X_3 + (-7721400 \cdot E(5) - 20214888 \cdot E(5)^2 - 20214888 \cdot E(5)^3 - 772140 \setminus$   
 $0 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^7 \cdot X_2 \cdot X_3^2 + (3005232 \cdot E(5) + 7867800 \cdot E(5)^2 + 7867800 \cdot E(5)^3 + 3005232 \cdot$   
 $E(5)^4) \cdot X_1^6 \cdot X_2^4 + (-13096872 \cdot E(5) - 34288056 \cdot E(5)^2 - 34288056 \cdot E(5)^3 - 13096872 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^6 \setminus$   
 $\cdot E(5)^5 + (1583040 \cdot E(5) + 4144452 \cdot E(5)^2 + 4144452 \cdot E(5)^3 + 1583040 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^6 \setminus$   
 $\cdot X_2^2 \cdot X_3^2 + (6721416 \cdot E(5) + 17596896 \cdot E(5)^2 + 17596896 \cdot E(5)^3 + 6721416 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^6 \setminus$   
 $\cdot X_2 \cdot X_3^3 + (-688962 \cdot E(5) - 1803726 \cdot E(5)^2 - 1803726 \cdot E(5)^3 - 688962 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^5 \cdot X_2^6 \setminus$   
 $X_3^4 + (6304948 \cdot E(5) + 16506568 \cdot E(5)^2 + 16506568 \cdot E(5)^3 + 6304948 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^5 \cdot X_2^5 \setminus$   
 $5 + (-7179988 \cdot E(5) - 18797452 \cdot E(5)^2 - 18797452 \cdot E(5)^3 - 7179988 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^5 \cdot X_2^4 \cdot X_3 \setminus$   
 $\cdot X_3 + (-10759472 \cdot E(5) - 28168664 \cdot E(5)^2 - 28168664 \cdot E(5)^3 - 10759472 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^5 \cdot X_2^3 \setminus$   
 $\cdot X_3^2 + (15802600 \cdot E(5) + 41371744 \cdot E(5)^2 + 41371744 \cdot E(5)^3 + 15802600 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^5 \cdot X_2^2 \setminus$   
 $X_3^3 + (-171052 \cdot E(5) - 447820 \cdot E(5)^2 - 447820 \cdot E(5)^3 - 171052 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^5 \cdot X_2 \setminus$   
 $\cdot X_3^4 + (-1269296 \cdot E(5) - 3323060 \cdot E(5)^2 - 3323060 \cdot E(5)^3 - 1269296 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^5 \cdot X_3^5 \setminus$   
 $5 + (2860794 \cdot E(5) + 7489656 \cdot E(5)^2 + 7489656 \cdot E(5)^3 + 2860794 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^4 \cdot X_2^6 + (717 \setminus$   
 $9988 \cdot E(5) + 18797452 \cdot E(5)^2 + 18797452 \cdot E(5)^3 + 7179988 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^4 \cdot X_2^5 \cdot X_3 + (-20 \setminus$   
 $100240 \cdot E(5) - 52623110 \cdot E(5)^2 - 52623110 \cdot E(5)^3 - 20100240 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^4 \cdot X_2^4 \cdot X_3^2 \setminus$   
 $+ (10144040 \cdot E(5) + 26557440 \cdot E(5)^2 + 26557440 \cdot E(5)^3 + 10144040 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^4 \cdot X_2^3 \cdot X_3^3 \setminus$   
 $\cdot X_3^4 + (7782370 \cdot E(5) + 20374510 \cdot E(5)^2 + 20374510 \cdot E(5)^3 + 7782370 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^4 \cdot X_2^2 \setminus$   
 $\cdot X_3^5 + (-4020432 \cdot E(5) - 10525628 \cdot E(5)^2 - 10525628 \cdot E(5)^3 - 4020432 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^4 \cdot X_2 \setminus$   
 $\cdot X_3^6 + (-371326 \cdot E(5) - 972144 \cdot E(5)^2 - 972144 \cdot E(5)^3 - 371326 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^4 \cdot X_2^2 \setminus$   
 $\cdot X_3^7 + (-2107224 \cdot E(5) - 5516784 \cdot E(5)^2 - 5516784 \cdot E(5)^3 - 2107224 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2^8 + (13096 \setminus$   
 $872 \cdot E(5) + 34288056 \cdot E(5)^2 + 34288056 \cdot E(5)^3 + 13096872 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2^7 \cdot X_3 + (-10 \setminus$   
 $759472 \cdot E(5) - 28168664 \cdot E(5)^2 - 28168664 \cdot E(5)^3 - 10759472 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2^6 \cdot X_3^2 \setminus$   
 $+ (-10144040 \cdot E(5) - 26557440 \cdot E(5)^2 - 26557440 \cdot E(5)^3 - 10144040 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2^5 \cdot X_3^3 \setminus$   
 $X_3^4 + (14862680 \cdot E(5) + 38911000 \cdot E(5)^2 + 38911000 \cdot E(5)^3 + 14862680 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2^4 \setminus$   
 $\cdot X_3^5 + (-2834240 \cdot E(5) - 7420136 \cdot E(5)^2 - 7420136 \cdot E(5)^3 - 2834240 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2^3 \setminus$   
 $\cdot X_3^6 + (-1412168 \cdot E(5) - 3697104 \cdot E(5)^2 - 3697104 \cdot E(5)^3 - 1412168 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2^2 \setminus$   
 $X_3^7 + (60152 \cdot E(5) + 157480 \cdot E(5)^2 + 157480 \cdot E(5)^3 + 60152 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^3 \cdot X_2 \setminus$   
 $\cdot X_3^8 + (-2720559 \cdot E(5) - 7122516 \cdot E(5)^2 - 7122516 \cdot E(5)^3 - 2720559 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^9 + (772140 \setminus$   
 $0 \cdot E(5) + 20214888 \cdot E(5)^2 + 20214888 \cdot E(5)^3 + 7721400 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^8 \cdot X_3 + (158304 \setminus$   
 $0 \cdot E(5) + 4144452 \cdot E(5)^2 + 4144452 \cdot E(5)^3 + 1583040 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^7 \cdot X_3^2 + (-15802 \setminus$   
 $600 \cdot E(5) - 41371744 \cdot E(5)^2 - 41371744 \cdot E(5)^3 - 15802600 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^6 \cdot X_3^3 + (7 \setminus$   
 $782370 \cdot E(5) + 20374510 \cdot E(5)^2 + 20374510 \cdot E(5)^3 + 7782370 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^5 \cdot X_3^4 + \setminus$   
 $(2834240 \cdot E(5) + 7420136 \cdot E(5)^2 + 7420136 \cdot E(5)^3 + 2834240 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^4 \cdot X_3^5 + \setminus$   
 $(-2061492 \cdot E(5) - 5397056 \cdot E(5)^2 - 5397056 \cdot E(5)^3 - 2061492 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^3 \cdot X_3^6 \setminus$   
 $+ (40632 \cdot E(5) + 106376 \cdot E(5)^2 + 106376 \cdot E(5)^3 + 40632 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2^2 \cdot X_3^7 + (26340 \cdot$   
 $E(5) + 68959 \cdot E(5)^2 + 68959 \cdot E(5)^3 + 26340 \cdot E(5)^4) \cdot X_1^2 \cdot X_2 \cdot X_3^8 + (-1045250 \cdot E(5) - 273650 \setminus$   
 $0 \cdot E(5)^2 - 2736500 \cdot E(5)^3 - 1045250 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^9 + (1983066 \cdot E(5) + 5191734 \cdot E(5)^2 \setminus$   
 $+ 5191734 \cdot E(5)^3 + 1983066 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^8 \cdot X_3 + (3005232 \cdot E(5) + 7867800 \cdot E(5)^2 + 786 \setminus$   
 $7800 \cdot E(5)^3 + 3005232 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^7 \cdot X_3^2 + (-6721416 \cdot E(5) - 17596896 \cdot E(5)^2 - 175 \setminus$   
 $96896 \cdot E(5)^3 - 6721416 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^6 \cdot X_3^3 + (-171052 \cdot E(5) - 447820 \cdot E(5)^2 - 44782 \setminus$   
 $0 \cdot E(5)^3 - 171052 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^5 \cdot X_3^4 + (4020432 \cdot E(5) + 10525628 \cdot E(5)^2 + 10525628 \setminus$   
 $\cdot E(5)^3 + 4020432 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^4 \cdot X_3^5 + (-1412168 \cdot E(5) - 3697104 \cdot E(5)^2 - 3697104 \cdot$   
 $E(5)^3 - 1412168 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^3 \cdot X_3^6 + (-40632 \cdot E(5) - 106376 \cdot E(5)^2 - 106376 \cdot E(5) \setminus$   
 $\cdot E(5)^3 - 40632 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^7 + (47308 \cdot E(5) + 123854 \cdot E(5)^2 + 123854 \cdot E(5)^3 + 47308 \cdot$   
 $E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3^8 + (-1042 \cdot E(5) - 2728 \cdot E(5)^2 - 2728 \cdot E(5)^3 - 1042 \cdot E(5)^4) \cdot X_1 \cdot X_3^9 +$   
 $(-140235 \cdot E(5) - 367140 \cdot E(5)^2 - 367140 \cdot E(5)^3 - 140235 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^{10} + (178550 \cdot E(5) \setminus$   
 $+ 467450 \cdot E(5)^2 + 467450 \cdot E(5)^3 + 178550 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^9 \cdot X_3 + (683016 \cdot E(5) + 1788159 \cdot E(5) \setminus$   
 $\cdot E(5)^2 + 1788159 \cdot E(5)^3 + 683016 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^8 \cdot X_3^2 + (-943560 \cdot E(5) - 2470272 \cdot E(5)^2 - 24 \setminus$   
 $70272 \cdot E(5)^3 - 943560 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^7 \cdot X_3^3 + (-688962 \cdot E(5) - 1803726 \cdot E(5)^2 - 1803726 \cdot E(5) \setminus$   
 $\cdot E(5)^3 - 688962 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^6 \cdot X_3^4 + (1269296 \cdot E(5) + 3323060 \cdot E(5)^2 + 3323060 \cdot E(5)^3 + 1 \setminus$   
 $269296 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^5 \cdot X_3^5 + (-371326 \cdot E(5) - 972144 \cdot E(5)^2 - 972144 \cdot E(5)^3 - 371326 \cdot E(5) \setminus$   
 $\cdot E(5)^4) \cdot X_2^4 \cdot X_3^6 + (-60152 \cdot E(5) - 157480 \cdot E(5)^2 - 157480 \cdot E(5)^3 - 60152 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^3 \setminus$   
 $\cdot X_3^7 + (26340 \cdot E(5) + 68959 \cdot E(5)^2 + 68959 \cdot E(5)^3 + 26340 \cdot E(5)^4) \cdot X_2^2 \cdot X_3^8 + (1042 \cdot E(5) \setminus$   
 $\cdot E(5)^2 + 2728 \cdot E(5)^3 + 1042 \cdot E(5)^4) \cdot X_2 \cdot X_3^9 + (-377 \cdot E(5) - 987 \cdot E(5)^2 - 987 \cdot E(5) \setminus$   
 $\cdot E(5)^3 - 377 \cdot E(5)^4) \cdot X_3^{10}$

```

gap> prim:=[f1,f2,f3];;
gap> jac:=List(prim,p->List(x,i->Derivative(p,i)));;

gap> jac[1][1];
6*X_1
+(2*E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3+2*E(5)^4)*X_2
+(-4*E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-4*E(5)^4)*X_3
gap> jac[1][2];
(2*E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3+2*E(5)^4)*X_1
+6*X_2
+(4*E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+4*E(5)^4)*X_3
gap> jac[1][3];
(-4*E(5)-2*E(5)^2-2*E(5)^3-4*E(5)^4)*X_1
+(4*E(5)+2*E(5)^2+2*E(5)^3+4*E(5)^4)*X_2
+(-6*E(5)-4*E(5)^2-4*E(5)^3-6*E(5)^4)*X_3

gap> g2:=DeterminantMat(jac);;
> # invariant of degree 15
gap> g2=0*g2;
false

gap> g2;
( 4642832384*E(5)+12155092992*E(5)^2
+12155092992*E(5)^3+4642832384*E(5)^4)*X_1^12*X_2^2*X_3
+...

```