A calculus of fractions for the homotopy category of a Brown cofibration category

Sebastian Thomas

Abstract

We study the structure of homotopy categories of Brown cofibration categories. Examples are the homotopy category of simplicial sets or the derived category over a module category. Topological spaces yield a Brown fibration category, that is, they fulfil the dual axioms.

In the first part of the thesis, a calculus for these homotopy categories is derived. By definition, the homotopy category of a Brown cofibration category is the localisation at its weak equivalences, that is, certain morphisms are formally inverted. Analogously to the localisation theory of commutative rings, the morphisms of the homotopy category of a Brown cofibration category are, by a theorem of K. Brown, fractions consisting of one numerator and one denominator – they are represented by a so-called 2-arrow. Testing equality of two such fractions is more difficult than in commutative algebra: While two numerator-denominator pairs in commutative rings represent the same fraction in the localisation if and only if they have a common expansion, for 2-arrows in a Brown cofibration category it suffices to have homotopic expansions in order to represent the same fraction.

We show that Brown's homotopy 2-arrow calculus may be replaced by a strict calculus if one restricts to certain representatives for the fractions: Every morphism in the homotopy category is in fact represented by a so-called Z-2-arrow, which is a 2-arrow with an additional property. Two such Z-2-arrows represent the same morphism in the localisation if and only if they have a common expansion. The needed properties of Z-2-arrows are based on an interpretation as generalised, relative cylinders.

In the second part, the Z-2-arrow calculus is used to obtain an additional structure on the homotopy category. Schwede has shown that the homotopy category of a stable Brown cofibration category carries the structure of a triangulated category in the sense of Verdier – a generalisation of Hovey's theorem for stable Quillen model categories. One property of Verdier triangles is the octahedral axiom, which relates triangles and composition. We show that the diagrams constructed in the verification of the octahedral axiom may be seen as a generalisation of Verdier triangles, and that they have analogous properties. Somewhat more generally, we construct an unstable variant of n-triangles on the homotopy category of a (not necessarily stable) Brown cofibration category – Verdier triangles and the particular Verdier octahedra constructed in the verification of the octahedral axiom are the cases $n = 2$ resp. $n = 3$. Moreover, it is proved that unstable n-triangles are compatible with (generalised) simplicial operations and have prolongation properties analogously to those of Verdier triangles. This generalises a result of Künzer for Frobenius categories.

(Ein Bruchkalkül für die Homotopiekategorie einer Brown-Kofaserungskategorie)

Zusammenfassung

Wir untersuchen die Struktur von Homotopiekategorien von Brown-Kofaserungskategorien. Beispiele hierfür sind die Homotopiekategorie der simplizialen Mengen oder die derivierte Kategorie über einer Modulkategorie. Topologische Räume liefern eine Brown-Faserungskategorie, d.h. sie erfüllen die dualen Axiome.

Im ersten Teil der Arbeit wird ein Kalkül für diese Homotopiekategorien hergeleitet. Per Definition erhält man die Homotopiekategorie einer Brown-Kofaserungskategorie als Lokalisierung an ihren schwachen Äquivalenzen, also durch formales Invertieren gewisser Morphismen. Ähnlich zur Lokalisierungstheorie von kommutativen Ringen sind die Morphismen der Homotopiekategorie einer Brown-Kofaserungskategorie nach einem Satz von K. Brown Brüche bestehend aus einem Zähler und einem Nenner – sie sind repräsentiert von einem sogenannten 2-Pfeil. Der Gleichheitstest von zwei solchen Brüchen gestaltet sich schwieriger als in der kommutativen Algebra: Während bei kommutativen Ringen zwei Zähler-Nenner-Paare genau dann den gleichen Bruch in der Lokalisierung repräsentieren, wenn sie eine gemeinsame Erweiterung besitzen, genügt es für 2-Pfeile in einer Brown-Kofaserungskategorie, homotope 2-Pfeile zu haben, um denselben Bruch zu repräsentieren.

Wir zeigen, dass sich Browns Homotopie-2-Pfeil-Kalkül durch einen strikten Kalkül ersetzen lässt, sofern man sich auf gewisse Repräsentanten für die Brüche beschränkt: Jeder Morphismus in der Homotopiekategorie lässt sich sogar von einem sogenannten Z-2-Pfeil repräsentieren, einem 2-Pfeil mit einer Zusatzeigenschaft. Zwei solche Z-2-Pfeile repräsentieren denselben Morphismus in der Lokalisierung genau dann, wenn sie eine gemeinsame Erweiterung besitzen. Die hierbei benutzten Eigenschaften der Z-2-Pfeile basieren auf einer Interpretation als verallgemeinerte, relative Zylinder.

Im zweiten Teil wird der Z-2-Pfeil-Kalkül dazu angewandt, eine zusätzliche Struktur auf der Homotopiekategorie zu konstruieren. Schwede hat gezeigt, dass sich die Homotopiekategorie einer stabilen Brown-Kofaserungskategorie als triangulierte Kategorie im Sinne von Verdier auffassen lässt – eine Verallgemeinerung von Hoveys Satz für stabile Quillen-Modellkategorien. Eine der Eigenschaften von Verdier-Triangeln ist das Oktaeder-Axiom, welches Triangeln und Komposition zueinander in Beziehung setzt. Wir zeigen, dass sich die im Nachweis des Oktaeder-Axioms konstruierten Diagramme als Verallgemeinerung der Verdier-Triangeln auffassen lassen und analoge Eigenschaften besitzen. Etwas allgemeiner noch werden auf der Homotopiekategorie einer (nicht notwendig stabilen) Brown-Kofaserungskategorie mit ausgezeichnetem Nullobjekt eine unstabile Variante von n-Triangeln konstruiert – Verdier-Triangeln und die im Nachweis des Oktaeder-Axioms konstruierten Verdier-Oktaeder entsprechen hierbei den Fällen $n = 2$ bzw. $n = 3$. Ferner wird nachgewiesen, dass diese unstabilen n-Triangeln verträglich mit (verallgemeinerten) simplizialen Operationen sind und Fortsetzungseigenschaften analog zu denen der Verdier-Triangeln besitzen. Dies verallgemeinert ein Resultat von Künzer für Frobeniuskategorien.