Prof. Dr. Gabriele Nebe
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2009/10
21.12.2009

Lineare Algebra II

Beispiel Jordan-Normalform

Aufgabe (Jordan-Normalform)**.** Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{5\times 5}$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{F}_3)$ so, dass $T^{-1}AT$ in Jordan-Normalform ist.

Lösung. Als erstes berechnen wir das charakteristische Polynom χ_A von A: Es ist

$$\chi_A = \det(X\mathrm{I}_5 - A) = \det \begin{pmatrix} X-1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & X & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & X & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & X^2-X-1 & X-1 & -1 & -X \\ -1 & X & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & X & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & X & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} X^2-X-1 & X-1 & -1 & -X \\ 0 & X & 0 & 1 \\ 1 & 1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} X^2-X-1 & X-1 & -1 & -X \\ 0 & 0 & 0 & X^2-X+1 \\ 1 & 1 & X & 0 \\ 0 & -1 & 0 & X-1 \end{pmatrix} = (X^2-X+1)\det \begin{pmatrix} X^2-X-1 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (X^2-X+1)\det \begin{pmatrix} X^2-X-1 & -1 \\ 1 & X \end{pmatrix} = (X^2-X+1)(X^3-X^2-X+1) = (X-1)^2(X+1)^3.$$

Nun zur Berechnung der Transformationsmatrix T: Wir berechnen zuerst eine geeignete Basis des Hauptraums zum Eigenwert 1. Da die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 1 gleich 2 ist, besteht eine solche Basis aus 2 Vektoren. Es ist

$$A - \mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zunächst zu den Hauptvektoren der Länge 1, d.h. zu den Eigenvektoren: Der Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. eine Basis des Untervektorraums der Vektoren von Länge kleiner oder gleich 1 zum Eigenwert 1 ist gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Aus Dimensionsgründen gibt es also einen Vektor der Länge 2, den wir als nächstes berechnen wollen. Anstatt $(A - \mathrm{I}_5)^2$ zu verwenden, benutzen wir die bereits bekannte Zeilenstufenform von $A - \mathrm{I}_5$ und berechnen den Kern des durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Endomorphismus. Der Gauß-Algorithmus liefert nun

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Ergänzung der bereits berechneten Basis aus Vektoren der Länge 1 zu einer Basis des Untervektorraums der Vektoren von Länge kleiner oder gleich 2 zum Eigenwert 1 ist durch

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

gegeben, wobei in dieser nun der erste Vektor Länge 2 und der zweite Vektor Länge 1 hat. Eine Anwendung von $A - \mathrm{I}_5$ auf den ersten Vektor ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. unsere angepasste Basis des Hauptraums zum Eigenwert 1 ist

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Als nächstes berechnen wir eine geeignete Basis des Hauptraums zum Eigenwert -1. Diese besteht entsprechend der algebraischen Vielfachheit aus 3 Vektoren. Es ist

$$A + \mathrm{I}_5 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir beginnen wieder mit den Hauptvektoren der Länge 1, d.h. mit den Eigenvektoren. Der Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. eine Basis des Untervektorraums der Vektoren von Länge kleiner oder gleich 1 zum Eigenwert -1 ist gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Wir wissen nun also, dass es einen Vektor der Länge 2 und sogar einen Vektor der Länge 3 zum Eigenwert -1 gibt. Wir berechnen zuerst einen Vektor der Länge 2 und verwenden hierzu wieder die bereits berechnete Zeilenstufenform, d.h. wir arbeiten mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis des Untervektorraums der Vektoren von Länge kleiner oder gleich 2 zum Eigenwert -1, welche die bereits berechnete Basis ergänzt, ist gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Um eine Basis des Hauptraums zum Eigenwert -1 zu bestimmen, berechnen wir nun den Kern des durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegebenen Endomorphismus. Der Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Ergänzung der bereits berechneten Basis zu einer Basis des Untervektorraums der Vektoren von Länge kleiner oder gleich 3 zum Eigenwert -1 ist nun gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

In dieser Basis hat der erste Vektor die Länge 3, eine zweifache Anwendung von $A + \mathrm{I}_5$ auf diesen Vektor liefert

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Unsere angepasste Basis des Hauptraums zum Eigenwert -1 ist demnach

$$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Definieren wir nun $T \in \mathrm{GL}_5(\mathbb{F}_5)$ durch

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist also

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

in Jordan-Normalform.