Prof. Dr. Gabriele Nebe
Dipl.-Math. Sebastian Thomas

WS 2009/10
22.10.2009

Lineare Algebra II

Kapitel 1: Bilinearformen und quadratische Formen

Jedem Skalarprodukt liegt eine sogenannte Bilinearform zu Grunde. In diesem Kapitel wollen wir ganz allgemein Bilinearformen studieren. Wir beginnen zunächst noch etwas allgemeiner mit beliebigen bilinearen Abbildungen.

§1 Bilineare Abbildungen

Es sei K ein Körper.

Erinnerung. Eine Abbildung $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ zwischen K-Vektorräumen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ heißt linear, falls $\varphi(V + V') = \varphi(V) + \varphi(V')$ für alle $V, V' \in \mathcal{V}$ und $\varphi(aV) = a\varphi(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$, $a \in K$. Äquivalent hierzu ist die Bedingung $\varphi(aV + V') = a\varphi(V) + \varphi(V')$ für alle $V, V' \in \mathcal{V}$, $a \in K$.

Im Folgenden seien $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ und $\mathcal{W}$ Vektorräume über K.

(1.1) Definition (bilineare Abbildung)**.** Eine Abbildung $\beta\colon \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}$ heißt *bilinear über* K (oder K-*bilinear*), falls die Abbildungen $\beta(V_1, -)$ und $\beta(-, V_2)$ linear sind für alle $V_1 \in \mathcal{V}_1$, $V_2 \in \mathcal{V}_2$. Die Menge aller K-bilinearen Abbildungen von $\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ nach $\mathcal{W}$ notieren wir als $\operatorname{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W}) = \operatorname{Bilin}_K((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W}) := \{\beta \in \mathcal{W}^{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2} \mid \beta \text{ bilinear über } K\}$.

Eine Abbildung $\beta\colon \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}$ ist also bilinear genau dann, wenn $\beta(V_1, aV_2 + V_2') = a\beta(V_1, V_2) + \beta(V_1, V_2')$ und $\beta(aV_1 + V_1', V_2) = a\beta(V_1, V_2) + \beta(V_1', V_2)$ für alle $V_1, V_1' \in \mathcal{V}_1$, $V_2, V_2' \in \mathcal{V}_2$, $a \in K$ gilt.

(1.2) Beispiel.

(a) Die Multiplikationsverknüpfung $K \times K \to K, (x, y) \mapsto xy$ ist bilinear.

(b) Die *Standardbilinearform* $K^{n\times 1} \times K^{n\times 1} \to K, (x, y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ist bilinear.

(c) Es sei $A \in K^{m\times n}$. Dann ist $\underset{\sim}{\widetilde{A}}\colon K^{m\times 1} \times K^{n\times 1} \to K, (x, y) \mapsto x^{\mathrm{tr}} A y$ bilinear.

(d) Es seien $A_i \in K^{m\times n}$ für $i \in \{1, \dots, p\}$. Dann ist

$$K^{m\times 1} \times K^{n\times 1} \to K^{p\times 1}, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x^{\mathrm{tr}} A_1 y \\ \vdots \\ x^{\mathrm{tr}} A_p y \end{pmatrix}$$

bilinear.

(e) Das *Kreuzprodukt*

$$\mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

ist bilinear.

(f) Die Determinante

$$K^{2\times 1} \times K^{2\times 1} \to K, (x, y) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

ist bilinear.

(g) Alle Skalarprodukte sind insbesondere bilinear, zum Beispiel

$$\mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \times \mathrm{C}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, (f, g) \mapsto \int_0^1 f(x) g(x) \, \mathrm{d}x,$$

wobei $\mathrm{I} := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ das reelle Einheitsintervall bezeichnet.

Beweis. Selbst. Zu (e) vgl. auch Tutoriumsaufgabe 1. □

(1.3) Bemerkung. Es ist $\mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W}) \leq \mathcal{W}^{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2}$.

Beweis. Die triviale Abbildung $0 \colon \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}, (V_1, V_2) \mapsto 0$ erfüllt

$$0(V_1, aV_2 + V_2') = 0 = a0(V_1, V_2) + 0(V_1, V_2')$$

für alle $V_2, V_2' \in \mathcal{V}_2$, $a \in K$, d.h. $0(V_1, -)$ ist K-linear für alle $V_1 \in \mathcal{V}_1$. Aus Symmetriegründen ist auch $0(-, V_2)$ linear über K für alle $V_2 \in \mathcal{V}_2$ und daher $0 \in \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W})$. Für $\beta, \gamma \in \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W})$ und $c \in K$ gilt ferner

$$\begin{aligned}(c\beta + \gamma)(V_1, aV_2 + V_2') &= c\beta(V_1, aV_2 + V_2') + \gamma(V_1, aV_2 + V_2') \\ &= ca\beta(V_1, V_2) + c\beta(V_1, V_2') + a\gamma(V_1, V_2) + \gamma(V_1, V_2') \\ &= ac\beta(V_1, V_2) + a\gamma(V_1, V_2) + c\beta(V_1, V_2') + \gamma(V_1, V_2') \\ &= a(c\beta + \gamma)(V_1, V_2) + (c\beta + \gamma)(V_1, V_2')\end{aligned}$$

für alle $V_2, V_2' \in \mathcal{V}_2$, $a \in K$, d.h. $(c\beta + \gamma)(V_1, -)$ ist K-linear für alle $V_1 \in \mathcal{V}_1$. Aus Symmetriegründen ist auch $(c\beta + \gamma)(-, V_2)$ linear über K für alle $V_2 \in \mathcal{V}_2$ und daher $c\beta + \gamma \in \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W})$. Insgesamt ist $\mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W}) \leq \mathcal{W}^{\mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2}$. □

(1.4) Definition (transponierte bilineare Abbildung)**.** Für jede bilineare Abbildung $\beta \colon \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}$ heiße $\beta^{\mathrm{tr}} \colon \mathcal{V}_2 \times \mathcal{V}_1 \to \mathcal{W}, (V_2, V_1) \mapsto \beta(V_1, V_2)$ die zu β *transponierte* bilineare Abbildung.

(1.5) Bemerkung.

(a) Die Abbildung $(-)^{\mathrm{tr}} \colon \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W}) \to \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1), \mathcal{W})$ ist linear.

(b) Es ist $(\beta^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} = \beta$ für jede bilineare Abbildung $\beta \colon \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 \to \mathcal{W}$.

Beweis.

(a) Für $\beta, \gamma \in \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W})$, $a \in K$, ist

$$\begin{aligned}(a\beta + \gamma)^{\mathrm{tr}}(V_2, V_1) &= (a\beta + \gamma)(V_1, V_2)) = a\beta(V_1, V_2) + \gamma(V_1, V_2) = a\beta^{\mathrm{tr}}(V_2, V_1) + \gamma^{\mathrm{tr}}(V_2, V_1) \\ &= (a\beta^{\mathrm{tr}} + \gamma^{\mathrm{tr}})(V_2, V_1)\end{aligned}$$

für alle $V_1 \in \mathcal{V}_1$, $V_2 \in \mathcal{V}_2$, d.h. $(a\beta + \gamma)^{\mathrm{tr}} = a\beta^{\mathrm{tr}} + \gamma^{\mathrm{tr}}$. Folglich ist $(-)^{\mathrm{tr}} \colon \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2), \mathcal{W}) \to \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}_2, \mathcal{V}_1), \mathcal{W})$ eine lineare Abbildung.

(b) Es ist

$$(\beta^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}}(V_1, V_2) = \beta^{\mathrm{tr}}(V_2, V_1) = \beta(V_1, V_2)$$

für alle $V_1 \in \mathcal{V}_1$, $V_2 \in \mathcal{V}_2$, d.h. $(\beta^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} = \beta$. □

Im Folgenden seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ Vektorräume über K.

(1.6) Definition (symmetrische, schiefsymmetrische, alternierende bilineare Abbildungen)**.**

(a) Eine bilineare Abbildung $\beta \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ heißt *symmetrisch*, falls $\beta^{\mathrm{tr}} = \beta$. Die Menge der symmetrischen bilinearen Abbildungen von $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ nach $\mathcal{W}$ notieren wir als $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{sym}}((\mathcal{V}, \mathcal{V}), \mathcal{W}) = \mathrm{Bilin}_{K,\mathrm{sym}}((\mathcal{V}, \mathcal{V}), \mathcal{W}) := \{\beta \in \mathrm{Bilin}((\mathcal{V}, \mathcal{V}), \mathcal{W}) \mid \beta \text{ symmetrisch}\}$.

(b) Eine bilineare Abbildung $\beta\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ heißt *schiefsymmetrisch*, falls $\beta^{\mathrm{tr}} = -\beta$ für alle $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$. Die Menge der schiefsymmetrischen bilinearen Abbildungen von $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ nach $\mathcal{W}$ notieren wir als $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \mathrm{Bilin}_{K,\mathrm{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) := \{\beta \in \mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \mid \beta \text{ schiefsymmetrisch}\}$.

(c) Eine bilineare Abbildung $\beta\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ heißt *alternierend*, falls $\beta(V,V) = 0$ für alle $V \in \mathcal{V}$. Die Menge der alternierenden bilinearen Abbildungen von $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ nach $\mathcal{W}$ notieren wir als $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \mathrm{Bilin}_{K,\mathrm{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) := \{\beta \in \mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \mid \beta \text{ alternierend}\}$.

(1.7) Beispiel. Die Beispiele (1.2)(a), (b) und (g) sind symmetrisch. Das Beispiel (1.2)(c) ist symmetrisch genau dann, wenn $m = n$ und A symmetrisch ist, das Beispiel (1.2)(d) ist symmetrisch genau dann, wenn $m = n$ und A_i für alle $i \in \{1, \ldots, p\}$ symmetrisch ist. Die Beispiele (1.2)(e) und (f) sind alternierend.

(1.8) Bemerkung. Es sind $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$, $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$ und $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$ Untervektorräume von $\mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$

Beweis. Wir haben $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \mathrm{Kern}((-)^{\mathrm{tr}} - \mathrm{Id}_{\mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})})$ und $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \mathrm{Kern}((-)^{\mathrm{tr}} + \mathrm{Id}_{\mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})})$, also $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \leq \mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$ und $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \leq \mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mathrm{Bilin}_{\mathrm{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \leq \mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$. In der Tat erfüllt die triviale Bilinearform $0\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ insbesondere $0(V,V) = 0$ für alle $V \in \mathcal{V}$, d.h. $0 \in \mathrm{Bilin}_{\mathrm{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$, und für $\beta, \gamma \in \mathrm{Bilin}_{\mathrm{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$, $a \in K$ haben wir

$$(a\beta + \gamma)(V,V) = a\beta(V,V) + \gamma(V,V) = a0 + 0 = 0$$

für alle $V \in \mathcal{V}$, d.h. $a\beta + \gamma \in \mathrm{Bilin}_{\mathrm{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$. □

(1.9) Proposition. Jede alternierende bilineare Abbildung ist schiefsymmetrisch. Falls $2 \neq 0$ in K gilt auch die Umkehrung.

Beweis. Es sei $\beta\colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine beliebige bilineare Abbildung. Falls β alternierend ist, so gilt insbesondere

$$0 = \beta(V_1 + V_2, V_1 + V_2) = \beta(V_1, V_1) + \beta(V_1, V_2) + \beta(V_2, V_1) + \beta(V_2, V_2) = \beta(V_1, V_2) + \beta(V_2, V_1)$$

und daher $\beta(V_1, V_2) = -\beta(V_2, V_1)$ für alle $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, d.h. β ist schiefsymmetrisch. Umgekehrt, wenn β schiefsymmetrisch ist, so haben wir $\beta(V,V) = -\beta(V,V)$ und daher, vorausgesetzt $2 \neq 0$ in K, auch $\beta(V,V) = 0$ für alle $V \in \mathcal{V}$, d.h. β ist alternierend. □

Falls $2 = 0$ in K stimmen symmetrische und schiefsymmetrische bilineare Abbildungen offensichtlich überein. Falls jedoch $2 \neq 0$ ist, erhalten wir folgende Zerlegung.

(1.10) Proposition. Es sei $2 \neq 0$ in K. Wir haben lineare Abbildungen

$$(-)^{\mathrm{sym}}\colon \mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \to \mathrm{Bilin}_{\mathrm{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}), \beta \mapsto \frac{1}{2}(\beta + \beta^{\mathrm{tr}})$$

und

$$(-)^{\mathrm{schief}}\colon \mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \to \mathrm{Bilin}_{\mathrm{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}), \beta \mapsto \frac{1}{2}(\beta - \beta^{\mathrm{tr}}),$$

welche Projektionen der inneren direkten Summenzerlegung

$$\mathrm{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \mathrm{Bilin}_{\mathrm{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \oplus_{\mathrm{i}} \mathrm{Bilin}_{\mathrm{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$$

sind.

Beweis. Für jede bilineare Abbildung $\beta\colon V \times V \to W$ definieren wir $\beta^{\mathrm{sym}} := \frac{1}{2}(\beta + \beta^{\mathrm{tr}})$ and $\beta^{\mathrm{schief}} := \frac{1}{2}(\beta - \beta^{\mathrm{tr}})$. Dann gilt

$$(\beta^{\mathrm{sym}})^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}(\beta + \beta^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}(\beta^{\mathrm{tr}} + \beta) = \frac{1}{2}(\beta + \beta^{\mathrm{tr}}) = \beta^{\mathrm{sym}},$$

d.h. β^{sym} ist symmetrisch, sowie

$$(\beta^{\mathrm{schief}})^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}(\beta - \beta^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}(\beta^{\mathrm{tr}} - \beta) = -\frac{1}{2}(\beta - \beta^{\mathrm{tr}}) = -\beta^{\mathrm{schief}},$$

d.h. β^{schief} ist schiefsymmetrisch für alle $\beta \in \operatorname{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$. Wir erhalten also wohldefinierte lineare Abbildungen

$$(-)^{\text{sym}} \colon \operatorname{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \to \operatorname{Bilin}_{\text{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}), \beta \mapsto \frac{1}{2}(\beta + \beta^{\text{tr}})$$

und

$$(-)^{\text{schief}} \colon \operatorname{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \to \operatorname{Bilin}_{\text{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}), \beta \mapsto \frac{1}{2}(\beta - \beta^{\text{tr}}).$$

Wegen

$$\beta = \frac{1}{2}(\beta + \beta^{\text{tr}}) + \frac{1}{2}(\beta - \beta^{\text{tr}}) = \beta^{\text{sym}} + \beta^{\text{schief}}$$

für alle $\beta \in \operatorname{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$ haben wir also $\operatorname{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \operatorname{Bilin}_{\text{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) + \operatorname{Bilin}_{\text{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$. Es sei nun $\beta \in \operatorname{Bilin}_{\text{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \cap \operatorname{Bilin}_{\text{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W})$. Dann gilt

$$\beta(V_1, V_2) = \beta(V_2, V_1) = -\beta(V_1, V_2)$$

und wegen $2 \neq 0$ in K somit $\beta(V_1, V_2) = 0$ für alle $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$. Wir haben also $\beta = 0$ und daher $\operatorname{Bilin}_{\text{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \cap \operatorname{Bilin}_{\text{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \{0\}$. Insgesamt folgt

$$\operatorname{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) = \operatorname{Bilin}_{\text{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}) \oplus_{\text{i}} \operatorname{Bilin}_{\text{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),\mathcal{W}).$$ □

§2 Bilinearformen

Wir führen Bilinearformen und Orthogonalität bzgl. Bilinearformen ein.
Es sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum.

(1.11) Definition (Bilinearform)**.** Eine *Bilinearform* über K (oderr *K-Bilinearform*) auf $\mathcal{V}$ ist eine bilineare Abbildung $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$. Die Menge aller K-Bilinearformen auf $\mathcal{V}$ notieren wir als $\operatorname{Bifo}(\mathcal{V}) = \operatorname{Bifo}_K(\mathcal{V}) := \operatorname{Bilin}((\mathcal{V},\mathcal{V}),K)$. Ferner schreiben wir

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Bifo}_{\text{sym}}(\mathcal{V}) = \operatorname{Bifo}_{K,\text{sym}}(\mathcal{V}) := \operatorname{Bilin}_{\text{sym}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),K),\\
&\operatorname{Bifo}_{\text{schief}}(\mathcal{V}) = \operatorname{Bifo}_{K,\text{schief}}(\mathcal{V}) := \operatorname{Bilin}_{\text{schief}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),K) \text{ und}\\
&\operatorname{Bifo}_{\text{alt}}(\mathcal{V}) = \operatorname{Bifo}_{K,\text{alt}}(\mathcal{V}) := \operatorname{Bilin}_{\text{alt}}((\mathcal{V},\mathcal{V}),K).
\end{aligned}$$

Man beachte die alternativen Notationen $\operatorname{Bifo}_{+}(\mathcal{V}) := \operatorname{Bifo}_{\text{sym}}(\mathcal{V})$, $\operatorname{Bifo}_{-}(\mathcal{V}) := \operatorname{Bifo}_{\text{schief}}(\mathcal{V})$ und $\Lambda^2(\mathcal{V}^*) := \operatorname{Bifo}_{\text{alt}}(\mathcal{V})$.

(1.12) Beispiel. Die Beispiele (1.2)(a), (b), (c), (f) und (g) sind Bilinearformen.

(1.13) Definition (orthogonal)**.** Es sei Φ eine Bilinearform auf $\mathcal{V}$ und Vektoren $V, W \in \mathcal{V}$ gegeben. Wir sagen, dass V *orthogonal* zu W (bzgl. Φ) ist, geschrieben $V \perp W$ oder exakter $V \perp_\Phi W$, falls $\Phi(V, W) = 0$ ist.

Im Folgenden sei Φ eine symmetrische oder schiefsymmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$.

(1.14) Definition (Orthogonalraum)**.** Der Orthogonalraum einer Teilmenge $M \subseteq \mathcal{V}$ (bzgl. Φ) ist definiert als

$$M^\perp = M^{\perp,\Phi} := \{V \in \mathcal{V} \mid W \perp V \text{ für alle } W \in M\}.$$

(1.15) Bemerkung. Es ist $M^\perp \leq \mathcal{V}$ für alle $M \subseteq \mathcal{V}$.

Beweis. Wegen der Linearität von $\Phi(W, -)$ ist $\Phi(W, 0) = 0$ und daher $W \perp 0$ für alle $W \in M$, d.h. $0 \in M^\perp$. Es seien nun $V, V' \in M^\perp$ und $a \in K$ gegeben. Für alle $W \in M$ gilt dann $W \perp V$ und $W \perp V'$, also

$$\Phi(W, aV + V') = a\Phi(W, V) + \Phi(W, V') = a0 + 0 = 0$$

und daher $W \perp aV + V'$. Folglich ist $aV + V' \in M^\perp$ und somit $M \subseteq \mathcal{V}$. □

(1.16) Bemerkung. Für $M, M' \subseteq \mathcal{V}$ mit $M \subseteq M'$ gilt $M'^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.

Beweis. In diesem Fall ist

$$M'^{\perp} = \{V \in \mathcal{V} \mid W' \perp V \text{ für alle } W' \in M'\} \subseteq \{V \in \mathcal{V} \mid W \perp V \text{ für alle } W \in M\} = M^{\perp}. \qquad \square$$

Erinnerung. Ist $\mathcal{V}$ endlich erzeugt und $B = (B_1, \dots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, so gibt es für jedes $V \in \mathcal{V}$ eindeutig bestimmte Körperelemente $V_i \in K$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $V = \sum_{i=1}^{n} V_i B_i$. Für die Linearform B_i^* gilt $B_i^*(B_j) = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, also

$$B_i^*(V) = B_i^*(\sum_{j=1}^{n} V_j B_j) = \sum_{j=1}^{n} V_j B_i^*(B_j) = \sum_{j=1}^{n} V_j \delta_{i,j} = V_i.$$

Folglich ist $V = \sum_{i=1}^{n} B_i^*(V) B_i$ für alle $V \in \mathcal{V}$.

(1.17) Proposition. Es sei $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ und $B = (B_1, \dots, B_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Dann ist

$$\mathcal{U}^{\perp} = \{B_1, \dots, B_k\}^{\perp}.$$

Beweis. Wegen $\{B_1, \dots, B_k\} \subseteq \mathcal{U}$ gilt $\mathcal{U}^{\perp} \subseteq \{B_1, \dots, B_k\}^{\perp}$ nach Bemerkung (1.16). Es sei also umgekehrt ein $V \in \{B_1, \dots, B_k\}^{\perp}$ gegeben. Für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt dann

$$\Phi(U, V) = \Phi(\sum_{i=1}^{k} B_i^*(U) B_i, V) = \sum_{i=1}^{k} B_i^*(U) \Phi(B_i, V) = \sum_{i=1}^{k} B_i^*(U) 0 = 0,$$

d.h. $U \perp V$. Folglich ist $V \in \mathcal{U}^{\perp}$ und insgesamt $\mathcal{U}^{\perp} = \{B_1, \dots, B_k\}^{\perp}$. $\square$

(1.18) Definition (Radikal)**.** Es heißt $\mathcal{V}^{\perp}$ das *Radikal* von $\mathcal{V}$ (bzgl. Φ).

(1.19) Beispiel. Das Radikal von

$$K^{2\times 1} \times K^{2\times 1} \to K, (x, y) \mapsto x^{\mathrm{tr}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$$

ist

$$(K^{2\times 1})^{\perp} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle.$$

(1.20) Definition (nicht-ausgeartete Bilinearform)**.** Die Bilinearform Φ heißt *nicht-ausgeartet*, falls $\mathcal{V}^{\perp} = \{0\}$, und sonst *ausgeartet*.

(1.21) Proposition. Es sei $\mathcal{V}$ endlich erzeugt und $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{V}^{\perp,\Phi}$ gegeben. Dann ist $\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ eine nicht-ausgeartete Bilinearform auf $\mathcal{U}$.

Beweis. Es sei $U \in \mathcal{U}^{\perp,\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}} = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp,\Phi}$ beliebig gegeben. Für alle $V \in \mathcal{V}$ gibt es dann $U' \in \mathcal{U}$, $V' \in \mathcal{V}^{\perp,\Phi}$ mit $V = U' + V'$, und es folgt

$$\Phi(V, U) = \Phi(U' + V', U) = \Phi(U', U) + \Phi(V', U) = 0.$$

Also ist $V \perp U$ für alle $V \in \mathcal{V}$, d.h. $U \in \mathcal{V}^{\perp,\Phi}$. Da aber auch $U \in \mathcal{U}$ ist, gilt insgesamt $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}^{\perp,\Phi} = \{0\}$ und daher $U = 0$. Folglich ist das Radikal $\mathcal{U}^{\perp,\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}} = \{0\}$ und daher $\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ nicht-ausgeartet. $\square$

(1.22) Proposition. Es sei $\mathcal{V}$ endlich erzeugt und $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$. Wenn Φ oder $\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ nicht-ausgeartet ist, dann ist

$$\mathcal{V}/\mathcal{U}^{\perp} \to \mathcal{U}^*, V + \mathcal{U}^{\perp} \mapsto \Phi(-, V)|_{\mathcal{U}}$$

ein K-Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Übungsblatt 1, Aufgabe 4. $\square$

(1.23) Korollar. Es sei $\mathcal{V}$ endlich erzeugt und $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$.

(a) Wenn Φ nicht-ausgeartet ist, so gilt

$$\operatorname{Dim}\mathcal{V} = \operatorname{Dim}\mathcal{U} + \operatorname{Dim}\mathcal{U}^{\perp}.$$

(b) Wenn $\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ nicht-ausgeartet ist, so gilt

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{U}^{\perp,\Phi}.$$

Beweis. Wenn Φ oder $\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ nicht-ausgeartet ist, so gilt nach (1.21) in beiden Fällen

$$\operatorname{Dim}\mathcal{V} - \operatorname{Dim}\mathcal{U}^{\perp} = \operatorname{Dim}(\mathcal{V}/\mathcal{U}^{\perp}) = \operatorname{Dim}\mathcal{U}^{*} = \operatorname{Dim}\mathcal{U}$$

und daher $\operatorname{Dim}\mathcal{V} = \operatorname{Dim}\mathcal{U} + \operatorname{Dim}\mathcal{U}^{\perp}$. Falls $\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ nicht-ausgeartet ist, gilt zusätzlich $\mathcal{U}\cap\mathcal{U}^{\perp,\Phi} = \mathcal{U}^{\perp,\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}} = \{0\}$ und daher $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{U}^{\perp}$. □

Wir geben nachher noch einen alternativen Beweis von Korollar (1.23) mit Hilfe der Gram-Matrix, so dass dieses Korollar auch zum Beweis von Aufgabe 4 verwendet werden darf.

§3 Die Gram-Matrix

In diesem Abschnitt präsentieren wir einen Matrixkalkül zum Rechnen mit Bilinearformen auf endlich-dimensionalen Vektorräumen.
Es sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Ferner sei bis auf Weiteres Φ eine Bilinearform auf $\mathcal{V}$.

(1.24) Definition (Gram-Matrix)**.** Für eine Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ heißt ${}_{B}\Phi^{B} \in K^{n\times n}$ definiert durch

$${}_{B}\Phi^{B} := (\Phi(B_i, B_j))_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$$

die *Gram-Matrix* von Φ bzgl. B.

(1.25) Beispiel. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$. Die Gram-Matrix von

$$\underset{\sim}{\widetilde{A}}\colon K^{n\times 1} \times K^{n\times 1} \to K, (x, y) \mapsto x^{\mathrm{tr}} A y$$

bzgl. der Standardbasis $\mathrm{e} = (\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_n)$ ist ${}_{\mathrm{e}}\underset{\sim}{\widetilde{A}}^{\mathrm{e}} = A$.

Beweis. Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ ist

$$({}_{\mathrm{e}}\underset{\sim}{\widetilde{A}}^{\mathrm{e}})_{i,j} = \underset{\sim}{\widetilde{A}}(e_i, e_j) = \mathrm{e}_i^{\mathrm{tr}} A \mathrm{e}_j = A_{i,j},$$

also ${}_{\mathrm{e}}\underset{\sim}{\widetilde{A}}^{\mathrm{e}} = A$. □

Erinnerung. Für einen Vektor $V \in \mathcal{V}$ bezeichnen wir mit ${}^{B}V \in K^{n\times 1}$ die Koeffizientenspalte von V und mit $V_B = ({}^{B}V)^{\mathrm{tr}} \in K^{1\times n}$ die Koeffizientenzeile von V bzgl. einer Basis B. D.h., es ist $({}^{B}V)_{i,1} = (V_B)_{1,i} = B_i^{*}(V)$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

(1.26) Proposition. Es sei $B = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Dann ist

$$\Phi(V, W) = ({}^{B}V)^{\mathrm{tr}}\,{}_{B}\Phi^{B\,B}W = V_{B\,B}\Phi^{B\,B}W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i^{*}(V)\Phi(B_i, B_j)B_j^{*}(W)$$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$.

Beweis. Für alle $V, W \in \mathcal{V}$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi(V, W) &= \Phi(\sum_{i=1}^{n} B_i^{*}(V)B_i, \sum_{j=1}^{n} B_j^{*}(V)B_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i^{*}(V)\Phi(B_i, B_j)B_j^{*}(W)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i^{*}(V)({}_{B}\Phi^{B})_{i,j}B_j^{*}(W) = V_{B\,B}\Phi^{B\,B}W.\end{aligned}$$

□

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *alternierend*, wenn A schiefsymmetrisch und $A_{i,i} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist. Die Menge aller alternierenden Matrizen notieren wir als $K_{\text{alt}}^{n \times n} := \{A \in K^{n \times n} \mid A \text{ alternierend}\}$. Es ist $K_{\text{alt}}^{n \times n} \leq K^{n \times n}$ (Beweis selbst).
Man beachte auch die alternative Notation $K_{\text{schief},0}^{n \times n} := K_{\text{alt}}^{n \times n}$.

(1.27) Korollar. Es sei $B = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$.

(a) Es ist Φ symmetrisch genau dann, wenn ${}_B\Phi^B$ symmetrisch ist.

(b) Es ist Φ schiefsymmetrisch genau dann, wenn ${}_B\Phi^B$ schiefsymmetrisch ist.

(c) Es ist Φ alternierend genau dann, wenn ${}_B\Phi^B$ alternierend ist.

Beweis.

(a) Ist Φ symmetrisch, so gilt insbesondere

$$({}_B\Phi^B)_{i,j} = \Phi(B_i, B_j) = \Phi(B_j, B_i) = ({}_B\Phi^B)_{j,i}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, d.h. ${}_B\Phi^B$ ist symmetrisch. Falls umgekehrt ${}_B\Phi^B$ symmetrisch ist, liefert Proposition (1.26)

$$\begin{aligned}\Phi(V, W) &= ({}^BV)^{\text{tr}}\, {}_B\Phi^B\, {}^BW = (({}^BV)^{\text{tr}}\, {}_B\Phi^B\, {}^BW)^{\text{tr}} = ({}^BW)^{\text{tr}} ({}_B\Phi^B)^{\text{tr}}\, {}^BV = ({}^BW)^{\text{tr}}\, {}_B\Phi^B\, {}^BV \\ &= \Phi(W, V)\end{aligned}$$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$.

(b) Ist Φ schiefsymmetrisch, so gilt insbesondere

$$({}_B\Phi^B)_{i,j} = \Phi(B_i, B_j) = -\Phi(B_j, B_i) = -({}_B\Phi^B)_{j,i}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, d.h. ${}_B\Phi^B$ ist schiefsymmetrisch. Falls umgekehrt ${}_B\Phi^B$ schiefsymmetrisch ist, liefert Proposition (1.26)

$$\begin{aligned}\Phi(V, W) &= ({}^BV)^{\text{tr}}\, {}_B\Phi^B\, {}^BW = (({}^BV)^{\text{tr}}\, {}_B\Phi^B\, {}^BW)^{\text{tr}} = ({}^BW)^{\text{tr}} ({}_B\Phi^B)^{\text{tr}}\, {}^BV = -({}^BW)^{\text{tr}}\, {}_B\Phi^B\, {}^BV \\ &= -\Phi(W, V)\end{aligned}$$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$.

(c) Ist Φ alternierend, so ist Φ schiefsymmetrisch nach Proposition (1.9) und damit ${}_B\Phi^B$ schiefsymmetrisch nach (b). Ferner gilt

$$({}_B\Phi^B)_{i,i} = \Phi(B_i, B_i) = 0$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Falls umgekehrt ${}_B\Phi^B$ schiefsymmetrisch und $({}_B\Phi^B)_{i,i} = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist, liefert Proposition (1.26)

$$\Phi(V, V) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_i^*(V) \Phi(B_i, B_j) B_j^*(V) = 0$$

für alle $V \in \mathcal{V}$, denn für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist $\Phi(B_i, B_i) = 0$ und für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$ ist $\Phi(B_i, B_j) = -\Phi(B_j, B_i)$. □

(1.28) Korollar. Es sei $B = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Dann ist

$$\mathcal{V}^\perp = \{V \in \mathcal{V} \mid {}_B\Phi^B\, {}^BV = 0\}.$$

Insbesondere gilt

$$\operatorname{Dim} \mathcal{V}^\perp = \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Rg} {}_B\Phi^B$$

und Φ ist nicht-ausgeartet genau dann, wenn ${}_B\Phi^B$ invertierbar ist.

Beweis. Wir haben

$$\begin{aligned}\mathcal{V}^\perp &= \{V \in \mathcal{V} \mid W \perp V \text{ für alle } W \in \mathcal{V}\} = \{V \in \mathcal{V} \mid \Phi(W,V) = 0 \text{ für alle } W \in \mathcal{V}\} \\ &= \{V \in \mathcal{V} \mid W_{BB}\Phi^{BB}V = 0 \text{ für alle } W \in \mathcal{V}\} = \{V \in \mathcal{V} \mid {}_B\Phi^{BB}V = 0\}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\operatorname{Dim} \mathcal{V}^\perp = \operatorname{Dim}(\operatorname{Kern} \widetilde{{}_B\Phi^B}) = \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Rg} {}_B\Phi^B$$

und damit Φ nicht-ausgeartet genau dann, wenn $\operatorname{Rg} {}_B\Phi^B = \operatorname{Dim} \mathcal{V}$ ist, d.h. wenn ${}_B\Phi^B$ invertierbar ist. □

Alternativer Beweis zu Korollar (1.23). Es bleibt nur die Dimensionsformel $\operatorname{Dim} \mathcal{V} = \operatorname{Dim}\mathcal{U} + \operatorname{Dim}\mathcal{U}^\perp$ zu zeigen, die Trivialität des Schnitts in (b) zeigt man wie oben.
Es sei $B' = (B_1, \ldots, B_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$, die wir zu einer Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$. Nach Proposition (1.17) gilt dann

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^\perp &= \{B_1, \ldots, B_k\}^\perp = \{V \in \mathcal{V} \mid B_i \perp V \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\} \\ &= \{V \in \mathcal{V} \mid \Phi(B_i, V) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\} \\ &= \{V \in \mathcal{V} \mid \Phi(B_i, \sum_{j=1}^{n} B_j^*(V)B_j) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\} \\ &= \{V \in \mathcal{V} \mid \sum_{j=1}^{n} \Phi(B_i, B_j)B_j^*(V) = 0 \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, k\}\} \\ &= \{V \in \mathcal{V} \mid (\Phi(B_i, B_j))_{i \in \{1,\ldots,k\}, j \in \{1,\ldots,n\}} {}^BV = 0\} = \{V \in \mathcal{V} \mid A\, {}^BV = 0\}\end{aligned}$$

mit $A \in K^{k \times n}$ definiert durch $A := (\Phi(B_i, B_j))_{i \in \{1,\ldots,k\}, j \in \{1,\ldots,n\}}$. Folglich ist

$$\operatorname{Dim} \mathcal{U}^\perp = \operatorname{Dim}(\operatorname{Kern} \widetilde{A}) = \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Rg} A$$

und damit $\operatorname{Dim} \mathcal{V} = \operatorname{Rg} A + \operatorname{Dim} \mathcal{U}^\perp$. Es bleibt also zu zeigen, dass $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Dim} \mathcal{U} = k$ ist, d.h. dass A vollen Rang hat. Wenn nun aber Φ nicht-ausgeartet ist, so hat ${}_B\Phi^B$ vollen Rang, und wenn $\Phi|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ nicht-ausgeartet ist, so hat ${}_{B'}(\Phi|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}})^{B'} = (\Phi(B_i, B_j))_{i,j \in \{1,\ldots,k\}}$ vollen Rang. In beiden Fällen folgt, dass auch A vollen Rang hat. □

(1.29) Proposition. Für jede Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ ist

$${}_B(-)^B \colon \operatorname{Bifo}(\mathcal{V}) \to K^{n \times n}$$

ein K-Vektorraumisomorphismus mit Inversem

$$K^{n \times n} \to \operatorname{Bifo}(\mathcal{V}), A \mapsto ((V, W) \mapsto V_B\, A\, {}^BW = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} B_i^*(V) A_{i,j} B_j^*(W)).$$

Beweis. Für $\Phi, \Psi \in \operatorname{Bifo}(\mathcal{V})$ und $a \in K$ gilt

$$({}_B(a\Phi + \Psi)^B)_{i,j} = (a\Phi + \Psi)(B_i, B_j) = a\Phi(B_i, B_j) + \Psi(B_i, B_j) = a({}_B\Phi^B)_{i,j} + ({}_B\Psi^B)_{i,j}$$

für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und damit ${}_B(a\Phi + \Psi)^B = a_B\Phi^B + {}_B\Psi^B$, d.h. ${}_B(-)^B$ ist eine lineare Abbildung.
Um Surjektivität zu zeigen sei eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ beliebig gegeben. Dann ist

$$\underset{\sim}{\widetilde{A}} \colon K^{n \times 1} \times K^{n \times 1} \to K, (x, y) \mapsto x^{\mathrm{tr}} A y$$

eine Bilinearform auf $K^{n \times 1}$. Da jedoch ${}^B(-) \colon \mathcal{V} \to K^{n \times 1}$ ein K-Vektorraumisomorphismus ist, der die Basis B von $\mathcal{V}$ auf die Standardbasis e von $K^{n \times 1}$ abbildet, ist

$$\Phi_A \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K, (V, W) \mapsto V_B\, A\, {}^BW = \underset{\sim}{\widetilde{A}}({}^BV, {}^BW)$$

eine Bilinearform auf $\mathcal{V}$ mit

$$({}_B\Phi_A{}^B)_{i,j} = \Phi_A(B_i, B_j) = \underset{\sim}{\widetilde{A}}({}^B B_i, {}^B B_j) = \underset{\sim}{\widetilde{A}}(\mathrm{e}_i, \mathrm{e}_j) = ({}_\mathrm{e}\underset{\sim}{\widetilde{A}}{}^\mathrm{e})_{i,j} = A_{i,j}$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$, vgl. Beispiel (1.25). Also ist ${}_B\Phi_A{}^B = A$ und somit ${}_B(-)^B$ surjektiv.
Es bleibt Injektivität zu zeigen. Hierzu sei ein $\Phi \in \mathrm{Bifo}(\mathcal{V})$ gegeben mit ${}_B\Phi^B = 0$. Nach Proposition (1.26) folgt dann

$$\Phi(V, W) = V_{BB}\Phi^{BB}W = V_B\, 0\, {}^BW = 0$$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$, d.h. $\Phi = 0$. Folglich ist $\mathrm{Kern}\,{}_B(-)^B = \{0\}$ und damit Φ injektiv. □

(1.30) Korollar. Es ist

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Bifo}(\mathcal{V}) = (\mathrm{Dim}\,\mathcal{V})^2.$$

Ist B eine Basis von $\mathcal{V}$, so ist $((V, W) \mapsto B_i^*(V)B_j^*(W))_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ eine Basis von $\mathrm{Bifo}(\mathcal{V})$.

Beweis. Es sei $B = (B_1, \dots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Nach Proposition (1.29) ist dann

$$K^{n\times n} \to \mathrm{Bifo}(\mathcal{V}), A \mapsto ((V, W) \mapsto \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} B_i^*(V)A_{i,j}B_j^*(W))$$

ein K-Vektorraumisomorphismus, und folglich

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Bifo}(\mathcal{V}) = \mathrm{Dim}\,K^{n\times n} = n^2 = (\mathrm{Dim}\,\mathcal{V})^2.$$

Ferner wird die Standardbasis $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ von $K^{n\times n}$ unter diesem Isomorphismus auf die Basis $((V, W) \mapsto B_i^*(V)B_j^*(W))_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$ von $\mathrm{Bifo}(\mathcal{V})$ abgebildet. □

Erinnerung. Die Basiswechselmatrix in Spaltenkonvention von einer Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ zu einer Basis $B' = (B'_1, \dots, B'_n)$ bezeichnen wir mit ${}^B\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'}$. Ferner schreiben wir ${}_{B'}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}B} = ({}^B\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'})^{\mathrm{tr}}$ für die Basiswechselmatrix in Zeilenkonvention. D.h., es ist $({}^B\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'})_{i,j} = ({}_{B'}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}B})_{j,i} = B_i^*(B'_j)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

(1.31) Korollar. Es sei Φ eine Bilinearform auf $\mathcal{V}$ und es seien $B = (B_1, \dots, B_n)$ und $B' = (B'_1, \dots, B'_n)$ Basen von $\mathcal{V}$. Dann gilt

$${}_{B'}\Phi^{B'} = ({}^B\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'})^{\mathrm{tr}}{}_B\Phi^{BB}\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'} = {}_{B'}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}BB}\Phi^{BB}\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'}.$$

Insbesondere ist $\mathrm{Rg}\,{}_B\Phi^B = \mathrm{Rg}\,{}_{B'}\Phi^{B'}$.

Beweis. Für alle $V, W \in \mathcal{V}$ gilt

$$V_{B'B'}\Phi^{B'B'}W = \Phi(V, W) = V_{BB}\Phi^{BB}W = V_{B'B'}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}BB}\Phi^{BB}\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'B'}W.$$

Es folgt ${}_{B'}\Phi^{B'} = {}_{B'}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}BB}\Phi^{BB}\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'}$ wegen der Injektivität des Inversen aus Proposition (1.29). Da ${}^B\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'}$ und ${}_{B'}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}B}$ invertierbar sind, gilt ferner

$$\mathrm{Rg}\,{}_{B'}\Phi^{B'} = \mathrm{Rg}({}_{B'}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}BB}\Phi^{BB}\mathrm{Id}_\mathcal{V}{}^{B'}) = \mathrm{Rg}\,{}_B\Phi^B.$$ □

(1.32) Korollar. Es sei $B = (B_1, \dots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Dann schränkt ${}_B(-)^B$ ein zu K-Vektorraumisomorphismen

$$\mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \to K^{n\times n}_{\mathrm{sym}},$$
$$\mathrm{Bifo}_{\mathrm{schief}}(\mathcal{V}) \to K^{n\times n}_{\mathrm{schief}} \text{ und}$$
$$\mathrm{Bifo}_{\mathrm{alt}}(\mathcal{V}) \to K^{n\times n}_{\mathrm{alt}}\}.$$

Insbesondere ist

$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Bifo}_{\mathrm{schief}}(\mathcal{V}) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2}, & \text{falls } 2 \neq 0 \text{ in } K, \\ \frac{n(n+1)}{2}, & \text{falls } 2 = 0 \text{ in } K, \end{cases}$$
$$\mathrm{Dim}\,\mathrm{Bifo}_{\mathrm{alt}}(\mathcal{V}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Beweis. Folgt aus Proposition (1.29) und Korollar (1.27). □

§4 Normalformen für Gram-Matrizen

In diesem Abschnitt suchen wir nach Basen, so dass die Gram-Matrix einer gegebenen Bilinearform eine besonders schöne Gestalt erhält.
Es sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum.

(1.33) Bemerkung. Es sei $n := \operatorname{Dim} \mathcal{V}$. Dann operiert $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $K^{n \times n}$ durch

$$\mathrm{GL}_n(K) \times K^{n\times n} \to K^{n\times n}, (T, A) \mapsto (T^{-1})^{\mathrm{tr}} A T^{-1}.$$

Jede Bahn dieser Operation besteht aus allen Gram-Matrizen einer Bilinearform Φ auf $\mathcal{V}$, und es ist

$$\mathrm{Rg} \colon K^{n\times n} \to \mathbb{N}_0$$

eine Invariante der Operation.

Beweis. Es ist

$$\omega \colon \mathrm{GL}_n(K) \times K^{n\times n} \to K^{n\times n}, (T, A) \mapsto (T^{-1})^{\mathrm{tr}} A T^{-1}.$$

eine Operation von $\mathrm{GL}_n(K)$ auf $K^{n\times n}$, denn

$$\omega(S, \omega(T, A)) = (S^{-1})^{\mathrm{tr}} \omega(T, A) S^{-1} = (S^{-1})^{\mathrm{tr}} (T^{-1})^{\mathrm{tr}} A T^{-1} S^{-1} = ((ST)^{-1})^{\mathrm{tr}} A (ST)^{-1} = \omega(ST, A)$$

und

$$\omega(\mathrm{I}_n, A) = (\mathrm{I}_n^{-1})^{\mathrm{tr}} A \mathrm{I}_n^{-1} = A$$

für alle $S, T \in \mathrm{GL}_n(K)$, $A \in K^{n\times n}$.
Jetzt sei O eine beliebige Bahn von ω und es seien $A \in O$ sowie eine Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ beliebig gegeben. Nach Proposition (1.29) ist dann $\Phi_A \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K, (V, W) \mapsto V_B\, A^B W$ eine Bilinearform auf $\mathcal{V}$ mit Gram-Matrix ${}_B{\Phi_A}^B = A$. Nun sei $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ beliebig und es sei eine Basis C von $\mathcal{V}$ mit ${}^B\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}{}^C = T^{-1}$ gegeben. Dann ist

$$\omega(T, A) = (T^{-1})^{\mathrm{tr}} A T^{-1} = {}_C\mathrm{Id}_{\mathcal{V}\,B}\, {}_B\Phi^{B\,B}\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}{}^C = {}_C\Phi^C$$

nach Korollar (1.31). Umgekehrt ist für jede gegebene Basis C von $\mathcal{V}$ die Matrix $T := ({}^B\mathrm{Id}_{\mathcal{V}}{}^C)^{-1}$ ein Element von $\mathrm{GL}_n(K)$, und es gilt ${}_C\Phi^C = \omega(T, A)$. Insgesamt ist also

$$O = \{\omega(T, A) \mid T \in \mathrm{GL}_n(K)\} = \{{}_B{\Phi_A}^B \mid B \text{ Basis von } \mathcal{V}\}.$$

Wegen $\mathrm{Rg}\, {}_B{\Phi_A}^B = \mathrm{Rg}\, {}_C{\Phi_A}^C$ für jede Basis C von $\mathcal{V}$ ist ferner

$$\mathrm{Rg} \colon K^{n\times n} \to \mathbb{N}_0$$

eine Invariante von ω. □

(1.34) Bemerkung. Es sei Φ eine (schief-)symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$ und es sei $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{V}^{\perp}$ gegeben. Ferner sei $B' = (B_1, \ldots, B_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$ und $B'' = (B_{k+1}, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}^{\perp}$. Für $B = (B_1, \ldots, B_n)$ ist dann

$${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} {}_{B'}(\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})^{B'} & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

und ${}_{B'}(\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})^{B'}$ ist invertierbar.

Beweis. Die Gestalt der Gram-Matrix ${}_B\Phi^B$ ergibt sich aus der Wahl von B. Da $\mathcal{U}$ ein Komplement von $\mathcal{V}^{\perp}$ in $\mathcal{V}$ ist, ist außerdem $\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$ nicht-ausgeartet nach Proposition (1.21), also ${}_{B'}(\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}})^{B'}$ invertierbar nach Korollar (1.28). □

(1.35) Korollar. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine (schief-)symmetrische Matrix. Dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine invertierbare Matrix $A' \in \mathrm{GL}_{\mathrm{Rg}\,A}(K)$ mit

$$T^{\mathrm{tr}} A T = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Folgt aus Bemerkung (1.33) für die durch A gegebene Bilinearform $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ auf $K^{n\times 1}$ und Bemerkung (1.34). $\square$

(1.36) Definition (Orthogonal- und Orthonormalbasis)**.** Es sei Φ eine Bilinearform auf $\mathcal{V}$.

(a) Eine Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ heißt *Orthogonalbasis* (bzgl. Φ), falls ${}_B\Phi^B$ eine Diagonalmatrix ist.

(b) Eine Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ heißt *Orthonormalbasis* (bzgl. Φ), falls ${}_B\Phi^B = \mathrm{I}_n$ ist.

(1.37) Proposition. Es sei $2 \neq 0$ in K. Dann existiert eine Orthogonalbasis von $\mathcal{V}$ bzgl. jeder symmetrischen Bilinearform auf $\mathcal{V}$.

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach $n := \mathrm{Dim}\,\mathcal{V}$, wobei für $n = 0$ nichts zu zeigen ist. Es sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben und existiere eine Orthogonalbasis für jeden Vektorraum $\mathcal{U}$ mit $\mathrm{Dim}\,\mathcal{U} < n$ bzgl. jeder symmetrischen Bilinearform auf $\mathcal{U}$. Es sei nun Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$ und es gelte o.B.d.A. $\Phi \neq 0$ (denn sonst wäre ${}_B\Phi^B = 0$ für jede Basis B von $\mathcal{V}$ und daher jede Basis eine Orthogonalbasis). Nach den Propositionen (1.10) und (1.9) ist

$$\mathrm{Bifo}(\mathcal{V}) = \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \oplus_{\mathrm{i}} \mathrm{Bifo}_{\mathrm{schief}}(\mathcal{V}) = \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \oplus_{\mathrm{i}} \mathrm{Bifo}_{\mathrm{alt}}(\mathcal{V}).$$

Wegen $\Phi \neq 0$ ist also Φ nicht alternierend, d.h. es gibt ein $V \in \mathcal{V}\setminus\{0\}$ mit $\Phi(V, V) \neq 0$. Da $\Phi|_{\langle V\rangle\times\langle V\rangle}$ somit nichtausgeartet ist, gilt $\mathcal{V} = \langle V\rangle \oplus_{\mathrm{i}} \langle V\rangle^{\perp}$ nach Korollar (1.23)(b). Insbesondere ist $\mathrm{Dim}\langle V\rangle^{\perp} = \mathrm{Dim}\,\mathcal{V} - \langle V\rangle = n - 1$, nach Induktionsvoraussetzung gibt es also eine Orthogonalbasis $(B_2, \ldots, B_n)$ von $\langle V\rangle^{\perp}$ bzgl. $\Phi|_{\langle V\rangle^{\perp}\times\langle V\rangle^{\perp}}$. Dann ist aber auch $B := (V, B_2, \ldots, B_n)$ eine Orthogonalbasis von $\mathcal{V}$ bzgl. Φ. Mittels Induktionsprinzip folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. $\square$

(1.38) Korollar. Es sei $2 \neq 0$ in K. Ferner sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in K^{n\times n}$ mit

$$T^{\mathrm{tr}} A T = D.$$

Beweis. Folgt aus Bemerkung (1.33) für die durch A gegebene Bilinearform $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ auf $K^{n\times 1}$ und Proposition (1.37). $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass Proposition (1.37) und Korollar (1.38) nicht gelten, falls $2 = 0$ in K ist.

(1.39) Beispiel. Es gelte $2 = 0$ in K und es sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gibt es kein $T \in \mathrm{GL}_2(K)$, so dass $T^{\mathrm{tr}} A T$ eine Diagonalmatrix ist.

Beweis. Für jede invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_2(K)$ gilt

$$\begin{aligned} T^{\mathrm{tr}} A T &= \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{2,1} \\ T_{1,2} & T_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} \\ T_{2,1} & T_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{1,1} & T_{2,1} \\ T_{1,2} & T_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{2,1} & T_{2,2} \\ T_{1,1} & T_{1,2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} T_{1,1}T_{2,1} + T_{2,1}T_{1,1} & T_{1,1}T_{2,2} + T_{2,1}T_{1,2} \\ T_{1,2}T_{2,1} + T_{2,2}T_{1,1} & T_{1,2}T_{2,2} + T_{2,2}T_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \det T \\ \det T & 0 \end{pmatrix} = (\det T)A, \end{aligned}$$

und dies ist wegen $\det T \neq 0$ keine Diagonalmatrix. $\square$

(1.40) Proposition. Es gelte $K = \mathbb{C}$ und es sei Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$. Dann existiert eine Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ mit

$$_B\Phi^B = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \\ & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $k = \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Dim} \mathcal{V}^\perp$. Insbesondere gilt: Ist Φ nicht-ausgeartet, dann existiert eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$ bzgl. Φ.

Beweis. Nach Bemerkung (1.34) und Proposition (1.37) existiert eine Basis $C = (C_1, \ldots, C_n)$ von $\mathcal{V}$ mit

$$_C\Phi^C = \begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $D \in \mathrm{GL}_k(K)$ eine invertierbare Diagonalmatrix und $k = \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Dim} \mathcal{V}^\perp$ ist. Für $i \in \{1, \ldots, k\}$ sei nun $r_i \in \mathbb{C}$ gegeben mit $r_i^2 = D_{i,i}$. Für die Basis $B = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ definiert durch

$$B_i := \begin{cases} \frac{1}{r_i} C_i, & \text{für } i \in \{1, \ldots, k\}, \\ C_i, & \text{für } i \in \{k+1, \ldots, n\}, \end{cases}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} _B\Phi^B &= {_B\mathrm{Id}_C}\, {_C\Phi^C}\, {_C\mathrm{Id}^B} \\ &= \mathrm{Diag}(\frac{1}{r_1}, \ldots, \frac{1}{r_k}, 1, \ldots, 1)\, \mathrm{Diag}(D_{1,1}, \ldots, D_{k,k}, 0, \ldots, 0)\, \mathrm{Diag}(\frac{1}{r_1}, \ldots, \frac{1}{r_k}, 1, \ldots, 1) \\ &= \mathrm{Diag}(\frac{1}{r_1} D_{1,1} \frac{1}{r_1}, \ldots, \frac{1}{r_k} D_{k,k} \frac{1}{r_k}, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \\ & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

(1.41) Korollar. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ mit

$$T^{\mathrm{tr}} A T = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{Rg}\, A} & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Folgt aus Bemerkung (1.33) für die durch A gegebene Bilinearform $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ auf $\mathbb{C}^{n \times 1}$ und Proposition (1.40). □

(1.42) Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}_{\mathrm{sym}}$ heißt

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{\mathrm{Rg}\, A} & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

die *komplexe symmetrische Normalform* von A.

Den Trick aus Proposition (1.40) können wir über den reellen Zahlen nicht anwenden, da dort keine Wurzeln aus negativen Zahlen existieren. Immerhin können wir noch stets die Wurzel aus den Beträgen der nicht-verschwindenden Diagonaleinträgen ziehen, und so eine Basis erhalten, bzgl. derer die Gram-Matrix nur die Einträge 1, -1 und 0 enthält. Der folgende Satz besagt, dass die Anzahlen dieser Einträge unabhängig von der Basis sind.

(1.43) Satz (Sylvesterscher Trägheitssatz)**.** Es gelte $K = \mathbb{R}$ und es sei Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$. Für alle Orthogonalbasen $B = (B_1, \ldots, B_n)$ und $C = (C_1, \ldots, C_n)$ von $\mathcal{V}$ gilt

$$\begin{aligned} &|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(B_i, B_i) > 0\}| = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(C_i, C_i) > 0\}|, \\ &|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(B_i, B_i) < 0\}| = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(C_i, C_i) < 0\}| \text{ und} \\ &|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(B_i, B_i) = 0\}| = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(C_i, C_i) = 0\}|. \end{aligned}$$

Beweis. Es seien $B = (B_1, \ldots, B_n)$ und $C = (C_1, \ldots, C_n)$ Orthogonalbasen von $\mathcal{V}$ bzgl. Φ. Wir setzen

$$\mathcal{V}_+ := \langle B_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \Phi(B_i, B_i) > 0 \rangle \text{ und}$$
$$\mathcal{V}_- := \langle B_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \Phi(B_i, B_i) < 0 \rangle$$

sowie

$$\mathcal{V}'_+ := \langle C_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \Phi(C_i, C_i) > 0 \rangle \text{ und}$$
$$\mathcal{V}'_- := \langle C_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \Phi(C_i, C_i) < 0 \rangle.$$

Wegen

$$\mathcal{V}^\perp = \langle B_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \Phi(B_i, B_i) = 0 \rangle = \langle C_i \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \Phi(C_i, C_i) = 0 \rangle.$$

erhalten wir also Zerlegungen

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_+ \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{V}_- \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{V}^\perp = \mathcal{V}'_+ \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{V}'_- \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{V}^\perp.$$

Wir wollen zeigen, dass $\operatorname{Dim} \mathcal{V}_+ = \operatorname{Dim} \mathcal{V}'_+$ und $\operatorname{Dim} \mathcal{V}_- = \operatorname{Dim} \mathcal{V}'_-$ ist. Für alle $V \in \mathcal{V}'_+ \cap \mathcal{V}_-$ gilt $C_i^*(V) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\Phi(C_i, C_i) \leq 0$ und $B_i^*(V) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $\Phi(B_i, B_i) \geq 0$. Gäbe es nun ein $V \in \mathcal{V}'_+ \cap \mathcal{V}_-$ mit $V \neq 0$, so wäre also

$$\Phi(V, V) = \sum_{i=1}^{n} C_i^*(V)^2 \Phi(C_i, C_i) > 0$$

und

$$\Phi(V, V) = \sum_{i=1}^{n} B_i^*(V)^2 \Phi(B_i, B_i) < 0,$$

und wir hätten einen Widerspruch. Also ist $\mathcal{V}'_+ \cap \mathcal{V}_- = \{0\}$ und wir erhalten

$$\operatorname{Dim} \mathcal{V}'_+ + \operatorname{Dim} \mathcal{V}_- = \operatorname{Dim}(\mathcal{V}'_+ + \mathcal{V}_-) \leq \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Dim} \mathcal{V}^\perp = \operatorname{Dim} \mathcal{V}_+ + \operatorname{Dim} \mathcal{V}_-,$$

also $\operatorname{Dim} \mathcal{V}'_+ \leq \operatorname{Dim} \mathcal{V}_+$. Analog erhalten wir $\operatorname{Dim} \mathcal{V}_+ \leq \operatorname{Dim} \mathcal{V}'_+$. Insgesamt folgt $\operatorname{Dim} \mathcal{V}_+ = \operatorname{Dim} \mathcal{V}'_+$ und daher auch

$$\operatorname{Dim} \mathcal{V}_- = \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Dim} \mathcal{V}_+ - \operatorname{Dim} \mathcal{V}^\perp = \operatorname{Dim} \mathcal{V} - \operatorname{Dim} \mathcal{V}'_+ - \operatorname{Dim} \mathcal{V}^\perp = \operatorname{Dim} \mathcal{V}'_-. \qquad \square$$

(1.44) Korollar (Sylvesterscher Trägheitssatz für Matrizen)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Ferner seien $C, D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Diagonalmatrizen so, dass invertierbare Matrizen $S, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $C = S^{\mathrm{tr}} A S$ und $D = T^{\mathrm{tr}} A T$ existieren. Dann gilt

$$|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid C_{i,i} > 0\}| = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid D_{i,i} > 0\}|,$$
$$|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid C_{i,i} < 0\}| = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid D_{i,i} < 0\}| \text{ und}$$
$$|\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid C_{i,i} = 0\}| = |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid D_{i,i} = 0\}|.$$

Beweis. Folgt aus Bemerkung (1.33) für die durch A gegebene Bilinearform $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ auf $K^{n \times 1}$ und dem Sylvesterschen Trägheitssatz (1.43). $\square$

(1.45) Definition (Signatur)**.**

(a) Es sei $K = \mathbb{R}$, Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$ und B eine Orthogonalbasis von $\mathcal{V}$. Dann heißt (n_+, n_-, n_0) definiert durch $n_+ := |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(B_i, B_i) > 0\}|$, $n_- := |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(B_i, B_i) < 0\}|$ und $n_0 := |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \Phi(B_i, B_i) = 0\}|$ die *Signatur* von Φ.

(b) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Ferner sei $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix so, dass eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ mit $D = T^{\mathrm{tr}} A T$ existiert. Dann heißt (n_+, n_-, n_0) definiert durch $n_+ := |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid D_{i,i} > 0\}|$, $n_- := |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid D_{i,i} < 0\}|$ und $n_0 := |\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid D_{i,i} = 0\}|$ die *Signatur* von A.

(1.46) Proposition. Es gelte $K = \mathbb{R}$ und es sei Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$. Ferner sei (n_+, n_-, n_0) die Signatur von Φ. Dann existiert eine Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ mit

$$_B\Phi^B = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n_+} & & \\ & -\mathrm{I}_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Nach Bemerkung (1.34) und Proposition (1.37) existiert eine Basis $C = (C_1, \dots, C_n)$ von $\mathcal{V}$ mit

$$_C\Phi^C = \begin{pmatrix} D & \\ & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $D \in \mathrm{GL}_k(K)$ eine invertierbare Diagonalmatrix und

$$k = \mathrm{Dim}\,\mathcal{V} - \mathrm{Dim}\,\mathcal{V}^\perp = n - n_0 = n_+ + n_-$$

ist. O.B.d.A. sei C so gewählt, dass $D_{i,i} > 0$ für $i \in \{1, \dots, n_+\}$ und $D_{i,i} < 0$ für $i \in \{n_+ + 1, \dots, k\}$. Für die Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ definiert durch

$$B_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|D_{i,i}|}} C_i, & \text{für } i \in \{1, \dots, k\}, \\ C_i, & \text{für } i \in \{k+1, \dots, n\}, \end{cases}$$

gilt dann

$$\begin{aligned} _B\Phi^B &= {}_B\mathrm{Id}_{C\,C}\Phi^{C\,C}\mathrm{Id}^B \\ &= \mathrm{Diag}(\frac{1}{\sqrt{|D_{1,1}|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|D_{k,k}|}}, 1, \dots, 1)\,\mathrm{Diag}(D_{1,1}, \dots, D_{k,k}, 0, \dots, 0)\,\mathrm{Diag}(\frac{1}{|D_{1,1}|}, \dots, \frac{1}{|D_{k,k}|}, 1, \dots, 1) \\ &= \mathrm{Diag}(\frac{1}{\sqrt{|D_{1,1}|}} D_{1,1} \frac{1}{\sqrt{|D_{1,1}|}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{|D_{k,k}|}} D_{k,k} \frac{1}{\sqrt{|D_{k,k}|}}, 0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n_+} & & \\ & -\mathrm{I}_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

(1.47) Korollar. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Ferner sei (n_+, n_-, n_0) die Signatur von A. Dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$T^{\mathrm{tr}} A T = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n_+} & & \\ & -\mathrm{I}_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Folgt aus Bemerkung (1.33) für die durch A gegebene Bilinearform $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ auf $K^{n \times 1}$ und Proposition (1.46). □

(1.48) Definition. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\mathrm{sym}}$ mit Signatur (n_+, n_-, n_0) heißt

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n_+} & & \\ & -\mathrm{I}_{n_-} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

die *reelle symmetrische Normalform* von A.

Nun betrachten wir noch alternierende Bilinearformen. Wir werden feststellen, dass sich diese in gewisser Weise besser verhalten als symmetrische Bilinearformen, denn wir erhalten hier eine Normalform über jedem Körper.

(1.49) Proposition. Es sei Φ eine alternierende Bilinearform auf $\mathcal{V}$ und es sei $J \in K^{2 \times 2}$ gegeben durch

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann existiert eine Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ mit

$$
{}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} J & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.
$$

Beweis. Wir führen vollständige Induktion nach $n := \operatorname{Dim} \mathcal{V}$, wobei für $n = 0$ nichts zu zeigen ist. Es sei also $n \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben und existiere eine Basis wie behauptet für jeden Untervektorraum $\mathcal{U}$ mit $\operatorname{Dim} \mathcal{U} < n$ bzgl. jeder alternierenden Bilinearform auf $\mathcal{U}$. Es sei nun Φ eine alternierende Bilinearform auf $\mathcal{V}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass Φ nicht-ausgeartet ist (denn sonst ist $\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus_{\mathrm{i}} \mathcal{V}^\perp$ für ein $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ und wir sind fertig mit Proposition (1.37) und Induktion). Wegen $\operatorname{Dim} \mathcal{V} = n > 0$ ist $\mathcal{V} \neq \{0\}$, d.h. es gibt einen Vektor $V \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$. Da Φ nicht-ausgeartet ist, gibt es ferner einen Vektor W' mit $\Phi(V, W') \neq 0$. Wir setzen $W := \frac{1}{\Phi(V,W')} W'$ und erhalten

$$
\Phi(V, W) = \Phi(V, \frac{1}{\Phi(V, W')} W') = \frac{1}{\Phi(V, W')} \Phi(V, W') = 1.
$$

Da Φ alternierend ist, folgt $W \neq aV$ für alle $a \in K$. Also ist $B' = (V, W)$ linear unabhängig wegen $V \neq 0$. Ferner ist

$$
{}_{B'}(\Phi|_{\langle V,W \rangle \times \langle V,W \rangle})^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J
$$

invertierbar und damit $\Phi|_{\langle V,W \rangle \times \langle V,W \rangle}$ nicht-ausgeartet. Mit Korollar (1.23)(b) folgt $\mathcal{V} = \langle V, W \rangle \oplus_{\mathrm{i}} \langle V, W \rangle^\perp$. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Basis $(B_3, \dots, B_n)$ von $\langle V, W \rangle^\perp$ bzgl. $\Phi|_{\langle V,W \rangle^\perp \times \langle V,W \rangle^\perp}$ mit

$$
{}_{B''}(\Phi|_{\langle V,W \rangle^\perp \times \langle V,W \rangle^\perp})^{B''} = \operatorname{Diag}(J, \dots, J) \in K^{(n-2)\times(n-2)}.
$$

Dann liefert aber auch $B := (V, W, B_3, \dots, B_n)$ die Gram-Matrix

$$
{}_B\Phi^B = \operatorname{Diag}(J, \dots, J) \in K^{n \times n}.
$$

Mittels Induktionsprinzip folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}_0$. □

Eine nicht-ausgeartete Bilinearform nennt man auch eine *symplektische* Bilinearform.

(1.50) Korollar. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in K^{n \times n}$ eine alternierende Matrix und es sei $J \in K^{2 \times 2}$ gegeben durch

$$
J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Dann existiert eine invertierbare Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ mit

$$
T^{\mathrm{tr}} A T = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
$$

wobei $A' = \operatorname{Diag}(J, \dots, J) \in K^{\operatorname{Rg} A \times \operatorname{Rg} A}$. Insbesondere ist $\operatorname{Rg} A$ gerade.

Beweis. Folgt aus Bemerkung (1.33) für die durch A gegebene Bilinearform $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ auf $K^{n \times 1}$ und Proposition (1.49). □

(1.51) Definition (alternierende Normalform)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $A \in K^{n \times n}_{\mathrm{alt}}$ heißt

$$
\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

wobei $A' = \operatorname{Diag}(J, \dots, J) \in K^{\operatorname{Rg} A \times \operatorname{Rg} A}$ die *alternierende Normalform* von A.

Wir bemerken noch, dass die in diesem Abschnitt vorgestellten Normalformen von Matrizen mit Hilfe des modifizierten Gauß-Algorithmus mit simultanen Zeilen- und Spaltenumformungen berechnet werden können.

§5 Quadratische Formen

In diesem Abschnitt wollen wir eine weitere Besonderheit von symmetrischen Bilinearformen herausstellen. Wir werden zeigen, dass sie bereits durch ihre zugeordnete quadratische Form festgelegt sind (sofern $2 \neq 0$ im Grundkörper gilt).
Es sei K ein Körper mit $2 \neq 0$ und $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum.

(1.52) Lemma (Polarisationsformel)**.** Es sei Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$ und es sei $\mathrm{q}_\Phi \colon \mathcal{V} \to K$ gegeben durch $\mathrm{q}_\Phi(V) := \Phi(V, V)$. Dann gilt

$$\mathrm{q}_\Phi(aV) = a^2 \mathrm{q}_\Phi(V)$$

für alle $V \in \mathcal{V}$, $a \in K$ und

$$\Phi(V, W) = \frac{1}{2}(\mathrm{q}_\Phi(V + W) - \mathrm{q}_\Phi(V) - \mathrm{q}_\Phi(W))$$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$.

Beweis. Es ist

$$\mathrm{q}_\Phi(aV) = \Phi(aV, aV) = a^2 \Phi(V, V) = a^2 \mathrm{q}_\Phi(V)$$

für alle $V \in \mathcal{V}$, $a \in K$, sowie

$$\begin{aligned}\mathrm{q}_\Phi(V + W) &= \Phi(V + W, V + W) = \Phi(V, V) + \Phi(V, W) + \Phi(W, V) + \Phi(W, W) \\ &= \mathrm{q}_\Phi(V) + 2\Phi(V, W) + \mathrm{q}_\Phi(W)\end{aligned}$$

und damit

$$\Phi(V, W) = \frac{1}{2}(\mathrm{q}_\Phi(V + W) - \mathrm{q}_\Phi(V) - \mathrm{q}_\Phi(W))$$

für alle $V, W \in \mathcal{V}$. □

(1.53) Definition (quadratische Form)**.**

(a) Eine Abbildung $q \colon \mathcal{V} \to K$ heißt eine *quadratische Form* auf $\mathcal{V}$, falls $q(aV) = a^2 q(V)$ für alle $V \in \mathcal{V}$, $a \in K$, und falls $\Psi_q \colon \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K, (V, W) \mapsto \frac{1}{2}(q(V + W) - q(V) - q(W))$ eine (notwendigerweise symmetrische) Bilinearform auf $\mathcal{V}$ ist. In diesem Fall nennen wir Ψ_q die *Polarisation* von q. Die Menge aller quadratischen Formen auf $\mathcal{V}$ notieren wir als $\mathrm{Qu}(\mathcal{V}) := \{q \in K^{\mathcal{V}} \mid q \text{ ist quadratische Form}\}$.

(b) Ist Φ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathcal{V}$, so nennen wir $\mathrm{q}_\Phi \colon \mathcal{V} \to K, V \mapsto \Phi(V, V)$ die zu Φ *assoziierte quadratische Form.*

(1.54) Beispiel. Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}.$$

Dann ist

$$\underset{\sim}{\widetilde{A}}(x, y) = x^{\mathrm{tr}} A y = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - 3x_2 y_2$$

für $x, y \in \mathbb{Q}^{2 \times 1}$ und die zur Bilinearform $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ assoziierte quadratische Form $\mathrm{q}_{\underset{\sim}{\widetilde{A}}} \colon \mathbb{Q}^{2 \times 1} \to \mathbb{Q}$ ist gegeben durch

$$\mathrm{q}_{\underset{\sim}{\widetilde{A}}}(x) = \underset{\sim}{\widetilde{A}}(x, x) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 - 3x_2^2$$

für $x \in \mathbb{Q}^{2 \times 1}$.

(1.55) Proposition. Es ist $\mathrm{Qu}(\mathcal{V}) \leq K^{\mathcal{V}}$ und

$$\mathrm{q}_{-} \colon \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \to \mathrm{Qu}(\mathcal{V})$$

ist ein K-Vektorraumisomorphismus mit Inversem

$$\Psi_{-} \colon \mathrm{Qu}(\mathcal{V}) \to \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}).$$

Beweis. Für $\Phi, \Psi \in \mathrm{Bifo}(\mathcal{V})$ und $a \in K$ gilt

$$\mathrm{q}_{a\Phi+\Psi}(V) = (a\Phi + \Psi)(V, V) = a\Phi(V, V) + \Psi(V, V) = a\mathrm{q}_{\Phi}(V) + \mathrm{q}_{\Psi}(V) = (a\mathrm{q}_{\Phi} + \mathrm{q}_{\Psi})(V)$$

für alle $V \in \mathcal{V}$, d.h. $\mathrm{q}_{a\Phi+\Psi} = a\mathrm{q}_{\Phi} + \mathrm{q}_{\Psi}$. Somit ist die Abbildung $\delta \colon \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \to K^{\mathcal{V}}, \Phi \mapsto \mathrm{q}_{\Phi}$ linear über K und es gilt $\mathrm{Bild}\,\delta \subseteq \mathrm{Qu}(\mathcal{V})$ nach Lemma (1.52). Für alle $q \in \mathrm{Qu}(\mathcal{V})$ gilt andererseits

$$\mathrm{q}_{\Psi_q}(V) = \Psi_q(V, V) = \frac{1}{2}(q(V + V) - q(V) - q(V)) = \frac{1}{2}(q(2V) - 2q(V)) = \frac{1}{2}(4q(V) - 2q(V)) = q(V)$$

für alle $V \in \mathcal{V}$ und damit $\mathrm{q}_{\Psi_q} = q$. Folglich ist sogar $\mathrm{Bild}\,\delta = \mathrm{Qu}(\mathcal{V})$ und damit insbesondere $\mathrm{Qu}(\mathcal{V}) \leq K^{\mathcal{V}}$. Ferner ist $\mathrm{q}_{-} \colon \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \to \mathrm{Qu}(\mathcal{V})$ ein K-Vektorraumepimorphismus. Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}\,\mathrm{q}_{-} &= \{\Phi \in \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \mid \mathrm{q}_{\Phi} = 0\} = \{\Phi \in \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \mid \mathrm{q}_{\Phi}(V) = 0 \text{ für alle } V \in \mathcal{V}\} \\
&= \{\Phi \in \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \mid \Phi(V, V) = 0 \text{ für alle } V \in \mathcal{V}\} = \{\Phi \in \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \mid \Phi \text{ alternierend}\} \\
&= \mathrm{Bifo}_{\mathrm{sym}}(\mathcal{V}) \cap \mathrm{Bifo}_{\mathrm{alt}}(\mathcal{V}) = \{0\}
\end{aligned}$$

nach Proposition (1.10) und Proposition (1.9) und daher q_{-} sogar ein K-Vektorraumisomorphismus. □

§6 Homogene Polynome

In diesem letzten Abschnitt geben wir eine Beschreibungsmöglichkeit von Bilinearformen und quadratischen Formen mit Hilfe von Polynomen in mehreren Unbestimmten an.
Es sei K ein Körper und $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum.

(1.56) Definition (Polynomring)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren rekursiv $K[X_1, \dots, X_n]$ durch

$$K[X_1, \dots, X_n] := \begin{cases} K, & \text{für } n = 0, \\ K[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n], & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Es heißt $K[X_1, \dots, X_n]$ der *Polynomring* in den *Unbestimmten* $X_1, \dots, X_n$, und die Elemente von $K[X_1, \dots, X_n]$ heißen *Polynome* in $X_1, \dots X_n$.

(1.57) Beispiel. Es ist

$$\begin{aligned}
&(X_1 + (-1 - 2X_1)X_2) + ((1 + 2X_1^2) + (2 - 3X_1)X_2^2)X_3 \\
&= X_1 - X_2 - 2X_1X_2 + X_3 + 2X_1X_3 + 2X_2^2X_3 - 3X_1X_2^2X_3
\end{aligned}$$

ein Polynom in $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$.

Ein Polynom $p \in K[X_1, \dots, X_n]$ für $n \in \mathbb{N}$ ist von der Gestalt

$$p = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} p_k X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$$

mit $p_k \in K$ für $k \in \mathbb{N}_0^n$ und $p_k = 0$ für fast alle $k \in \mathbb{N}_0^n$.

(1.58) Definition (Grad)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für ein Polynom $p = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} p_k X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} \in K[X_1, \dots, X_n] \setminus \{0\}$ heißt

$$\mathrm{Grad}\, p := \max\,\{\sum_{i=1}^{n} k_i \mid p_k \neq 0\}$$

der *(Total-)Grad* von p.

(1.59) Definition (homogene Polynome)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Für $m \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$K[X_1, \dots, X_n]_{m,\text{hom}}$$
$$:= \{p \in K[X_1, \dots, X_n] \mid p = \sum_{k \in \mathbb{N}_0^n} p_k X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} \text{ mit } p_k = 0 \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit } \sum_{i=1}^{n} k_i \neq m\}.$$

Ein Polynom $p \in K[X_1, \dots, X_n]_{m,\text{hom}} \setminus \{0\}$ heißt *homogen* vom Grad m.

(1.60) Beispiel. Es ist $3X_1X_2X_3 - X_2^3 + 2X_1X_3^2 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$ homogen vom Grad 3.

(1.61) Bemerkung. Es ist

$$K[X_1, \dots, X_n]_{2,\text{hom}}$$
$$= \{p \in K[X_1, \dots, X_n] \mid p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} X_i X_j \text{ mit } a_{i,j} \in K \text{ für } i, j \in \{1, \dots, n\}\}$$

(1.62) Proposition. Es sei $2 \neq 0$ in K. Für jede Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ ist

$$\operatorname{Qu}(\mathcal{V}) \to K[X_1, \dots, X_n]_{2,\text{hom}}, q \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Psi_q(B_i, B_j) X_i X_j$$

ein K-Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Übungsblatt 2, Aufgabe 8(d). □

(1.63) Definition (bilineare Polynome)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir setzen

$$K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]_{(1,1),\text{hom}}$$
$$:= \{p \in K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n] \mid p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} X_i Y_j \text{ mit } a_{i,j} \in K \text{ für } i, j \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Ein Polynom $p \in K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]_{(1,1),\text{hom}} \setminus \{0\}$ heißt ein *bilineares Polynom*.

(1.64) Beispiel. Es ist $3X_1Y_2 + 2X_1Y_3 - X_2Y_1 + 2X_3Y_3 \in \mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, Y_3]$ ein bilineares Polynom.

(1.65) Proposition. Für jede Basis $B = (B_1, \dots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ ist

$$\operatorname{Bifo}(\mathcal{V}) \to K[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]_{(1,1),\text{hom}}, \Phi \mapsto \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Phi(B_i, B_j) X_i Y_j$$

ein K-Vektorraumisomorphismus.

Beweis. Übungsblatt 2, Aufgabe 8(b). □