Vorkurs zur linearen Algebra
Übungsblatt 3

Aufgabe 14 (neutrale und inverse Elemente)**.** Es sei X eine Menge und m eine Verknüpfung auf X. Ein *linksneutrales Element* bzgl. m ist ein Element $e \in X$, welches $m(e,x) = x$ für alle $x \in X$ erfüllt. Ein *linksinverses Element* zu x bzgl. m ist ein Element $y \in X$, welches $m(y,x) = e$ für ein neutrales Element e erfüllt. *Rechtsneutrale Elemente* und *rechtsinverse Elemente* sind symmetrisch definiert.

(a) Es sei e ein linksneutrales und e' ein rechtsneutrales Element bzgl. m. Zeigen Sie, dass dann $e = e'$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass es höchstens ein neutrales Element bzgl. m gibt.

(c) Es sei m assoziativ und es sei e ein neutrales Element bzgl. m. Ferner sei $x \in X$ gegeben und es sei y ein linksinverses Element und y' ein rechtsinverses Element zu x bzgl. m. Zeigen Sie, dass dann $y = y'$ gilt.

(d) Es sei m assoziativ und es sei e ein neutrales Element bzgl. m. Zeigen Sie, dass es zu jedem $x \in X$ höchstens ein inverses Element bzgl. m gibt.

Aufgabe 15 (Verknüpfungen)**.** Untersuchen Sie auf $\mathbb{Z}$ die Verknüpfungen $(x,y) \mapsto x + y$, $(x,y) \mapsto x - y$, $(x,y) \mapsto x \cdot y$ auf Assoziativität, Kommutativität, links-/rechtsneutrale Elemente und links-/rechtsinverse Elemente. Untersuchen Sie auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ die Verknüpfungen $(x,y) \mapsto x \cdot y$ und $(x,y) \mapsto x : y$ auf Assoziativität, Kommutativität, links-/rechtsneutrale Elemente und links-/rechtsinverse Elemente.

Aufgabe 16 (links-/rechtsinverse Elemente)**.** Bestimmen Sie eine Menge X und ein Element in $\mathrm{Map}(X,X)$, welches ein links-, aber kein rechtsinverses Element bzgl. der Verknüpfung $(g,f) \mapsto g \circ f$ hat.

Aufgabe 17 (Inversionsregeln)**.** Es sei M ein Monoid. Zeigen Sie:

(a) Es seien $x, y \in M$ invertierbar. Dann ist auch xy invertierbar und es gilt $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

(b) Es ist 1 invertierbar mit $1^{-1} = 1$.

(c) Es sei $x \in M$ invertierbar. Dann ist auch x^{-1} invertierbar mit $(x^{-1})^{-1} = x$.

Aufgabe 18 (Gruppenaxiome)**.** Zeigen Sie: Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ wird zu einer kommutativen Gruppe mit Gruppenverknüpfung $(m,n) \mapsto m + n - 1$.

Aufgabe 19 (symmetrische Gruppe)**.** Nach Beispiel (4.9)(e) ist $\mathrm{Map}(X,X)$ zusammen mit der Verknüpfung $(g,f) \mapsto g \circ f$ im Allgemeinen keine Gruppe. Finden Sie eine geeignete Teilmenge S von $\mathrm{Map}(X,X)$ so, dass S mit der auf S *eingeschränkten* Verknüpfung $S \times S \to S$, $(g,f) \mapsto g \circ f$ eine Gruppe wird.

Aufgabe 20 (Linksmultiplikation)**.** Es seien eine Gruppe G und ein $g \in G$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G \to G$, $x \mapsto gx$ bijektiv ist.

Aufgabe 21 (kommutative Gruppen)**.** Es sei G eine Gruppe. Für $g \in G$ sei $g^2 := gg$. Zeigen Sie:

(a) Es ist G kommutativ genau dann, wenn $(gh)^2 = g^2h^2$ für alle $g, h \in G$ gilt.

(b) Wenn $g^2 = 1$ für alle $g \in G$ gilt, dann ist G kommutativ.

(c) Wenn $g = g^{-1}$ für alle $g \in G$ gilt, dann ist G kommutativ.

Aufgabe 22 (abelsche Gruppen)**.** Reformulieren Sie die Aussagen aus Abschnitt 4 für abelsche Gruppen (d.h. übersetzen Sie alles in die additive Schreibweise). Beginnen Sie mit den Axiomen.