

Vorkurs zur linearen Algebra  
Übungsblatt 5

**Aufgabe 29** (Rechnen in  $\mathbb{Z}/n$ ).

- (a) Berechnen Sie  $17 + 23 + 40 - 8$  und  $2 \cdot (-3) \cdot 15$  und  $6^{1000000}$  in  $\mathbb{Z}/7$ .
- (b) Berechnen Sie  $(-8) + 13 - 2 + 5$  und  $4 \cdot 3 \cdot 5$  und  $9^{14}$  in  $\mathbb{Z}/8$ .
- (c) Ist  $3^{2012} = 3^{2016}$  in  $\mathbb{Z}/80$ ?

**Aufgabe 30** (Nullteiler in  $\mathbb{Z}/n$ ).

- (a) Finden Sie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x, y \in \mathbb{Z}$  mit  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$  in  $\mathbb{Z}/n$ , aber  $xy = 0$  in  $\mathbb{Z}/n$ .
- (b) Es seien  $p, q \in \mathbb{N}$  mit  $p > 1$  und  $q > 1$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}/pq$  kein Körper ist. (Hinweis: Lemma (5.7).)

**Aufgabe 31** (Inverse in  $\mathbb{Z}/n$ ).

- (a) Bestimmen Sie die Inversen der invertierbaren Elemente in  $\mathbb{Z}/11$ .
- (b) Es sei  $a \in \mathbb{Z}$  so, dass  $a^2$  in  $\mathbb{Z}/12$  invertierbar ist. Ist dann auch  $a$  invertierbar?

**Aufgabe 32** (Invertierbarkeit in  $\mathbb{Z}/n$ ). Es sei  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Es sei  $x \in \mathbb{Z}$ . Zeigen Sie, dass  $x$  genau dann invertierbar in  $\mathbb{Z}/n$  ist, wenn  $\text{ggT}(x, n) = 1$  ist.  
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass es  $a, b \in \mathbb{Z}$  gibt mit  $\text{ggT}(x, n) = ax + bn$ .
- (b) Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}/n$  genau dann ein Körper ist, wenn  $n$  eine Primzahl ist.