

Deutsche Mathematiker Vereinigung
DMV

Fachgruppe Mathematik
der RWTH Aachen

Studierenden-Konferenz

Mathematik

12.-14. September 2001

Aachen

Hauptvorträge

A. Dress (Bielefeld) Kombinatorische Probleme aus der Biologie

J. Brüdern (Stuttgart) Vom Prinzip der erzeugenden Funktion: Eine Erfolgsgeschichte von Euler bis Hardy und Littlewood

P. Littelmann (Wuppertal) Darstellungstheorie und Kombinatorik, alt und neu: Von Frobenius bis Lusztig

Programm

Alle eingesendeten Arbeiten werden in 20 Minuten dauernden Vorträgen vorgestellt. Zusätzlich gibt es drei längere Hauptvorträge.

Alle Vorträge finden in Hörsälen I, III und IV im Hauptgebäude der RWTH, Templergraben 55, statt.

Mittwoch, 12.9.2001

14:00 Uhr (I): Begrüßung und Eröffnung

14:30–15:30 Uhr (I): Hauptvortrag **A. Dress** (Bielefeld) *Kombinatorische Probleme aus der Biologie*

16:00–18:00 Uhr, parallele Sektionsvorträge:

Analysis/Numerik, Hörsaal III (Leitung: Enß)

16:00 Brinks - *On the numerical detection of Hopf bifurcation points*

16:30 Frey - *Die asymptotische Entwicklung der Resolventenspur*

17:00 Kühn - *Rekonstruktion von Gebieten aus Spektraldaten beim Neumannschen Randwertproblem*

17:30 Rauhut - *An uncertainty principle for periodic functions*

Algebra/Zahlentheorie, Hörsaal IV (Leitung: Hiß)

16:00 Hammer - *Der Satz von Belyi*

16:30 Horn - *Modulformen zur unitären Gruppe*

17:00 Meyer - *Die L-Reihen einiger symmetrischer Quintiken*

17:30 Schmithüsen - *Die Aktion von $\text{Gal}(\bar{Q}/Q)$ auf der algebraischen Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^1$ ohne drei Punkte*

Donnerstag, 13.9.2001

9:00–11:00 Uhr, parallele Sektionsvorträge:

Stochastik, Hörsaal III (Leitung: Bock)

- 9:00 Brückner - *Verteilungseigenschaften von Renditen im Black-Scholes-Modell*
- 9:30 Schilling - *No-arbitrage-Grenzen und statisches Hedging von Compound-Optionen*
- 10:00 Wittfeld - *Die Geometrie der Korrespondenzanalyse*
- 10:30 Kläre - *Über eine Klasse linearer stochastischer Differentialgleichungen ohne Adaptiertheitsforderungen*

Algebra/Zahlentheorie, Hörsaal IV (Leitung: Plesken)

- 9:00 Groetschel - *Polynomfaktorisierung und zyklische Codes über $\mathbb{Z}_p^m$*
- 9:30 Leske - *Lexsegment- und Gotzmannideale*
- 10:00 Hartjen - *Variational Calculus and Conservation Laws with Maple*

11:30–12:30 Uhr (I): Hauptvortrag **J. Brüder**n (Stuttgart) *Vom Prinzip der erzeugenden Funktion: Eine Erfolgsgeschichte von Euler bis Hardy und Littlewood*

15:30–18:00 Uhr, parallele Sektionsvorträge:

Analysis/Numerik, Hörsaal III (Leitung: Wiegner und NN)

- 15:30 Biegert - *Sobolevräume und Halbgruppen*
- 16:00 Duelli - *A Characterization of Hilbert Spaces by Maximal Regularity of Cauchy Problems*
- 16:30 Wirth - *About the Solvability Behaviour for Special Classes of Nonlinear Hyperbolic Equations*
- 17:00 Zeiser - *Modellierung, Stabilitätsanalyse und Simulation für isothermes Fiber Spinning*

Algebra/Zahlentheorie, Hörsaal IV (Leitung: Hiß)

- 15:30 Brandt - *Die Charaktertafeln der endlichen generellen linearen Gruppen*
- 16:00 Hirn - *Ein Amalgam für das Monster*
- 16:30 Knödler - *Coleman-Automorphismen von einfachen Gruppen*
- 17:00 Kroll - *On Heisenberg Groups in Characteristic p*

ab 19:00 Uhr (im 'Labyrinth'): gemeinsames Treffen zum Abendessen, Diskutieren, ...

Freitag, 14.9.2001

9:00–11:00 Uhr, parallele Sektionsvorträge:

Stochastik, Hörsaal III (Leitung: Mathar)

- 9:00 Konopka - *Ein sequentielles Neyman-Pearson-Lemma bei unabhängigen Versuchswiederholungen*
- 9:30 Maaß - *Superlineare Funktionale als Verallgemeinerung exakter kooperativer Spiele*
- 10:00 Winter - *Convergence points and divergence points of self-similar measures*

Algebra/Zahlentheorie, Hörsaal IV (Leitung: Pahlings)

- 9:00 Rohde - *Über Erweiterungen des Axioms der Determiniertheit*
- 9:30 Rudert - *Fastquadrate*
- 10:00 Hobst - *Generalisierte R -Matrizen für Kategorien verflochtener Moduln*
- 10:30 Mann - *Eine neue untere Schranke für die chromatische Zahl des $\mathbb{Q}^n$*

11:30–12:30 Uhr (I): Hauptvortrag **P. Littelmann** (Wuppertal) *Darstellungstheorie und Kombinatorik, alt und neu: Von Frobenius bis Lusztig*

14:30–15:30 Uhr (I): Preisverleihung

Preise und Sponsoren

Auf der Konferenz werden Preise für besonders gute Arbeiten vergeben. Es handelt sich hier um Buchpreise und Gastaufenthalte in verschiedenen Instituten.

Der überwiegende Teil der Buch-Preise wurde durch eine großzügige Spende des *Springer Verlags* ermöglicht. Weitere Buch-Preise stifteten der *Vieweg-* und der *Teubner-Verlag*, sowie *Prof. Dr. N. Schmitz*.

Die Gastaufenthalte wurden gestiftet von

- Max Planck-Institut für Mathematik Bonn
- Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach
- Max Planck-Institut für Mathematik Leipzig
- Konrad Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin
- Fraunhofer Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik

Preiskomitee

Die folgenden Leute haben bei der Beurteilung der eingesendeten Arbeiten geholfen:

Prof. Dr. J. Bemelmans
Prof. Dr. H. H. Bock
Dr. V. Dietrich
Prof. Dr. V. Enß
Prof. Dr. E. Grädel
Dr. Y. Guo
Prof. Dr. G. Hiß
Dr. H. Jarausch
Prof. Dr. U. Krafft
Prof. Dr. A. Krieg
Dr. F. Lübeck
Prof. Dr. R. Mathar
Dr. J. Müller
Prof. Dr. S. Noelle
Prof. Dr. H. Pahlings
Prof. Dr. W. Plesken
Dipl. Math. V. Schmitz
Prof. Dr. E. Triesch
Prof. Dr. M. Wiegner

Teilnehmerliste

Sektion Analysis/Numerik

Markus Biegert, Ulm (markus@mathematik.uni-ulm.de)
Ralph Brinks, Hagen (Ralph.Brinks@FernUni-Hagen.de)
Markus Duelli, Ulm (mmd@mathematik.uni-ulm.de)
Christian Frey, Köln (cfrey@mi.uni-koeln.de)
Lars Kühn, Göttingen (kuehn@math.uni-goettingen.de)
Holger Rauhut, München (holger.rauhut@gmx.de)
Steffen Winter, Greifswald (sw27@st-andrews.ac.uk)
Jens Wirth, Freiberg (wirth@math.tu-freiberg.de)
Andreas Zeiser (andreas.zeiser@web.de)

Sektion Stochastik

Karsten Brückner, Magdeburg (brueckne@mail.Math.Uni-Magdeburg.De)
Steffen Kläre, Jena (klaere@gsf.de)
Jörg Konopka, Münster (konopkj@math.uni-muenster.de)
Sebastian Maaß, Bremen (Sebastian.Maass@email.de)
Holger Schilling, Frankfurt am Main (hi_schilling@t-online.de)
Katharina Wittfeld, Greifswald (wittfeld@www.math-inf.uni-greifswald.de)

Sektion Algebra/Zahlentheorie

Marco Brandt, Stuttgart (brandtmo@mathematik.uni-stuttgart.de)
Thomas Groetschel, München (groetsch@mailhalle.informatik.tu-muenchen.de)
Horst Hammer, Karlsruhe (ua2f@rz.uni-karlsruhe.de)
Gehrt Hartjen, Aachen (office@hartjen.de)
Andreas Hirn, Halle (andreas_hirn@web.de)
Daniela Hobst, München (hobst@rz.mathematik.uni-muenchen.de)
Tobias Horn, Heidelberg (thorn@ix.urz.uni-heidelberg.de)
Michael Knödler, Stuttgart (knoedlml@mathematik.uni-stuttgart.de)
Björn Kroll, Hamburg (bjoern.kroll@math.uni-hamburg.de)
Sebastian Leske, Essen (mat300@uni-essen.de)
Matthias Mann, Bielefeld (mr.mann@gmx.de)
Christian Meyer, Mainz (cm@informatik.uni-mainz.de)
Phillip Rohde, Bonn (metaego@web.de)
Sebastian Rudert, Hamburg (sebastian.rudert@math.uni-hamburg.de)
Gabriela Schmithüsen, Karlsruhe (uag7@rz.uni-karlsruhe.de)

Gäste ohne eigenen Beitrag

Kathrin Bringmann
Sebastian Mänz, Aachen
Cornelius Selke

Abstracts der vorgestellten Arbeiten

Markus Biegert Sobolevräume und Halbgruppen

Die erste Hauptaufgabe dieser Arbeit ist zu zeigen, daß unter gewissen Randbedingungen an Ω es eine Abbildung E

$$E : \bigcup_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\Omega) \rightarrow \bigcup_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\mathbb{R}^n)$$

gibt mit den Eigenschaften:

- $E|_{W^{k,p}(\Omega)} \in \mathcal{L}(W^{k,p}(\Omega), W^{k,p}(\mathbb{R}^n))$
- $(Ef)|_{\Omega} = f$

Eine wichtige Eigenschaft ist die simultane Erweiterung, d.h.

$$E(W^{k,p}(\Omega) \cap W^{m,q}(\Omega)) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \cap W^{m,q}(\mathbb{R}^n)$$

Die zweite Hauptaufgabe ist Eigenschaften des Neumann-Laplace Operators auf $C(\overline{\Omega})$ auszuarbeiten. Dazu gibt es drei Hauptergebnisse:

- Für $\Omega \subset \mathbb{R}$ eine Charakterisierung, wann $\Delta_{\Omega,c}^N$ eine C_0 -Halbgruppe erzeugt.
- Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit ausreichend glattem Rand ist $\Delta_{\Omega,c}^N$ ein Generator einer C_0 -Halbgruppe.
- Beispiel für ein zusammenhängendes Ω , so daß $\Delta_{\Omega,c}^N$ kein Generator einer C_0 -Halbgruppe ist.

Marco Brandt Die Charaktertafeln der endlichen generellen linearen Gruppen

Ein grundlegender Satz in der Darstellungstheorie endlicher Gruppen besagt, daß die Anzahl der irreduziblen Charaktere einer endlichen Gruppe G gleich der Anzahl der Konjugationsklassen von G ist. J.A. Green entwickelt in seiner Dissertation [2] schon 1955 ein Verfahren, um die irreduziblen Charaktere der generellen linearen Gruppe $GL_n(q)$ über dem Körper $GF(q)$ konkret zu berechnen.

Seither wurden die Methoden zur Untersuchung genereller linearer Gruppen (oder allgemeiner endlicher Gruppen vom Lie-Typ) erheblich verfeinert.

Insbesondere wurde durch die Einführung des Gelfand-Graev Charakters und der Harish-Chandra-Philosophie ein Instrumentarium entwickelt, das auch in der gewöhnliche Darstellungstheorie der $GL_n(q)$ zu erheblichen Vereinfachungen führen sollte. Meine Diplomarbeit stellt einen Versuch dar, einen ersten Schritt in diese Richtung zu tun.

Wir werden, R. Dipper und G. James in [1] folgend, die Notation von n -Indizes benutzen, um Konjugationsklassen und irreduzible Charaktere von $GL_n(q)$ zu parametrisieren. Das heißt, wir bringen den Greenschen Algorithmus in eine Notation, mit der wir aus den Daten eines n -Indexes I direkt einen zugehörigen irreduziblen Charakter Ψ_I von $GL_n(q)$ berechnen können. Damit erhalten wir eine natürliche Bijektion zwischen Konjugationsklassen und irreduziblen Charakteren von $GL_n(q)$.

Zunächst führen wir grundlegende Begriffe wie zum Beispiel die Indizes $\mathcal{I}_n$, die Hallpolynome $g_{c_1 c_2 \dots c_k}^c(q)$ oder den Gelfand-Graev Charakter Γ ein. Anschließend definieren wir Klassenfunktionen $\{\Psi_I \mid I \in \mathcal{I}_n\}$ und zeigen, daß es sich dabei genau um die irreduziblen Charaktere von $GL_n(q)$ handelt. Danach untersuchen wir, welche von ihnen regulär sind.

Zum Schluß formulieren wir einen konkreten Algorithmus, um eine generische Charaktertafel von $GL_n(q)$ zu berechnen und führen ihn für $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ aus. Im Anhang listen wir diejenigen Hallpolynome $g_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k}^\lambda(q)$, Green-Funktionen $Q_\mu^\lambda(q)$ und Charakterwerte χ_μ^λ der symmetrischen Gruppe auf, die wir für diese Berechnungen benötigen.

Literatur

- [1] R. Dipper und G. James, Identification of the Irreducible Modular Representations of $GL_n(q)$, Journal of Algebra **104** (1986) 266-288
- [2] J. A. Green, The Characters of the Finite General Linear Groups, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402-447

Ralph Brinks

On the Numerical Detection of Hopf Bifurcation Points in Ordinary Differential Equations

Das Hauptanliegen der Arbeit ist eine vergleichende Darstellung der neueren Methoden zum numerischen Auffinden von Hopf-Verzweigungen bei parameterabhängigen Systemen von gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGL). Betrachtet werden DGL der Form

$$\dot{y} = f(y, \lambda),$$

wobei insbesondere die stationären Lösungen (Ruhelagen) y^s , charakterisiert durch $f(y^s, \lambda) = 0$, interessieren. Die meist reellwertige Größe λ spielt dabei die Rolle eines variablen Parameters. Über sogenannte Fortsetzungsverfahren kann man dann untersuchen, wie sich die stationären Lösungen bei Variation des Parameters λ verhalten. Hierbei können sich die stationären Lösungen in verschiedenartigen Szenarien verzweigen (Stichwort: Bifurkationstheorie), aber auch zusätzliche periodische Lösungen einsetzen. Hopf-Verzweigungen sind gerade diejenigen Punkte, in denen neben den stationären Lösungen nun auch periodische Lösungen entstehen - es beginnen also Ruhelagen und Schwingungen zu koexistieren.

In der naturwissenschaftlichen und technischen Praxis stellt der Übergang eines Systems vom Gleichgewichtszustand zu regelmäßigem, periodischem Verhalten einen wichtigen qualitativen Zustandswechsel dar. Aus diesem Grund wurde in der Vergangenheit eine Reihe von numerischen Verfahren entwickelt, um mögliche Hopf-Verzweigungen aus den herrschenden Systemgleichungen vorherzusagen. Die Diplomarbeit gibt einen Überblick über die Methoden der letzten 15-20 Jahre. Nach der jeweiligen theoretischen Rechtfertigung der Verfahren werden die Algorithmen implementiert und an einem oder mehreren Beispielen getestet. Ein abschließender Vergleich stellt die Vor- und Nachteile gegenüber. Dabei stellt sich heraus, dass die meisten der Verfahren nur Hopf-Verzweigungen aufspüren, die gewisse zusätzliche Eigenschaften besitzen - andere Hopf-Punkte, die diese Eigenschaften nicht besitzen, bleiben unentdeckt. Die Arbeit zeigt Perspektiven auf, wie dieser Unzuverlässigkeit begegnet werden kann. Darüber hinaus liefert sie eine einfache numerische Methode wie die Existenz von Hopf-Punkten sicher ausgeschlossen werden kann.

Karsten Brückner

Verteilungseigenschaften von Renditen im Black-Scholes-Model

Im Rahmen des klassischen Black-Scholes-Modells zur Preisfestsetzung für Optionen sind oft die Verteilungen von Renditen von Interesse. Es werden Renditen bei alleiniger Investition in die Option bzw. bei gleichzeitiger Investition in Aktie und Option (Mischung) behandelt. Die Verteilungen der Renditen bei alleiniger Investition in die Option werden anhand ihrer Dichtefunktionen charakterisiert. Obwohl analog auch die Dichtefunktionen der Verteilungen von Mischungsrenditen bestimmt werden können, werden wegen ihrer komplexen Struktur lediglich Erwartungswert und Varianz berechnet. Diese sind jedoch gerade die Kenngrößen, welche für die üblichen Effizienzbetrachtungen benötigt werden. Ein Mischung heißt effizient, wenn es keine

andere zur Auswahl stehende Mischung gibt, deren Rendite größeren Erwartungswert und gleichzeitig kleinere Varianz aufweist. Für zwei verschiedene Typen von Mischungen werden interessante Ergebnisse präsentiert.

Markus Duelli

A Characterization of Hilbert Spaces by Maximal Regularity of Cauchy Problems

Bei der Arbeit mit partiellen Differentialgleichungen begegnet man in natürlicher Weise abstrakten (vektorwertigen) Cauchyproblemen (d.h. AWPen der Form $f' + Af = g$). In Anwendungen ist man daran interessiert, ob f' in L^p liegt, falls die Inhomogenität g in L^p liegt. Operatoren A mit dieser Eigenschaft nennt man maximal (L^p) regulär. Besitzen alle Operatoren (innerhalb der Klasse sektorieller Operatoren vom Typ $< \pi/2$) auf einem Banachraum diese Eigenschaft, so sagt man, der Banachraum habe die maximale Regularitätseigenschaft (MRP). Es war lange bekannt, daß alle Hilberträume diese Eigenschaft besitzen, jedoch war die Frage, ob zum Beispiel jeder L^p -Raum diese Eigenschaft hat, offen. In dieser Arbeit wird nun dargestellt, daß die MRP innerhalb großer Klassen von Banachräumen (u.a. den separablen Banachverbänden) die Hilberträume charakterisiert. Der Beweis dieser Aussage verbindet Methoden der Banachraumgeometrie und solche der Operatorhalbgruppen. Genauer gesagt: Es werden 'Diagonaloperatoren' (bezüglich Schauderzerlegungen des Banachraumes) konstruiert. Mittels dieser Operatoren und der MRP kann man dann Aussagen über die Geometrie des Banachraumes treffen.

Christian Frey

Die asymptotische Entwicklung der Resolventenspur

Mit den von JOCHEN BRÜNING in einer Vorlesung im Sommer 1999 bereitgestellten Methoden beweisen wir die Asymptotik der Resolventenspur für Operatoren vom Laplace-Typ auf Bündeln über kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Der Beweis liefert einen Algorithmus zur Berechnung der Koeffizienten der asymptotischen Entwicklung, der sog. Wärmeleitungs-invarianten. Aus diesem leiten wir Formeln für die Koeffizienten, die die Resultate von I. Polterovich in zwei Richtungen verallgemeinern: wir erhalten Formeln für Operatoren vom Laplace-Typ auf beliebigen Bündeln, d. h. nicht nur für den Laplace-Operator auf Funktionen; es ergeben sich abzählbar viele Ausdrücke für $n \geq 3$, die im Spezialfall $n = 3$ das Resultat von I. Polterovich darstellen. Unter bestimmten Voraussetzungen an die Operatorkoeffizienten, die z. B. für den Laplace-Operator auf Formen erfüllt sind, kann der Fall $n = 2$ aus dem Beweis gefolgert werden.

Thomas Groetschel
Polynomfaktorisierung und zyklische Codes über $\mathbb{Z}_{p^m}$

Zu Polynomringen über endlichen Körpern gibt es bereits umfangreiche Theorie und Verfahren. Im univariaten Fall liegt ein euklidischer Ring vor. Eine Formel für die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome ist bekannt und Gegenstand von Algebravorlesungen. Weiterhin steht mit dem Berlekampalgorithmus ein effizientes Verfahren zur Faktorisierung von univariaten quadratfreien Polynomen über endlichen Körpern zur Verfügung. Die Anzahl der irreduziblen Teiler eines Polynoms läßt sich dabei durch den Rang einer Matrix ermitteln. Motivation für diese Arbeit ist es, Aussagen über Polynome über den Ringen $\mathbb{Z}_{p^m}$ mit p Primzahl zu finden, die im Zusammenhang mit der Faktorisierung stehen. Dabei wird eine Formel für die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome in $\mathbb{Z}_{p^2}[x]$ hergeleitet. Weiterhin wird die Anzahl der normierten Teiler des Polynoms $x^{p^k} - 1$ in $\mathbb{Z}_{p^m}[x]$ untersucht. Dabei werden Formeln für den Fall $m = 2$ bewiesen und ein Algorithmus hergeleitet, mit dem Teiler in Koeffizientenringe $\mathbb{Z}_{p^m}$ mit $m > 2$ hochgehoben werden können. Schließlich wird gezeigt, wie zu jedem dieser Teiler ein zyklischer Code der Länge p^k über $\mathbb{Z}_{p^m}$ konstruiert werden kann.

Horst Hammer
Der Satz von Belyi

Der Satz von Belyi besagt, daß eine über $\mathbb{C}$ definierte nichtsinguläre projektive Kurve X genau dann schon über $\overline{\mathbb{Q}}$ definiert ist, wenn sie einen nicht-konstanten Morphismus $p : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ zuläßt, der nur über drei Punkten verzweigt. Diese Aussage wurde in ihrer Gesamtheit zuerst ca. 1978 von G. Belyi bewiesen, geht aber in wesentlichen Teilen auf einen Satz von A. Weil zurück. Der Satz von Belyi bildet den Anfang und Aufhängepunkt der Grothendieck'schen Theorie der Kinderzeichnungen oder dessins d'enfants, von denen man sich Aussagen über die Struktur der absoluten Galois-Gruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ verspricht. Der Beweis des Satzes selbst zerfällt in die sogenannte „triviale“ Richtung, welche auf Weil zurückgeht und in die „elementare“ Richtung. Während erstere wiederum aus einem rein topologischen und einem algebraisch-geometrischen Argument besteht, beinhaltet zweite-re den von Belyi gefundenen Algorithmus zur Konstruktion eines nur über drei Punkten verzweigenden Morphismus von einer gegebenen, über $\overline{\mathbb{Q}}$ definierten Kurve in den $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Für diesen Algorithmus werden zwei verschiedene, teilweise neue, Beweise präsentiert und ausformuliert. Im Beweis der „trivialen“ Richtung ist vor allem das algebraisch-geometrische zweite Argument interessant. Hier wird in der vorliegenden Arbeit ganz allgemein der Beweis

geführt, daß wenn der Modulkörper $M(Y)$ einer nichtsingulären projektiven Kurve Y eine endlich erzeugte Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist, es eine über $M(Y)$ definierte Kurve C gibt, so daß $Y(\mathbb{C})$ isomorph zu $C(\mathbb{C})$ ist.

Gehrt Hartjen

Variational Calculus and Conservation Laws with Maple

One of the basic symmetry results in mathematical physics is Emmy Noether's celebrated theorem establishing a correspondence between the symmetries of a variational problem and its conservation laws. For instance, homogeneity in time yields conservation of energy, homogeneity of space leads to conservation of linear momentum and isotropy of the system implies conserved angular momentum; the Kepler laws can be deduced in a similar way.

To compute these conservation laws explicitly for any variational symmetries (also generalized Bessel-Hagen symmetries), one has to make use of so-called higher Euler operators and thus define homotopy operators, which can be used to compute an inverse for the divergence of a current. The theory on these complex and hard-to-use tools was developed just in the last two decades by P.J. Olver and others.

To make these theories accessible for practical computation, their concepts and operators have been implemented in the computer algebra system Maple, as a part of the package `jets`. As the name of the package already indicates, we have used the jet notation to describe differential expressions as elements of the jet space.

On the basis of these implementations, we are now able to compute the conservation laws of a given variational problem explicitly, which will be demonstrated in two examples: First, we are going to discuss conservation laws in elastostatics on a two-dimensional elastic body, leading to Eshelby's energy momentum tensor and as a by-product several divergence identities. Then, we are going to discuss the symmetries (up to third order) of the three-dimensional wave equation and give a complete set of its 94 conservation laws. Similar results have been computed for the four-dimensional wave equation.

Furthermore, we are able to determine all independent second and third order symmetries of the three- and four-dimensional wave equation generated by successive products of recursion operators, verifying and correcting results of Nikitin and others.

Andreas Hirn

Ein Amalgam für das Monster

Sei G eine Gruppe, die von zwei echten Untergruppen P_1 und P_2 erzeugt wird, so daß kein nichttrivialer Normalteiler von G in dem Durchschnitt B von P_1 und P_2 liegt. Eine solche Gruppe G nennt man ein Amalgam vom Rang 2. Unter weiteren lokalen gruppentheoretischen Voraussetzungen an P_1 , P_2 und B wird in dieser Arbeit mit Hilfe der sogenannten Amalgam-Methode explizit die Struktur des größten 5-Normalteilers von P_1 bzw. P_2 , sowie die Operation der P_i darauf bestimmt.

Bei der Amalgam-Methode konzentriert man sich auf die lokale Struktur der Gruppe, anhand welcher man allgemeine Aussagen über die globale Struktur zeigen möchte. Dieser Ansatz hat sich als extrem nützlich erwiesen, und die Amalgam-Methode ist von grundlegender Bedeutung für die Revision des Beweises der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.

Motiviert wird die spezielle Wahl der Voraussetzungen an P_1 , P_2 und B durch die Tatsache, daß die größte sporadische einfache Gruppe, das Monster, diese erfüllt. Die vorliegende Arbeit ist ein Ansatzpunkt für eine Charakterisierung des Monsters als Rang 2-Amalgam in Charakteristik 5, welche von Interesse für die Revision der Klassifikation sein könnte.

Daniela Hobst

Generalisierte R-Matrizen für Kategorien verflochtener Moduln

Eine Hopfalgebra ist eine Algebra, für deren Darstellungen ein Tensorprodukt definiert ist, das im allgemeinen assoziativ aber nicht kommutativ ist. Als zusätzliche Struktur ist daher eine sog. R-Matrix von Interesse, bei der es sich um ein Element in der zweiten Tensorpotenz der Hopfalgebra handelt, das einen Isomorphismus zwischen den beiden Möglichkeiten $X \otimes Y$ bzw. $Y \otimes X$ für das Tensorprodukt zweier Moduln X, Y induziert.

Hopfalgebren, die eine solche R-Matrix besitzen, heißen quasitriangulär. Zu dem soeben beschriebenen Sachverhalt sagt man kurz, daß die Moduln über einer quasitriangulären Hopfalgebra eine verzopfte monoidale Kategorie bilden.

In dieser Arbeit untersuchen wir solche Strukturen und Vertauschungsgesetze für die Kategorie der verflochtenen Moduln $\mathcal{M}_A^C(\psi)$. Ihre Objekte sind zugleich Moduln über einer Algebra A und Komoduln über einer Koalgebra C , wobei die beiden Strukturen auf eine durch die sog. Verflechtung $\psi : C \otimes A \rightarrow A \otimes C$ festgelegte Weise miteinander kompatibel sind. Dieses Konzept schließt sowohl die oben beschriebene Situation, als auch die Kategorien der Hopfmoduln, Doi-Koppinen-Moduln und Yetter-Drinfeld-Moduln ein.

Wir zeigen, welche Gestalt Tensorprodukte in diesen Kategorien besitzen

und beweisen, daß Verzopfungen auf eindeutig bestimmte Weise durch Morphismen $r : C \otimes C \rightarrow A \otimes A$ beschrieben werden, die die Axiome einer R-Matrix verallgemeinern. Für eine beliebige verzopfte monoidale Kategorie verflochtener Moduln konstruieren wir mit Hilfe ihres R-Morphismus eine quasitrianguläre Hopfalgebrastruktur auf $\text{Hom}(C, A)$ und erhalten so eine verzopfte monoidale Kategorienäquivalenz

$$\mathcal{M}_A^C(\psi) \cong \mathcal{M}_{\text{Hom}(C, A)} .$$

Unter Einbeziehung dieser neuen Resultate behandeln wir den Satz von Yetter über Darstellungen verzopfter monoidaler Kategorien und studieren Äquivalenzen zwischen Kategorien verflochtener Moduln unter dem Aspekt, ob und auf welche Weise Tensorprodukte und Verzopfungen dabei erhalten bzw. induziert werden. Als Ergebnis unserer Betrachtungen erhalten wir den Satz von Radford über Bialgebren mit einer Projektion.

Tobias Horn Modulformen zur unitären Gruppe

Die Arbeit beschäftigt sich im wesentlichen mit den Grundlagen der Theorie der Modulformen zur unitären Gruppe $U(1, n)$ und der Geometrie des Quotienten $\mathbb{B}_n/\Gamma$, wobei $\mathbb{B}_n := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \sum |z_i|^2 < 1\}$ die gewöhnliche Einheitskugel und $\Gamma \subset U(1, n)$ eine arithmetische Untergruppe ist.

Die Theorie der Modulformen zur unitären Gruppe stellt eine Verallgemeinerung der Theorie elliptischer Modulformen dar.

Von Interesse sind insbesondere Techniken wie die Koordinatisierung des Vektorraums, die daraus entstehende verallgemeinerte obere Halbebene, und damit verbundenen die Fourierentwicklung von Modulformen in den Spitzen. Ebenso wurden weitere Ergebnisse zur Theorie der unitären Modulformen (R.-P. Holzapfel, G. Shimura und H. Zeltinger) zusammengestellt. Aus diesen Überlegungen ergibt sich zum Beispiel die Endlichkeit der Dimension des Raums der Modulformen.

Steffen Kläre Über eine Klasse linearer stochastischer Differentialgleichungen ohne Adaptiertheitsforderungen

Wir betrachten die folgende Verallgemeinerung der zur geometrischen Brownschen Bewegung assoziierten stochastischen Differentialgleichung:

$$dZ_t = h_t Z_t dB_t + m_t Z_t dt, \tag{1}$$

wobei (B_t) eine Brownsche Bewegung sei. Von besonderen Interesse sind dabei nicht adaptierte Prozesse (Z_t) . In diesem Fall sind die klassischen Lösungsmethoden via Itô-Integral nicht mehr anwendbar und die bislang gemachten Lösungsansätze sind zu abstrakt.

Wir verallgemeinern den Ansatz, indem wir statt des Itô-Integrals das Skorohod-Integral verwenden. Auf dem Wieneraum hat das Skorohod-Integral eine sehr komplizierte Gestalt. Durch den Übergang zum Fockraum erreichen wir eine elementare Darstellung.

Diesen Umstand nutzend, demonstrieren wir anhand von Gleichung 1 eine Methode zur Lösung nicht adaptierter Gleichungen. Wir werden dabei zunächst die eindeutig bestimmte Lösung vorstellen und anhand von Beispielen die Möglichkeiten der Methode demonstrieren. Dazu werden wir zunächst eine geschlossene Lösung bestimmen, welche über den Fockraum hinausgeht. Danach wird anhand von Beispielen den Übertrag der Lösung in den Wieneraum demonstriert.

Michael Knödler

Coleman-Automorphismen von einfachen Gruppen

Unter einem Coleman-Automorphismus einer Gruppe versteht man einen Automorphismus, der eingeschränkt auf Sylow-Untergruppen wie ein innerer Automorphismus der Gruppe operiert. Man nennt sie deswegen auch sylowzentralisierende Automorphismen.

Bei der Untersuchung des Normalisator-Problems ganzzahliger Gruppenringe ist die Betrachtung der Coleman-Automorphismen hilfreich. Man will wissen für welche Gruppen die Coleman-Automorphismen mit den inneren Automorphismen übereinstimmen, denn in diesem Fall besitzt das Normalisatorproblem ganzzahliger Gruppenringe bereits eine positive Antwort.

W. Kimmerle und M. Hertweck zeigten für einfache Gruppen, dass die Coleman-Automorphismen inner sind. Sie verwendeten dazu zunächst Darstellungstheoretische Resultate von P. Schmid und J. E. Humphreys, um zu zeigen, dass Coleman-Automorphismen für einfache Gruppen vom Lie-Typ klassenbewahrend sind. Daraus folgt dann das Ergebnis mit einem Satz von W. Feit und G. M. Seitz.

Ziel und Aufgabe meiner Diplomarbeit war es, dies für die minimal einfachen Gruppen direkt zu zeigen.

Für die linearen Gruppen $SL(n, q)$ sowie $GL(2, q)$ wurde ebenfalls gezeigt, dass die Coleman-Automorphismen innere Automorphismen sind.

Weiter wurde beschrieben wie man mit Hilfe von Spektraltafeln überprüfen kann, ob eine Gruppe Coleman-Automorphismen besitzt, welche nicht innere Automorphismen sind. Dies wurde dann dazu verwendet, um das Ergebnis auch für die sporadisch einfachen Gruppen nachzuweisen.

Zum Abschluss der Arbeit wurde die Problemstellung auf unendliche Gruppen übertragen. Da Sylowgruppen nur für endliche Gruppen definiert sind wurden sie durch die unipotenten Untergruppen ersetzt. Es wurden hierzu die beiden unendlichen Gruppen $SL_2(\mathbb{Q})$ und $SL_2(\mathbb{Z})$ untersucht.

Jörg Konopka

Ein sequentielles Neyman-Pearson-Lemma bei unabhängigen Versuchswiederholungen

Es werden zwei einfache Hypothesen $H_0 = \{P_{\vartheta_0}\}$, $H_1 = \{P_{\vartheta_1}\}$ bei unabhängigen Versuchswiederholungen getestet.

Dazu werden Tests z.N. $\alpha \in (0, 1)$ betrachtet, wobei die Beobachtungsanzahl apriori nicht feststeht, sondern in Abhängigkeit von den beobachteten Daten festgelegt wird (sequentielle Tests). Dieser sequentielle Aspekt wird dadurch berücksichtigt, dass unter einer dritten Verteilung P_η der erwartete Stichprobenumfang eine vorgegebene Schranke $\gamma \in (0, \infty)$ nicht überschreiten darf. Unter den genannten Nebenbedingungen soll die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art minimiert werden.

Die Lösung wird durch ein sequentielles Neyman-Pearson-Lemma geliefert, das sich ähnlich wie im klassischen Fall (bei festem Stichprobenumfang) aus drei Teilaussagen zusammensetzt: einer Existenzaussage sowie einer hinreichenden und einer notwendigen Bedingung für Optimalität.

Die Existenz optimaler Lösungen wird durch eine schwach-*-Folgenkompaktheitsaussage über die Menge der sequentiellen Tests garantiert. Hier kommen funktionalanalytische Hilfsmittel zum Einsatz. Dabei können allerdings optimale sequentielle Tests auftreten, die unter P_{ϑ_0} oder P_{ϑ_1} mit positiver Wahrscheinlichkeit nie stoppen, so dass auf ein Randomisieren im Unendlichen i.a. nicht verzichtet werden kann.

Zur Formulierung hinreichender und notwendiger Bedingungen für Optimalität werden Hilfsmittel aus der Theorie der konvexen Optimierung eingesetzt. Dem sequentiellen Testproblem wird eine duale Optimierungsaufgabe zugeordnet, die sich leichter lösen lässt und die über einen Dualitätssatz mit dem primalen Problem verbunden ist. Dabei zerfällt das sequentielle Testproblem in ein Entscheidungsproblem und ein Problem des optimalen Stoppens. Das optimale Entscheidungsverfahren besitzt zu jedem Stoppzeitpunkt dieselbe 0-1-Gestalt wie das beim klassischen Neyman-Pearson-Lemma. Beim Stoppproblem liegt eine Markov'sche Stoppsituation vor; es ist von ähnlicher Struktur wie das des modifizierten Kiefer-Weiss-Problems.

Abschließend sei erwähnt, dass durch dies sequentielle Neyman-Pearson-Lemma der Grundstein für die Untersuchung zusammengesetzter Hypothesen gelegt wurde.

Björn Kroll
On Heisenberg Groups in Characteristic p

Im Vortrag geht es um den Begriff der Heisenberg-Gruppen. Dabei verstehen wir unter einer Heisenberg-Sequenz eine kurze exakte Sequenz von (linear) algebraischen Gruppen der Form $0 \rightarrow G_a \rightarrow \mathcal{H}_{d+1} \rightarrow G_a^d \rightarrow 0$, die einen geometrischen Schnitt zulässt.¹ Die zugehörige Gruppe $\mathcal{H}_{d+1}$ heißt in diesem Fall Heisenberg-Gruppe.

Wir wollen der Frage nachgehen, wie man Heisenberg-Sequenzen klassifiziert. Das Problem wird auf das Berechnen der 2. Kohomologiegruppe $H^2(G_a, G_a^d)$ zurückgeführt.

Anschließend werden spezielle Heisenberg-Gruppen klassifiziert. Das sind im Einzelnen die abelschen Heisenberg-Gruppen, die „endlichen“ Heisenberg-Gruppen und die Heisenberg-Gruppen in $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$. Die Klassifizierung erfolgt mittels einer Aktion der Gruppe $\text{Aut}(G_a) \times \text{Aut}(G_a^d)$ auf der Menge aller Heisenberg-Sequenzen. Dabei entsprechen die Orbits gerade den Isomorphieklassen.

Abschliessend will ich kurz auf ein Beispiel von G. Martin-Cram aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen eingehen, bei dem eine spezielle Heisenberggruppe in $\text{char}(\mathbb{K}) = 2$ eine wesentliche Rolle spielt.

Lars Kühn
**Rekonstruktion von Gebieten aus Spektraldaten beim
Neumannschen Randwertproblem**

(Keinen Abstract eingesendet.)

Sebastian Leske
Lexsegment- und Gotzmannideale

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Eigenschaften bestimmter Ideale im Polynomring $S = k[x_1, \dots, x_n]$ über einem Körper k , nämlich mit Lexsegmentidealen und Gotzmannidealen (einer Verallgemeinerung der Lexsegmentideale). Insbesondere beweise ich, dass der Schatten eines Lexsegmentes minimal ist und folgere daraus, dass Lexsegmentideale eine minimale Hilbert-Funktion haben, ich zeige, dass die Betti-Zahlen von Lexsegmentidealen maximal sind, und beweise einige Eigenschaften von Gotzmannidealen, unter anderem den Beständigkeitssatz.

In Kapitel 1 führe ich einige grundlegende Begriffe ein, so wie (stark) stabile Ideale, monomiale Ordnungen, Lexsegmentideale und den Schatten

¹Die Gruppe G_a sei dabei die additive Gruppe des Grundkörpers.

einer Monommengenge. Außerdem leite ich eine Formel für die Länge des Schattens eines Lexsegmentes her und mache einige Bemerkungen zur Hilbert-Funktion eines homogenen Ideals.

In Kapitel 2 beweise ich, dass in gegebenem Grad der Schatten eines Lexsegmentes minimal ist unter den Schatten aller Monommengengen gleicher Länge. Zuerst beweise ich, dass der Schatten nicht länger ist als der Schatten einer beliebigen stark stabilen Monommengenge gleicher Länge, dann folgere ich mit Hilfe des generischen Initialideals den allgemeinen Fall. Zusätzlich beweise ich eine quadratfreie Variante dieser Aussage. Aus der Minimalität des Schattens eines Lexsegmentes folgere ich mit elementaren Methoden den Satz von Macaulay, der die möglichen Hilbertfunktionen eines Ideals charakterisiert.

In Kapitel 3 zeige ich, dass unter allen monomialen Idealen mit gleicher Hilbert-Funktion das Lexsegmentideal die größten Betti-Zahlen hat. Zum Beweis verwende ich, neben Ergebnissen aus Kapitel 2, die Koszulhomologie und speziell eine Auflösung nach Eliahou-Kervaire, sowie wieder das generische Initialideal.

In Kapitel 4 schließlich betrachte ich Ideale mit minimaler Hilbertfunktion, die Gotzmannideale. Ich beweise, dass sich die Minimalität der Hilbertfunktion für ein im Grad d erzeugtes homogenes Ideal bereits anhand der Werte der Hilbertfunktion für d und $d+1$ entscheiden lässt (Beständigkeitssatz von Gotzmann). Anschließend versuche ich eine Klassifikation der Gotzmannideale.

Sebastian Maaß

Superlineare Funktionale als Verallgemeinerung exakter kooperativer Spiele

In der Nutzen-, Risiko- und Entscheidungstheorie werden verschiedene Klassen von Funktionalen und Mengenfunktionen (nicht-additive Maße) verwandt, um verschiedene Arten von Risiko und Unsicherheit zu modellieren. Es zeigen sich auffallende Ähnlichkeiten in ihrer Struktur, ihrer Verwendungsweise und den erzielten Ergebnissen. In diesem Artikel untersuchen wir zwei Klassen von Funktionalen, welche auf beliebigen nicht-leeren Teilmengen des Banachraums der beschränkten reellwertigen Funktionen auf einer Menge Ω , $B(2^\Omega)$, definiert sind. Die Klasse der exakten Funktionalen umfasst wichtige, in den oben genannten Theorien betrachtete Mengenfunktionen und Funktionale, insbesondere die

- exakten kooperativen Spiele,
- coherent lower previsions,

- coherent risk measures,
- max-min expected utility.

Die Klasse der exaktifizierbaren Funktionele umfasst die Klassen der

- ausgewogenen kooperativen Spiele,
- lower previsions avoiding sure loss.

Methoden und Ergebnisse dieser verschiedenen Theorien erscheinen in einer allgemeineren Form, wir arbeiten Beziehungen zwischen diesen Theorien heraus und präsentieren einige neue Ergebnisse. Es stellt sich heraus, dass Strukturannahmen bezüglich des Definitionsbereichs in den oben genannten Theorien (z.B., dass der Definitionsbereich als eine Algebra oder ein Vektorraum vorausgesetzt wird) mathematisch nicht notwendige Einschränkungen in den Definitionen der Klassen darstellen.

Wir untersuchen die exakten und exaktifizierbaren Funktionele hauptsächlich mit funktionalanalytischen Methoden, indem wir beide jeweils durch eine Norm (welche - den Sprachgebrauch der kooperativen Spieltheorie übernehmend - trotz der fehlenden Eigenschaft der negativen Homogenität als solche bezeichnet wird) charakterisieren und Methoden der Analyse normierter Vektorräume auf diese Klassen übertragen werden. Der Artikel ist wie folgt organisiert: In Abschnitt 2 werden exakte und exaktifizierbare Funktionele definiert und jeweils durch eine Norm charakterisiert. Für exakte Funktionele präsentieren wir einen Fortsetzungssatz ähnlich dem Satz von Hahn-Banach und eine Konstruktionsmethode für exakte Funktionele. Beziehungen zu den oben genannten Theorien werden in Abschnitt 3 herausgestellt. Wir zeigen, dass sich exakte Funktionele auch als eine Verallgemeinerung superadditiver Choquet-Integrale interpretieren lassen. Im zentralen Abschnitt 4 werden exakte und exaktifizierbare Funktionele mit funktionalanalytischen Methoden untersucht. Der aus der kooperativen Spieltheorie bekannte Core wird für Funktionele definiert und dient zugleich als Basis für eine Analyse mit maß- und integrationstheoretischen Methoden. In dem Spezialfall exakter Choquet-Integrale ergibt sich ein interessanter Zusammenhang zwischen dem Core des Integrals und dem der zugehörigen Mengenfunktion. Schliesslich zeigen wir, dass analog zur kooperativen Spieltheorie die Stetigkeit exakter Funktionele derjenigen der Elemente ihres Cores entsprechen.

Matthias Mann

**Eine neue untere Schranke für die chromatische Zahl
des $\mathbb{Q}^n$**

Ein Graph $U_n = (V, E)$ mit $V \subseteq \mathbb{Q}^n$ und $(v, w) \in E \Leftrightarrow d_e(v, w) = 1$, wobei $d_e(\cdot, \cdot)$ den Euklidischen Abstand bezeichne, heisst unidistanter Graph im $\mathbb{Q}^n$. $\chi(G)$ bezeichne die chromatische Zahl des Graphen $G = (V, E)$, d.h. die kleinste Anzahl von Farben, die notwendig und hinreichend sind, um G so zu färben, dass benachbarte Ecken unterschiedliche Farben bekommen. Der unidistante Graph $(\mathbb{Q}^n, 1) = (V, E)$ bezeichnet den (unendlich großen) unidistanten Graphen mit $V = \mathbb{Q}^n$ und $(v, w) \in E \Leftrightarrow d_e(v, w) = 1$. Die chromatische Zahl dieses Graphen wird auch chromatische Zahl des $\mathbb{Q}^n$ genannt. 1989 fand KIRAN B. CHILAKAMARRI [1] einen unidistanten Graphen U_5 mit $\chi(U_5) = 6$. Daraus folgerte er $\chi((\mathbb{Q}^5, 1)) \geq 6$. In dieser Arbeit wird ein unidistanter Graph M im $\mathbb{Q}^n$ mit $\chi(M) = 7$, der das zehn Jahre alte Ergebnis von CHILAKAMARRI verbessert. Mit Hilfe der hier entwickelten Methode konnten noch weitere neue Ergebnisse erzielt werden, die das Theorem von JOSEPH ZAKS [2] verbessern.

Bibliographie

1. KIRAN B. CHILAKAMARRI: ‘On the chromatic number of rational five-space’, Aequationes Mathematicae 39, 1990, S. 146 - 148
2. JOSEPH ZAKS: ‘On the chromatic number of some rational spaces’, Ars Combinatoria 33, 1992, S. 253 - 256

Christian Meyer

Die L -Reihen einiger symmetrischer Quintiken

Der Beweis der Fermatschen Vermutung hat großes Aufsehen selbst in der nichtmathematischen Öffentlichkeit erregt. Entscheidend dabei war der Nachweis der Taniyama-Shimura-Vermutung über die Modularität elliptischer Kurven, d.h. den Zusammenhang zwischen der Anzahl von Punkten auf Kurven über endlichen Körpern und modularen Formen. Gegenstand der aktuellen Forschung ist die Ausweitung der Vermutung auf kompliziertere Varietäten, Calabi-Yau-Varietäten genannt. Wir untersuchen eine Familie von Quintiken im 4-dimensionalen projektiven Raum und beweisen für einige Mitglieder tatsächlich die Modularität, für andere können wir gut begründete Vermutungen anstellen. Dazu sind die Singularitäten aufzulösen, Punkte über endlichen Körpern zu zählen und nach der richtigen L -Reihe zu suchen. Für den Modularitätsbeweis verwenden wir einen Satz von Serre und Livné, der mit einem berühmten Endlichkeitsargument von Faltings in Verbindung steht.

Holger Rauhut

Ein Unschärfeprinzip für periodische Funktionen

Die Fourieranalysis spielt heutzutage vor allem in der Signalanalyse eine tragende Rolle. Neuere Ansätze zielen darauf ab, Funktionensysteme anzugeben, die gute Zeit- und Frequenzlokalisationseigenschaften besitzen. Von grundlegender Bedeutung sind dabei Unschärfeprinzipien. Diese besagen, daß die Zeit- und Frequenzlokalisation von solchen Funktionen nicht gleichzeitig beliebig gut sein können.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit einem Unschärfeprinzip für periodische Funktionen, das 1983 von dem Physiker Breitenberger eingeführt wurde.

Der erste Teil widmet sich der Beziehung zwischen diesem Unschärfeprinzip und dem klassischen Unschärfeprinzip von Heisenberg für quadratintegrierbare Funktionen auf der reellen Achse. Es wird zunächst dargestellt, wie sich beide Prinzipien aus einem allgemeinen Ansatz für (möglicherweise unbeschränkte) selbstadjungierte oder normale Operatoren in einem Hilbertraum ableiten lassen.

Mittels Periodisierung oder Verwendung von Abtastwerten als Fourierkoeffizienten läßt sich aus einer Funktion auf der reellen Achse eine periodische Funktion konstruieren. Es stellt sich die Frage, wie sich die jeweiligen Unschärfeprinzipien dieser beiden Funktionen zueinander verhalten. In der Tat kann eine asymptotische Beziehung hergestellt werden. Hierfür definiert man zu einer Funktion f auf der reellen Achse und einem Parameter $a > 0$ die beiden 2π -periodischen Funktionen

$$f_a^{per}(t) = \sqrt{a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(a(t + 2\pi k)), \quad (2)$$

$$f_a^{sam}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{a}\right) e^{ikt}. \quad (3)$$

Es wird gezeigt, daß unter gewissen Glattheits- und Abklingbedingungen an f die Breitenbergerschen Unschärfeprodukte $U_{2\pi}(f_a^{per})$ und $U_{2\pi}(f_a^{sam})$ gegen das Heisenbergsche Unschärfeprodukt $U_{\mathbb{R}}(f)$ konvergieren, wenn a gegen unendlich strebt.

Im zweiten Teil dieser Arbeit wird das Problem behandelt, die Winkelvarianz - das Zeitlokalisationsmaß des Breitenbergerschen Unschärfeprinzips - in gewissen Räumen von trigonometrischen Polynomen zu minimieren. Einmal wird dabei $\mathbb{T}_n$ betrachtet, der Raum aller trigonometrischen Polynome vom Grad höchstens n , und außerdem der Raum $\mathbb{T}_m^n = \mathbb{T}_n \ominus \mathbb{T}_{m-1}$, welcher bei der Konstruktion von Wavelets eine Rolle spielen wird. Die resultierenden

Optimalpolynome können explizit angegeben werden,

$$\sigma_n(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n+2} \cos kt, \quad (4)$$

$$\sigma_m^n(t) = 2 \sum_{k=m}^n \sin \frac{(k-m+1)\pi}{n-m+2} \cos kt. \quad (5)$$

Aufgrund der guten Zeitlokalisation stellt sich die approximationstheoretische Frage, wie sich $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ als Faltungskern verhält. Tatsächlich konvergiert $\sigma_n * f$ gegen f für alle $f \in C_{2\pi}, L_{2\pi}^p, 1 \leq p < \infty$, falls $n \rightarrow \infty$. Eine vollständige Charakterisierung des Approximationsverhaltens wird in einem Theorem angegeben.

Als nächstes wird der Frage nachgegangen, ob sich die Polynome σ_n und σ_m^n auch in der Wavelet-Theorie einsetzen lassen. Die Motivation hierfür ist natürlich ihre gute Zeit-Frequenz-Lokalisation, wobei sich eine gute Frequenzlokalisation damit begründen läßt, daß bei einem trigonometrischen Polynom nur endlich viele Frequenzen auftreten. Es stellt sich heraus, daß wir in der Tat zeitoptimale Skalierungsfunktion, Wavelets und Wavelet-Packets konstruieren können. Allerdings ergibt sich bei Untersuchung der Riesz-Stabilität überraschenderweise ein Phänomen, das in gewisser Hinsicht mit dem Satz von Balian-Low verwandt ist. Und zwar ist es unmöglich eine Schauderbasis von $L_{2\pi}^2$ aus zeitoptimalen Polynomen zu konstruieren, die überdies eine Riesz-Basis ist und bei der gleichzeitig das Unschärfeprodukt von allen Basisfunktionen gleichmäßig beschränkt ist. Leider sind beide Eigenschaften in der Signalanalyse erwünscht.

Der Wavelet- bzw. Wavelet-Packet-Ansatz mit den zeitoptimalen Polynomen kann auch als eine Zerlegung der Frequenzachse in verschiedene Bänder interpretiert werden. Allerdings ist es nicht möglich, diese Frequenzbänder völlig beliebig zu wählen. Das letzte Kapitel dieser Arbeit beschäftigt sich daher damit, diese Lücke in der Theorie zu schließen. Und zwar wird für eine völlig frei vorgegebene Unterteilung der Frequenzachse eine Schauderbasis von $L_{2\pi}^2$ aus zeitoptimalen Polynomen konstruiert, so daß jede Basisfunktionen genau in einem der Frequenzbänder enthalten ist. Das der Konstruktion zugrunde liegende Prinzip ist die Zusammenfassung von gewissen Wavelet-Packet-Räumen zu einem neuen Raum, für den dann eine geeignete Basis angegeben wird. Es stellt sich heraus, daß diese Basis genau dann eine Riesz-Basis ist, wenn die Breite der Frequenzbänder beschränkt ist. Damit kann auch diese Basis nicht gleichzeitig eine Riesz-Basis sein und ein gleichmäßig beschränktes Unschärfeprodukt für alle Basisfunktionen besitzen.

Phillip Rohde

Über Erweiterungen des Axioms der Determiniertheit

Es werden unendliche Spiele – sogenannte Zwei-Personen-Nullsummenspiele mit perfekter Information – betrachtet, die ein wichtiges Instrument der Deskriptiven Mengenlehre sind. Ein derartiges Spiel heißt determiniert, falls einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie besitzt. Determiniertheit ist letztendlich eine Regularitätseigenschaft von Mengen reeller Zahlen. Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man die Existenz eines nicht-determinierten Spiels zeigen. Ersetzt man in der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre **ZFC** das Auswahlaxiom durch die Forderung, daß alle derartigen Spiele determiniert sind (*Axiom der Determiniertheit* **AD**), dann erhält man eine „andersartige Mathematik“, die viele interessante Eigenschaften besitzt und in einigen Punkten eher unserer physikalischen Anschauung entspricht (Stichwort: Banach-Tarski-Paradox).

Der eigentliche Gegenstand der Arbeit sind Erweiterungen von **AD**. Zwei Parameter bieten sich hierfür an: die Komplexität der einzelnen Züge und die Dauer des gesamten Spiels, gemessen entlang der transfiniten Skala der Ordinalzahlen. Es werden Grenzen der entsprechenden Determiniertheitsaxiome und Abhängigkeiten untereinander betrachtet. Das Hauptergebnis ist eine erstaunlich einfache Klassifizierung der Determiniertheitsaxiome von Spielen auf wohlgeordneten Mengen: als Forderungen genügen das Axiom **AD** und das stärkere Axiom **AD**_ℝ. Daneben werden Fragen zur relativen Konsistenz der Axiome und zur Existenz konstruierbarer Modelle betrachtet und das Verhältnis von Determiniertheit zur Theorie der Großen Kardinalzahlen beleuchtet, deren Existenz als Maßstab für die Evidenz und Stärke von Theorien angesehen werden kann. Es stellt sich heraus, daß zwar **AD** im „kanonischen“ konstruierbaren Modell **L**(ℝ) erfüllt ist (unter bestimmten Voraussetzungen), nicht aber das stärkere Axiom **AD**_ℝ. Die exakte Grenze dazwischen motiviert die Einführung eines neuen Axioms **AD**⁺, das, ausgehend von dem Konzept der Suslin-Menge (Projektionen von Bäumen), formal die Forderung von **AD** verallgemeinert, so daß es dennoch schwächer als **AD**_ℝ bleibt und so daß **L**(ℝ) immer noch ein Modell dieses Axioms ist (unter bestimmten Voraussetzungen). Es ist ein offenes Problem, ob **AD**⁺ tatsächlich stärker als **AD** ist. **AD**⁺ kann man als den Versuch interpretieren, möglichst „schöne“ Eigenschaften von **L**(ℝ) unter der Annahme von **AD** einzufangen, ohne dabei das restriktive Verhalten von „**V** = **L**(ℝ)“ übernehmen zu müssen. Das Axiomensystem **ZF** + **AD**⁺ liefert dementsprechend den geeigneten Rahmen für eine Vielzahl tiefgreifender Theoreme.

Sebastian Rudert

Fastquadrate

Die Arbeit beschäftigt sich mit der Menge $\mathfrak{Z}_4 := \{ab : 1 \leq a \leq b \leq 4a\} \subseteq \mathbb{N}$, deren Elemente im folgenden *Fastquadrate* genannt werden.

Im Zentrum der Überlegungen steht die Untersuchung der Verteilung dieser Zahlenmenge in der Menge der natürlichen Zahlen, also die Abschätzung der Funktion

$$\mathfrak{z}(x) := \sum_{\substack{n \leq x \\ n \in \mathfrak{Z}_4}} 1.$$

Ein tiefliegender Satz von Tenenbaum liefert hier starke Resultate. Ihn außer acht lassend wird versucht, mit elementaren Mitteln Erkenntnisse über die (Struktur der) Menge $\mathfrak{Z}_4$ zu gewinnen. Insbesondere hoffen wir so Wege zu finden, aussagekräftige Methoden auf Fragestellungen über die Verteilung in polynomialen Folgen anwenden zu können.

Es werden dazu drei unabhängige Ansätze verfolgt. Zum einen werden Teilmengen von $\mathfrak{Z}_4$ explizit konstruiert, deren Verteilung als eine Folge des Primzahlsatzes und eines Satzes von Landau berechnet werden kann.

Zweitens werden kanonische Faktorisierungen von Fastquadraten untersucht. In Anlehnung an die Teilertheorie der natürlichen Zahlen wird die mittlere und eine untere Schranke für die maximale Zahl solcher Zerlegungen bestimmt. Das Studium von Faktorisierungen der Form $n = z_1 z_2$ mit $z_1, z_2 \in \mathfrak{Z}_4$, welches durch die algebraische Struktur der Menge $\mathfrak{Z}_4$ motiviert wird, liefert eine überraschend starke Abschätzung für die Funktion $\mathfrak{z}(x)$.

Der dritte Weg führt zu den Restemengen

$$R(n) := \{n \bmod \alpha : \tfrac{1}{2} \sqrt{n} \leq \alpha \leq \sqrt{n}\},$$

welche in naheliegender Weise mit der Menge $\mathfrak{Z}_4$ verbunden sind. Durch eine geeignete Partitionierung von $\mathbb{N}$ gelingt es, die Funktion $\mathfrak{z}(x)$ (bis auf Fehlerterme der Ordnung $O(\sqrt{x})$) mit Reihen von Mächtigkeiten solcher Restemengen zu identifizieren.

Abschließend wird die Verteilung der Menge aller Fastquadrate in quadratischen Progressionen untersucht. Es zeigt sich, dass diese Fragestellung mit elementaren Mitteln nur schwer angreifbar ist. Starke Resultate werden nur im einfacheren Falle reduzibler Folgen bewiesen; bei irreduziblen Folgen wird lediglich exemplarisch und heuristisch argumentiert.

Holger Schilling

No-arbitrage-Grenzen und statisches Hedging von Compound-Optionen

Das Thema dieser Arbeit ist das Absichern (engl. *Hedging*) von europäischen Compound-Optionen. Compound-Optionen sind Standard-Optionen mit einer anderen Standard-Option als Basiswert, die sich wiederum auf einen Basiswert wie z.B. Aktien, Rohstoffe oder Devisen bezieht. Statisches Hedging bedeutet, daß zur Absicherung einer Option ein Portfolio aufgebaut wird, das im Gegensatz zu den allgemein üblichen dynamischen

Hedge-Verfahren (‘Delta-Hedging’) nicht ständig umgeschichtet wird. In der Literatur findet man statische hedging-Strategien vor allem für Optionen mit Barrieren oder einer diskontinuierlichen Auszahlung beschrieben, die über dynamische Hedging-Strategien nur schwer abzusichern sind. Dabei wird versucht, die Auszahlungsstruktur dieser Optionen mit Hilfe von einfacheren Optionen nachzubilden.

Diese Arbeit diskutiert die bisher für Compound-Optionen vorgeschlagenen statischen Hedge-Verfahren und untersucht sie auf ‘Robustheit’. Zu diesem Zweck werden zunächst Bewertungsgrenzen für Compound-Optionen hergeleitet, d.h., es wird das Preisverhältnis zwischen Compound-Optionen und den ihnen zugrundeliegenden Standard-Optionen untersucht. Diese Bewertungsgrenzen beruhen allein auf einem Vergleich der Auszahlungsfunktionen der Optionen und sind daher unabhängig von der Preisentwicklung des Basiswertes. Daher gelten diese Preisschranken in jedem Marktmodell, in dem die Existenz risikoloser Gewinnmöglichkeiten (Arbitrage) ausgeschlossen ist. Die in dieser Arbeit bewiesenen Bewertungsgrenzen sind zum Teil enger, als man sie bisher in der Literatur findet.

Darüber hinaus wird ein Algorithmus zur Konstruktion einer neuen statischen Hedging-Strategie angegeben, bei der die Auszahlungsfunktion von Compound-Optionen *möglichst exakt* mit Hilfe von Standard-Optionen nachgebildet wird. Dabei wird das klassische Black-Scholes-Modell mit konstanter Volatilität und konstanten Zinsraten zugrundegelegt. Diese starken Voraussetzungen schmälern den praktischen Wert dieser neuen Hedging-Strategie, da sich zeigt, daß Wertveränderungen von Compound-Optionen aufgrund von Schwankungen in der Volatilität und in den Zinsraten damit *nicht* abgesichert werden. Allerdings werden in dieser Arbeit für diese Fälle Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Wertsensitivitäten von Compound-Optionen und dazugehörigem statischem Hedge-Portfolio hergeleitet. Diese Beziehungen verdeutlichen auch die Gefahren, die mit einigen der in der Literatur beschriebenen einfachen statischen Hedging-Strategien für Compound-Optionen verbunden sind.

Gabriela Schmithüsen

Die Aktion von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf der algebraischen Fundamentalgruppe von $\mathbb{P}^1$ ohne drei Punkte

Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht die absolute Galoisgruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ der Automorphismen auf dem algebraischen Abschluss der rationalen Zahlen. V. G. Drinfel’d bewies 1991, dass sich $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ in die Grothendieck-Teichmüller-Gruppe $\widehat{\text{GT}}$, eine Untergruppe von $\widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{F}_2'$, einbetten läßt. Dabei ist $\widehat{\mathbb{Z}}$ die proendliche Kompletterung der ganzen Zahlen und $\widehat{F}_2'$ die Kommutatorgruppe der proendlichen Kompletterung von F_2 , der freien Gruppe von

zwei Erzeugern. Grothendieck hatte bereits 1984 in seinem unveröffentlichten Manuskript „l’Esquisse d’un Programme“ die Fragestellung geäußert, ob die beiden Gruppen sogar isomorph seien. Dies konnte bis heute weder bestätigt noch widerlegt werden.

In dieser Arbeit (Diplomarbeit am Mathem. Inst. II der Univ. Karlsruhe) wird die Einbettung der absoluten Galoisgruppe $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ in $\widehat{\text{GT}}_0$, eine Untergruppe von $\widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{F}'_2$, die die Grothendieck-Teichmüller-Gruppe enthält, detailliert dargestellt.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die exakte Sequenz der Galoisgruppen

$$1 \rightarrow \text{Gal}(\Omega/\overline{\mathbb{Q}}(T)) \rightarrow \text{Gal}(\Omega/\mathbb{Q}(T)) \xrightarrow{\beta} \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow 1.$$

Dabei ist Ω die maximale abelsche Körpererweiterung von $\overline{\mathbb{Q}}(T)$. Es wird gezeigt, dass die Sequenz spaltet durch die Angabe eines Morphismus β' von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ nach $\text{Gal}(\Omega/\mathbb{Q}(T))$ mit $\beta \circ \beta' = \text{id}$. Somit operiert die absolute Galoisgruppe auf $\text{Gal}(\Omega/\overline{\mathbb{Q}}(T))$.

Diese Aktion wird geometrisch gedeutet:

Im $\mathbb{P}^1$ werden der tangentielle Basispunkt $0\vec{1}$ fest gewählt und die Fasern über $0\vec{1}$ auf normalen Belyikurven betrachtet. Diese entsprechen den gerichteten Kanten der nach der Grothendieck-Korrespondenz zu der Belyikurve zugehörigen Kinderzeichnung. Die algebraische Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{alg}}(X_4)$ ist der projektive Limes der Galoisgruppen $\text{Gal}(\overline{Y}/X_4)$, wobei $\overline{Y}$ die über $0\vec{1}$ punktierten normalen Belyikurven durchläuft. Es gilt:

$$\text{Gal}(\Omega/\overline{\mathbb{Q}}(T)) \cong \pi_1^{\text{alg}}(X_4) \cong \widehat{F}_2.$$

Die Menge der Fasern $\mathcal{F}_{0\vec{1}}(\overline{Y})$ auf einer normalen Belyikurve $\overline{Y}$ entspricht bijektiv der Menge $\mathcal{E}_{0\vec{1}}(\overline{Y})$ der Einbettungen über $\overline{\mathbb{Q}}(T)$ des Funktionenkörpers $\overline{\mathbb{Q}}(\overline{Y})$ in die in $0\vec{1}$ konvergenten Puiseux-Reihen. Die Funktoren $\mathcal{F}_{0\vec{1}}$ und $\mathcal{E}_{0\vec{1}}$ sind isomorph.

Die Elemente der algebraischen Fundamentalgruppe $\pi_1^{\text{alg}}(X_4)$ entsprechen den natürlichen Transformationen von $\mathcal{E}_{0\vec{1}}$ nach $\mathcal{E}_{0\vec{1}}$.

Mit Hilfe dieser Darstellungsweise wird die Aktion von $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ auf $\pi_1^{\text{alg}}(X_4)$ angegeben. Für die beiden Erzeuger x und y von F_2 werden die Bilder $\sigma \cdot x$ und $\sigma \cdot y$ berechnet und es wird gezeigt, dass diese nur von $\chi(\sigma)$ aus $\widehat{\mathbb{Z}}$ und f_σ aus $\widehat{F}'_2$ abhängen. Weiterhin wird bewiesen, dass $(\chi(\sigma), f_\sigma)$ sogar in $\widehat{\text{GT}}_0$ liegt und die Aktion treu ist. Das heißt, der Morphismus

$$\text{gt} : \text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}} \times \widehat{F}'_2, \sigma \mapsto (\chi(\sigma), f_\sigma)$$

ist injektiv. Somit ist $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ in $\widehat{\text{GT}}_0$.

Steffen Winter

Convergence points and divergence points of self-similar measures

In den letzten Jahrzehnten haben sich fraktale Dimensionen in vielen Bereichen der Mathematik, etwa in der Theorie der dynamischen Systeme und der Zahlentheorie, aber auch in den Naturwissenschaften als nützliches Werkzeug erwiesen. In den d -dimensionalen Raum $\mathbb{R}^d$ eingebettete Mengen sind häufig zu "dünn", um sie z.B. bezüglich des d -dimensionalen Lebesgue-Maßes messen, aber zu "dick", um sie in einen $(d - 1)$ -dimensionalen Raum einbetten zu können. Solchen Mengen, die oft als Fraktale bezeichnet werden, kann man häufig eine gebrochene Dimension zuordnen, bezüglich welcher sie mit einem geeigneten Maß gemessen werden können. Neben der praktisch schwer handhabbaren Hausdorff-Dimension, die zu jeder Dimension gleich das passende Hausdorff-Maß bereitstellt, werden viele andere Dimensionsbegriffe verwendet, z.B. Box-Dimensionen, Packungs-Dimensionen u.s.w..

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Dimensionsbegriffe für Mengen auf Maße zu übertragen. Naturwissenschaftler möchten häufig lokale Unterschiede in sehr inhomogenen Verteilungen beschreiben, wie zum Beispiel die räumlich-zeitliche Verteilung von Regen, die Verteilung von Galaxien im Universum oder die Energieverteilung in turbulenten Flüssigkeiten. Solche Verteilungen werden als Multifraktale bezeichnet. Es hat sich gezeigt, dass die lokale Dimension wichtige Informationen über solche Verteilungen oder Maße bereitstellt.

Sei μ ein endliches Maß in $\mathbb{R}^d$. Für Punkte $x \in \mathbb{R}^d$ sei $B(x, r)$ die Kugel mit Mittelpunkt x und Radius r und

$$\alpha = \alpha_\mu(x) = \lim_{r \searrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \quad (6)$$

die lokale Dimension des Maßes μ im Punkt x . Die lokale Dimension gibt an, dass sich das Maß kleiner Kugeln $\mu(B(x, r))$ ungefähr verhält wie r^α , wenn r gegen 0 strebt. Für homogene wenig variierende Maße, z.B. das Lebesgue-Maß, ist die lokale Dimension in allen Punkten gleich. Stärker variierende Maße haben verschiedene lokale Dimensionen und häufig gibt es dann sogar Punkte, in denen der Grenzwert in (6) nicht existiert, die lokale Dimension also gar nicht definiert ist. Es ist somit zwischen Konvergenzpunkten und Divergenzpunkten zu unterscheiden.

Für $\alpha > 0$ betrachte jeweils die Menge aller Konvergenzpunkte mit der lokalen Dimension α . Das multifraktale Spektrum f_μ des Maßes μ , definiert

durch

$$f_{\mu}(\alpha) = \dim\{x : \alpha_{\mu}(x) = \alpha\}, \quad (7)$$

gibt die Hausdorff-Dimension dieser Mengen an und codiert wichtige geometrische und dynamische Eigenschaften des Maßes μ .

Die exakte Berechnung von lokalen Dimensionen und multifraktalen Spektren ist eine schwierige Aufgabe, die bisher nur für wenige Klassen von Maßen bewältigt wurde. Selbstähnliche Maße gehören aufgrund ihrer leicht zu beschreibenden lokalen Struktur zu den einfachsten Beispielen. Für selbstähnliche Maße, die die Open-Set-Condition (OSC) erfüllen, ist das Spektrum 1992 von R. Cawley und R. D. Mauldin (Adv. in Math.) berechnet worden. Der erste Teil der Arbeit vollzieht ihre Berechnungen nach. Doch selbst bei dieser einfachen Klasse von Maßen ist damit die lokale Struktur noch nicht vollständig beschrieben. Erst vor kurzem konnte von L. Barreira und J. Schmeling (Israel J. Math.) gezeigt werden, dass die Menge der Punkte, für welche die lokale Dimension nicht existiert, typischerweise dieselbe Hausdorff-Dimension besitzt wie die Menge der Punkte mit lokaler Dimension. Die Menge der Divergenzpunkte ist somit genauso "dick" wie die Menge der Konvergenzpunkte und sollte für gewisse Betrachtungen nicht gänzlich vernachlässigt werden.

Die Arbeit enthält eine Untersuchung der Menge der Divergenzpunkte. Statt des Grenzwerts wird für Divergenzpunkte die Menge der Häufungspunkte des Quotienten $\log \mu(B(x, r)) / \log r$, wenn r gegen 0 strebt, als Zerlegungskriterium verwendet. Die Bestimmung der Hausdorff-Dimension der entstehenden Mengen stellt eine natürliche Verallgemeinerung des multifraktalen Spektrums dar. Dazu wird ein Konzept normaler und nicht-normaler Punkte selbstähnlicher Mengen eingeführt, das die Begriffe normale und nicht-normale Zahl erweitert. Es wird eine vollständige Klassifikation normaler und nicht-normaler Punkte gegeben, die als spezielle Anwendung die Klassifikation der Divergenzpunkte ermöglicht.

Die vorliegenden Ergebnisse beziehen sich größtenteils auf das symbolische multifraktale Spektrum, welches für Konvergenzpunkte äquivalent zum oben definierten (geometrischen) multifraktalen Spektrum ist. Für Divergenzpunkte ist diese Äquivalenz bisher nicht vollständig verifiziert. Die gewählte Formulierung berücksichtigt nur Maße, für die die Strong-Separation-Condition (SSC) erfüllt ist. Die meisten Resultate lassen sich aber auf Maße, die die OSC erfüllen, verallgemeinern.

Jens Wirth
Zum Lösbarkeitsverhalten einer Klasse nichtlinearer
Wellengleichungen

Ich beschäftige mich mit der Untersuchung semilinearer Modifikationen der Wellengleichung

$$\square u = f(t, x, u, u'),$$

und dem zugeordneten Cauchy-Problem für den Halbraum. Allen diesen Problemen ist gemein, daß zumindest lokal um die Cauchy-Ebene glatte Lösungen existieren und für diese Lösungen eine dem linearen Fall entsprechende Abhängigkeitsgebietsrelation gilt, die Lösung also in Gebieten mit geeigneter Geometrie eindeutig bestimmt sind.

Es ist ganz natürlich diese eindeutige lokale Lösung maximal fortzusetzen. Existiert diese maximale Lösung auf dem gesamten Halbraum, so spricht man von globaler Existenz der Lösung. Dies ist typischerweise für in u und u' lineare f der Fall. Für echt nichtlineare f tritt häufig ein *blow-up* auf, d.h. die Lösung u entwickelt Singularitäten. Für unser semilineares Problem bedeutet dies, daß u bzw. u' unbeschränkt werden, und somit die Lösung nicht mehr weiter glatt / stetig fortgesetzt werden kann.

Von besonderem Interesse ist die Frage, inwiefern man durch Wahl kleiner Daten die globale Existenz der Lösung garantieren kann. Dazu nehmen wir an, daß die Nulllösung global existiert, d.h. daß

$$f(t, x, 0, 0) = 0$$

gilt. Unter gewissen Bedingungen an die rechte Seite kann man dann garantieren, daß kleine Daten auf jedem Zeit-Level klein bleiben. Dies ist zum Beispiel für

$$f(t, x, u, u') \sim |u|^p, \quad p > 1 + \sqrt{2}$$

im $\mathbb{R}^3$ der Fall (F. John, 1979) oder für

$$f(t, x, u, u') \sim |u'|^p, \quad p > 2.$$

Quadratische Terme in u' sind kritisch. Für $\square u = u_t^2$ ist die Nulllösung die einzige global existente Lösung, deren Cauchy-Daten kompakten Träger hat (F. John, 1981). Andererseits existieren für

$$f(t, x, u, u') = u_t^2 - (\nabla_x u)^2$$

Lösungen zu kleinen Daten global (S. Klainermann, 1983).

Das Ziel meiner Diplomarbeit war, dieses Ergebnis auf zeitabhängige Terme auszudehnen. Ganz konkret betrachte ich das Cauchy-Problem zu

$$u_{tt} - a^2(t)\Delta u = u_t^2 - a^2(t)(\nabla_x u)^2.$$

Kürzlich wurde gezeigt, daß für positives, nichtkonstantes und periodisches $a = a(t)$ beliebig kleine Daten existieren, so daß die zugehörige Lösung in

endlicher Zeit gegen Unendlich strebt (K. Yagdjian, 2001). Ich werde Beispiele für wachsende und fallende $a = a(t)$ skizzieren, für die man mittels der Theorie spezieller Funktionen das Lösungsverhalten dieser Cauchy-Probleme diskutieren kann. Darüberhinaus kann für eine große Klasse von Koeffizientenfunktionen, sogenannten schwach oszillierenden Koeffizienten, ein globales Existenzresultat bewiesen werden.

Auch dieses Cauchy-Problem läßt sich durch eine Koordinatentransformation auf die anfangs diskutierte Gestalt bringen, diesmal allerdings mit einem echt t -abhängigen f .

Katharina Wittfeld Die Geometrie der Korrespondenzanalyse

(Keinen Abstract eingendet.)

Andreas Zeiser Modellierung, Stabilitätsanalyse und Simulation für isothermes Fiber Spinning

In dieser Arbeit wird die Dynamik des Fiber Spinnings für dünne Fäden und hohe Viskositäten untersucht. Ziel ist es

1. die grundlegenden Gleichungen herzuleiten,
2. die Stabilität der stationären Lösung anhand des linearisierten Systems zu untersuchen,
3. die Dynamik zu simulieren und
4. numerisch eine Hopf-Bifurkation zu zeigen.

Die Gleichungen des dynamischen Systems (Navier-Stokes- und Kontinuitätsgleichung) werden durch einen Potenzreihenansatz vereinfacht. Es wird analytisch gezeigt, dass dieses System genau eine stationäre Lösung besitzt. Die Stabilität der Lösung wird numerisch untersucht. Dazu wird das System linearisiert und die Eigenfunktionen nach Tschebyschoff Polynomen entwickelt. Das verallgemeinerte Eigenwertproblem wird dann numerisch gelöst. Um das diskretisierte Problem zu lösen, werden 3 Methoden betrachtet und numerisch getestet. Am Ende wird durch das Auftreten eines periodischen Orbits eine Hopfbifurkation nachgewiesen und dessen Frequenz bestimmt.