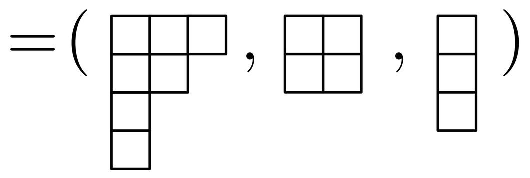
# Représentations des groupes de réflexions et des groupes quantiques

Thomas Gerber, LMPT
thomas.gerber@lmpt.univ-tours.fr

OBJECTIF : Comprendre les représentations de certains groupes de réflexions via leur algèbre de Hecke, en utilisant une approche combinatoire (multipartitions), et en établissant un lien avec des représentations particulières de groupes quantiques.

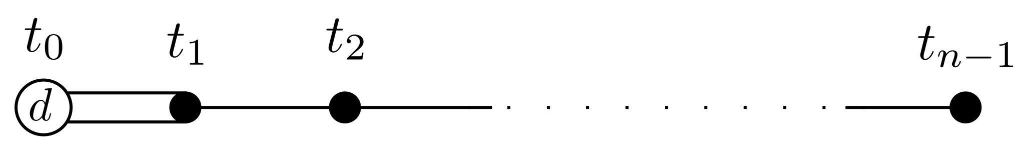
## Les $d$-partitions de $n$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Une $d$-partition de $n$ est une suite $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ où chaque $\lambda_i$ est une suite décroissante d'entiers naturels, de somme totale $n$.

Exemple : $\lambda = ((3,2,1,1),(2,2),(1,1,1)) =$  est une 3-partition de 14.

## L'algèbre de Hecke $H$ de $G(d,1,n)$

$G(d,1,n) = (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$ a une présentation de type Coxeter :




Exemple : pour $d=1$, on retrouve le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$.
pour $d=2$, c'est le groupe des permutations signées.

$H$ = déformation de $G(d,1,n)$ par des paramètres $q, Q_1, \dots, Q_d$.

## Groupes quantiques et espaces de Fock

$U_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$ = $v$-déformation de l'algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{sl}_e}$.

Pour tout $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^d$, on définit $F_{\mathbf{s}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{\lambda \vdash_d n} \mathbb{C}(v).\lambda$.

- $F_{\mathbf{s}}$ est une représentation de $U_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e})$.
- La sous-représentation $V(\mathbf{s}) = U_v(\widehat{\mathfrak{sl}_e}).\emptyset$ a des propriétés intéressantes.

## La matrice de décomposition

Lorsqu'il existe $e \in \mathbb{N}_{>1}$ et $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$ tels que $q = \exp(\frac{2i\pi}{e})$ et $Q_i = q^{s_i}$, on étudie une matrice $D_n$ qui "contrôle" les représentations de $H$.

- Lignes indexées par les $d$-partitions de $n$.
- Colonnes indexées par les $d$-partitions "d'Uglov" de $n$.
- Coefficients dans $\mathbb{N}$.

Exemple : la matrice de décomposition pour $d=1, e=2, n=5$

$$D_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Théorème d'Ariki

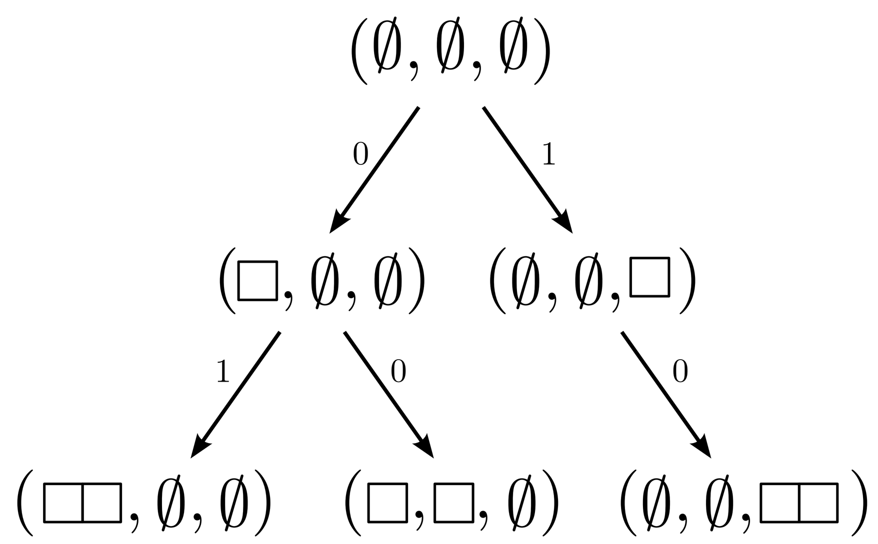
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $P_n(v)$ la sous-matrice de $P(v)$ indexée par les multipartitions de rang $n$.

$$D_n = P_n(1)$$

## Graphe cristallin et base canonique

1. $V(\mathbf{s})$ possède un "graphe cristallin", dont les sommets sont les $d$-partitions d'Uglov.
2. $V(\mathbf{s})$ possède une "base canonique", indexée par les $d$-partitions d'Uglov.

$P(v)$ = matrice de changement de bases.
$P(v)$ est à coefficients dans $\mathbb{N}(v)$.




Exemple : le début du graphe cristallin de $V(\mathbf{s})$ pour $d=3, \mathbf{s}=(0,0,1), e=2$

## QUESTIONS

Comment rendre $D_n$ unitriangulaire ?
Cela nécessite : - une paramétrisation convenable des colonnes,
- un ordre convenable.
Comment classifier les ordres convenables ?

En fait, $F_{\mathbf{s}}$ tout entier admet un graphe cristallin $G$.
Comment déterminer les "isomorphismes de cristaux", i.e. entre composantes connexes de $G$, en particulier entre une composante quelconque et celle de $V(\mathbf{s})$?